

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO
OBSERVATÓRIO NACIONAL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ASTRONOMIA



TESE DE DOUTORADO

RECONSTRUÇÃO NÃO PARAMÉTRICA DAS PERTURBAÇÕES COSMOLÓGICAS

JAVIER ERNESTO GONZÁLEZ SÁNCHEZ

RIO DE JANEIRO, 1 DE MARÇO DE 2018

Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação
Observatório Nacional
Programa de Pós-Graduação em Astronomia

Tese de Doutorado

Reconstrução Não Paramétrica das Perturbações Cosmológicas

Javier Ernesto González Sánchez

Tese apresentada ao Observatório Nacional do Rio de Janeiro como requisito para a aprovação do programa de doutorado em Astronomia.

Orientador: Prof. Jailson Souza de Alcaniz

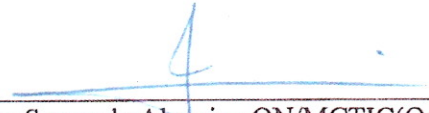
Rio de Janeiro, 1 de Março de 2018


"RECONSTRUÇÃO NÃO PARAMÉTRICA DAS PERTURBAÇÕES
COSMOLÓGICAS".

JAVIER ERNESTO GONZÁLEZ SÁNCHEZ

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ASTRONOMIA DO OBSERVATÓRIO NACIONAL COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ASTRONOMIA.

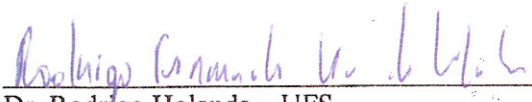
Aprovada por:


Dr. Jailson Souza de Alcaniz – ON/MCTIC (Orientador)


Dr. Armando Bartolome Bernui Leo – ON/MCTIC


Dr. Rudnei Ramos – UERJ


Dr. Ribamar Reis – IF/UFRJ


Dr. Rodrigo Holanda – UFS

RIO DE JANEIRO – BRASIL

26 DE FEVEREIRO DE 2018

À Grecia e ao Fernando,
os maiores guias do meu caminhar.

“Yuche vivía desde siempre, solo en el mundo. En compañía de las perdices, los pajuiles, los monos, y los grillos había visto envejecer la tierra. A través de ellos se daba cuenta de que el mundo vivía y de que la vida era tiempo y el tiempo... muerte.”

- Los tikunas pueblan la tierra -mito indígena colombiano-

“Un libro es una cosa entre las cosas, un volumen perdido entre los volúmenes que pueblan el indiferente universo; hasta que da con su lector, con el hombre [la mujer] destinado a sus símbolos.”

- Jorge Luis Borges

Agradecimentos

Para escrever estes agradecimentos refleti um pouco sobre o que vivi nos últimos anos. Algumas situações tinham relação direta com esta tese, outras simplesmente faziam parte do que é aprender a viver. No fim da aventura de fazer um doutorado no Brasil, quero agradecer a grande contribuição de todas aquelas pessoas que se encontraram comigo nesses tempos e espaços e, em especial, àquelas que vieram na minha mente ao escrever estas linhas. Assim, gostaria de agradecer

- Ao Jailson Alcaniz, quem merece toda minha admiração, respeito e gratidão como profissional e como pessoa. Por esses 6 anos de formação, de grato trabalho e de boa convivência;
- Ao Joel Carvalho, pelas discussões, os ensinamentos e a sua contribuição nesta tese;
- Ao Zhengxiang Li, pelas discussões, o aprendizado conjunto sobre reconstruções não paramétricas e a sua contribuição nesta tese;
- Ao Fernando e à Grecia, pelas palavras de encorajamento e os grandes ensinamentos, pelas suas visitas ao Rio e as nossas viagens revitalizantes, pela companhia constante, por isso e muito mais;
- À Natalia, minha irmã gêmea que nasceu anos antes e que não parece comigo tanto assim, pelos 28 anos de companhia, por ser meu apoio e por sempre acreditar em mim;
- À Maíra, pelos momentos vividos e o apoio recebido, pelos laços e a cumplicidade criados e, acima de tudo, pelos risos e sorrisos compartilhados;
- À minha avó Teresa, Miguel, Lourdes, Augusto, Javier, Juan Eduardo, Miranda e Consuelo, essa parte da minha família que sempre esteve presente e que me deu força quando foi necessário;

- Ao meu avô Miguel e à minha avó Luisa que, embora já tenham partido, fazem parte dos meus exemplos de vida e das minhas constantes lembranças;
- Aos meus grandes amigos e colegas do GCON, Rodrigo, Simony, Bitá, CheChani, Beto, Camila, Marcela, Gabriela, Carlos, Marcelo, Pedro, Antonella, Jailson, Armando, Joel, Edilson, Isaac, Uendert, Felipe, Satheeshkumar, Micol e Aldinêz, pelo ambiente de trabalho inigualável e porque a este grupo devo a minha formação como cosmólogo. Em especial, as minhas boas amigas de zoeira, Bitá, Simony e Gabriela;
- A todos meus companheiros de sala. Em especial, Mário, Sandro, Maryory, Bitá, Simony, Eli e Carlos, pelos momentos de ócio, pelas conversas, discussões e os cumprimentos efusivos (nem todos) e pelo ambiente de trabalho agradável;
- Ao grupo Nzinga de capoeira Angola, por contribuir com a minha formação como pessoa, por abrir as portas a outras facetas da vida e da realidade e por me mostrar que as coisas são muito mais do que botar as pernas pra cima;
- À Maíra, Rodrigo, Ximena, Cintia, Sergio, Cesar, BruCa, Matias, Mercedes, Dailer, Beto, Guga, Soraia e Bruno, pessoas que me acolheram nas suas casas e que chegaram a conformar minha família no Rio de Janeiro;
- Ao Juan Pablo, Juan David, Carlos, Néstor, Andrea, Jefferson, Henry, Sergio V., Nataly, Laura, Daniel, Mónica, Juan David, Nicolás, Jota, Sergio S., Kathe, Ligia, e Juan Pablo del Risco quem mesmo de longe, me acompanharam nos momentos de solidão. Porque tenho a fortuna de contar com um grupo de amigos de diferentes áreas dispostos a me ajudar em qualquer situação e em qualquer momento;
- Ao Arnaldo e Magali, por proporcionar um ambiente de trabalho imbatível e um caloroso Natal;
- Aos professores do ON. Em especial, o professor Vladimir Ortega, por ser uma biblioteca de experiências e conhecimento;
- A todos os meus amigos do ON, pelas vivências compartilhadas;
- Ao Observatório Nacional;
- Ao meu Brasil e seu povo;
- À Capes e à Faperj pelo financiamento;
- A Deus, a força motora.

A memória muitas vezes está contra nós e esquecemos coisas, até aquelas que são muito importantes. Por essa limitação, humana, esses agradecimentos ficarão inacabados...

Reconstrução Não Paramétrica das Perturbações Cosmológicas

Javier Ernesto González Sánchez

Submetida ao Observatório Nacional do Rio de Janeiro em
1 de Março de 2018, como requisito parcial para a obtenção
do título de Doutor em Astronomia.

Resumo

Os grandes levantamentos astronômicos atuais têm nos permitido o acesso a uma crescente quantidade de dados de alta precisão. Por tal motivo, faz-se necessária a exploração de diferentes técnicas para modelar e extrair o máximo de informações destes dados. A principal abordagem utilizada para modelar as observações consiste na proposição de uma forma funcional que descreva o comportamento dos dados, deixando à análise estatística a restrição dos parâmetros livres do nosso modelo inicial. Nos últimos anos, têm-se utilizado de maneira crescente métodos não paramétricos, onde não se assume um comportamento funcional *a priori* dos dados, permitindo resultados menos viesados pela escolha arbitrária do experimentador. Neste caso, os resultados são independentes de modelo. Nesta tese, estudamos alguns dos métodos não paramétricos melhor sucedidos na área da cosmologia e os aplicamos em problemas específicos de grande interesse no estudo da aceleração cósmica. Assim, o nosso objetivo principal é obter resultados independentes de modelos cosmológicos a partir dos dados observacionais dos levantamentos astronômicos mais recentes.

Inicialmente, aplicamos os métodos não paramétricos de Processos Gaussianos e Suavização para reconstruir o parâmetro de Hubble a partir de observações provenientes de idades de galáxias em redshifts baixos e intermediários. Estes dados são considerados independentes de modelos cosmológicos e de modelos de síntese de populações estelares. Por tal motivo, é esperado que nossos resultados não estejam viesados ao utilizar métodos estatísticos e dados independentes de modelos teóricos. Esta reconstrução da taxa de expansão é utilizada para calibrar SNs Ia e estudar as suas implicações no modelo cosmológico padrão.

Na segunda parte, com o objetivo de quebrar a degenerescência entre modelos de energia escura e teorias de gravidade modificada no nível de *background*, exploramos as perturbações cosmológicas de matéria no regime linear caracterizadas pelo contraste de densidade, a taxa e o índice de crescimento. Aplicamos métodos não paramétricos aos dados de $H(z)$ provenientes de idades de galáxias e de quasares em altos redshifts. Com as informações da taxa de expansão, do parâmetro atual de densidade da matéria -dado pelas colaborações Planck e WMAP- e assumindo que o Universo é homogêneo e isotrópico e a Relatividade Geral como teoria de

gravitação, reconstruímos as perturbações de matéria e comparamos com as estimativas destas quantidades provenientes do estudo da estrutura em grande escala do Universo. Além disto, calculamos um teste nulo do modelo cosmológico padrão utilizando tanto quantidades de *background* quanto quantidades perturbativas, encontrando uma tensão de até 3σ dependendo da fração atual de matéria assumida no cálculo.

Finalmente, generalizamos a solução destas quantidades perturbativas para cenários de gravidade modificada. Neste caso, encontramos um bom acordo com os cálculos teóricos e os nossos cálculos a partir da reconstrução não paramétrica da expansão cósmica. Concluimos que as reconstruções das perturbações de matéria a partir de observáveis de *background* pode ser um método efetivo para distinguir teorias de gravidade modifica, principalmente com o advento de melhores dados do mapeamento da estrutura em grande escala do Universo.

Palavras chaves: Cosmologia; reconstrução não paramétrica; perturbações de matéria; energia escura; gravidade modificada, aceleração cósmica.

Non-Parametric Reconstruction of the Cosmological Perturbations

Javier Ernesto González Sánchez

Submitted to the Observatório Nacional of Rio de Janeiro on
March 1st 2018, in partial fulfillment of the requirements
for the Ph.D degree in Astronomy.

Abstract

The current large astronomical surveys have allowed us access to a growing quantity and quality of observational data. For this reason, it is necessary to explore different techniques to model and extract the maximum information from these data. The main approach used to model the observations is the parametric one where it is proposed a functional form to describe the behaviour of the data, leaving in the statistical analysis the restriction of the free parameters of our initial model. In recent years, non-parametric methods have been used more frequently, where an a priori functional behaviour of the data is not assumed, obtaining results less biased by the arbitrary choice of the experimenter. In this case, the results are model independent. In this thesis, we have studied some of the most successful non-parametric methods in the area of cosmology and applied them to specific problems of great interest in the study of the cosmic acceleration. Thus, our main objective is to obtain cosmological-model-independent results from the most recent astronomical surveys data.

First, we apply the non-parametric methods, so-called Gaussian Processes and Non-Parametric Smoothing, to reconstruct the Hubble parameter from galaxy ages observations in low and intermediate redshifts. These data are considered to be cosmological and stellar population model independent. For this reason, it is expected that our results are bias free because both the statistical methods and data are model independent. This expansion rate reconstruction is used to calibrate SNe Ia and study their implications on the standard cosmological model.

In the second part, in order to break the existing degeneracy at the background level between dark energy models and modified gravity theories, we explore the cosmological matter perturbations at the linear regime characterized by the matter density contrast, the growth rate and the growth index. We apply non-parametric methods to galaxy ages and high- z quasars $H(z)$ data. With the expansion rate information, the current matter density parameter -given by Planck and WMAP collaborations- and assuming that the Universe is homogeneous and isotropic and General Relativity as a theory of gravitation, we reconstruct the matter perturbations and compare them with the estimates of the matter perturbation quantities from the mapping of the large-scale structure of the Universe. In addition, we calculated a null test of the standard cosmological mo-

del using background and perturbative quantities. We find a tension ($\sim 3\sigma$) depending on the current matter density parameter assumed in the calculation.

Finally, we generalize the solution of the perturbative quantities to modified gravity scenarios. In this case, we find a good agreement with our calculations from the non-parametric reconstruction of the cosmic expansion and the theoretical ones. We conclude that reconstructions of matter perturbations from background observables may be an effective method to distinguish modified gravity theories, mainly with the advent of high quality data from the mapping of the large-scale structure of the Universe.

Keywords: cosmology; non-parametric reconstruction; matter perturbations; modified gravity; dark energy; cosmic acceleration.

Sumário

Agradecimentos	iii
Resumo	v
Abstract	vii
Lista de figuras	xi
Lista de tabelas	xiii
Notações e convenções	xiv
Informação eletrônica	xiv
1 Introdução	1
2 Teoria Cosmológica Moderna	6
2.1 A geometria de um espaço homogêneo e isotrópico	7
2.2 Dinâmica do Universo	10
2.2.1 Expansão Do Universo	10
2.2.2 A Dinâmica do universo de FLRW	13
2.2.3 Expansão Acelerada	17
2.3 Teoria de Perturbações Cosmológicas	20
2.3.1 Transformações de calibre	22
2.3.2 Dinâmica das perturbações escalares	24
2.3.3 Evidência Observacional da Matéria Escura	28
2.4 Mecanismos da Aceleração Cósmica	31
2.4.1 Energia Escura	31
2.4.2 Gravidade Modificada	32
3 Reconstruções Paramétricas e Não-Paramétricas	36
3.1 Análise das Componentes Principais	43
3.2 <i>Splines</i>	45

Sumário

3.3	Processos Gaussianos	46
3.3.1	Derivadas de uma reconstrução via Processos Gaussianos	51
3.3.2	Funções de um PG e propagação de erros	51
3.4	Suavização Não Paramétrica	52
3.4.1	Suavização Não Linear	53
3.5	Aplicação de métodos não paramétricos em cosmologia	55
3.5.1	Reconstrução de $H(z)$ e $q(z)$ via Processos Gaussianos	56
3.5.2	Reconstrução de $H(z)$ via <i>splines</i>	58
3.5.3	Reconstrução dos testes nulos O_m e O_k via suavização	58
3.5.4	Evidência da aceleração cósmica utilizando PCA	60
4	Construção de um diagrama de Hubble de SN Ia independente de modelo cosmológico	62
4.1	Análise com Supernovas do tipo Ia	62
4.2	Determinação de distâncias a partir de dados de $H(z)$	64
4.2.1	Integração de $H(z)$ e propagação de erro	66
4.2.2	Reconstrução com Processos Gaussianos	67
4.2.3	Reconstrução com suavização não linear	68
4.3	Calibração dos parâmetros da curva de luz	72
4.4	Resultados	73
5	Reconstrução das Perturbações Cosmológicas de Matéria na Teoria da Relatividade Geral	77
5.1	O contraste de densidade e outras quantidades perturbativas	78
5.2	Construção do teste nulo	83
5.3	Dados	86
5.4	Reconstrução das Perturbações de Matéria utilizando Processos Gaussianos	88
5.5	Reconstrução das Perturbações de Matéria utilizando Suavização	92
6	Reconstrução das Perturbações Cosmológicas de Matéria em Teorias de Gravidade Modificada	97
6.1	Solução Integral Generalizada	98
6.2	Resultados da Reconstrução de Perturbações em SMG	101
7	Conclusões	105
	Referências	109

Lista de figuras

2.1	Velocidades de recessão de um objeto em função do <i>redshift</i>	13
2.2	Valores dos parâmetros de densidade das componentes do Universo em função do <i>redshift</i>	16
2.3	Vínculos observacionais atuais no plano $\Omega_m - \Omega_\Lambda$	17
2.4	Vínculos observacionais atuais da equação de estado da energia escura	19
2.5	Representação de perturbações fictícias geradas por uma transformação de coordenadas	21
2.6	Crescimento de estruturas em grandes escalas	28
2.7	Curva da velocidade de rotação da Galáxia	30
2.8	Distribuição de matéria no <i>Bullet cluster</i>	31
3.1	Valor médio mensal da taxa de câmbio entre o dólar e o iene entre fevereiro de 1978 e maio de 1999.	39
3.2	Ajuste do valor médio mensal da taxa de câmbio entre o dólar e o iene em termos de séries de Fourier.	39
3.3	Ajuste do valor médio mensal da taxa de câmbio entre o dólar e o iene em termos splines.	40
3.4	Simulação e ajuste de dados a partir de um polinômio de sétima ordem.	42
3.5	Espectro de possíveis redundâncias na descrição de um conjunto de dados.	44
3.6	Componentes principais.	45
3.7	Efeito dos hiperparâmetros da Eq. (3.23) na reconstrução de uma função via PGs.	49
3.8	Comparação da função <i>prior</i> com a função <i>a posteriori</i> (reconstrução) para um conjunto de dados simulados.	50
3.9	Comportamento do valor da função χ^2 com respeito ao número de iterações da suavização e reconstrução utilizando o método de suavização	55
3.10	Reconstrução da distância D , do parâmetro de Hubble e do parâmetro de desaceleração a partir de dados de SNs Ia.	57

Lista de figuras

3.11	Reconstrução do parâmetro de desaceleração utilizando a técnica de <i>splines</i> . . .	59
3.12	Reconstrução dos testes nulos O_k e O_m	60
4.1	Exemplos de funções reconstruídas utilizando a suavização não linear	70
4.2	Reconstrução da taxa de expansão do Universo e da variação do fator de escala utilizando os métodos de PGs e suavização	72
4.3	Diferença do módulo de distância calculado utilizando as reconstruções via PGs e NPS e o modelos para calibrar os parâmetros da curva de luz.	74
4.4	Vínculos no plano $\Omega_m - H_0$ assumindo um modelo Λ CDM para a amostra JLA calibrada independentemente de modelo cosmológico e distribuição de probabilidade marginalizada do parâmetro H_0	76
5.1	Taxa de expansão e taxa de crescimento para diferentes modelos cosmológicos	78
5.2	Valores do índice de crescimento em modelos de EE lentamente variável	83
5.3	Reconstrução da expansão cósmica e da variação temporal do fator de escala via PGs	89
5.4	Evolução do parâmetro de densidade de matéria calculado com a reconstrução de $H(z)$ via PGs	90
5.5	Fator de crescimento calculado com a reconstrução de $H(z)$ via PGs	90
5.6	Taxa de crescimento das perturbações de matéria calculado com a reconstrução de $H(z)$ via PGs	91
5.7	Índice de crescimento calculado com a reconstrução de $H(z)$ via PGs	92
5.8	Reconstrução da expansão cósmica e da variação temporal do fator de escala via suavização	93
5.9	Evolução do parâmetro de densidade de matéria calculado com a reconstrução de $H(z)$ via suavização	93
5.10	Reconstrução da taxa de crescimento das perturbações de matéria calculada com a reconstrução de $H(z)$ via suavização	94
5.11	Taxa de variação da amplitude de aglomeração $f\sigma_8(z)$ calculada com a reconstrução de $H(z)$ via suavização	94
5.12	Índice de crescimento $\gamma(z)$ das perturbações de matéria calculado com a reconstrução de $H(z)$ via suavização	95
5.13	Teste nulo $O_p(z)$	96
6.1	Taxa de crescimento em escalas menores do que o horizonte de Hubble em teorias de gravidade modificada	102
6.2	Taxa de crescimento em escalas menores do que o horizonte de Hubble para dois pares de parâmetros $\{(m_0, n)\}$	103
6.3	Índice de crescimento em teorias de gravidade modificada	104

Lista de tabelas

2.1	Vínculos dos parâmetros cosmológicos utilizando os dados mais recentes.	19
3.1	Componentes principais do parâmetro de desaceleração.	60
4.1	Estimativas atuais da taxa de expansão do Universo e seu respectivo método. . .	65
4.1	Estimativas atuais da taxa de expansão do Universo e seu respectivo método. . .	66
4.2	Estimativas da taxa de expansão do Universo independentes de modelos de síntese de população estelar.	66
4.3	Resultados obtidos para diferentes funções médias <i>prior</i> no método PGs.	75
4.4	Resultados obtidos para diferentes modelos <i>ansatz</i> no método NPS.	75
5.1	Estimativas de f_{obs} utilizadas na análise.	87
5.2	Estimativas de $f\sigma_8(z)$ utilizadas na nossa análise.	88
6.1	Valor do índice de crescimento calculado via reconstrução das perturbações de matéria e os valores teóricos	102

Notações e convenções

- Expressões em outros idiomas são apresentadas em *itálico*.
- A assinatura da métrica utilizada como padrão neste texto é $(+ - - -)$.
- A menos que explícito o contrário, utilizamos unidades em que $c = \hbar = k_B = 1$.
- Sub-índice 0 à frente de uma grandeza representa o seu valor tomado no tempo presente.
- A unidade de distância utilizada como padrão neste texto é o megaparsec (Mpc):
 $1 \text{ Mpc} = 3.26 \times 10^6 \text{ anos-luz} = 3.09 \times 10^{22} \text{ m}$
- Índices gregos variam de 0 a 3, enquanto os latinos variam de 1 a 3. Índices repetidos obedecem a convenção de soma de Einstein.

Informação eletrônica

A maioria das referências utilizadas nesta monografia pode ser encontrada na *internet* nos seguintes endereços:

- arXiv: <http://arxiv.org>
- INSPIRE: <http://inspirehep.net>
- SAO/NASA ADS Labs: <http://labs.adsabs.harvard.edu/ui>

1 Introdução

Como se formou o Universo observado? A forma em que o homem entende o espaço, o tempo e o Universo têm mudado ao longo da história. As descrições mitológicas do mundo foram substituídas por explicações filosóficas até o desenvolvimento da experimentação como base para entender a natureza, surgindo assim a física como ciência e como descrição principal do mundo. O tempo e o espaço eram concebidos como absolutos e independentes, e a geometria desse espaço físico era indiscutivelmente euclidiana. No século XIX, com a descoberta de geometrias não euclidianas pelo alemão Carl Gauss e o russo Nikolai Lobachevski, a questão sobre qual é a verdadeira geometria do nosso espaço tomava sentido fora do ponto de vista puramente matemático. E assim, a conexão entre a física e a geometria tornava-se factível [1].

A partir da formulação da teoria especial da relatividade por Albert Einstein, em 1905, o paradigma clássico sobre a natureza do espaço e do tempo é substituído pelo conceito do *continuum* espaço-tempo, em que o estado de movimento dos observadores modifica as suas medições de tempo e de espaço. Nesta teoria, era considerado, de forma implícita, que a variedade espaço-temporal não era euclidiana, mas sim, plana (intrinsecamente). Em 1915, com a necessidade de fazer compatíveis a força de gravidade e a relatividade, surge a teoria da relatividade geral (TRG) [2]. Neste novo paradigma, a gravidade é interpretada como a geometria do espaço-tempo que por sua vez está determinada pelo conteúdo de matéria-energia do espaço. Dois anos após a formulação da TRG, é proposto o primeiro modelo cosmológico utilizando a TRG para descrever o Universo na sua totalidade e com ele inicia-se a cosmologia relativística. Desde então, a TRG como teoria de gravitação tem sido testada em diversas situações ao confirmar observacionalmente suas previsões [1]. Entre as evidências da TRG encontram-se os testes clássicos como: a precessão do periélio de Mercúrio, o desvio da luz causado pelo campo gravitacional solar ou de forma geral o efeito de lente, o *redshift* gravitacional, o atraso temporal de um sinal luminoso (atraso de Shapiro) e as recentes detecções diretas de ondas gravitacionais [3, 4, 5]. Esta grande quantidade de evidências favorece a TRG como a teoria correta que descreve a gravidade.

Em escalas cosmológicas, a descoberta da expansão cósmica ao final dos anos 1920 [6, 7],

bem como, a detecção de uma Radiação Cósmica de Fundo (RCF) em micro-ondas em 1965 [8] e as observações das abundâncias dos elementos leves compatíveis com a nucleossíntese primordial [9, 10, 11] têm influenciado o nosso paradigma cosmológico atual, a tal ponto que fazem parte das suas bases observacionais e são compatíveis com a teoria da gravidade de Einstein.

Assim, consolidou-se o paradigma de um universo em expansão formado por matéria e radiação que no passado foi extremamente denso e quente. Contudo, o cenário atual ainda não estava finalizada. Nos anos 1930, observações da dinâmica de galáxias em aglomerados realizadas por Fritz Zwicky [12] e a análise de curvas de rotação na nebulosa de Andrômeda sugeriram a existência de um novo tipo de matéria que não interage eletromagneticamente, sendo chamada de matéria escura. Com o decorrer dos anos, estas evidências de origem astrofísica foram se tornando cada vez mais fortes. Além das evidências astrofísicas da existência deste tipo de matéria, de um ponto de vista cosmológico, a análise das flutuações da RCF implica, também, que a matéria escura é aproximadamente cinco vezes mais abundante do que a matéria ordinária [13, 14]. No modelo cosmológico padrão, esta matéria é não relativística, chamando-a de matéria escura fria.

Em 1999, a partir da análise do módulo de distância de Supernovas do tipo Ia (SNs Ia), os grupos *Supernova Cosmology Project* e *High-z Supernova Search Team* perceberam que a luz destas supernovas era mais fraca que a esperada. Interpretaram que essas SNs Ia encontravam-se a uma distância maior da que era prevista em um universo composto unicamente por matéria e radiação. Utilizando as equações de campo da TRG incluindo o termo da constante cosmológica, estas observações concluíam que o Universo encontra-se atualmente em uma fase acelerada [15, 16]. Isto constitui a última grande descoberta observacional que revolucionou o nosso entendimento do cosmos. Esta fase acelerada da história cósmica não pode ser explicada no marco da TRG com o conteúdo material do Universo satisfazendo a condição de energia forte ou, em outras palavras, que a massa gravitacional é positiva ($\rho + 3p > 0$) [17]. Isto levou à hipótese da existência da energia escura (EE), uma componente de energia com pressão negativa que domina a dinâmica tardia do Universo.

No paradigma de um universo sem direções ou pontos preferenciais (em média isotrópico e homogêneo), as equações da TRG requerem que a pressão do fluido de EE seja negativa suficiente para compensar a atração gravitacional devida a sua própria densidade de energia e à atração causada pelas outras componentes do Universo. No modelo padrão da cosmologia (Λ CDM), a EE é descrita pela constante cosmológica, que corresponde a um fluido homogêneo e isotrópico sem flutuações com $p = -\rho$. O modelo cosmológico Λ CDM, caracterizado pelas componentes de radiação, matéria bariônica (ordinária), matéria escura e a constante cosmológica, tem mostrado grande sucesso ao ser testado observacionalmente. Entretanto, algumas anomalias de carácter teórico [18, 19] e observacional [20] têm motivado a investigação de vários modelos de campos que possam explicar a aceleração cósmica. Por exemplo: o modelo de quintessência, que corresponde a um campo escalar ϕ minimamente acoplado, cuja dinâmica

depende do seu potencial $V(\phi)$ que o caracteriza [21, 22, 23, 24, 25]. Outra abordagem para descrever a EE corresponde a uma proposição mais fenomenológica em que sua equação de estado $p = w\rho$ é parametrizada assumindo uma forma funcional específica [26, 27, 28, 29, 30, 31, 32] ou, também, parametrizando a sua densidade de energia [33, 34].

O nosso conhecimento mínimo acerca da natureza da EE conduz à uma pergunta de carácter fundamental na cosmologia teórica: a aceleração cósmica reflete a existência de novos campos de matéria-energia ou a necessidade de modificações da TRG em escalas cosmológicas? Explicações da aceleração cósmica alternativas à existência de um fluido com pressão negativa tem sido amplamente exploradas na literatura. Estas alternativas para explicar a aceleração cósmica são, em sua maioria, baseadas em modificações da gravidade em grandes escalas como por exemplo: teorias $f(R)$ [35, 36, 37, 38], gravidade escalar-tensorial [39], modelos de gravidade com dimensões extras [40, 41, 42], entre outros (uma lista de modelos de EE e teorias de gravidade modificada pode ser encontrada na Ref. [43, 44]). Outro tipo de alternativa para explicar a aceleração cósmica é o modelo de um universo isotrópico inhomogêneo ou modelos Lemaître-Tolman-Bondi [45, 46].

Do ponto de vista observacional, a precisão atual dos observáveis de *background* (distâncias de luminosidade e diâmetro angular e a taxa de expansão cósmica) não é suficiente para distinguir entre modelos de EE e teorias de gravidade modificada. Não obstante, mesmo para dados altamente precisos, a resposta sobre a natureza da aceleração cósmica não pode ser resolvida com esta classe de observações. Tal complicação origina-se na possibilidade de construir teorias de gravidade modificada que produzam a mesma taxa de expansão cósmica do que modelos de EE que mantêm as equações de campo da TRG [47]. Esta degenerescência encontra-se no nível de *background*, onde a descrição do Universo é realizada a partir de um modelo perfeitamente simétrico e simplificado. Portanto, o estudo de observáveis de *background* não é suficiente para determinar se a aceleração cósmica é um efeito geométrico (modificação da gravidade) ou dinâmico (existência da EE). Esta degenerescência existente no nível de *background* pode ser quebrada ao analisarmos o crescimento das perturbações da densidade da matéria em um modelo mais realístico do Universo, onde pequenas inhomogeneidades evoluem e formam as estruturas. Nas teorias da gravidade modificada, a taxa de crescimento é diferente da prevista pelos modelos que assumem a TRG. Nestas teorias, a constante gravitacional de Newton é substituída por um acople gravitacional efetivo G_{eff} que pode depender tanto do tempo como da escala, o que modifica a lei de crescimento das estruturas. Este crescimento é característico de cada teoria e pode ser utilizado como ferramenta para distingui-las.

Por outro lado, para obter informação acerca do comportamento funcional das variáveis cinemáticas ou dinâmicas, podemos utilizar dois tipos de métodos para modelar as observações: o paramétrico e o não paramétrico. O primeiro consiste na proposição de uma forma funcional que descreva os dados baseada em um modelo teórico ou na proposição de uma parametrização de uma quantidade. A principal vantagem desta abordagem é a efetividade na restrição dos parâmetros, produzindo menores incertezas, porém os resultados podem ser enviesados pela escolha

arbitrária ao modelar os observáveis. Para aliviar esta complicação podemos utilizar o segundo tipo de métodos para reconstruir quantidades suaves a partir das suas observações [48]. Já os métodos não paramétricos não assumem uma forma funcional *a priori* para descrever as observações e o seu objetivo principal é construir uma função que revele a curva que melhor se adapta aos dados. Os resultados obtidos com estes métodos são independentes de modelos cosmológicos. Nos últimos anos, a busca por resultados independentes de modelos motivou grandemente a utilização dos métodos de reconstrução não paramétricos na área da cosmologia. Alguns destes métodos são descritos nas Refs. [49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63]. Além do método de reconstrução, é fundamental que os dados analisados também sejam obtidos sem a utilização de um modelo cosmológico, a fim de garantir que os resultados não estejam enviesados devido à utilização de um modelo fiducial.

Nesta tese, utilizamos métodos de regressão não paramétricos para reconstruir, de uma maneira independente de modelos cosmológicos, o parâmetro $H(z)$ a partir de dados que também sejam independentes de modelo. Esta informação é aplicada ao estudo dos mecanismos que explicam a aceleração cósmica considerando o modelo de universo no nível de *background* e no nível perturbativo linear.

Dado que a utilização de SNe Ia como velas padronizáveis (objetos com luminosidade intrínseca modelável) é um dos principais testes cosmológicos atuais, é de grande interesse investigar se a calibração das curvas de luz baseada em modelos cosmológicos encontra-se enviesada. Além disto, podemos estudar os vínculos impostos pelas observações de SNe Ia sobre os parâmetros H_0 e Ω_m quando as curvas de luz são calibradas com informação proveniente de métodos não paramétricos. Os resultados desta análise foram publicados na Ref. [60].

Nossa segunda proposta consiste em resolver as equações que governam a evolução das perturbações cosmológicas de matéria a partir da reconstrução não paramétrica da taxa de expansão e a subsequente comparação com as observações da estrutura em grande escala do Universo. Esta comparação permite testar a validade das hipóteses envolvidas para derivar as perturbações de matéria. Os resultados mais importante desta análise quando assumimos a TRG como teoria de gravitação foram publicados nas Refs. [61, 62]. A generalização do estudo anterior para teorias de gravidade modificada foi publicada na Ref. [63].

O presente estudo está organizado da seguinte forma: No Capítulo 2, apresentamos o formalismo matemático do paradigma cosmológico atual junto com os vínculos observacionais mais recentes. Também apresentamos a teoria de perturbações cosmológicas de matéria e os mecanismos mais utilizados para explicar a aceleração cósmica como os modelos de quintessência e teorias de gravidade modificada. No Capítulo 3, introduzimos os métodos de reconstrução paramétricos e não paramétricos. Visto que nosso objetivo é obter resultados independentes de modelos, apresentamos alguns dos métodos não paramétricos mais utilizados na cosmologia e suas aplicações nesta área, fazendo ênfase aos métodos de Processos Gaussianos e de Suavização utilizados na nossa análise. No Capítulo 4, aplicamos estes dois métodos de reconstrução não paramétricos a dados da taxa de expansão do Universo provenientes de idades de galáxias

(modelo independentes) para calibrar a curva de luz da compilação JLA de SNs Ia e estudar suas implicações no vínculo de parâmetros cosmológicos, como H_0 e Ω_m , assumindo um modelo Λ CDM [60]. No Capítulo 5, reconstruímos o parâmetro de Hubble com dados provenientes de idades de galáxias e de quasares em altos *redshifts* (sendo estes últimos dados dependentes do modelo Λ CDM). Com esta informação calculamos as perturbações cosmológicas de matéria no marco da TRG e comparamos com os dados provenientes do mapeamento da estrutura em grande escala do Universo [61, 62]. No capítulo 6, generalizamos a análise apresentada no capítulo anterior para teorias de gravidade modificada e reconstruímos as perturbações de matéria para uma parametrização de G_{eff} com valores que descrevem teorias $f(R)$ [63]. Finalmente, no Capítulo 7, apresentamos as conclusões obtidas nesta tese.

2 Teoria Cosmológica Moderna

A Teoria Cosmológica Moderna constitui no entendimento do Universo em grande escala, envolvendo o estudo de sua evolução e da formação das estruturas observadas. Esta teoria desenvolveu-se de maneira contínua desde o surgimento da Teoria da Relatividade Geral (TRG). O que conhecemos hoje como modelo cosmológico padrão está baseado na hipótese fundamental que estabelece o Universo enquanto homogêneo e isotrópico em grandes escalas (~ 100 Mpc) [64]. Trata-se do chamado Princípio Cosmológico (PC). Nesta teoria, também assume-se que a interação que domina a dinâmica global do Universo é a gravitação.

Atualmente, o modelo cosmológico padrão é o modelo Λ CDM (Λ *Cold Dark Matter*), o qual possui quatro bases observacionais:

- A Expansão do Universo;
- A existência da Radiação Cós mica de Fundo em micro-ondas;
- A Nucleossíntese Primordial de elementos leves;
- A recente Aceleração Cós mica.

Este modelo adota a TRG como aquela que descreve corretamente a gravitação. No paradigma da TRG, a gravidade manifesta-se como a própria geometria do espaço-tempo. O substrato espaço-temporal é um ente dinâmico dependente do estado de movimento tanto do observador quanto dos campos que nele encontram-se. Portanto, a geometria espaço-temporal e o conteúdo material inter-relacionam-se, onde a matéria determina a forma do espaço-tempo que, por sua vez, influencia o estado de movimento dos campos materiais. Matematicamente, a TRG é escrita em termos do seguinte conjunto de equações tensoriais:

$$G_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta} = 8\pi GT_{\alpha\beta} + \Lambda g_{\alpha\beta}, \quad (2.1)$$

conhecidas como equações de campo de Einstein (ECE). Dentro do marco do modelo Λ CDM, a parte esquerda das ECE (que corresponde a termos geométricos) está representada por um

espaço plano homogêneo e isotrópico, enquanto o conteúdo material (lado direito) está formado por uma componente de radiação, de matéria bariônica, de matéria escura fria e de energia escura. Esta última é caracterizada pela constante cosmológica Λ .

Neste capítulo, vamos expôr os fundamentos da geometria do espaço-tempo que satisfaz o PC (na parte espacial da métrica), bem como as bases da dinâmica de um universo com estas simetrias e o crescimento das estruturas a partir de pequenas inomogeneidades de matéria existentes em um *background* homogêneo. Finalmente, apresentaremos algumas alternativas para explicar a atual fase acelerada do Universo.

2.1 A geometria de um espaço homogêneo e isotrópico

Na teoria de gravitação moderna existe uma estreita relação entre a geometria do espaço-tempo e a gravidade. Ao aceitarmos como válido o PC *, determinamos em grande medida a geometria do espaço e restringimos a classe de campos de matéria-energia que são compatíveis com o nosso Universo. Foi demonstrado que a única métrica que satisfaz o PC cosmológico é a chamada métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker [69],

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{1}{1 - Kr^2} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (2.2)$$

onde $a(t)$ determina a escala de tamanhos no universo, chamado fator de escala, e K é a constante de curvatura espacial do universo. Esta constante pode tomar diferentes valores dando características geométricas locais ao espaço tridimensional. A relação entre o tipo de geometria da parte espacial da métrica de FLRW e o valor da constante de curvatura é:

$$\begin{aligned} K > 0 & \iff \text{Geometria Esférica} \\ K = 0 & \iff \text{Geometria Euclidiana} \\ K < 0 & \iff \text{Geometria Hiperbólica} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Cabe ressaltar que as simetrias consideradas para derivar a métrica FLRW caracterizam a geometria local do espaço deixando indeterminada sua topologia global, sendo que as ECE não determinam a topologia global da variedade [70].

As coordenadas utilizadas na Eq. (2.2), onde são evidentes as simetrias do espaço-tempo, definem uma classe privilegiada de observadores e são chamados coordenadas e observadores comóveis ou fundamentais. Qualquer outro observador que possua uma velocidade relativa a um observador comóvel local observará que o Universo é anisotrópico. Nestas coordenadas, uma partícula localizada na origem ($r = 0$) que encontra-se em repouso em um instante dado, permanecerá indefinidamente em repouso. Devido à isotropia do Universo, não existem direções privilegiadas e o campo gravitacional não induz nenhum movimento na partícula. Este

* Atualmente, com a grande quantidade e qualidade dos dados, é possível testar a validade desta hipótese. Nas Refs. [65, 66, 67, 68], apresentam-se resultados recentes dos testes de isotropia do Universo

argumento é válido não somente para uma partícula na origem, mas também em qualquer ponto do espaço devido à homogeneidade.

Definida a métrica do espaço-tempo, é possível determinar a distância física entre dois pontos quaisquer do Universo. Esta distância, também chamada de distância própria, é definida como o intervalo espaço-temporal, $|ds|$, entre dois pontos medido simultaneamente ($dt = 0$). Para um observador na origem e um ponto qualquer no espaço com coordenadas $x^\mu = (r, \theta_1, \phi_1)$, a distância própria corresponde a uma geodésica radial e é dada por:

$$d_p = a(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = a(t)\chi_K, \quad (2.4)$$

onde χ_K é denominada distância radial comóvel e definido como,

$$\chi_K(r) \equiv \begin{cases} \sin^{-1}(\sqrt{K}r)/\sqrt{K}, & \text{se } K > 0 \\ r, & \text{se } K = 0 \\ \sinh^{-1}(\sqrt{|K|}r)/\sqrt{|K|}, & \text{se } K < 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

onde foi utilizado que para uma geodésica radial a variação dos ângulos ao longo da trajetória é nula ($d\theta_1 = 0, d\phi_1 = 0$). Devido à necessidade da determinação simultânea da posição dos dois pontos, vale notar que a distância própria não é um observável e depende do modelo cosmológico adotado.

A impossibilidade de determinar distâncias próprias motiva a busca de outras formas de estimar distâncias astronômicas, como o uso das propriedades intrínsecas dos objetos de interesse e das quantidades observadas na terra. Consequentemente, definimos a distância de luminosidade e a distância de diâmetro angular.

A distância de luminosidade é definida a partir da relação existente entre o fluxo e a luminosidade de um objeto que emite radiação. Observacionalmente, o fluxo -que corresponde à quantidade de luz recebida por unidade de área por unidade de tempo- é medido em nossos detectores e ao conhecermos a luminosidade intrínseca de um objeto -energia por unidade de tempo que o objeto produz- é possível determinar a distância em que este se encontra. Desta forma, o fluxo em um espaço euclidiano estático é definido como:

$$F = \frac{L}{4\pi d^2}, \quad (2.6)$$

sendo $4\pi d^2$ a área da esfera de raio d entre o observador e o objeto emissor e L a luminosidade percebida nos detectores.

No caso de um universo de FLRW dinâmico, a relação entre a área e o raio comóvel permanece invariante independente da geometria do universo e é exatamente igual como em um

espaço euclidiano (sem expansão)[†], ou seja,

$$A = 4\pi(a(t_0)r)^2. \quad (2.7)$$

Em um universo em expansão, a luz apresenta um deslocamento para o vermelho ou *redshift* (z). Tal fato acontece devido à diferença entre o intervalo de tempo entre dois sinais luminosos consecutivos Δt_e , medido no momento da emissão (t_e), em que o universo tinha um fator de escala $a(t_e)$, e o intervalo de tempo medido por um observador na Terra Δt_0 , em $t = t_0$, quando o fator de escala é $a = a(t_0)$. Estas quantidades relacionam-se da seguinte forma (ver seção 2.2.1):

$$1 + z \equiv \frac{\lambda_o}{\lambda_e} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}. \quad (2.8)$$

Esta diferença nos intervalos de tempo no momento da emissão e da recepção produz uma diminuição da energia do fóton em um universo em expansão, por causa do alargamento do comprimento de onda e da relação de Einstein $E = h\nu = h/\lambda$. A relação entre a energia do fóton no momento da emissão E_e e a energia recebida é:

$$E_{Terra} = \frac{E_e}{(1+z)}. \quad (2.9)$$

Com as Eqs. (2.8) e (2.9), encontramos a relação entre luminosidade intrínseca L_e e a luminosidade percebida na Terra L_{Terra} , sendo:

$$L_{Terra} = \frac{\Delta E_{Terra}}{\Delta t_0} = \frac{E_e}{\Delta t_e(1+z)^2} = \frac{L_e}{(1+z)^2}. \quad (2.10)$$

Portanto, podemos encontrar uma expressão para o fluxo observado em termos da luminosidade intrínseca:

$$F = \frac{L_e}{4\pi(1+z)^2 a(t_0)^2 r^2}. \quad (2.11)$$

Define-se então, a distância de luminosidade tal que a Eq. (2.6) siga sendo válida, ou seja,

$$d_L = (1+z)a(t_0)r. \quad (2.12)$$

Como veremos no capítulo 4, a determinação da distância de luminosidade para objetos com uma luminosidade intrínseca padronizável constitui um dos observáveis mais efetivos no momento de vincular modelos cosmológicos.

A seguinte distância a ser definida é a chamada distância de diâmetro angular. A definição desta distância está motivada pela relação geométrica entre o diâmetro próprio do objeto emissor e o diâmetro angular aparente.

É bem conhecido da geometria euclidiana a relação entre o comprimento de arco s que sub-

[†] Contrário ao caso da relação entre a distância própria e o raio comóvel que depende da curvatura e esta dada pela Eq. (2.5).

tende um ângulo $\Delta\theta$ a uma distância d

$$s = d\Delta\theta. \quad (2.13)$$

No universo de FLRW, um objeto no céu que se encontra perpendicular à linha de visada com coordenada radial r e t_e o momento em que emitiu o sinal luminoso tem diâmetro próprio $s = a(t_e)r\Delta\theta$. Agora, define-se d_A de maneira que a relação 2.13 continue sendo válida, isto é:

$$d_A = \frac{s}{\Delta\theta} = a(t_e)r, \quad (2.14)$$

ou em termos do *redshift*,

$$d_A = a(t_0)\frac{r}{(1+z)}. \quad (2.15)$$

Cabe ressaltar que para baixos *redshifts* ou equivalentemente para objetos com coordenada radial tal que $r\sqrt{K} \ll 1$, as distâncias própria, de luminosidade e de diâmetro angular são aproximadamente iguais.

Das expressões finais para a distâncias de diâmetro angular (2.15) e distância luminosidade (2.12), podemos obter a chamada relação de dualidade cósmica,

$$\frac{d_L}{d_A} = (1+z)^2. \quad (2.16)$$

Esta relação, deduzida a partir da métrica FLRW, assume que o espaço é homogêneo e isotrópico. Entretanto, a relação de dualidade independe do PC e é válida em espaço-tempos mais gerais quando se satisfaz que os fótons seguem geodésicas nulas, seu número é conservado e a variedade é Pseudo-Riemanniana [71].

2.2 Dinâmica do Universo

2.2.1 Expansão Do Universo

‡Na época atual, é familiar entre cientistas e não cientistas o fato de que o Universo encontra-se em expansão, mas nem sempre foi assim. Na década de 1920, foram desenvolvidos estudos teóricos que admitiam a possibilidade de um universo em expansão e estudos observacionais que apontavam que o nosso Universo está se expandindo, entretanto esta descoberta foi reconhecida somente em 1930. Já em 1922, Alexander Friedmann havia publicado um artigo com uma análise completa e sistemática das soluções cosmológicas das ECE, incluindo soluções dinâmicas. Contudo, a ênfase desses trabalhos foi puramente matemática, mostrando pouco interesse em dados astronômicos e sem considerar a expansão do Universo como um fato real. Em 1927, George Lemaître publicou um artigo com resultados similares aos encontrados por Fri-

‡ Nesta seção, para maior clareza, escreveremos explicitamente a velocidade da luz, c .

edmann cinco anos antes. Todavia, ele estava interessado nas soluções que implicavam em um universo em expansão, o que era indicado pelas observações disponíveis na época. O título do trabalho de Lemaître, "*Um Universo Homogêneo de Massa Constante y Raio Crescente Contabilizando a Velocidade Radial de Nebulosas Extra-Galácticas*", deixava evidente a importância das observações, sendo ele o primeiro cientista a introduzir a ideia de que as velocidades de recessão de nebulosas extra-galácticas eram causadas pelo efeito de expansão do espaço. Dois anos depois, o trabalho desenvolvido por Edwin Hubble evidenciou a relação linear *redshift*-distância de galáxias suficientemente afastadas, sem relacionar este resultado à expansão do Universo [1, 72].

Dada a expansão do Universo como causa para o *redshift* de galáxias distantes, independente da direção de observação, pode se concluir que no passado o Universo encontrava-se em uma fase mais densa, sendo menor a distância de separação entre as galáxias. Além disto, estava imersa nesta descoberta um fato que fortalecia a formulada TRG (1915), onde o espaço-tempo é um ente com caráter dinâmico e não apenas a ideia de um espaço absoluto, que era parte primordial da física clássica. Na cosmologia moderna, o universo não se expande no espaço, sendo o próprio espaço aquele que está em expansão [73]. Os dados de Hubble estavam constituídos por medições de *redshifts* e de distâncias de luminosidade obtidas a partir de estrelas variáveis cefeidas. Este conjunto de dados evidenciava uma relação linear entre z e d_L [7]. A hipótese considerada para concluir que as galáxias estão se afastando umas das outras ou, especificamente, que o universo está se expandindo, é que esse *redshift* é causado pela velocidade de expansão. Matematicamente, a forma usual de escrever a lei de Hubble é:

$$cz = H_0 d_L, \quad (2.17)$$

onde c é a velocidade da luz e H_0 é a chamada constante de Hubble que caracteriza a velocidade de expansão do Universo. Esta relação linear entre o *redshift* cosmológico e a distância de objetos celestes é válida, apenas, em baixos *redshifts*, $z \ll 1$, sendo necessárias correções de ordem superior em altos *redshifts*.

A lei de Hubble é um caso limite da lei velocidade-distância, a qual relaciona linearmente a distância própria, d , com a velocidade de recessão, v , de um objeto. Esta lei é escrita como:

$$v = H(t)d, \quad (2.18)$$

onde $H(t)$ é o parâmetro de Hubble no tempo cósmico t . A lei velocidade-distância depende explicitamente do tempo e tem validade universal por ser deduzida a partir da métrica como mostrado a seguir [74, 73, 75]:

Consideramos a variação temporal da distância própria de um objeto comóvel, isto é, que a sua velocidade corresponde, somente, à expansão do Universo:

$$\dot{d}_p = \frac{\dot{a}}{a} a \chi = H(t) d_p, \quad (2.19)$$

identificando $H(t) \equiv \dot{a}/a$. Tem-se, então, que esta lei é consequência da isotropia e homogeneidade do universo.

Para encontrar a relação entre z e $a(t)$, consideram-se dois sinais luminosos emitidos, consecutivamente, por uma fonte comóvel com coordenada radial r , nos tempos t_e e $t_e + \Delta t_e$ e recebidos por um observador na origem de coordenadas nos tempos t_o e $t_o + \Delta t_o$, respectivamente. Dado que os sinais luminosos seguem uma geodésica nula $ds = 0$ e a trajetória que conecta um ponto na origem com um ponto qualquer do espaço é uma geodésica radial $d\Omega = 0$, podemos demonstrar a partir da métrica FLRW que:

$$\int_{t_{em}}^{t_o} \frac{cdt}{a(t)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}. \quad (2.20)$$

Como o objeto encontra-se localmente em repouso (não possui velocidade peculiar), temos:

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_e + \Delta t_e}^{t_o + \Delta t_o} \frac{cdt}{a(t)}. \quad (2.21)$$

Os intervalos de tempo Δt_o e Δt_e são infinitesimais, então podemos utilizar as propriedades das integrais definidas para manipular a Eq. (2.21) e aproximar a ordem zero a função $a(t)$, obtendo:

$$\frac{\Delta t_o}{a(t_o)} \simeq \frac{\Delta t_e}{a(t_e)}. \quad (2.22)$$

Esta é a diferença entre o intervalo de tempo de dois sinais luminosos consecutivos nos momentos de emissão e recepção. Como mencionado anteriormente, isto produz uma mudança no comprimento de onda percebido. Sendo o comprimento de onda próprio da fonte $\lambda_e = c\Delta t_e$ e o recebido $\lambda_o = c\Delta t_o$, obtém-se a relação entre o desvio para o vermelho, definido na Eq. (2.8), e o fator de escala $a(t)$ como:

$$1 + z = \frac{a(t_o)}{a(t_e)}. \quad (2.23)$$

A partir deste resultado, pode ser calculada a lei de Hubble como caso limite da lei geométrica entre a velocidade de recessão e a distância de um objeto no universo de FLRW. Desta maneira, poderíamos considerar que evidência contrária à veracidade da lei de Hubble corresponde a uma violação do PC. Entretanto, esta abordagem como teste da homogeneidade e isotropia do universo é difícil de implementar devido aos movimentos peculiares das fontes luminosas causados pelas inomogeneidades locais do campo gravitacional.

Dada a validade universal da lei velocidade-distância, somos motivados a definir uma distância física limite tal que a partir dela a velocidade de recessão de um observador fundamental seja maior do que a velocidade da luz. Esta distância é conhecida como horizonte ou raio de Hubble e está dada por:

$$d_H \equiv \frac{c}{H}. \quad (2.24)$$

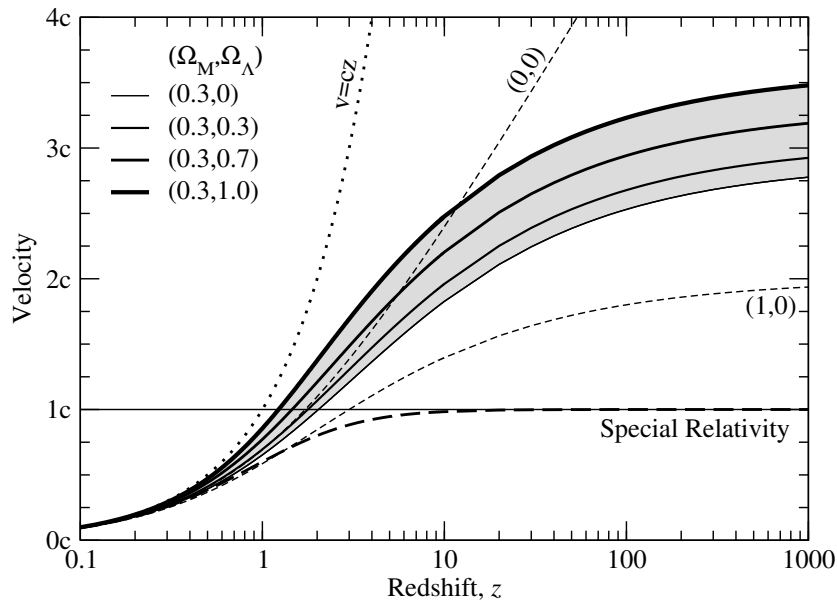


Figura 2.1: Velocidades de recessão de um objeto em função do *redshift* para diferentes modelos que estabelecem uma relação velocidade-*redshift*. Figura retirada da Ref. [74].

É importante notar que tanto a velocidade de recessão quanto a distância própria não constituem observáveis cosmológicos e são quantidades que dependem especificamente do modelo de universo considerado. Na Fig. 2.1, mostramos diferentes valores da velocidade de recessão em função do *redshift* calculada utilizando distintos modelos. Neste gráfico, apresentamos a velocidade que teria um objeto se a lei de Hubble tivesse validade universal e também se o *redshift* fosse causado pelo movimento peculiar, ou seja, se o *redshift* fosse causado pelo efeito Doppler previsto pela relatividade especial.

2.2.2 A Dinâmica do universo de FLRW

Na seção anterior, foi estudada a métrica que determina a geometria espacial de um universo sob a suposição que este é homogêneo e isotrópico localmente. A forma da Eq. (2.2) é obtida, estritamente, considerando as simetrias locais do espaço, sendo então, independente de qualquer teoria física sobre as interações entre as componentes que fazem parte do universo. Estas simetrias consideradas para obter a métrica FLRW não determinam a evolução do fator de escala, nem a constante de curvatura. As quantidades, K e $a(t)$, podem ser determinadas se conhecermos o conteúdo material do Universo e a sua dinâmica ou, em outras palavras, a teoria de gravitação que domina a evolução do Universo em grandes escalas. Nesta seção, estudaremos a dinâmica do universo de FLRW assumindo que a teoria que descreve corretamente as interações em grande escala é a TRG. Desta forma, determina-se univocamente a constante de curvatura e o fator a .

A relação existente entre geometria e o conteúdo material na TRG é expressada nas ECE,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu}.$$

Esta relação impõe que os campos de matéria-energia existentes possuam também as mesmas simetrias do espaço-tempo. Este vínculo aparece evidente nas características do tensor momento-energia (TME). A isotropia implica que o TME deve ser diagonal com a condição $T_1^1 = T_2^2 = T_3^3$, enquanto a homogeneidade impede a dependência deste tensor com respeito às coordenadas espaciais. Com estes argumentos, finalmente, podemos escrever o TME como:

$$T_{\nu}^{\mu} = \text{diag}[\rho, -p, -p, -p]. \quad (2.25)$$

Em particular, se a fonte corresponde a um fluido perfeito, as componentes deste tensor representam a densidade de energia ρ e a pressão do fluido p [70].

Solucionando as ECE com o elemento de linha de FLRW e a fonte cujo TME é escrito na forma da Eq. (2.25), obtém-se as chamadas Equações de Friedmann (EF),

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{K}{a^2}, \quad (2.26)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\left(8\pi Gp + 2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{K}{a^2}\right). \quad (2.27)$$

Nestas equações ρ e p representam a densidade de energia e a pressão do Universo, levando em consideração cada uma das suas componentes. A primeira EF deixa em evidência a conexão entre o conteúdo energético e a geometria (espacial) do Universo. Podemos definir uma densidade de energia específica que implicaria em um universo espacialmente plano ou euclidiano. Esta densidade de energia se conhece como densidade crítica e é escrita em termos do parâmetro de Hubble ($H(t) \equiv \dot{a}/a$) em um momento dado,

$$\rho_c(t) = \frac{3H(t)^2}{8\pi G}. \quad (2.28)$$

Em um universo dinâmico, o valor da densidade crítica evolui ao longo da história cósmica, mas a curvatura espacial do universo permanece constante. Na época atual a densidade crítica tem o valor

$$\rho_{c,0} = 1,88 \times 10^{-29} h^2 \text{g cm}^{-3}. \quad (2.29)$$

Valores da densidade total acima da densidade crítica correspondem a um universo com curvatura espacial positiva ou de geometria esférica e valores inferiores correspondem a universos com geometria hiperbólica.

É conveniente combinar as duas EF a fim de obter uma expressão para a aceleração cósmica que não envolva a constante de curvatura. Esta expressão é escrita como:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (2.30)$$

Sempre que a condição de energia forte seja satisfeita, a qual impõe que a densidade de massa gravitacional é positiva ($\rho + 3p \geq 0$) [17, 76], a Eq. (2.30) implica em uma desaceleração do

Universo. Isto acontece para todos os tipos de matéria conhecidos até hoje, o que significa que uma aceleração só poderia ser explicada por um novo tipo de matéria-energia [76].

Partindo das EF ou da equação de continuidade do TME, obtém-se a lei de conservação da energia,

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (2.31)$$

Esta equação de continuidade não é independente das EFs e, portanto, é necessária uma expressão que descreva a relação entre a densidade de energia e a pressão do fluido ou equação de estado. O conhecimento da equação de estado permite resolver a equação de continuidade e, finalmente, as EFs, obtendo assim a solução das variáveis $a(t)$, $\rho(t)$ e $p(t)$. Em geral, é assumido que não existe interação entre os distintos tipos de matéria-energia que compõem o universo ou, em outros termos, que a lei de conservação é válida para cada componente de forma independente. Esta consideração permite escrever a densidade de energia total como:

$$\rho = \sum_i \rho_i \quad \rightarrow \quad \dot{\rho}_i + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_i + p_i) = 0. \quad (2.32)$$

É de grande importância estudar a solução da equação de conservação da energia (2.31) para o caso $p = w\rho$, com w constante. Com esta suposição a solução da densidade de energia é exata, dada por:

$$\rho = \rho_0(1+z)^{3(1+w)}. \quad (2.33)$$

Esta solução é importante porque pode ser aplicada a distintos tipos de fluidos que compõem o nosso Universo como radiação ($w = 1/3$), matéria não-relativística com $w = 0$, e para a densidade de energia associada ao termo da constante cosmológica ($w = -1$). Para estes três tipos de fluidos, a Eq. (2.33) tem como solução

Radiação	$w = 1/3$	\iff	$\rho_r = \rho_{0r}(1+z)^4$	
Matéria não relativística	$w = 0$	\iff	$\rho_m = \rho_{0m}(1+z)^3$	(2.34)
Constante Cosmológica	$w = -1$	\iff	$\rho = \rho_{0\Lambda}$.	

No caso de um universo plano, é fácil de obter a solução para o fator de escala com respeito ao tempo utilizando a primeira EF (2.26),

Radiação	$w = 1/3$	\iff	$a(t) \propto t^{1/2}$	
Matéria não relativística	$w = 0$	\iff	$a(t) \propto t^{2/3}$	(2.35)
Constante Cosmológica	$w = -1$	\iff	$a(t) \propto e^{Ht}$.	

Esses diferentes modos de decaimento das densidades de energia para as distintas componentes do universo levam a diferentes eras, cada uma dominada por um desses fluidos. Combinando

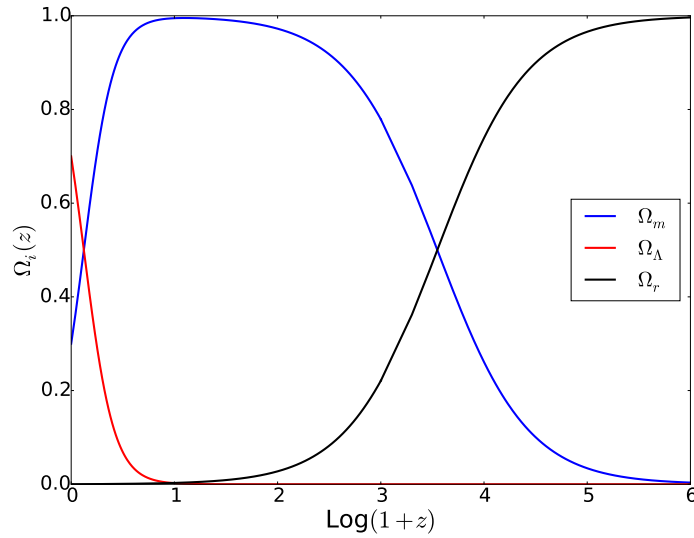


Figura 2.2: Valores dos parâmetros de densidade das componentes do Universo em função do *redshift*.

os vínculos observacionais atuais sobre as densidades de energia da radiação, da matéria e da constante cosmológica, junto com o modo de decaimento de cada uma delas, podemos concluir que no universo primordial ($z \gg 1$) a radiação dominava a dinâmica. Esta radiação se dilui muito mais rápido do que a matéria, atingindo um ponto em que as suas densidades foram iguais, o que se conhece como a equipartição matéria-radiação. A partir deste momento a matéria dominou a expansão cósmica possibilitando (como veremos na seção 2.3.3) o crescimento de estruturas. Finalmente, o decaimento da densidade de matéria leva à equipartição entre a densidade de energia da constante cosmológica e a matéria, no momento a partir do qual a dinâmica é dominada pelo fluido com $w = -1$.

Agora, definimos os parâmetros de densidade e os parâmetros de densidade na época atual para cada componente como[§]

$$\Omega_i(z) = \frac{\rho_i(z)}{\rho_c(z)} \quad \Omega_{i,0} = \frac{\rho_{i,0}}{\rho_{c,0}} \quad (2.36)$$

e também define-se um parâmetro de densidade de curvatura,

$$\Omega_k(z) = \frac{-k}{aH^2(z)} \quad \Omega_{k,0} = \frac{-k}{a_0H_0^2}. \quad (2.37)$$

Os valores dos parâmetros de densidade indicam qual fluido é o mais relevante numa época específica da história cósmica, sendo próximo de 1 quando essa componente é dominante (ver Fig. 2.2).

A equação (2.26) pode ser reescrita em termos dos parâmetros de densidade hoje e o *redshift*,

[§] Entretanto a densidade da energia escura não evolui com o tempo, o parâmetro de densidade associado a ela evolui pela dependência com a densidade crítica.

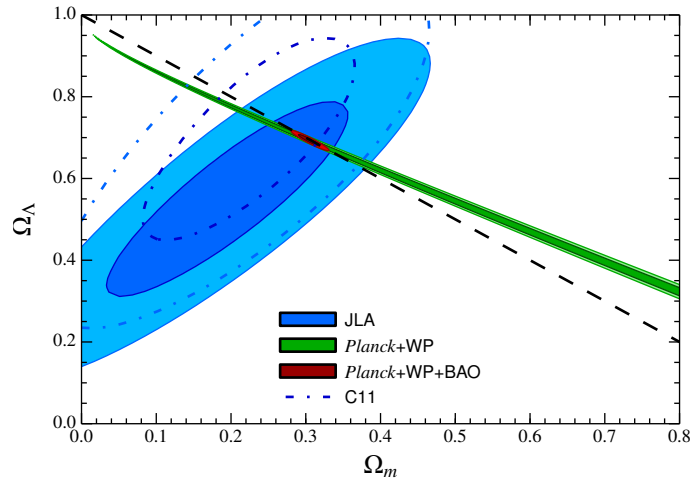


Figura 2.3: Vínculos observacionais atuais no plano $\Omega_m - \Omega_\Lambda$ para um modelos Λ CDM com curvatura livre. Figura retirada da Ref. [77].

$$H = H_0 \sqrt{\Omega_r(1+z)^4 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_\Lambda} \quad (2.38)$$

Esta forma de escrever o parâmetro de Hubble, em termos dos parâmetros de densidade atuais, é a forma utilizada na literatura para estimar observacionalmente a fração de cada componente do Universo.

A relação existente entre a dinâmica do Universo nos tempos de emissão e recepção de um sinal luminoso (integração da quantidade $1/a(t)$) e a distância radial comóvel do objeto emissor (Eq. (2.5)) pode ser escrita em termos do *redshift* cosmológico do sinal e dos parâmetros de densidade de energia atuais como:

$$\int_0^z \frac{dz}{H(z)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = \chi_K(r). \quad (2.39)$$

Esta expressão permite vincular observacionalmente os parâmetros de densidade cosmológicos com as medidas de distâncias de diâmetro angular ou luminosidade provenientes de objetos astrofísicos como veremos no Capítulo 4. Esta é a forma principal de estudar os modelos do Universo em uma escala cosmológica. Na Fig. 2.3, apresentamos os níveis de confiança das estimativas dos parâmetros Ω_m e Ω_Λ do modelo Λ CDM utilizando os dados observacionais mais recentes de SNs Ia, do mapa de temperatura da RCF e das Oscilações Acústicas Bariônicas.

2.2.3 Expansão Acelerada

A expansão acelerada do Universo é uma das maiores descobertas da história e uma das bases do paradigma cosmológico atual. Esta descoberta foi efetuada independentemente por dois grupos de pesquisa, o *Supernova Cosmology Project* (SCP) [16] e *High- z Supernovae Search Team* (HZT) [15]. Em 1990, Gustav Tammann e Bruno Leibundgut tinham mostrado que as Supernovas do tipo Ia (SNs Ia) eram uniformes, ideal para utilizá-las como velas padronizáveis

(objetos de luminosidade intrínseca modelável). Este fato foi utilizado pelos grupos SCP e HZT para realizar suas descobertas analisando o módulo de distância de SNs Ia.

Em 1998, o SCP publicou os resultados que concluíam que para um modelo de universo plano com matéria e constante cosmológica:

$$\Omega_m = 0,28_{-0,08}^{+0,09}(\text{estatístico})_{-0,04}^{+0,05}(\text{sistemáticos})$$

e com 99% de confiança era excluído um valor negativo de Ω_Λ . Similarmente, os resultados do HZT para um modelo de universo com curvatura, matéria e constante cosmológica, concluíam que $\Omega_\Lambda > 0$ com um nível de confiança de 99,7%. Estes dois resultados implicavam, mediante a Eq. (2.30), que o universo atravessa uma fase de expansão acelerada.

Ao longo de quase duas décadas, estes resultados têm sido confirmados, principalmente, com a análise de compilações mais recentes e com um maior número de SNs Ia (580 da compilação Union 2.1 e 740 da compilação JLA), bem como, pela análise de sinais de Oscilações Acústicas Bariônicas que vem da estrutura em grande escala e a análise do espectro de potências da RCF. Todas estas estimativas dos valores dos parâmetros de densidade de energia são compatíveis entre si, fazendo com que o modelo Λ CDM também seja conhecido como modelo de concordância cósmica (ver Fig. 2.3).

Por fim, ressaltamos que para que a expansão do universo seja acelerada conservando a forma padrão das ECE, é necessário um fluido no conteúdo material que possua uma pressão negativa suficiente para se opôr à atração gravitacional (ver equação 2.30). Tal fluido é chamado de Energia Escura (EE). Atualmente, existe uma grande quantidade de abordagens para descrever a EE, como por exemplo a inclusão de novos campos com diferentes acoplamentos às quantidades geométricas ou, de uma forma mais fenomenológica, a parametrização da equação de estado da EE. Qualquer que seja a abordagem explorada, os modelos de EE podem ser testados analisando seus efeitos sobre a expansão do Universo (via $H(z)$) e, portanto, os efeitos nos observáveis clássicos, a distância de luminosidade e de diâmetro angular. A forma particular do parâmetro de Hubble depende de cada modelo, entretanto, quando consideramos que todas as componentes se conservam independentemente, o parâmetro de expansão é escrito como:

$$H^2(z) = H_0^2[\Omega_r(1+z)^4 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_K(1+z)^2 + \Omega_x f(z)] \quad (2.40)$$

onde Ω_x é a fração atual da densidade de energia total correspondente à EE e $f(z)$ a sua função de evolução dada por:

$$f(z) \equiv \frac{\rho(z)}{\rho_0} = \exp 3 \int_0^z \frac{1+w(z')}{1+z'} dz'. \quad (2.41)$$

Cabe notar que independente do mecanismo utilizado (inclusão de novos campos ou uma parametrização), a equação de estado $w(z)$ determina a evolução da EE.

Valores recentes dos parâmetros cosmológicos obtidos combinando diferentes observáveis para diferentes modelos que descrevem a EE são apresentados na Tabela 2.1. Nestes modelos, a

Modelo	Dados	Ω_m	$\Omega_b h^2$	h	Ω_k	w_0	w_a
Λ CDM	BAO+Planck	0.303 (8)	0.0223 (3)	0.682 (7)	-	-	-
Λ CDM	SN+Planck	0.295 (16)	0.0224 (3)	0.688 (13)	-	-	-
Λ CDM	BAO+SN+Planck	0.302 (8)	0.0223 (3)	0.682 (6)	-	-	-
Λ CDM	BAO+SN+WMAP	0.300 (8)	0.0224 (5)	0.681 (7)	-	-	-
$o\Lambda$ CDM	BAO+Planck	0.301 (8)	0.0225 (3)	0.679 (7)	-0.003 (3)	-	-
$o\Lambda$ CDM	SN+Planck	0.30 (4)	0.0224 (4)	0.68 (4)	-0.002 (10)	-	-
$o\Lambda$ CDM	BAO+SN+Planck	0.301 (8)	0.0225 (3)	0.679 (7)	-0.003 (3)	-	-
$o\Lambda$ CDM	BAO+SN+WMAP	0.295 (9)	0.0226 (5)	0.677 (8)	-0.004 (4)	-	-
$w\Lambda$ CDM	BAO+Planck	0.311 (13)	0.0225 (3)	0.669 (17)	-	-0.94 (8)	-
$w\Lambda$ CDM	SN+Planck	0.298 (18)	0.0225 (4)	0.685 (17)	-	-0.99 (6)	-
$w\Lambda$ CDM	BAO+SN+Planck	0.305 (10)	0.0224 (3)	0.676 (11)	-	-0.97 (5)	-
$w\Lambda$ CDM	BAO+SN+WMAP	0.303 (10)	0.0225 (5)	0.674 (12)	-	-0.96 (6)	-
$ow\Lambda$ CDM	BAO+Planck	0.308 (17)	0.0225 (4)	0.671 (19)	-0.001 (4)	-0.95 (11)	-
$ow\Lambda$ CDM	SN+Planck	0.28 (8)	0.0225 (4)	0.73 (11)	0.01 (3)	-0.97 (18)	-
$ow\Lambda$ CDM	BAO+SN+Planck	0.303 (10)	0.0225 (4)	0.676 (11)	-0.002 (3)	-0.98 (6)	-
$ow\Lambda$ CDM	BAO+SN+WMAP	0.299 (11)	0.0227 (5)	0.671 (12)	-0.004 (4)	-0.96 (6)	-
$w_0 w_a \Lambda$ CDM	BAO+Planck	0.34 (3)	0.0224 (3)	0.639 (25)	-	-0.58 (24)	-1.0 (6)
$w_0 w_a \Lambda$ CDM	SN+Planck	0.292 (23)	0.0224 (4)	0.693 (24)	-	-0.90 (16)	-0.5 (8)
$w_0 w_a \Lambda$ CDM	BAO+SN+Planck	0.307 (11)	0.0223 (3)	0.676 (11)	-	-0.93 (11)	-0.2 (4)
$w_0 w_a \Lambda$ CDM	BAO+SN+WMAP	0.305 (11)	0.0224 (5)	0.674 (12)	-	-0.93 (11)	-0.2 (5)
$ow_0 w_a \Lambda$ CDM	BAO+Planck	0.34 (3)	0.0225 (4)	0.640 (25)	-0.003 (4)	-0.57 (23)	-1.1 (6)
$ow_0 w_a \Lambda$ CDM	SN+Planck	0.29 (8)	0.0225 (4)	0.72 (11)	0.01 (3)	-0.94 (21)	-0.3 (9)
$ow_0 w_a \Lambda$ CDM	BAO+SN+Planck	0.307 (11)	0.0225 (4)	0.673 (11)	-0.005 (4)	-0.87 (12)	-0.6 (6)
$ow_0 w_a \Lambda$ CDM	BAO+SN+WMAP	0.302 (11)	0.0227 (5)	0.670 (12)	-0.006 (5)	-0.88 (11)	-0.5 (5)

Tabela 2.1: Vínculos dos parâmetros cosmológicos realizando a análise conjunta dos dados de BAO provenientes de galáxias e *LyaForest*, RCF de Planck (2013) + WP (WMAP *polarization*) ou WMAP9 e a compilação de SNs Ia JLA. Para os modelos $ow_0 w_a \Lambda$ CDM e $w_0 w_a \Lambda$ CDM, na coluna 7, o parâmetro w_0 representa o valor da equação de estado em $w(0.266)$, o qual corresponde ao *redshift* em que $w(z)$ e w_a estão descorrelacionado no modelo $w_0 w_a \Lambda$ CDM para toda a amostra de dados. Tabela retirada de [78].

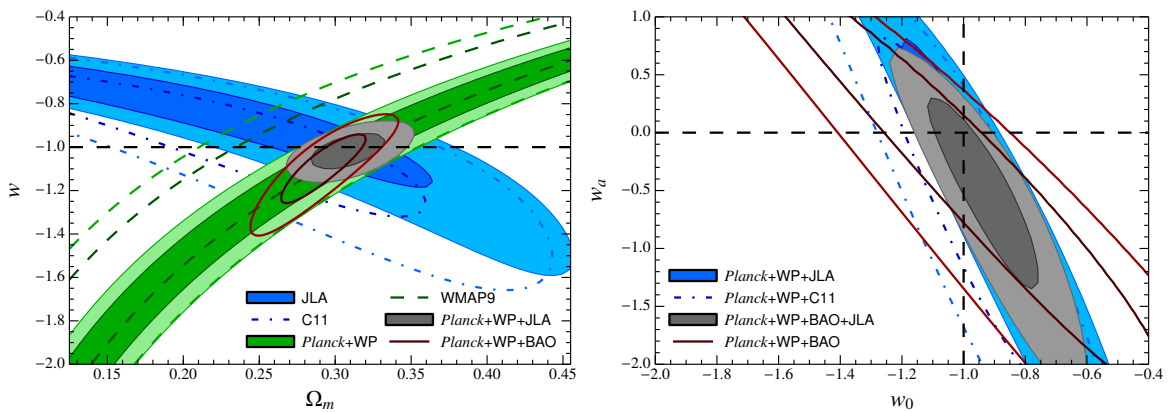


Figura 2.4: Vínculos observacionais atuais da equação de estado da energia escura. (a) Modelo de energia escura com equação de estado constante. (b) Modelo de energia escura com equação de estado $w = w_0 + (1 - a)w_a$. Figura retirada da Ref. [77].

EE é representada pela constante cosmológica, por um fluido com equação de estado $w(z) = w$ e por um fluido com equação de estado $w = w_0 + (1 - a)w_a$. Também são apresentados os

contornos de confiança dos parâmetros mais representativos destes três modelos nas Figs. 2.3 e 2.4.

2.3 Teoria de Perturbações Cosmológicas

Um universo estritamente homogêneo e isotrópico, representado pelo elemento de linha de FLRW (2.2), não permitiria a conformação das estruturas como estrelas, galáxias, aglomerados e superaglomerados de galáxias e, em escalas ainda maiores, *voids* e estruturas filamentosas que são observadas hoje. As propriedades de simetria que possui o espaço assim descrito, implica que todos os pontos e as direções são equivalentes, portanto, não haveria razão alguma para que a matéria se aglomerasse e formasse estruturas em regiões particulares. Esta descrição é válida ao trabalharmos em escalas suficientemente grandes, onde os efeitos de inhomogeneidades locais possam ser desprezados. Nesta seção estudaremos a teoria de perturbações cosmológicas dentro do marco da TRG, evidenciando o comportamento do crescimento local das perturbações de matéria em cada era do universo.

A principal complicação que surge no estudo das perturbações cosmológicas do ponto de vista relativístico é a arbitrariedade da escolha do sistema de coordenadas. Os observadores fundamentais que podiam ser considerados dentro do contexto de um espaço homogêneo e isotrópico não têm mais uma contrapartida quando a métrica é perturbada e as simetrias mencionadas são perdidas. Quando o espaço não satisfaz o PC, qualquer escolha de coordenadas é equivalente. Esta liberdade na escolha das coordenadas para descrever o espaço-tempo, conhecida como escolha de calibre, pode produzir perturbações de densidade fictícias ou inclusive ocultar perturbações reais. Por este motivo, é importante definir quantidades que sejam invariantes sob transformações de coordenadas (chamadas transformações de calibre). Na Fig. 2.5, mostramos uma representação pictórica destes efeitos fictícios produzidos pelas diferentes escolhas de coordenadas [79, 80].

O estudo do crescimento das estruturas em cosmologia começa com uma perturbação da métrica de FLRW,

$$ds^2 = [\bar{g}_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta}(x^\gamma)] dx^\alpha dx^\beta, \quad (2.42)$$

onde $\bar{g}_{\alpha\beta}$ representa a métrica de *background* FLRW (2.2) e $\delta g_{\alpha\beta}(x^\gamma)$ a perturbação que é dependente das coordenadas espacio-temporais. Para um espaço tridimensional plano, a métrica não perturbada em termos do tempo conforme η ($d\eta = dt/a$) é escrita como:

$$\bar{g}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = a^2(\eta)(d\eta^2 - \delta_{ij} dx^i dx^j). \quad (2.43)$$

Em relação à parte perturbativa da métrica, esta pode ser decomposta em perturbações escalares, vetoriais e tensoriais. Esta classificação é realizada levando em conta as simetrias da métrica $\bar{g}_{\alpha\beta}$. Ou seja, as quantidades perturbativas se transformam da mesma maneira que são transfor-

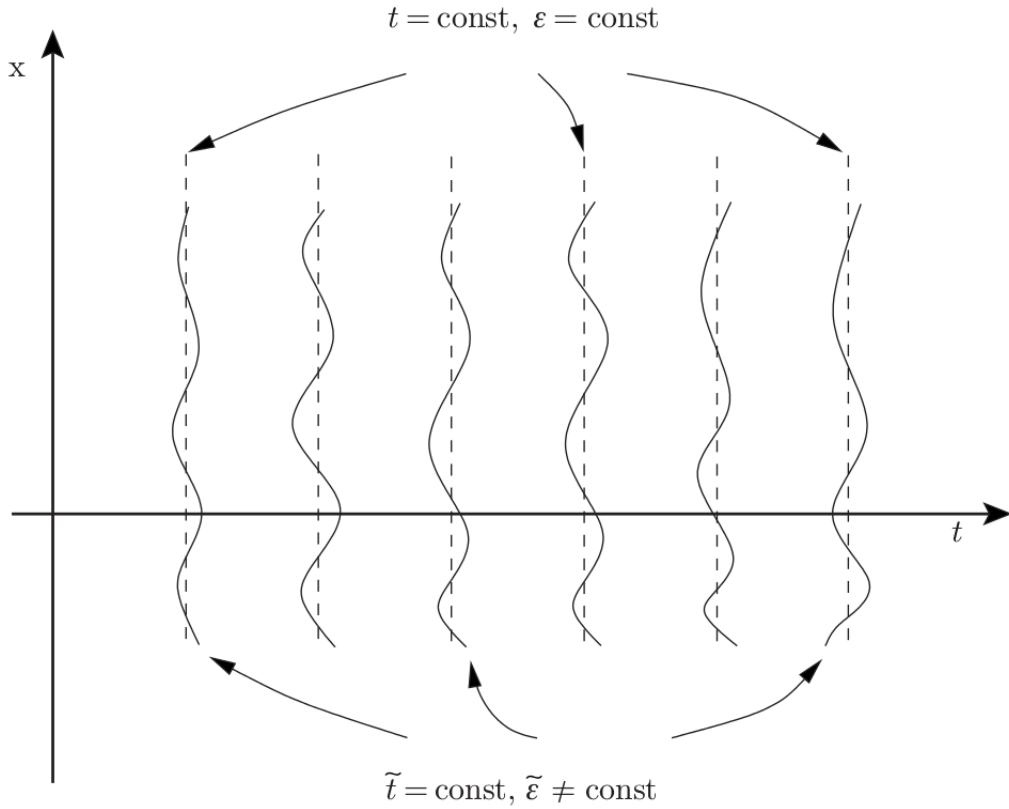


Figura 2.5: Representação de perturbações fictícias geradas por uma transformação de coordenadas. Figura retirada da referência [80].

mados os vetores e tensores sob o grupo de rotações em três dimensões $SO(3)$ ou permanecem invariantes para o caso dos escalares. Pode ser facilmente mostrado que sob rotações em três dimensões as componentes do tensor métrico se comportam como:

$$\delta g_{00} \rightarrow \text{escalar}, \quad \delta g_{0i} \rightarrow \text{vector}, \quad \delta g_{ij} \rightarrow \text{tensor}. \quad (2.44)$$

Com estas características do tensor métrico podemos fazer uma decomposição irredutível das suas componentes da seguinte forma [79, 80]:

A componente δg_{00} é escrita como

$$\delta g_{00} = 2a^2 \phi, \quad (2.45)$$

onde ϕ é um escalar sob rotações no espaço tridimensional. As componentes δg_{0i} que em conjunto se transformam como um vetor, podem ser escritas, baseados no teorema de Helmholtz, como a soma de um termo irrotacional e um termo de divergente nulo. Para este fim, utilizamos a função escalar B e a função vetorial S_i ,

$$\delta g_{0i} = a^2 (B_{,i} + S_i), \quad (2.46)$$

onde a vírgula representa a derivada com respeito às coordenadas espaciais, ou seja, $B_{,i} = \nabla_i B$. Desta forma, o termo $B_{,i}$ possui rotacional nulo. Para o termo S_i impomos a condição de divergente nulo, $S^i_{,i} = 0$. Para o caso das componentes espaciais do tensor métrico perturbado, escrevemos

$$\delta g_{ij} = a^2(2\psi\delta_{ij} + 2E_{,ij} + F_{j,i} + F_{i,j} + h_{ij}). \quad (2.47)$$

Nesta expressão, as funções ψ e E são escalares, F_i é um vetor de divergente nulo ($F^i_{,i} = 0$) e h_{ij} é um 3-tensor simétrico de traça nula e transverso, isto é:

$$h^i_{,i} = 0, \quad h^i_i = 0. \quad (2.48)$$

Cada uma destas perturbações se relaciona com um fenômeno físico, a saber:

Perturbações escalares: este tipo de perturbações caracterizadas pelas funções ϕ , ψ , B e E são induzidas pelas inomogeneidades da densidade de matéria. Evidenciam a instabilidade gravitacional e conduzem à formação de estruturas no Universo.

Perturbações vetoriais: são descritas pelas funções S_i e F_i e estão associadas aos movimentos rotacionais dos fluidos. Estas perturbações decaem rapidamente e para ser observadas hoje precisariam ter uma amplitude bastante grande no universo primordial, o que não é compatível com o universo observado.

Perturbações tensoriais: descrevem as ondas gravitacionais, as quais correspondem aos graus de liberdade do campo gravitacional. As duas componentes independentes do tensor h_{ij} representam os modos de oscilação das ondas gravitacionais.

Estes três tipos de perturbações estão desacopladas a primeira ordem e a sua evolução é independente, podendo assim, serem estudadas separadamente [80]. Nesta tese, analisaremos unicamente as perturbações escalares.

2.3.1 Transformações de calibre

Vamos explorar o comportamento do tensor métrico perturbado, descrito na seção anterior, ao considerarmos somente perturbações escalares e uma transformação de coordenadas da forma:

$$x^\alpha \rightarrow \hat{x}^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha, \quad (2.49)$$

sendo ξ^α uma função infinitesimal do espaço e do tempo que descreve a transformação de coordenadas. Considerando a lei de transformação de um tensor, dada a mudança de coordenadas na Eq. (2.49), temos:

$$\hat{g}_{\alpha\beta}(\hat{x}^\rho) = \frac{\partial x^\gamma}{\partial \hat{x}^\alpha} \frac{\partial x^\delta}{\partial \hat{x}^\beta} g_{\gamma\delta}(x^\rho) \simeq \bar{g}_{\alpha\beta}(x^\rho) + \delta g_{\alpha\beta} - \bar{g}_{\alpha\delta} \xi^\delta_{,\beta} - \bar{g}_{\delta\beta} \xi^\delta_{,\alpha} \quad (2.50)$$

onde somente são considerados termos de primeira ordem. Nesta equação, podemos considerar que nas novas coordenadas (lado esquerdo), o tensor métrico é a soma de um termo de *background* e uma perturbação, ou seja,

$$\hat{g}_{\alpha\beta}(\hat{x}^\rho) = \bar{g}_{\alpha\beta}(\hat{x}^\rho) + \delta\hat{g}_{\alpha\beta}. \quad (2.51)$$

Com esta expressão e fazendo uma expansão em série de Taylor que relacione os termos de *background* em ambos os sistemas de coordenadas,

$$\bar{g}_{\alpha\beta}(x^\rho) \simeq \bar{g}_{\alpha\beta}(\hat{x}^\rho) + \bar{g}_{\alpha\beta,\gamma}\xi^\gamma, \quad (2.52)$$

obtemos a lei de transformação de um tensor, dada a transformação de calibre (Eq. (2.49)),

$$\delta g_{\alpha\beta} \rightarrow \delta\hat{g}_{\alpha\beta} = \delta g_{\alpha\beta} - \bar{g}_{\alpha\beta,\gamma}\xi^\gamma - \bar{g}_{\gamma\beta,\alpha}\xi^\gamma - \bar{g}_{\alpha\gamma,\beta}\xi^\gamma. \quad (2.53)$$

De maneira similar, podem ser obtidas as leis de transformação das perturbações de quadri-escalares e quadri-vetores. Ressaltamos que apesar de uma transformação de calibre ser expressada como uma mudança de coordenadas, ela não vincula diferentes observadores no mesmo espaço-tempo, mas sim dois espaço-tempos distintos: o espaço-tempo homogêneo e isotrópico e o espaço-tempo perturbado visto pelo mesmo observador [79].

O vetor ξ^α pode ser expandido em termos de uma parte temporal ξ^0 e de uma parte espacial dividida em um termo irrotacional, ξ_\perp^i , e um termo de divergente nulo, ζ_i ,

$$\xi^\alpha \equiv (\xi^0, \xi^i), \quad \xi^i = \xi_\perp^i + \zeta_i \quad (2.54)$$

sendo ζ um 3-escalar.

Das leis de transformação (2.53) e considerando unicamente perturbações escalares do tensor métrico,

$$ds^2 = a^2[(1 + 2\phi(\eta, x^i))d\eta^2 + 2B_{,i}(\eta, x^i)dx^i d\eta - ((1 - 2\psi(\eta, x^i))\delta_{i,j} - 2E_{,ij}(\eta, x^i))dx^i dx^j], \quad (2.55)$$

obtemos o comportamento das funções $\phi(\eta, x^i)$, $\psi(\eta, x^i)$, $E(\eta, x^i)$ e $B(\eta, x^i)$ sob uma transformação de calibre (2.49),

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \tilde{\phi} = \phi - \frac{1}{a}(a\xi^0)', & B &\rightarrow \tilde{B} = B + \zeta' - \xi^0, \\ \psi &\rightarrow \tilde{\psi} = \psi - \frac{a'}{a}\xi^0, & E &\rightarrow \tilde{E} = E + \zeta. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Como podemos observar, a transformação das quantidades escalares da métrica depende, exclusivamente, das funções escalares ξ^0 e ζ da mudança de coordenadas. Nós podemos escolher apropriadamente estas funções, de tal forma que duas das perturbações escalares sejam nulas, sendo esta condição que define a nossa escolha de calibre.

Neste pesquisa, trabalharemos no chamado calibre longitudinal ou calibre Newtoniano conforme. Esta classe de coordenadas está definida pela condição de $E = 0$ e $B = 0$, deixando as perturbações escalares descritas pelos potenciais ϕ e ψ . Neste calibre, os observadores estão fixos a pontos no referencial não perturbado e, conseqüentemente, eles detectarão o campo de velocidades das partículas caindo nos poços de potenciais gerados pelas sobredensidades de matéria. Uma das principais vantagens deste calibre é que as equações dinâmicas se reduzem à gravitação newtoniana no limite de escalas menores ao horizonte de Hubble [79, 80].

2.3.2 Dinâmica das perturbações escalares

Para analisar a dinâmica das perturbações de matéria ou perturbações escalares, consideramos a perturbação das ECE de primeira ordem das funções definidas na seção anterior e das velocidades peculiares δu^α das partículas no espaço-tempo perturbado. Temos então que a relação entre o tensor de Einstein e o TME é

$$\delta G_\beta^\alpha = 8\pi G \delta T_\beta^\alpha. \quad (2.57)$$

O processo de calcular o tensor de Einstein perturbado é tedioso, mas não apresenta complicação alguma. As ECE perturbadas em termos dos potenciais escalares são:

$$\nabla^2 \psi - 3\mathcal{H}(\psi' + \mathcal{H}\phi) = 4\pi G a^2 \delta T_0^0, \quad (2.58)$$

$$(\psi' + \mathcal{H}\phi)_{,i} = 4\pi G a^2 \delta T_i^0, \quad (2.59)$$

$$[\psi'' + \mathcal{H}(2\psi + \phi)' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\phi + \frac{1}{2}\nabla^2(\phi - \psi)]\delta_j^i - \frac{1}{2}(\phi - \psi)_{,ij} = -4\pi G a^2 \delta T_j^i, \quad (2.60)$$

onde $\mathcal{H} \equiv (1/a)da/d\eta = aH$ é o parâmetro de Hubble conforme e a linha representa a derivada com respeito ao tempo conforme.

Para definir o conteúdo material, perturbamos a equação de um fluido perfeito[¶],

$$T_\beta^\alpha = (\bar{\rho} + \bar{p})u^\alpha u_\beta - \bar{p}\delta_\beta^\alpha, \quad (2.61)$$

assumindo que o fluido perturbado continua sendo do tipo perfeito (não consideraremos termos por fluxo de calor ou cisalhamento viscoso), temos:

$$\delta T_\beta^\alpha = (\delta\rho + \delta p)u^\alpha u_\beta + (\bar{\rho} + \bar{p})(\delta u^\alpha u_\beta + u^\alpha \delta u_\beta) - \delta p \delta_\beta^\alpha. \quad (2.62)$$

Levando em conta que a quadri-velocidade no universo homogêneo é $\bar{u}_\alpha = (a, 0, 0, 0)$ e que a

[¶] Forma do fluido compatível com o PC e utilizada no estudo da dinâmica do universo de FLRW sem perturbar.

parte espacial da perturbação da quadri-velocidade é $\delta u_i = av_i$, sendo $v^i = dx^i/d\eta$, obtemos as componentes do TME perturbado:

$$\delta T_0^0 = \delta\rho, \quad \delta T_i^0 = (\bar{\rho} + \bar{p})av_i, \quad \delta T_j^i = \delta p\delta_j^i. \quad (2.63)$$

Combinando a Eq. (2.60) com o fato que a parte espacial do TME é diagonal (2.63), temos

$$(\phi - \psi)_{,ij} = 0, \quad (2.64)$$

concluindo que os dois potenciais escalares são iguais, $\phi(\eta, x^i) = \psi(\eta, x^i)$.

Dado que a pressão p do fluido depende da sua densidade ρ e da sua entropia S , podemos escrever a perturbação da pressão como:

$$\delta p(\rho, S) = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \delta\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_\rho \delta S. \quad (2.65)$$

Ao considerarmos unicamente perturbações adiabáticas ($\delta S = 0$) e utilizando a igualdade dos potenciais escalares ($\phi = \psi$), reescrevemos as ECE no nível perturbativo em termos da equação de estado w e da velocidade do som $c_s^2 \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S = \frac{\delta p}{\delta \rho}$,

$$\nabla^2\psi - 3\mathcal{H}(\phi' + \mathcal{H}\phi) = 4\pi G a^2 \delta\rho, \quad (2.66)$$

$$(\phi' + \mathcal{H}\phi)_{,i} = 4\pi G a^2 (1 + w)\bar{\rho}v_i, \quad (2.67)$$

$$[\phi'' + 3\mathcal{H}\phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\phi] = 4\pi G a^2 c_s^2 \delta\rho. \quad (2.68)$$

A Eq. (2.67) motiva a interpretação do termo $(\phi' + \mathcal{H}\phi)$ como o potencial do campo de velocidades v_i . Desta forma, podemos escrever o campo de velocidades como:

$$v_i = \nabla_i v \quad (2.69)$$

onde v é um campo escalar tridimensional. Definimos o divergente do campo de velocidades,

$$\theta \equiv \nabla^i v_i \quad (2.70)$$

e também o contraste de densidade δ como:

$$\delta(\eta, x^i) \equiv \frac{\delta\rho(\eta, x^i) - \bar{\rho}(\eta)}{\bar{\rho}(\eta)}, \quad (2.71)$$

sendo esta última a principal quantidade que utilizaremos para descrever as perturbações de matéria. No capítulo 5, exploramos em detalhe a utilidade desta quantidade perturbativa e centramos nossos esforços no cálculo das quantidades que dela se derivam.

A partir deste momento, estudaremos o caso particular das perturbações de matéria não relativística, portanto, assumimos $w = 0$, o que simplificará consideravelmente as expressões. Tomando a equação de continuidade $\nabla_\mu T_\nu^\mu = 0$ para $\nu = 0$, encontramos

$$\delta' + 3\mathcal{H}c_s^2\delta = -(\theta - 3\phi') \quad (2.72)$$

e para o divergente da equação de continuidade com $\nu = i$, obtemos

$$\theta' + \mathcal{H}\theta = -\nabla^2(c_s^2\delta) - \nabla^2\phi. \quad (2.73)$$

Até este ponto, obtivemos todas as expressões matemáticas necessárias (Eqs. (2.66)-(2.68), (2.72) e (2.73)) para estudar o comportamento das perturbações cosmológicas em um universo em expansão. Para encontrar as soluções destas equações é útil trabalhar no espaço de Fourier, lembrando que podemos expandir uma função em termos de ondas planas com seu respectivo modo de Fourier da seguinte forma:

$$f(\vec{r}, t) = \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} f_k(t) d^3k. \quad (2.74)$$

Devido à linearidade destas equações, as exponenciais podem ser simplificadas e as equações diferenciais acima apresentadas tornam-se equações algébricas facilmente solucionáveis.

Limite de escalas menores que o horizonte de Hubble: vamos considerar escalas tal que o comprimento de onda próprio da perturbação seja muito menor que o horizonte de Hubble, ou seja, $\lambda_p \ll 1/H$ ou em termos do vetor de onda, $k \gg \mathcal{H}$ ($\lambda_p = 2\pi a/k$). Este é o limite Newtoniano das equações que governam a dinâmica das perturbações cosmológicas. Neste limite, os resultados são iguais aos resultados que se obtêm do ponto de vista clássico com a teoria Newtoniana da gravitação.

O divergente da Eq. (2.67) implica que $\phi'_k + \mathcal{H}\phi_k \simeq 0$, onde é utilizada a primeira EF escrita em termos do parâmetro de Hubble conforme ($4\pi G a^2 \bar{\rho} = 3/2\mathcal{H}^2$). Substituindo este resultado na Eq. (2.66), obtemos a equação de Poisson,

$$k^2\phi_k(\eta) = -4\pi G a^2 \bar{\rho}(\eta)\delta_k(\eta) = -\frac{3}{2}\mathcal{H}^2(\eta)\delta_k(\eta). \quad (2.75)$$

Tomando a derivada com respeito ao tempo conforme da equação de Poisson e substituindo-a na Eq. (2.73), obtém-se no limite considerado,

$$\delta'_k(\eta) = -\theta_k(\eta) - \frac{9}{2} \frac{\mathcal{H}(\eta)}{k^2} \delta_k(\eta) \left(2 \frac{\mathcal{H}'(\eta)}{\mathcal{H}(\eta)} + \frac{\delta'_k(\eta)}{\delta_k(\eta)} \right) \simeq -\theta_k(\eta), \quad (2.76)$$

sendo esta a equação de continuidade das perturbações na teoria Newtoniana. Neste limite, a Eq. (2.68) se reduz a

$$\theta'_k(\eta) = -\mathcal{H}(\eta)\theta + k^2 c_s^2 \delta_k(\eta) - k^2 \phi_k(\eta). \quad (2.77)$$

Finalmente, derivando a Eq. (2.76), e substituindo-a na expressão anterior, obtemos uma equa-

ção de segunda ordem para o contraste de densidade da matéria ($w = 0$)^{||},

$$\delta'' + \mathcal{H}\delta' + \left(c_s^2 k^2 - \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\right)\delta = 0. \quad (2.78)$$

A partir desta expressão podemos definir dois regimes. O primeiro acontece quando a escala das perturbações é suficientemente pequena tal que

$$c_s^2 k^2 - \frac{3}{2}\mathcal{H}^2 > 0, \quad (2.79)$$

onde o contraste de densidade apresenta oscilações amortecidas produto da pressão do fluido e da expansão do universo. Portanto, neste regime as perturbações não crescem.

O segundo regime, e mais importante no estudo do crescimento das estruturas, é alcançado quando $c_s k \ll \mathcal{H}$. Neste caso, a equação final que governa o crescimento das perturbações de matéria dentro do raio de Hubble é

$$\delta'' + \mathcal{H}\delta' - \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\delta = 0. \quad (2.80)$$

Este regime evidencia a instabilidade gravitacional, onde esta força domina sobre a pressão do fluido, permitindo modos crescentes das flutuações de matéria [79, 80]

A generalização da equação diferencial do contraste de densidade de matéria para o caso em que o universo está composto por mais de um tipo de fluido é

$$\delta_m'' + \mathcal{H}\delta_m' - \frac{3}{2}\Omega_m(a)\mathcal{H}^2\delta_m = 0, \quad (2.81)$$

ou em termos do tempo cósmico e o parâmetro de Hubble (H),

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m - \frac{3}{2}\Omega_m(a)H^2\delta_m = 0. \quad (2.82)$$

Esta expressão também é válida quando existe uma componente de EE descrita por um campo que não se aglomera nas escalas consideradas [81]. A Eq. (2.82) é a equação principal para estudar o crescimento das estruturas em um regime linear, considerada o limite Newtoniano da teoria relativística de perturbações.

Na Fig. 2.6, mostra-se a forma funcional do contraste de densidade com respeito ao fator de escala para um modelo Λ CDM e um modelo Einstein-de Sitter, bem como, alguns fotogramas de uma simulação de N-corpos para estes dois modelos. No modelo Λ CDM, devido ao efeito produzido pela EE, de aumentar o ritmo da expansão cósmica, o crescimento das perturbações é mais lento, amortecido pela rápida expansão recente. No modelo Einstein-de Sitter, a taxa de expansão é menor, beneficiando o crescimento das estruturas. Considerando um contraste de densidade atual similar para estes modelos, os diferentes ritmos de aglomeração implicam em diferentes amplitudes das perturbações no passado.

^{||} A partir deste ponto, vamos desconsiderar o sub-índice k .

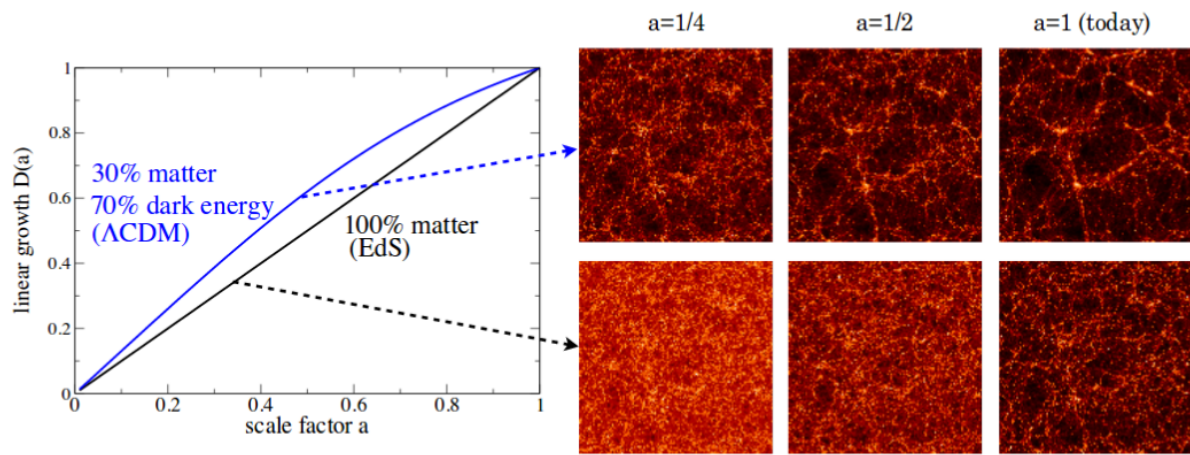


Figura 2.6: (a) Evolução do contraste de densidade em função do fator de escala para um modelo Λ CDM e um modelo Einstein-deSitter. As duas curvas encontram-se normalizadas ao seu valor atual ($\delta(a = 1) = 1$). (b) Fotogramas da simulação numérica de N-corpos Virgo *consortium* [82]. Os diferentes modos de crescimento para estes modelos são evidenciados. Uma quantidade de aglomeração atual aproximadamente igual nos dois modelos, implica grandes diferenças no passado. Figura retirada da referência [83].

Em capítulos posteriores, focaremos nossos esforços em solucionar esta equação com informação observacional das estruturas e discutiremos em detalhe as quantidades necessárias para resolvê-la.

2.3.3 Evidência Observacional da Matéria Escura

As pequenas inhomogeneidades observadas na RCF são as sementes que evoluem de um regime linear a um regime não linear, formando via instabilidade gravitacional a estrutura em grande escala da distribuição de matéria. A estrutura filamentar, os super aglomerados de galáxias (e as estrelas) observados hoje são o produto do colapso gravitacional de flutuações na densidade de matéria que no momento do desacoplamento entre a radiação e os bárions eram da ordem de 10^{-5} [76].

Da teoria de perturbações cosmológicas, apresentada na seção precedente, podemos encontrar as soluções da Eq. (2.82) para cada uma das épocas do Universo, onde o fator de escala e , conseqüentemente, o parâmetro de Hubble apresentam um comportamento específico dado na Eq.(2.35). Como estudado na seção 2.2.2 e mostrado na Fig. 2.2, o parâmetro de densidade da matéria (Ω_m) nas eras da radiação e da EE é aproximadamente nulo, enquanto, na era da matéria é próximo da unidade. Assim, a Eq. (2.82) é simplificada e o contraste de densidade possui solução analítica exata em cada era da história cósmica. O crescimento das perturbações acontece da seguinte forma [76, 80]:

$$\begin{aligned}
\delta(t) \propto \ln a(t) &\iff \text{Era da Radiação} \\
\delta(t) \propto a(t) &\iff \text{Era da Matéria} \\
\delta(t) \propto \text{const} &\iff \text{Era da Energia Escura.}
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Esse comportamento é mantido até atingir o regime não linear, $\delta \gtrsim 1$, após isto, o colapso desacopla-se da expansão cósmica.

A matéria bariônica permanece acoplada à radiação via dispersão Thomson e de Coulomb até a época do desacoplamento, apresentando estas duas componentes o mesmo comportamento. Derivando as equações da dinâmica das perturbações para um fluido de radiação ($w_r = c_s^2 = 1/3$), encontra-se a equação diferencial de um oscilador harmônico [79]

$$\delta_r''(\eta) + \frac{k^2}{3}\delta_r(\eta) = 0. \tag{2.84}$$

O crescimento do contraste de densidade da radiação (devido à atração gravitacional), eventualmente, é diluído pela força de pressão do fluido. O crescimento e decrescimento da perturbação da componente de radiação (devido à ação destas duas forças) acontecerá consecutivamente, fazendo com que o valor de δ_r oscile em torno de zero. A interação entre radiação e matéria comum impede que o contraste de densidade dos bárions, δ_b , cresça antes de se desacoplarem.

Se considerarmos que o crescimento das inhomogeneidades bariônicas aconteceu desde a época do desacoplamento ($\delta_{bdec} \sim 10^{-5}$) até hoje, teríamos:

$$\delta_{b0} = \frac{a_0}{a_{dec}}\delta_{bdec} \sim 10^{-2}, \tag{2.85}$$

o que não poderia explicar as estruturas não lineares observadas.

Esta contradição é um dos principais argumentos (de origem cosmológico) a favor da existência de um novo tipo de matéria que não é relativística (fria) e não interage com a radiação (escura), conhecida como matéria escura (ME). Essas características fazem que a ME não tenha pressão e não se acople aos fótons, o que permite seu colapso gravitacional muito antes do último espalhamento. Para que as estruturas observadas possam se formar, é necessário que o colapso das inhomogeneidades seja dominado pela ME sobre a matéria bariônica, de outra forma a atração gravitacional com os bárions (acoplados à radiação) impediria a aglomeração de matéria. Consequentemente, é de se esperar que $\Omega_{me} > \Omega_b$.

A nucleossíntese primordial de elementos leves coloca vínculos fortes na quantidade de bárions:

$$\eta \equiv \frac{n_b}{n_\gamma} = \frac{n_{b0}}{n_\gamma} \sim 10^{-10}, \quad \Omega_{b0}h^2 \sim 0.02. \tag{2.86}$$

A primeira relação em (2.86), vincula a razão entre o número de fótons e bárions, que modificará a maneira em que os fótons e bárions se desacoplam entre si. O segundo vínculo em (2.86), indica que a ME deve ser, principalmente, não bariônica (podendo haver uma pequena

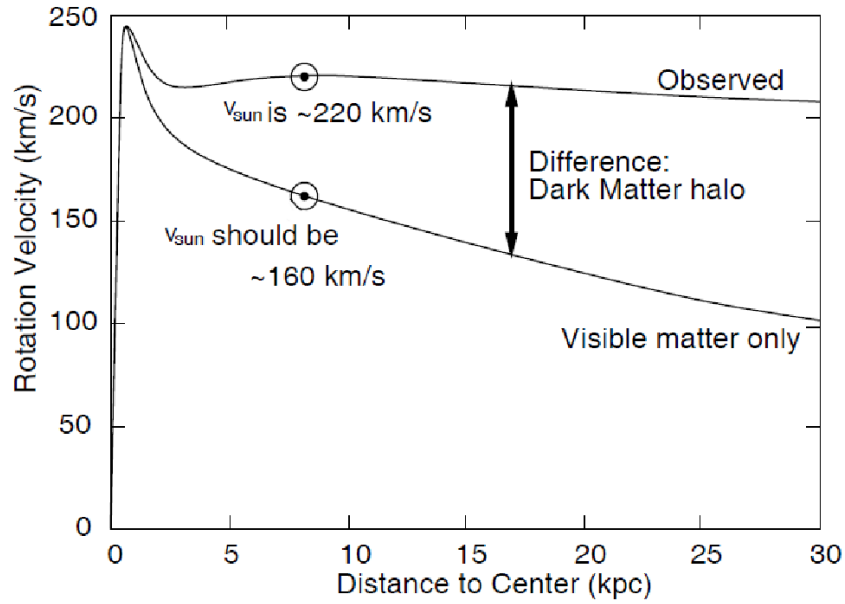


Figura 2.7: Curva da velocidade de rotação da Galáxia evidenciando o *plateau* induzido pela ME e o decaimento kepleriano. Figura retirada da referência [84].

componente escura bariônica, p.e., buracos negros primordiais) [76].

Por outro lado, a existência de ME não é, unicamente, sugerida por observações cosmológicas, mas também, por observações da dinâmica galáctica.

As evidências astrofísicas mais representativas são [76]:

- Curvas de rotação de galáxias espirais: o limite Newtoniano da TRG prediz perfis de velocidades keplerianos, determinados pela massa total dentro de uma esfera delimitada pelo raio da órbita, isto é,

$$v^2(r) = \frac{GM_{<r}}{r}, \quad (2.87)$$

onde,

$$M_{<r} = 4\pi \int_0^r \rho(r_1)r_1^2 dr_1. \quad (2.88)$$

O brilho superficial das galáxias espirais cai exponencialmente, o que indica que $M_{<r}$ é uma constante. Como consequência disso, a curva de rotação deve se comportar como $v \propto r^{-1/2}$. De maneira oposta, as observações mostram curvas de rotação que apresentam um *plateau* conforme aumenta a distância galactocêntrica (ver Figura 2.7). Se aceitamos a teoria de Newton (limite de campo fraco da TRG) como a teoria de gravitação correta, podemos inferir a existência de um tipo de matéria não luminosa [76, 84].

- Observações de raios-X em aglomerados: baseados nas medidas da emissão de raios-X de aglomerados de galáxias, pode-se estimar a sua massa. Quando estimada a quantidade

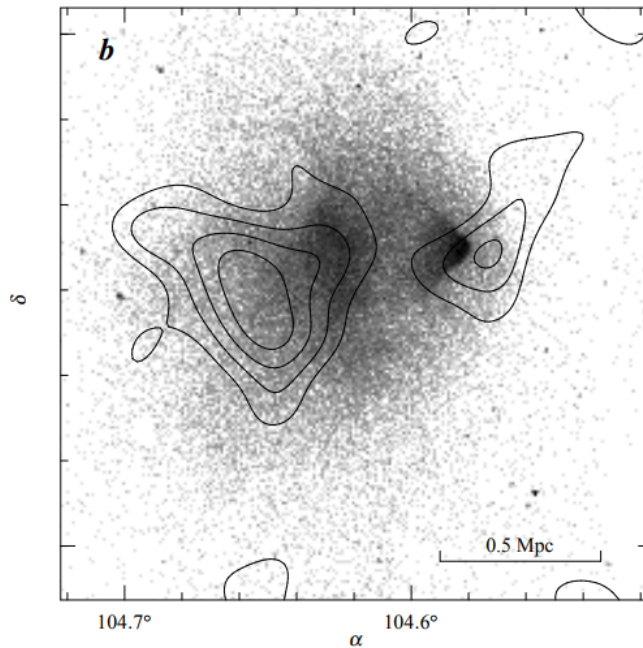


Figura 2.8: Distribuição de matéria no *Bullet cluster*. Os contornos representam a matéria total que contribui ao campo gravitacional do aglomerado e os pontos cinzas a quantidade de gás estimada a partir de observações em raios-X. Figura retirada da Ref. [87].

de matéria via métodos dinâmicos, é encontrado que os aglomerados possuem mais matéria do que pode ser observado. Sendo que a massa total do meio intergaláctico não é suficiente para explicar a massa faltante. Tem sido encontrados os seguintes vínculos:

$$M_{gas} \sim 11\%, \quad M_{estrelas} \sim 1\%, \quad (2.89)$$

o que evidencia que a ME contribui com 88% da massa do aglomerado [85, 86]. Na Fig. 2.8, mostramos a quantidade de matéria (gás) inferida a partir de observações em raios-X (pontos cinzas) e o centro de massa determinado a partir de lenteamento fraco (contornos).

2.4 Mecanismos da Aceleração Cósmica

2.4.1 Energia Escura

Como mencionado no texto, a aceleração do Universo pode ser explicada dentro do marco da TRG (ou seja, utilizando a Eq. (2.1)) devido ao efeito de uma nova componente com massa gravitacional ($\rho + 3p$) negativa, a chamada energia escura. No caso do modelo cosmológico padrão, este fluido corresponde à densidade de energia do vácuo representado nas equações pela constante cosmológica Λ . A generalização mais simples deste cenário, considera a inclusão de um campo escalar ϕ definido pela densidade Lagrangiana:

$$\mathcal{L}(\phi) = \frac{1}{2} \nabla_\mu \nabla^\mu \phi - V(\phi) \quad (2.90)$$

e o TME associado a esta densidade Lagrangiana

$$T_{\mu\nu}(\phi) = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\mathcal{L} \sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.91)$$

onde g é o determinante do tensor métrico e $V(\phi)$ o potencial do campo. Dadas as simetrias do espaço-tempo FLRW, a densidade e a pressão do campo são

$$\rho(\phi) = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V \quad \text{e} \quad p(\phi) = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V. \quad (2.92)$$

Produzindo uma fase acelerada quando $\rho + 3p < 0$, ou seja, $V(\phi) > \dot{\phi}^2$. Este campo assim descrito é chamado de campo de quintessência. Outros modelos vêm sendo explorados, como é o caso da chamada k -essência [88]. Deste ponto de vista -independentemente do campo que seja incluído na parte direita das ECE e com as equações assim escritas- a aceleração cósmica é caracterizada por uma componente dinâmica.

2.4.2 Gravidade Modificada

Outra abordagem proposta para explicar a aceleração cósmica é a modificação do lado esquerdo das ECE, sendo a atual fase acelerada do Universo uma consequência geométrica da variedade espaço-temporal.

As ECE,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (2.93)$$

podem ser obtidas a partir de um formalismo variacional ao minimizarmos a ação de Einstein-Hilbert,

$$S_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{EH} - 16\pi G \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \chi_i), \quad \mathcal{L}_{EH} = R, \quad (2.94)$$

sendo \mathcal{L}_m a densidade Lagrangiana de cada um dos campos de matéria considerados χ_i e R o escalar de Ricci. A partir desta formulação variacional, podemos construir uma teoria modificada da gravidade. Para tal fim, estendemos a densidade Lagrangiana adicionando outros invariantes geométricos ou campos extras de acople gravitacional. Estas teorias de gravidade modificada (GM) proporcionam equações de campo alternativas, o que implica que obteremos diferentes dinâmicas para os mesmos campos de matéria.

Existe uma grande quantidade de teorias de gravidade modificadas. Neste trabalho, apresentaremos uma breve descrição de duas das classes de teorias de GM mais estudadas na literatura e que serão importantes para o entendimento da análise apresentada no Capítulo 6. Na primeira, unicamente se utiliza a métrica para mediar a gravidade, e na segunda, outros campos são introduzidos acoplados aos termos geométricos. Estas classes de teorias não são indepen-

dentos, podendo reescrever mediante uma transformação conforme a primeira classe em termos da segunda [89].

Teorias tensoriais

Estas teorias utilizam unicamente a métrica para mediar a gravidade. A densidade Lagrangiana é escrita de maneira geral como:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(g_{\mu\nu}, \partial_\alpha g_{\mu\nu}, \partial_\alpha \partial_\beta g_{\mu\nu} \dots). \quad (2.95)$$

Um caso particular deste tipo de teorias é a TRG onde a ação de Einstein-Hilbert (2.94) pode incluir o termo referente à constante cosmológica.

A generalização natural desta Lagrangiana trata-se das chamadas teorias $f(R)$ que consideram uma função arbitrária do escalar de Ricci da seguinte forma:

$$\mathcal{L} = f(R) - 16\pi G \mathcal{L}_m. \quad (2.96)$$

As equações de campo desta densidade Lagrangiana são

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G T_{\mu\nu}}{f'(R)} + g_{\mu\nu} \frac{[f(R) - Rf'(R)]}{2f'(R)} + \frac{[\nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu} \square f'(R)]}{f'(R)}, \quad (2.97)$$

com $f'(R) \equiv df/dR$. O segundo membro desta equação interpreta-se como se fosse um TME efetivo, $8\pi G T_{\mu\nu}^{(ef)}$. No caso particular do universo de FLRW, as EF generalizadas obtidas a partir das Eqs. (2.97) têm a mesma forma que na TRG (2.26, 2.27) quando identificamos, $p \rightarrow p_{ef} = p_m + p_c$ e $\rho \rightarrow \rho_{ef} = \rho_m + \rho_c$. Onde p_m e ρ_m são a pressão e a densidade da matéria, e onde a pressão p_c e a densidade ρ_c associadas à curvatura são dadas por:

$$p_c = \frac{1}{8\pi G f'} \left[2 \frac{\dot{a}}{a} \dot{R} f' + \ddot{R} f'' + \dot{R}^2 + f''' - \frac{1}{2} [f - Rf'] \right], \quad (2.98)$$

$$\rho_c = \frac{1}{8\pi G f'} \left[\frac{1}{2} [f - Rf'] - 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{R} f'' \right]. \quad (2.99)$$

Esses termos podem induzir uma aceleração cósmica dependendo da função $f(R)$.

A extensão das teorias $f(R)$ consiste na inclusão de outros invariantes de curvatura, por exemplo o escalar de Kretschmann $R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ou o tensor de Ricci contraído consigo mesmo, $R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$. Nestes modelos, a densidade Lagrangiana possui uma função arbitrária destes invariantes geométricos,

$$\mathcal{L} = f(R, R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}, R^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta}) - 16\pi G \mathcal{L}_m. \quad (2.100)$$

Uma destas extensões da gravitação é a teoria de Gauss-Bonnet, onde a densidade Lagrangiana está dada por:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(R, \mathcal{G}), \quad \mathcal{G} = R^2 - 4R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} + R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (2.101)$$

Teorias escalar-tensoriais

Este tipo de teorias contêm campos extras acoplados aos termos geométricos da ação. O mecanismo mais simples para mediar a gravidade é um campo escalar. Portanto, a densidade Lagrangiana é escrita como:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(g_{\mu\nu}, \partial_\alpha g_{\mu\nu}, \partial_\alpha \partial_\beta g_{\mu\nu}, \dots, \phi, \partial_\mu \phi). \quad (2.102)$$

Um exemplo desta classe de teorias acopla o escalar de Ricci com uma função do campo tal que

$$\mathcal{L} = \varsigma(\phi)R - \varrho(\phi)\nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - 2V(\phi). \quad (2.103)$$

Nesta equação, $\varsigma(\phi)$, $\varrho(\phi)$ são funções arbitrárias do campo ϕ . As equações de campo para esta Lagrangiana são:

$$\varsigma(\phi)G_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu \nabla_\nu)\varsigma(\phi) = 8\pi GT_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^\phi \quad (2.104)$$

e a equação de movimento do campo

$$\varrho(\phi)\square\phi = V' - \frac{1}{2}\varsigma(\phi)\nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi - \frac{1}{2}\varsigma'(\phi)R. \quad (2.105)$$

O TME na Eq. (2.104) está definido como

$$T_{\mu\nu}^\phi \equiv \varrho \left[\nabla^\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \left(\nabla^\alpha \phi \nabla_\alpha \phi - 2\frac{V}{\varrho} \right) \right]. \quad (2.106)$$

Para deduzir as equações de campo neste classe de teorias, foi utilizado o formalismo métrico, isto é, que a variação da ação é realizada considerando somente as variações do tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Enquanto, as conexões $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ são as conexões de Levi-Chivita.

Como já foi mencionado, as teorias tensoriais e teorias escalar-tensoriais não são independentes, podendo escrever as primeiras como uma teoria escalar-tensorial com um acoplamento não mínimo entre o campo e o tensor de Ricci. Como caso particular, podemos expor que a minimização da ação para uma teoria com Lagrangiana

$$\mathcal{L} = R + f(\psi) + f'(\psi)(R - \psi), \quad (2.107)$$

implica que $\psi = R$, fazendo com que as equações de campo se obtenham minimizando a ação simplificada com densidade Lagrangiana

$$\mathcal{L} = R + f(R), \quad (2.108)$$

correspondente a uma teoria $f(R)$ arbitrária. Analogamente, este mecanismo pode ser utilizado levando em conta outros invariantes ($R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$, $R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta}$).

Da mesma maneira que têm sido adicionados campos escalares para mediar a gravidade, também podem ser consideradas teorias em que a mediação é levada em conta com campos vetoriais, as chamadas teorias vetorial-tensoriais, ou outras mais gerais como as teorias escalar-vetorial-tensoriais [89].

Temos, então, que o principal desafio deste tipo de teorias é explicar a dinâmica cósmica, porém, satisfazendo as fortes restrições impostas pelos testes de gravidade realizados no sistema solar. Isto significa que independentemente do mecanismo que descreve a aceleração cósmica, este deve ser totalmente atenuado (*screened*) em sistemas locais e densos, onde a gravitação Newtoniana funciona com grande precisão.

Existe uma grande variedade de modelos que em escalas suficientemente grandes reproduzem a dinâmica de *background* do modelo Λ CDM (explicam a aceleração cósmica) e satisfazem os vínculos da dinâmica no universo local. Porém, são esperadas anomalias no crescimento das estruturas em escalas intermediárias, o que permitirá a detecção de efeitos relevantes em escalas da ordem de Mpc detetáveis em levantamentos futuros [90].

Nos seguintes capítulos, estudaremos alguns métodos que permitem a reconstrução de funções a partir de dados observacionais, sem a necessidade de assumir um modelo cosmológico. Com esta informação pretendemos testar a validade das hipóteses fundamentais (como a homogeneidade e isotropia do Universo), a TRG (como teoria de gravitação), e também, distinguir entre modelos de GM.

3 Reconstruções Paramétricas e Não-Paramétricas

Neste capítulo, iremos descrever e estudar métodos estatísticos utilizados para extrair informação de um conjunto de dados, com o objetivo de obter uma curva contínua que represente o observável analisado. Este processo de análise, em que um conjunto de dados é modelado por uma curva, é chamado de análise de regressão ou reconstrução*. De maneira geral, podemos considerar dois tipos de métodos de regressão, conhecidos como métodos paramétricos e não paramétricos. No presente texto, iremos explorar as reconstruções não paramétricas. Feito isto, nos capítulos posteriores, utilizaremos as regressões não paramétricas para analisar as quantidades de interesse na descrição e evolução do Universo.

Para introduzir a análise de regressão (paramétrica e não paramétrica), assumimos que os dados observacionais ou observações são medidas de uma variável contínua e aleatória Y em n valores predeterminados de uma variável contínua e independente X . Sejam (X_i, Y_i) , $i = 1, \dots, n$, o conjunto de valores das variáveis X e Y depois da realização de um experimento (medição). A variável X é chamada de preditor ou variável independente†. A variável Y é chamada variável objetivo (*target* ou *object variable*) ou dependente‡ [91]. Assume-se que estas duas variáveis têm uma relação intrínseca

$$Y = m(X) + \epsilon, \tag{3.1}$$

onde m é uma função desconhecida e ϵ é uma variável aleatória gaussiana que caracteriza o erro das medições. Desse modo, os dados são o conjunto de valores (X_i, Y_i) , $i = 1, \dots, n$ criados a partir da relação (3.1),

* Em textos de estatística a modelagem de dados é chamada de análise de regressão, enquanto na literatura em que a sua aplicação envolve observáveis cosmológicos tem sido, comumente, utilizado o termo reconstrução.

† O termo variável independente pode ser em ocasiões inapropriado, uma vez que a variável X pode depender de outras variáveis ou inclusive os elementos de X podem depender deles mesmos (correlação).

‡ Novamente, esta nomenclatura pode ser inexata posto que a variável Y nem sempre depende completamente de X .

$$Y_i = m(X_i) + \epsilon_i, \quad (3.2)$$

sendo ϵ_i cada uma das realizações da variável ϵ com média zero, variância determinada e descorrelacionadas[§]. Portanto, o objetivo da análise de reconstrução é obter uma curva que represente de maneira confiável a função desconhecida m . Esta curva resultante \hat{m} é chamada de reconstrução, função ou curva de regressão ou estimador de m [91].

A determinação de uma metodologia adequada para o modelo \hat{m} dependerá dos pressupostos que podemos fazer sobre este modelo. Uma reconstrução paramétrica pressupõe que a forma de \hat{m} é conhecida exceto por um número finito de parâmetros desconhecidos, também chamados coeficientes de regressão. Formalmente, é assumido que existe um vetor $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^p$ e uma função $\hat{m}(X, \beta)$, tal que $m(X) = \hat{m}(X, \beta)$. Portanto, a reconstrução paramétrica consiste em estimar os valores das componentes do vetor β [92].

As reconstruções paramétricas cuja forma funcional pode ser escrita como

$$Y = \sum_{j=1}^p \beta_j y_j(X) \quad (3.3)$$

são chamadas regressões lineares, onde as funções $y_i(X)$ são arbitrárias e conhecidas. Esta linearidade refere-se à relação entre a variável dependente Y e os parâmetros da equação β_j , independentemente das funções $y_i(X)$. Nestes casos a solução de um sistema linear de equações provê os valores dos parâmetros. Por outro lado, quando a Eq. (3.3) possui uma forma geral em relação de Y e β , a regressão é dita não linear [91, 92].

A análise paramétrica consiste na utilização de uma metodologia adequada para determinar os parâmetros do modelo que melhor se ajustam aos dados, como por exemplo o método de mínimos quadrados ou de máxima verossimilhança. O resultado desta análise é uma curva selecionada, geralmente suave, a partir de uma família de curvas permitidas pelo modelo e que, de alguma maneira, descrevem os dados. Esta abordagem constitui o método mais explorado na análise de dados na ciência em geral, o que não difere do que é realizado na análise em cosmologia.

Outra abordagem que pode ser utilizada para a reconstrução de um observável é a técnica não paramétrica. Estes métodos permitem uma grande flexibilidade na forma em que se relacionam as variáveis X e Y e em particular não é assumida uma forma funcional específica para \hat{m} . Uma reconstrução não paramétrica supõe, unicamente, que a regressão pertence a alguma coleção infinita de funções [92]. Por exemplo, o conjunto de funções com condições de diferenciabilidade específicas (C^1, C^2, \dots, C^n). Embora as reconstruções paramétricas podem possuir estas características de diferenciabilidade, a forma funcional de \hat{m} é, consideravelmente, mais restrita.

Uma diferença importante entre os métodos de reconstrução paramétrico e não paramétrico é o respectivo grau de confiança nas informações sobre \hat{m} obtidas do experimentador e dos da-

[§] Como veremos mais adiante neste capítulo, alguns métodos levam em conta a possibilidade dos dados estarem correlacionados.

dos. Para especificar o modelo de reconstrução não paramétrico, o experimentador escolherá um espaço de funções apropriado que se acredita que contem a curva de regressão desconhecida m . Os dados são utilizados para determinar um elemento deste espaço de funções que é representativo da curva de regressão desconhecida. Contrariamente, em um modelo paramétrico, o experimentador escolhe uma possível família de curvas do espaço de todas as curvas e insere esta escolha no processo inferencial. A informação que os dados podem fornecer em relação ao desenvolvimento do modelo é restrita ao que pode ser extraído dos dados através dessa forma paramétrica assumida. Sendo assim, é esperado que os resultados obtidos a partir desta abordagem possuam um viés produto da escolha arbitrária da forma funcional que os representa [92].

As técnicas de regressão não paramétrica dependem mais dos dados para obter informações sobre \hat{m} do que a regressão paramétrica, evitando também o possível viés devido a uma escolha incorreta da forma funcional de \hat{m} . Em contrapartida, a utilização destas reconstruções implica uma perda na eficiência que produziria um modelo paramétrico adequado, bem como, a perda na interpretação direta dos resultados na ausência de parâmetros de um modelo.

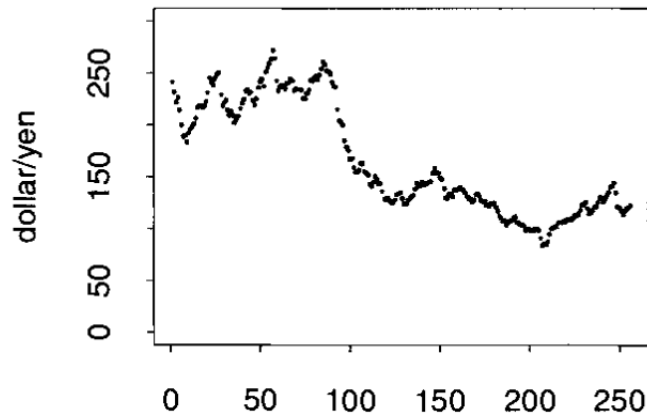
Em algumas situações, os modelos paramétricos apresentam vantagens. Os métodos inferenciais correspondentes são, em geral, eficientes. Além disto, os parâmetros podem ter algum significado físico que os torne facilmente interpretáveis. Outra vantagem fundamental dos métodos paramétricos refere-se à estimativa do erro quadrático esperado, que decai proporcional ao número de dados como n^{-1} . Este comportamento do erro é válido quando a forma funcional escolhida é apropriada. Caso isto não ocorra, a relação entre o erro e o número de dados não é mantida e os resultados obtidos com um método não paramétrico podem ser superiores [50, 48, 92]. O uso de um modelo paramétrico inapropriado pode ser perigoso no sentido de produzir inferências enganosas ou incorretas sobre a curva de regressão. Na Ref. [93], utilizou-se a metodologia de reconstrução não paramétrica para demonstrar que certos modelos paramétricos aplicados a um problema específico ignoravam características importantes do comportamento dos dados.

Para ilustrar de maneira breve as vantagens das reconstruções não paramétricas e a possibilidade de resultados peculiares quando utilizamos métodos paramétricos, apresentamos dois exemplos de análise de dados reais e simulados.

Exemplo 1

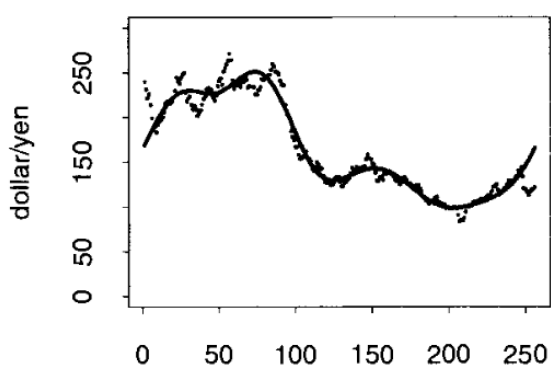
Considera-se o valor médio mensal da taxa de câmbio entre o dólar e o iene desde fevereiro de 1987 até maio de 1999. Estes dados estão aparentemente caracterizados por uma grande variação de período longo e uma variação fina de rápida oscilação (ver Fig. 3.1). Estas duas classes de variações evidenciam diferentes tendências econômicas e, portanto, a separação dos dados nestes dois tipos diferenciados de comportamento proporciona um entendimento mais claro do sistema.

Estes dados podem ser analisados com diferentes métodos. Um deles é o cálculo do valor médio local dos dados chamado média dinâmica (*moving average*). Contudo, a reconstrução

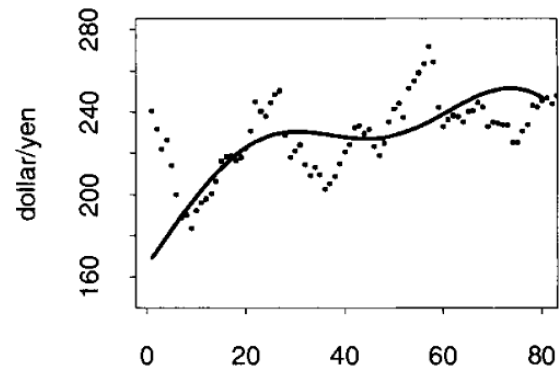


From February 1978 through May 1999

Figura 3.1: Valor médio mensal da taxa de câmbio entre o dólar e o iene entre fevereiro de 1978 e maio de 1999. Figura retirada da Ref. [91].



From February 1978 through May 1999



From February 1978 through Sept. 1984

Figura 3.2: Ajuste do valor médio mensal da taxa de câmbio entre o dólar e o iene em termos de séries de Fourier. O painel esquerdo corresponde aos meses de fevereiro de 1978 até maio de 1999. O painel direito corresponde aos primeiros 80 meses deste período. Figura retirada da Ref. [91].

\hat{m} resultante desta análise não é compatível com os dados, apresentando vales onde os dados mostram cristas e vice-versa. O comportamento peculiar da reconstrução pode ser causado ao ignorarmos conceitos teóricos como alguns ciclos econômicos com diferentes periodicidades. A existência de ciclos econômicos motiva a descrição destes dados em termos de séries de Fourier. Estas séries são facilmente interpretáveis e, geralmente, úteis para descrever fenômenos periódicos. Entretanto, os resultados obtidos com a expansão da taxa de câmbio em séries de Fourier não são essencialmente compatíveis com os dados. Estes resultados são mostrados na Fig. 3.2.

A análise destes dados pode ser melhorada ao aplicarmos o método não paramétrico conhecido como *smoothing splines* (ver seção 3.2). Contrariamente ao caso das séries de Fourier, a utilização de *splines* permite a variação contínua do grau de suavidade da curva \hat{m} . Os resultados

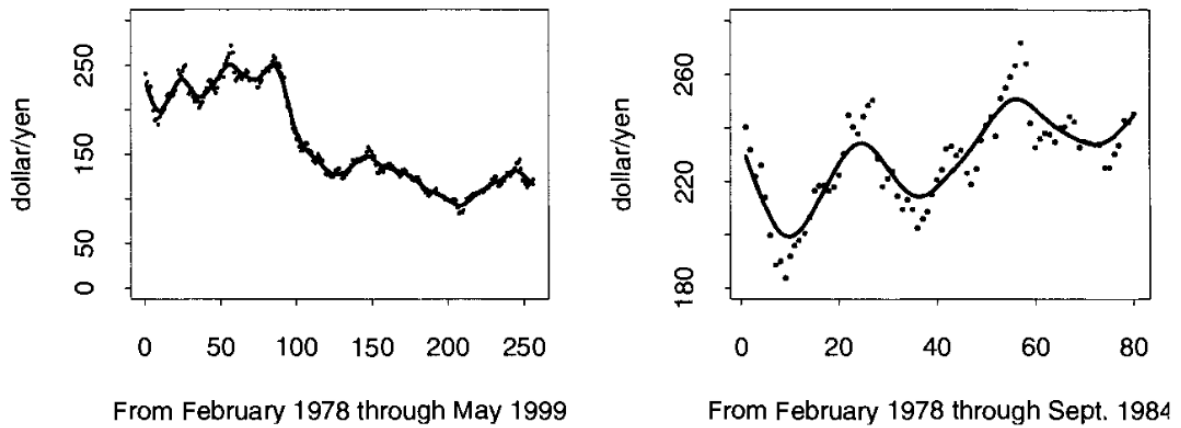


Figura 3.3: Ajuste do valor médio mensal da taxa de câmbio entre o dólar e o iene em termos de *splines*. O painel esquerdo corresponde ao meses de fevereiro de 1978 até maio de 1999. O painel direito corresponde aos primeiros 80 meses deste período. Figura retirada da Ref. [91].

da análise com *splines* são apresentados na Fig. 3.3 [91].

Exemplo 2

Neste exemplo, mostraremos que, em algumas situações, reconstruções paramétricas de \hat{m} podem produzir resultados anômalos, inclusive com dados gerados utilizando a mesma forma funcional da regressão proposta, em outras palavras, quando m e \hat{m} pertencem à mesma família de funções. Usualmente, polinômios e séries de Fourier (séries de funções trigonométricas) são utilizados para realizar regressões, embora elas não representem exatamente o fenômeno que gera os dados. Considera-se que as reconstruções finais com estas formas paramétricas descrevem aproximadamente o fenômeno não especificado (não se conhece a relação funcional real m que gera os dados).

Quando a função real m é conhecida suporíamos que a análise de regressão de \hat{m} deveria ser realizada com a mesma forma funcional, sem a necessidade de explorar outras parametrizações. Como veremos a seguir, esta afirmação não tem validade universal.

Consideremos um conjunto de dados simulados tal que a variável independente está igualmente espaçada,

$$X_i = 0.02i, \quad \text{com } (1 \leq i \leq 50) \quad (3.4)$$

e se relaciona com a variável dependente Y via um polinômio de sétimo grau,

$$Y_i = 0.5 + X_i - X_i^2 + X_i^3 - X_i^4 + X_i^5 - X_i^6 + X_i^7 + \epsilon_i, \quad (3.5)$$

onde ϵ_i é uma variável randômica com distribuição gaussiana $\mathcal{N}(0, 0.5^2)$ [¶]. Na Fig. 3.4(a), é mostrado o comportamento da Eq. (3.5) sem levar em conta o erro ϵ_i (medidas totalmente

[¶] $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$: distribuição normal com média μ e variância σ .

perfeitas) e na Fig. 3.4(b), é apresentado o conjunto de 50 dados simulados com as características anteriormente descritas. Realizando um análise de mínimos quadrados, é ajustado um polinômio de sétimo grau (esperado que represente os dados realisticamente) e um polinômio de segundo grau. Os melhores ajustes destas duas curvas são apresentados na Fig. 3.4(c) e (d).

Com o objetivo de estimar a predizibilidade destas duas regressões, são efetuadas 1000 realizações de conjuntos de 50 dados utilizando a Eq. (3.5). O estimador da predizibilidade das reconstruções utilizado é

$$E_{pred} = \frac{1}{1000} \sum_j \frac{1}{50} \sum_i (\hat{m}(X_i) - Y_i^{(j)})^2, \quad (3.6)$$

onde $Y_i^{(j)}$ é o i -ésimo dado da j -ésima realização. Este estimador corresponde ao erro quadrático médio do conjunto de dados e de todas as realizações. Portanto, valores menores de E_{pred} implicam uma melhor predizibilidade. Note que unicamente foram ajustados os polinômios de segundo e sétimo grau com o primeiro conjunto de dados simulados (Fig. 3.4(a)), e estas reconstruções foram utilizadas para estimar a confiabilidade na predição de dados futuros (simulações). O valor do estimador E_{pred} encontrado para o polinômio de sétimo grau é 0.288, enquanto para a função quadrática é 0.260. O que evidencia uma melhor predizibilidade para um polinômio diferente ao utilizado para gerar os dados e, inclusive, de menor grau.

Este exemplo mostra que embora os dados sejam gerados com uma equação conhecida, nem sempre esta mesma parametrização é aplicável para descrever o fenômeno [91].

Note-se que, embora os modelos de regressão paramétrica e não paramétrica representem abordagens distintas da análise de regressão, isso não significa que o uso de uma abordagem exclua o uso da outra. Técnicas de regressão não paramétrica podem ser utilizadas para testar a validade de um modelo paramétrico proposto. Inversamente, pode ser que a forma de uma curva de regressão obtida por técnicas não paramétricas sugerirá um modelo paramétrico apropriado para uso em estudos futuros. Assim, os procedimentos de regressão não paramétrica podem representar o estágio final de análise de dados ou simplesmente uma etapa exploratória ou confirmativa no processo de modelagem [92].

Desse modo, foi possível observar que as técnicas de regressão paramétrica e não paramétrica representam duas abordagens diferentes para o problema da análise de regressão. Modelos paramétricos requerem informações quantitativas muito específicas do experimentador sobre a forma de \hat{m} . Tais informações geram restrições sobre o que os dados podem nos fornecer sobre a função de regressão. Os modelos paramétricos são mais apropriadas quando há uma teoria ou conhecimento a priori que fornecem informação detalhada sobre o processo em estudo. Em contrapartida, as técnicas de regressão não paramétrica confiam no experimentador para fornecer apenas informações qualitativas sobre \hat{m} e permitir que os dados falem por si mesmos

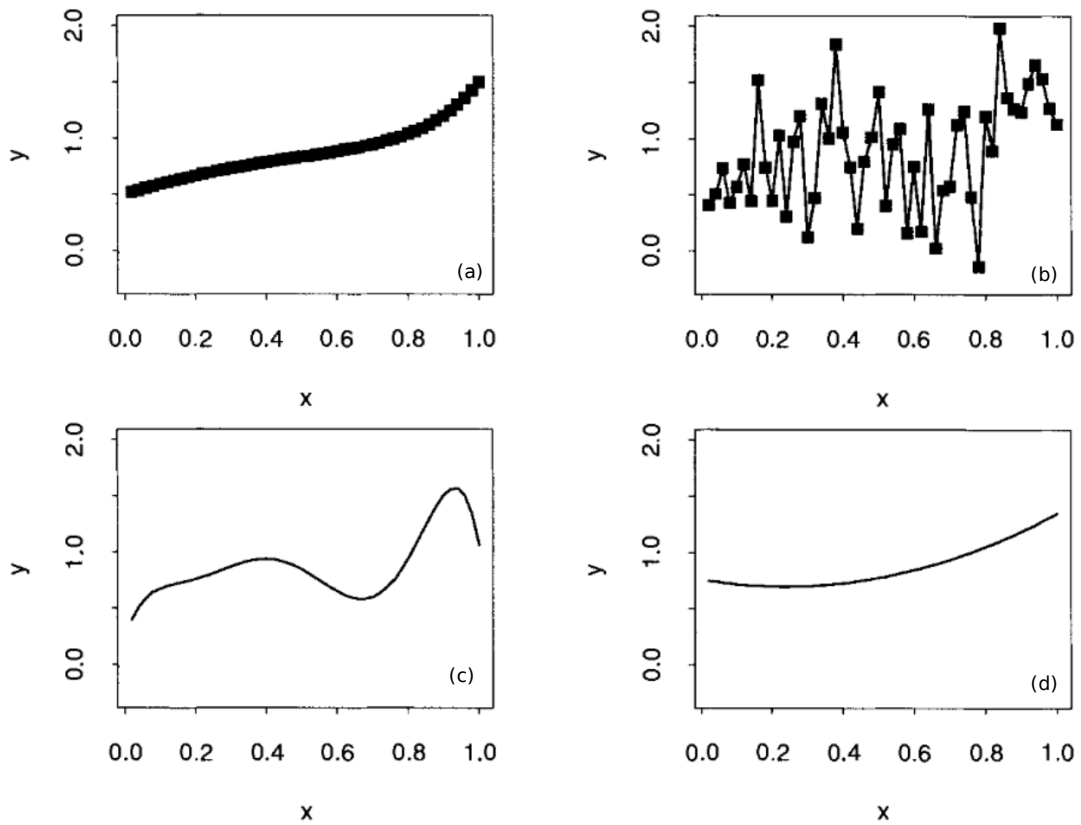


Figura 3.4: Simulação e ajuste de dados a partir de um polinômio de sétima ordem. (a) Corresponde ao polinômio utilizado para simular os dados sem incluir o erro da medida. (b) Conjunto de 50 dados simulados a partir da Eq. (3.5). (c) Ajuste de um polinômio de sétimo grau aos dados do painel anterior. (d) Ajuste de um polinômio de segundo grau aos dados do painel (b). Figura retirada da Ref. [91].

sobre a forma real da curva que representa o fenômeno. Além disto, as reconstruções não paramétricas permitem (geralmente) o controle contínuo do grau de suavidade que possui a regressão \hat{m} . Esses métodos são mais adequados para inferências em situações onde há pouca ou nenhuma informação prévia disponível sobre a curva de regressão [92, 94].

Cabe ressaltar que os métodos não paramétricos também possuem parâmetros que devem ser ajustados para otimizar a descrição dos dados. Contudo, e contrário aos métodos paramétricos, nestas reconstruções o número de parâmetros ou o valor deles não são quantidades de relevância fundamental na análise estatística. Usualmente, tanto o valor quanto o número de parâmetros são obtidos ao minimizar a função de risco ou erro quadrático médio (EQM) de \hat{m} definido por:

$$EQM[\hat{m}] = \mathbb{E}[(\hat{m}(x) - m(x))^2], \quad (3.7)$$

onde $\mathbb{E}[W]$ representa o valor médio de uma quantidade W . Esta expressão pode ser reescrita em termos do viés e da variância da reconstrução \hat{m} ,

$$EQM[\hat{m}(x)] = (\text{Viés}[\hat{m}](x))^2 + \text{Var}[\hat{m}(x)], \quad (3.8)$$

sendo o viés

$$\text{Viés}[\hat{m}(x)] \equiv \mathbb{E}[\hat{m}(x)] - m(x) \quad (3.9)$$

e a variância

$$\text{Var}[\hat{m}(x)] \equiv \mathbb{E}[(\hat{m}(x) - \mathbb{E}[\hat{m}(x)])^2]. \quad (3.10)$$

Na seção a seguir, apresentaremos alguns dos métodos não paramétricos mais utilizados na literatura, com ênfase nos métodos: Processos Gaussianos e Suavização Não Paramétrica

3.1 Análise das Componentes Principais

A Análise das Componentes Principais ou *Principal Component Analysis* (PCA) é um método de reconstrução proposto por Karl Pearson, em 1901. Este método consiste na transformação ortogonal de um conjunto de variáveis (parâmetros) que descrevem uma coleção de dados em um conjunto de parâmetros descorrelacionados na nova base. Este método torna-se essencialmente útil quando a dimensão da base de funções utilizadas na reconstrução é reduzida aos parâmetros que são fortemente vinculados pelas observações, ou seja, os parâmetros com menor erro. O número de parâmetros que devem ser utilizados é obtido pela minimização do risco da reconstrução (Eq. (3.8)). Abaixo explicaremos com mais detalhes em que consiste esta abordagem:

Seja $m(z)$ uma quantidade de interesse escrita em termos de um conjunto de funções arbitrárias $c_i(z)$ e β_i seus respectivos coeficientes, tal que

$$m(z) = \sum_{i=1}^N b_i c_i(z). \quad (3.11)$$

A análise estatística desta regressão com os dados observacionais permite o cálculo da matriz de covariância C_{β} dos parâmetros β_i . Assim, é possível encontrar uma base de funções ortonormais $e_i(z)$ tal que a expressão linear de $m(z)$ (3.11) seja reescrita de modo que os novos parâmetros α_i estejam descorrelacionados, isto é,

$$m(z) = \sum_{i=1}^N \alpha_i e_i(z), \quad (3.12)$$

onde a nova matriz de covariância \tilde{C}_{α} é diagonal. Devido à ortogonalidade das funções, os parâmetros α_i satisfazem a relação:

$$\alpha_i = \int m(z) e_i(z) dz. \quad (3.13)$$

Computacionalmente, a matriz de covariância pode ser calculada de maneira rápida com a rela-

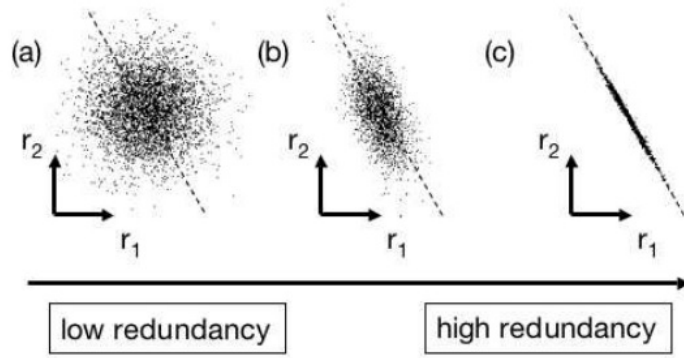


Figura 3.5: Espectro de possíveis redundâncias na descrição de um conjunto de dados utilizando dois parâmetros. Figura retirada da Ref. [95].

ção $C = F^{-1}$, onde F é a matriz de Fisher dos parâmetros,

$$F_{ij} = \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}(\vec{p})}{\partial p_i \partial p_j}, \quad (3.14)$$

e $\mathcal{L}(\vec{p})$ é a distribuição de probabilidade do conjunto de parâmetros \vec{p} . A informação dos modos melhor vinculados pelas observações está contida na matriz $\tilde{C}_{\vec{\alpha}}$. Esta informação permite escolher os modos que descreverão a função $m(z)$ reduzindo a dimensão do espaço paramétrico. Na Fig. 3.5, apresenta-se de maneira esquemática a funcionalidade de trabalharmos com coeficientes de regressão descorrelacionados, de tal forma que a expansão de $m(z)$ não utilize informação redundante. No painel (c) da Fig. 3.5, é desnecessária a regressão dos dados utilizando dois parâmetros visto que eles encontram-se altamente correlacionados.

Na Ref. [96], utiliza-se uma função constante definida por partes em N intervalos para modelar o parâmetro de desaceleração. Com esta abordagem, as funções c_i são definidas como $c_i(z) = 1$ dentro do intervalo z_i e $c_i(z) = 0$ fora dele. O valor do coeficiente β_i determina o valor de $m(z)$ em cada intervalo. No limite em que $N \rightarrow \infty$ a função $m(z)$ é totalmente arbitrária. Realizando o processo mencionado anteriormente com 157 dados de SN Ia [97], obtém-se uma nova base de funções com coeficientes descorrelacionados e utiliza-se os modos de menor variância. Na Fig. 3.6, mostra-se os componentes principais melhor vinculados para exemplificar o processo da mudança de base $c_i(z)$ para $e_i(z)$.

Um problema potencial do método de PCA em cosmologia é o efeito dominante em altos *redshifts* das componentes principais fortemente vinculadas em baixos *redshifts*. Este efeito produz estimativas enviesadas em altos z . Comumente, tem sido utilizada uma função descontínua definida por intervalos, embora, este problema mantenha-se para outras bases utilizadas [50].

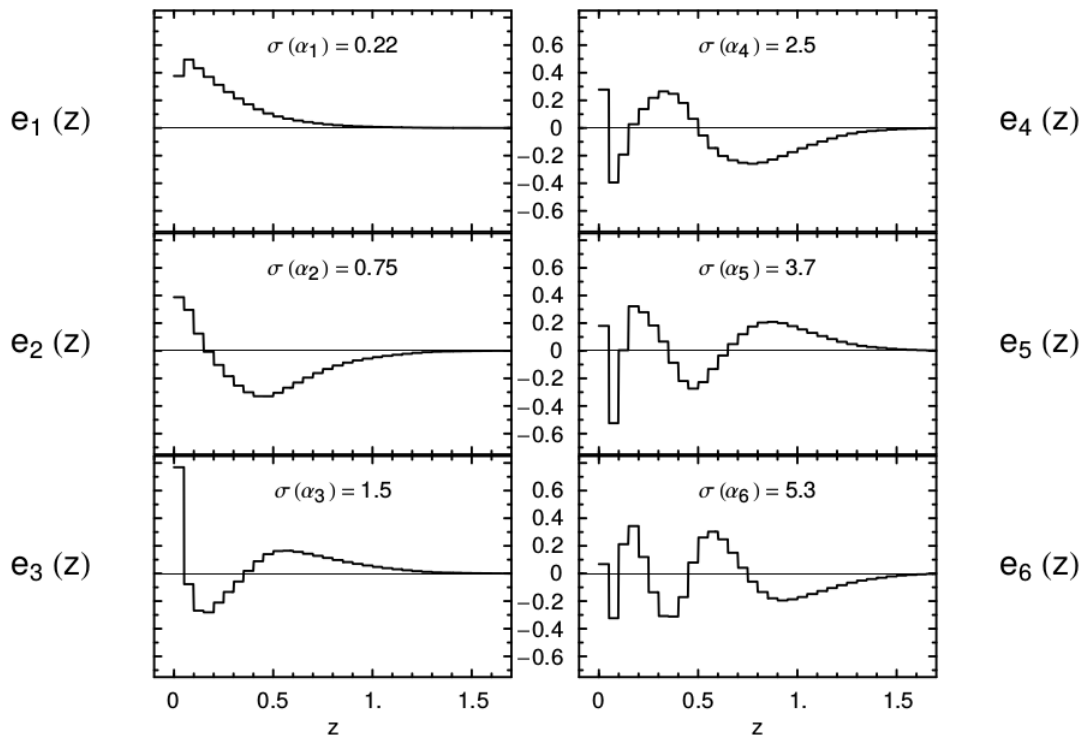


Figura 3.6: As seis componentes principais melhor vinculadas do parâmetro de desaceleração utilizando uma função constante definida por traços. Figura retirada da Ref. [96].

3.2 Splines

Um dos métodos não paramétricos mais utilizados na interpolação de dados é o *spline*. Este tipo de regressão consiste em uma função definida por partes, onde em cada um dos subintervalos, a função é representada por um polinômio. Devido a sua simples implementação e as suas propriedades de diferenciabilidade, é comum o uso do *spline* cúbico, ou seja, a definição de polinômios de terceiro grau em cada subintervalo. Este tipo de *spline* é realizado da seguinte maneira:

O primeiro passo consiste na definição do intervalo de reconstrução, isto é, o domínio da função $D = [z_{min}, z_{max}]$, sendo estes os valores mínimo e máximo da variável dependente. Em seguida, devem ser definidos os subintervalos em que é dividido o domínio D . Nos casos em que estes subintervalos são de igual tamanho, o *spline* é chamado de uniforme e quando isso não ocorre, o *spline* é não uniforme. A regressão é definida por traços

$$\hat{q}(z) = \begin{cases} p_0(z) = a_0(z - z_0)^3 + b_0(z - z_0)^2 + c_0(z - z_0) + d_0 & z \in [z_0, z_1) \\ p_1(z) = a_1(z - z_1)^3 + b_1(z - z_1)^2 + c_1(z - z_1) + d_1 & z \in [z_1, z_2) \\ \vdots & \vdots \\ p_{n-1}(z) = a_{n-1}(z - z_{n-1})^3 + b_{n-1}(z - z_{n-1})^2 + c_{n-1}(z - z_{n-1}) + d_{n-1} & z \in [z_{n-1}, z_n], \end{cases}$$

sendo $z_0 = z_{min}$, $z_n = z_{max}$, p_i o polinômio cúbico definido no intervalo i -ésimo e as constantes

d_i são os valores da função em cada ponto z_n . Os $n + 1$ limites dos n subintervalos (z_i) são conhecidos como nós (*knots*). Cada um destes polinômios está definido por 4 parâmetros (a_i , b_i , c_i e d_i), portanto a reconstrução \hat{q} terá um total de $4n$ coeficientes a serem determinados. Impondo a condição de continuidade da função, e sua primeira e segunda derivada contínuas,

$$p_{i+1}(z_{i+1}) = p_i(z_{i+1}), \quad (3.15)$$

$$p'_{i+1}(z_{i+1}) = p'_i(z_{i+1}), \quad (3.16)$$

$$p''_{i+1}(z_{i+1}) = p''_i(z_{i+1}), \quad (3.17)$$

que correspondem a $3(n - 1)$ vínculos sobre os $n - 1$ nós internos (z_i , $i \in [1, n - 1]$). Adicionalmente, impomos condições de fronteira no segundo e penúltimo nó, tal que

$$\hat{q}'''_0(z_1) = \hat{q}'''_1(z_1) \quad \text{e} \quad \hat{q}'''_{n-2}(z_{n-1}) = \hat{q}'''_{n-1}(z_{n-1}). \quad (3.18)$$

Com isto, o processo de regressão se reduz à determinação dos valores de \hat{q} em cada um dos nós, ou as componentes do vetor $\hat{Q} = \{d_0, \dots, d_n\} = \{q_i\}$. Finalmente, o vetor \hat{Q} é ajustado com os dados disponíveis.

O erro de interpolação para um *spline* cúbico tem limite superior proporcional à distância máxima entre nós consecutivos elevada à quarta potência e proporcional à quarta derivada da função com respeito à variável dependente. Este resultado implica que um maior número de nós produziria reconstruções de menor erro. Todavia, um incremento desmesurado do número de nós, ou de subintervalos, conduziria a uma função sobreajustada com excessivo número de parâmetros. Sendo que a melhor escolha do número de nós corresponderia a dados satisfatoriamente ajustados por polinômios cúbicos em cada um dos n intervalos. Esta escolha pode ser realizada testando vários valores de n .

Em conclusão, o método de *splines* constitui uma melhora significativa à utilização de funções definidas constantes por intervalos, a qual precisa de um maior número de intervalos para atingir a mesma ordem do erro da reconstrução.

3.3 Processos Gaussianos

Um Processo Gaussiano (*Gaussian Process*) (PG) é a generalização de uma distribuição gaussiana de uma variável aleatória para um espaço de funções. Seja f a função resultante de um PG. O valor da função em qualquer ponto x é uma variável aleatória de média $\mu(x)$ e variância $\text{Var}(x)$. O valor da função em um ponto do domínio x depende do valor de f em todos os outros pontos \tilde{x} do domínio. Como é intuitivo, esta dependência aumenta conforme a distância entre estes dois pontos diminui. Esta correlação está determinada pela matriz

$$\text{cov}(f(x), f(\tilde{x})) = k(x, \tilde{x}), \quad (3.19)$$

onde $k(x, \tilde{x})$ é uma função escolhida para representar a covariância. Com isto, a distribuição de funções fica determinada pelo valor médio de f e a covariância $k(x, \tilde{x})$,

$$\mu(x) = \mathbb{E}[f(x)], \quad (3.20)$$

$$k(x, \tilde{x}) = \mathbb{E}[(f(x) - \mu(x))(f(\tilde{x}) - \mu(\tilde{x}))], \quad (3.21)$$

e a variância num ponto x dada pelo valor $k(x, x)$. Este PG é escrito como

$$f(x) \sim \mathcal{GP}(\mu(x), k(x, \tilde{x})) . \quad (3.22)$$

Diferentes funções podem ser selecionadas como covariâncias desde que sejam simétricas com respeito aos seus dois argumentos e não negativas. A forma mais simples é o valor da distância entre os pontos x e \tilde{x} . Outras formas podem ser utilizadas, como uma exponencial quadrática

$$k(x, \tilde{x}) = \sigma_f^2 \exp\left(-\frac{(x - \tilde{x})^2}{2\ell^2}\right) . \quad (3.23)$$

Esta expressão tem a vantagem de ser infinitamente diferenciável para qualquer valor de x e \tilde{x} , o que é de grande importância ao reconstruirmos as derivadas de f . A Eq. (3.23) é definida de tal forma que depende de dois hiperparâmetros^{||}, cada um deles associado com uma característica de f . Como pode ser concluído com as definições acima mencionadas, o hiperparâmetro σ_f está fortemente associado ao erro da reconstrução. Enquanto o segundo hiperparâmetro, está mais relacionado com a suavidade de f .

Dado o conjunto de dados $\{\mathbf{Y}, \mathbf{X}\} = \{x_i, y_i\}$, a matriz de covariância entre os valores de \mathbf{X} está dada por $[K(\mathbf{X}, \mathbf{X})]_{ij} = k(x_i, x_j)$ e o conjunto pode ser descrito por um PG assumindo a validade da Eq. (3.2). Para um valor específico da variável \mathbf{X} , a função reconstruída corresponde a uma distribuição normal, nós adicionamos a matriz de covariância dos dados C à função de covariância escolhida tal que

$$\mathbf{y} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, K(\mathbf{X}, \mathbf{X}) + C) , \quad (3.24)$$

onde \mathcal{N} representa a distribuição gaussiana de uma variável aleatória e $\boldsymbol{\mu}$ o valor médio da função assumido a priori em cada ponto \mathbf{X} . Quando os dados são descorrelacionados, a matriz C terá forma diagonal com os valores das variâncias de cada dado σ_i^2 . Agora, seja \mathbf{f}^* os valores de f (desconhecidos) que nós queremos reconstruir e \mathbf{X}^* os respectivos valores da variável independente. Os PGs combinados dos dados considerados e dos valores que desejamos reconstruir são escritos como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{f}^* \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{\mu}^* \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} K(\mathbf{X}, \mathbf{X}) + C & K(\mathbf{X}, \mathbf{X}^*) \\ K(\mathbf{X}^*, \mathbf{X}) & K(\mathbf{X}^*, \mathbf{X}^*) \end{bmatrix}\right) . \quad (3.25)$$

^{||} Esta denominação é utilizada para enfatizar que a forma da função não está totalmente determinada por estes coeficientes.

Neste ponto, o processo de reconstrução se reduz ao cálculo da distribuição condicionada de f^* dado \mathbf{y} , $f^*|\mathbf{y}$. Para simplificar a notação, definimos $\tilde{K} \equiv K(\mathbf{X}, \mathbf{X}) + C$, $K^* \equiv K(\mathbf{X}, \mathbf{X}^*)$, $K^{**} \equiv K(\mathbf{X}^*, \mathbf{X}^*)$ e

$$K = \begin{bmatrix} \tilde{K} & K^* \\ K^{*T} & K^{**} \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Esta é uma matriz quadrada $(n + n^*) \times (n + n^*)$, onde n é o número de dados e n^* o número de pontos da função que queremos reconstruir. A distribuição de probabilidade conjunta é:

$$p(\mathbf{y}, f^*) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2} \sqrt{\det(K)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})^T, (f^* - \boldsymbol{\mu}^*)^T] K^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{y} - \boldsymbol{\mu} \\ f^* - \boldsymbol{\mu}^* \end{bmatrix} \right\}. \quad (3.27)$$

A partir desta expressão e utilizando elementos da álgebra matricial e as propriedades das distribuições gaussianas de várias variáveis, podemos calcular a distribuição marginalizada de \mathbf{y} ,

$$p(\mathbf{y}) = \int p(\mathbf{y}, f^*) df^* \quad (3.28)$$

e finalmente a distribuição de probabilidade condicional

$$\begin{aligned} p(f^*|\mathbf{y}) &= \frac{p(\mathbf{y}, f^*)}{p(\mathbf{y})} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n^*/2} \sqrt{\det(A)}} \exp \left[-\frac{1}{2} (f^* - \bar{f}^*)^T \text{cov}(f^*)^{-1} (f^* - \bar{f}^*) \right] \\ &= \mathcal{N}(\bar{f}^*, \text{cov}(f^*)), \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde

$$\bar{f}^* = \boldsymbol{\mu}^* + K^{*T} \tilde{K}^{-1} (\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) \quad (3.30)$$

e

$$\text{cov}(f^*) = K^{**} - K^{*T} \tilde{K}^{-1} K^*. \quad (3.31)$$

O erro da reconstrução, ou variância, corresponde aos valores da diagonal desta matriz^{**}.

Um aspecto importante que pode ser visto a partir destas equações é a dependência do valor esperado da função reconstruída \bar{f}^* e o valor médio $\boldsymbol{\mu}$ proposto a priori. Como veremos no capítulo seguinte, esta função média afeta grandemente os resultados. A abordagem mais conservadora é utilizar uma função constante ($\mu(x) = 0$).

Analisando a variância da reconstrução (elementos diagonais da Eq. 3.31), e visto que a covariância é definida positiva (3.23), ou seja, $K^{**} \geq 0$ e $K^* \geq 0$, o erro máximo é atingido quando $K^* \rightarrow 0$. Isto corresponde aos casos em que os pontos x^* em que f é reconstruída encontram-se longe de todas as observações [99].

Por último, é necessário conhecer os valores dos hiperparâmetros. Este processo pode ser

^{**} Para uma dedução exaustiva destas expressões, ver as Refs. [98, 52]

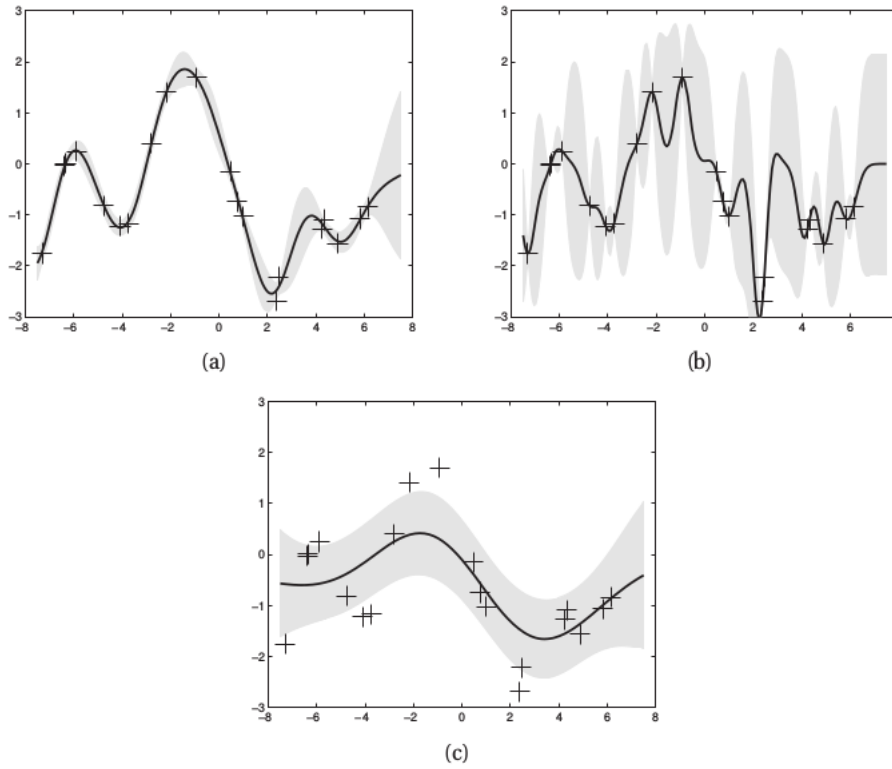


Figura 3.7: Efeito dos hiperparâmetros da Eq. (3.23) na reconstrução de uma função via Processos Gaussianos. A região sombreada corresponde ao intervalo de confiança de 1σ enquanto a linha sólida representa o valor esperado da reconstrução. Os valores dos hiperparâmetros e do erro na simulação dos dados são: $(l, \sigma_f, \epsilon) = (1, 1, 0.1)$ painel (a); $(l, \sigma_f, \epsilon) = (0.3, 1.08, 0.00005)$ painel (b); $(l, \sigma_f, \epsilon) = (3, 1.16, 0.89)$ painel (c). Figura retirada da Ref. [98].

realizado ao maximizarmos a função de verossimilhança (*likelihood*) das observações dada a matriz de covariância e o modelo *prior*. Esta distribuição de probabilidade é:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \sigma_f, \ell) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n^*/2} \sqrt{\det(\tilde{\mathbf{K}})}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})^T \tilde{\mathbf{K}}^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})\right]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Por motivos de eficiência computacional, é mais conveniente a maximização do logaritmo da equação anterior.

Obtidos os valores dos hiperparâmetros, podemos calcular o valor esperado da função reconstruída e a sua covariância com as Eqs. (3.30) e (3.31), respectivamente. Na Fig. 3.7, mostra-se o efeito que tem a variação dos hiperparâmetros da Eq. (3.23) para um conjunto de dados com distinto erro ϵ (assumido gaussiano). Na Fig. 3.7(a), os valores dos hiperparâmetros e do erro das observações são $(l, \sigma_f, \epsilon) = (1, 1, 0.1)$, obtendo um bom ajuste. Na Fig. 3.7(b), a reconstrução e a simulação de dados é feita com o conjunto $(l, \sigma_f, \epsilon) = (0.3, 1.08, 0.00005)$. Ainda nesta figura, o valor de l foi reduzido em 70%, o que produz uma curva mais acidentada. O pequeno valor de ϵ faz com que o valor médio da curva (linha sólida preta) seja finamente

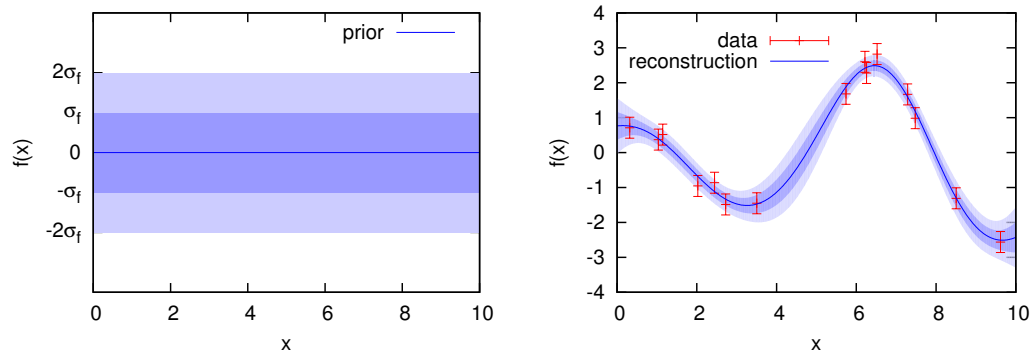


Figura 3.8: Comparação da função *prior* com a função *a posteriori* (reconstrução) para um conjunto de dados simulados. Figura retirada da Ref. [55].

compatível com os dados e que a variância da função nestes pontos seja mínima. Evidentemente, os hiperparâmetros (l, σ_f) não estão otimizados para esse conjunto de dados com erro $\epsilon = 0.00005$. Por último, na Fig. 3.7(c), os valores de l e ϵ são aumentados, produzindo uma curva de variação mais suave -o que está associado ao valor de l - e de maior variância.

Em suma, a reconstrução de uma função através de um PG é efetuada com os seguintes passos [55]:

- Seleção dos dados com seus respectivos erros ou, de maneira geral, sua matriz de covariância;
- Seleção da matriz de covariância entre os pontos da reconstrução (exponencial quadrática no caso apresentado neste texto);
- Escolha dos pontos do domínio em que vai ser reconstruída a função;
- Seleção de uma função *prior* $\mu(x)$. Com o objetivo de minimizar o viés da regressão, é recomendável utilizar uma função constante ($\mu(x) = 0$) devido à flexibilidade do método para se adaptar ao comportamento dos dados [55, 98];
- Maximização da distribuição de verossimilhança dos dados, Eq. (3.32), em função dos hiperparâmetros;
- Cálculo do valor esperado e da covariância de f^* com as Eqs. (3.30) e (3.31), respectivamente.

Uma comparação entre a função média *prior* e o resultado da reconstrução é apresentada na Fig. 3.8.

3.3.1 Derivadas de uma reconstrução via Processos Gaussianos

A derivada de uma função pode ser estimada considerando que ela é de novo um processo Gaussiano. Mantendo igual a covariância entre os dados, é necessário também calcular a covariância entre os pontos da função e da sua derivada, e a covariância entre os pontos da derivada em si. Estas covariâncias são obtidas pela diferenciação direta da matriz de covariância inicial como:

$$\text{cov}\left(f_i, \frac{\partial f_j}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial k(x_i, x_j)}{\partial x_j} \quad (3.33)$$

e

$$\text{cov}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}, \frac{\partial f_j}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 k(x_i, x_j)}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (3.34)$$

A primeira derivada é calculada com a distribuição conjunta dos dados \mathbf{y} e $\mathbf{f}^{*'}$ dada por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{f}^{*'} \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu} \\ \boldsymbol{\mu}^{*'} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{K} & K'^* \\ K'^*T & K''^{**} \end{bmatrix}\right), \quad (3.35)$$

sendo

$$[K'^*]_{ij} = \frac{\partial k(x_i, x_j^*)}{\partial x_j^*} \quad (3.36)$$

e

$$[K''^{**}]_{ij} = \frac{\partial^2 k(x_i^*, x_j^*)}{\partial x_i^* \partial x_j^*}. \quad (3.37)$$

Com estas expressões, o resultado final da reconstrução da derivada de \mathbf{f} é

$$\overline{\mathbf{f}^{*'}} = \boldsymbol{\mu}^{*'} + K'^*T \tilde{K}^{-1}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) \quad (3.38)$$

e

$$\text{cov}(\mathbf{f}^*) = K''^{**} - K'^*T \tilde{K}^{-1} K'^*. \quad (3.39)$$

Os mesmos hiperparâmetros obtidos na reconstrução de \mathbf{f}^* podem ser utilizados para a reconstrução da sua derivada. Isto devido ao fato que a distribuição de verossimilhança depende somente das observações e da função *prior* $\boldsymbol{\mu}$ e não da função que queremos reconstruir (ver Eq. (3.32)). O cálculo de derivadas de ordem superior realiza-se de maneira análoga à primeira derivada [55].

3.3.2 Funções de um PG e propagação de erros

Intuitivamente, poderíamos pensar que o cálculo de uma função arbitrária de uma reconstrução via PGs e suas derivadas $g(f(x), f'(x) \dots)$ corresponde ao cálculo direto da função e da propagação em quadratura de cada um dos erros envolvidos. Esta abordagem constitui uma boa aproximação de g quando os demais erros envolvidos são pequenos.

De maneira mais exata, para calcular uma função de uma reconstrução via PGs e suas derivadas, precisa-se do conhecimento da covariância entre as funções envolvidas. Ou seja, é necessária a informação correspondente à correlação entre $f^* = f(x^*)$, $f^{*'} = f'(x^*) \dots$ em cada ponto x^* em que reconstruiremos $g(x)$. As matrizes de covariância entre f e cada uma das suas derivadas $f^{(i)}$ (derivada i -ésima de f) em cada ponto x^* estão dadas por:

$$\text{cov}(f^{*(i)}, f^{*(j)}) = k^{(i,j)}(x^*, x^*) - K^{(i)}(x^*, \mathbf{X}) [K(\mathbf{X}, \mathbf{X}) + C]^{-1} K^{(j)}(\mathbf{X}, x^*), ,$$

sendo $k^{(i,j)}(x^*, x^*)$ a i -ésima derivada da covariância (3.19) com respeito ao primeiro argumento e a j -ésima derivada com respeito ao segundo argumento calculada no ponto (x^*, x^*) .

Com esta informação, podemos obter $g(f(x^*), f'(x^*) \dots)$ a partir de uma simulação Monte Carlo, onde os valores aleatórios de $f^{(i)}$ são sorteados com uma distribuição Gaussiana de várias variáveis com uma matriz de correlação por blocos composta pelas matrizes dadas na Eq. (3.40). Assim, a simulação Monte Carlo para determinar g em cada valor de x^* é realizada com a distribuição:

$$\begin{bmatrix} f^{*} \\ f^{*'} \\ \vdots \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} \tilde{f}^* \\ \tilde{f}^{*'} \\ \vdots \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{var}(f^{*}) & \text{cov}(f^{*}, f^{*'}) & \dots \\ \text{cov}(f^{*}, f^{*'}) & \text{var}(f^{*'}) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \right). \quad (3.40)$$

Esta simulação pode produzir erros assimétricos, contrário à propagação habitual.

3.4 Suavização Não Paramétrica

Outra abordagem não paramétrica frequentemente utilizada para realizar regressões é o método de suavização. Este método, basicamente, busca estimar de maneira local o valor médio da variável de resposta.

Uma das técnicas mais simples é a construção de um estimador do valor médio local mediante a aplicação de uma função da variável independente, chamada *kernel* \mathcal{K} , aos valores da variável de resposta. Matematicamente, isto é escrito como:

$$\hat{m}(x) = \frac{\sum_i^n \mathcal{K}(x - x_i; \Delta) y_i}{\sum_i^n \mathcal{K}(x - x_i; \Delta)}. \quad (3.41)$$

O efeito desta função na regressão é proporcionar pesos diferentes a cada uma das observações no cálculo local do valor médio de \hat{m} . Geralmente, a função *kernel* é uma função positiva e suave que apresenta um valor máximo quando seu argumento é igual a zero ($\mathcal{K}(0) = \max[\mathcal{K}]$). Com esta característica, as observações que terão a maior contribuição no estimador da função, no ponto de interesse, serão aquelas que encontram-se próximas a este ponto. A condição de suavidade do K ou, formalmente, as condições de continuidade e diferenciabilidade não são estritamente necessárias, podendo encontrar *kernels* do tipo janela, triangulares, etc.

O parâmetro Δ controla o comprimento efetivo da função kernel, o que se traduz em uma

reconstrução mais ou menos suave. Ao utilizarmos uma distribuição normal como kernel, Δ corresponde ao desvio padrão, e as observações dentro de um intervalo centrado no ponto de interesse x e de tamanho 4Δ contribuirão significativamente no valor da função em x . Ao aumentarmos o valor de Δ , a reconstrução resultante perde detalhes finos do comportamento dos dados. Quando o parâmetro de suavização diminui, o estimador \hat{m} segue os dados proxima-mente, sendo que no limite $\Delta \rightarrow 0$, a curva passa exatamente pelas observações. Como já foi mencionado neste capítulo, isto não representa o melhor estimador do fenômeno em estudo, uma vez que parte do sinal medido inclui o ruído ou o erro das medidas (ver Eq. (3.2)). Portanto, será necessária a aplicação de um método que estime o valor ótimo do parâmetro de suavização. Uma das principais vantagens deste método é o controle contínuo sobre a suavidade de \hat{m} , contrário aos métodos PCA e *splines*, onde o número de componentes ou o número de *splines* determina a suavidade da reconstrução.

Na literatura podem ser encontrados livros dedicados exclusivamente à análise de dados utilizando o método de suavização, como por exemplo os citados nas Ref. [100, 101]. Entretanto, neste texto analisaremos o método proposto por Shafieloo em 2006 (Ref. [102]) e modificado pelo mesmo autor em 2010 para levar em conta os erros das medidas (Ref. [103]). Com o objetivo de resolver algumas dificuldades encontradas ao aplicar este tipo de suavização [102, 103], nesta tese, são propostas algumas modificações para estimar o melhor valor do parâmetro de suavização e os intervalos de confiança da reconstrução^{††}.

3.4.1 Suavização Não Linear

O método de suavização proposto por Shafieloo está motivado em uma forma de suavização, comum na análise da estrutura em grande escala, onde é utilizado um filtro F para evitar as flutuações do campo de densidade e obter um contraste suavizado. A expressão para obter um contraste suave é

$$\delta^s(x, R_s) = \int \delta(x') F(|x - x'|; R_s) dx', \quad (3.42)$$

onde R_s corresponde a escala de suavização. Os filtros usualmente são funções janela, $F(|x - x'|; R_s) \propto \Theta(1 - |x - x'|/R_s)$, sendo Θ a função passo de Heaviside; e filtros Gaussianos $F(|x - x'|; R_s) \propto \exp(-(x - x')^2/2R_s^2)$.

Uma forma geral da função de suavização proposta na Ref. [102] é^{‡‡}

$$f^s(z, \Delta) = f^g(z) + N(z) \sum_i [f(z_i) - f^g(z_i)] \times \mathcal{K}(z, z_i; \Delta), \quad (3.43)$$

onde f_s é a quantidade suavizada, f_g é um modelo sobre o comportamento dos dados utilizado

^{††} Estas modificações foram publicadas no artigo da Ref. ([60]).

^{‡‡} A forma da função de suavização apresentada na Ref. [102] possui características específicas da natureza dos dados utilizados, como a suavização do logaritmo da quantidade estudada e a aplicação de um *kernel* lognormal.

como *ansatz* e $N(z)$ é uma função de normalização dada por

$$N(z)^{-1} = \sum_i \mathcal{K}(z, z_i; \Delta). \quad (3.44)$$

A ideia principal por trás desta proposta é a suavização do ruído das medições e não da quantidade em estudo diretamente. Para tal fim, é subtraído um modelo *ansatz* aos dados disponíveis e depois disto é aplicado o *kernel* da suavização. Como passo final, é adicionado novamente o modelo *ansatz* para recuperar a quantidade analisada.

Como podemos conferir rapidamente, este tipo de suavização difere da fórmula simples mostrada na Eq. (3.41) em que a suavização produz uma resposta linear, ou seja,

$$(\alpha f_1 + \beta f_2)^s = \alpha f_1^s + \beta f_2^s, \quad (3.45)$$

onde α e β são coeficientes constantes, f_1 e f_2 quantidades arbitrárias e o superíndice s representa a aplicação da suavização. Contrariamente, na Eq. (3.43), a subtração do *ansatz* e aplicação do *kernel* fazem com que nenhuma das duas condições para satisfazer a linearidade, multiplicação por um escalar e a soma de elementos, sejam intercambiáveis com o processo de suavização.

Continuando com o processo de suavização da Ref. [102], a escolha arbitrária do modelo inicial produziria resultados viesados, dependentes do modelo selecionado. Para resolver este problema, é aplicada a função de suavização Eq. (3.43) de forma iterativa. A primeira suavização é exatamente como na Eq. (3.43). Assumindo que a nova quantidade suavizada aproxima-se mais à curva real que relaciona as variáveis, é efetuada uma nova suavização substituindo o modelo inicial pelos valores da quantidade suavizada em cada um dos passos. Este processo é realizado várias vezes. Para medir quantitativamente que em cada etapa do processo a quantidade suavizada se adapta melhor aos dados, calcula-se o valor do χ^2 em cada passo. Foi encontrado que o valor do χ^2 decresce continuamente com cada iteração até atingir um valor mínimo. A partir deste ponto, o χ^2 aumenta novamente até alcançar um valor máximo de maneira assintótica, como mostrado na Fig. 3.9(a). Este efeito é um problema comum em alguns algoritmos de reconstrução iterativa que não são sensíveis aos erros dos dados. Nestes casos, o ruído é adicionado novamente à reconstrução e o processo deveria ser finalizado ao atingir o χ^2 mínimo [59].

Um resultado fundamental deste método é a independência da reconstrução final em relação ao modelo *ansatz*. A dependência do modelo inicial desaparece durante o processo de iteração, esta propriedade tem sido testada amplamente na literatura [59, 60, 102, 104].

Outra parte importante desta técnica é a análise necessária para escolher o melhor valor do parâmetro Δ , como em qualquer método não paramétrico. Foi mostrado no anexo da Ref. [102] que para uma suavização linear com *kernel* Gaussiano, o viés é proporcional a Δ^2 , enquanto o erro da reconstrução é inversamente proporcional ao parâmetro de suavização. Por tal motivo, se faz necessária a procura de um valor ótimo para aplicar o método. Na Ref. [59], o valor de Δ

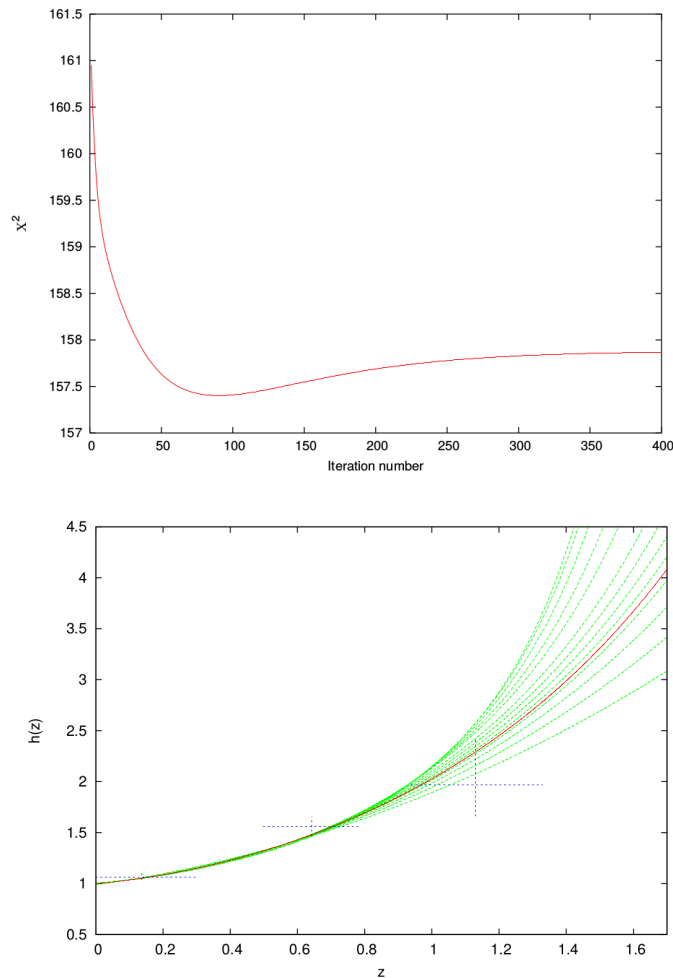


Figura 3.9: (a) Comportamento do valor da função χ^2 com respeito ao número de iterações da suavização. (b) Reconstrução utilizando o método de suavização da Eq. (3.43). A linha vermelha representa o valor esperado da reconstrução, enquanto a região formada pelas linhas verdes representa o intervalo de 1σ de confiança. Figura retirada da Ref. [59].

é fixado e a melhor reconstrução é escolhida no processo de iteração com o valor da função χ^2 .

Finalmente, os contornos de confiança da reconstrução são obtidos considerando o número de iterações como um parâmetro livre e que os contornos estão formados por todas as curvas produzidas nas iterações que possuem um valor de $\chi^2 < \chi_{min}^2 + 1$. Na Fig. 3.9(b), apresenta-se a reconstrução do parâmetro de desaceleração utilizando o método anteriormente descrito.

3.5 Aplicação de métodos não paramétricos em cosmologia

Nesta seção, apresentaremos brevemente algumas das diferentes aplicações de métodos não paramétricos em fenômenos cosmológicos.

3.5.1 Reconstrução de $H(z)$ e $q(z)$ via Processos Gaussianos

Este método foi aplicado pela primeira vez para a cosmologia nos trabalhos nas Refs. [53, 54] e, desde então, tem sido amplamente utilizado para vários propósitos. Por exemplo, reconstruções da equação de estado da energia escura [55], testes nulos do modelo de concordância cósmica [56, 105], cosmografia [58], determinação da constante de Hubble H_0 [60, 106, 107] e reconstruções da relação de dualidade cósmica [108, 109].

Uma das maiores aplicações dos métodos não paramétricos em cosmologia é a determinação do parâmetro de Hubble a partir de diferentes conjuntos de dados. Na Ref. [55], os PGs são aplicados aos dados de SNs do tipo Ia provenientes do conjunto Union 2.1 [110] e a uma amostra simulada com as especificações do levantamento DES (*Dar Energy Survey*).

O conjunto Union 2.1 contém um total de 580 SNs até $z = 1.41$. Os dados são disponibilizados em termos do módulo de distância $\mu = m - M$, onde m é a magnitude aparente e M a magnitude absoluta para cada SN Ia com seu respectivo *redshift*. As estimativas do módulo de distância são transformadas em valores de distância de luminosidade com a relação

$$m - M + 5 \log\left(\frac{H_0}{c}\right) - 25 = 5 \log((1+z)D), \quad (3.46)$$

assumindo o valor da constante de Hubble $H_0 = 70$ km/s/Mpc. Definimos a quantidade D em termos da distância de luminosidade como:

$$D(z) = \frac{H_0}{c} \frac{d_L(z)}{(1+z)}. \quad (3.47)$$

Para levar em conta os erros sistemáticos da calibração da magnitude absoluta, é utilizada a matriz de covariância completa que considera correlações entre os dados (não diagonal). Implicitamente, os PGs assumem que a distribuição dos erros é Gaussiana, entretanto pequenos desvios desta distribuição não afetam significativamente os resultados [55].

Para simular as SNs Ia do levantamento DES é utilizado o modelo Λ CDM como modelo fiducial, produzindo 4000 SNs com uma distribuição no *redshift* dada na Ref. [111]. A análise desta amostra simulada permite saber se os PGs recuperam de maneira confiável o modelo fiducial por trás dos dados.

Com a informação da distância D e suas derivadas, é calculado tanto o parâmetro de Hubble, quanto o parâmetro de desaceleração. Os resultados desta análise são apresentados na Fig. 3.10. Como podemos observar, para ambos os conjuntos de dados, em baixos *redshifts* não se apreciam desvios consideráveis do modelo Λ CDM.

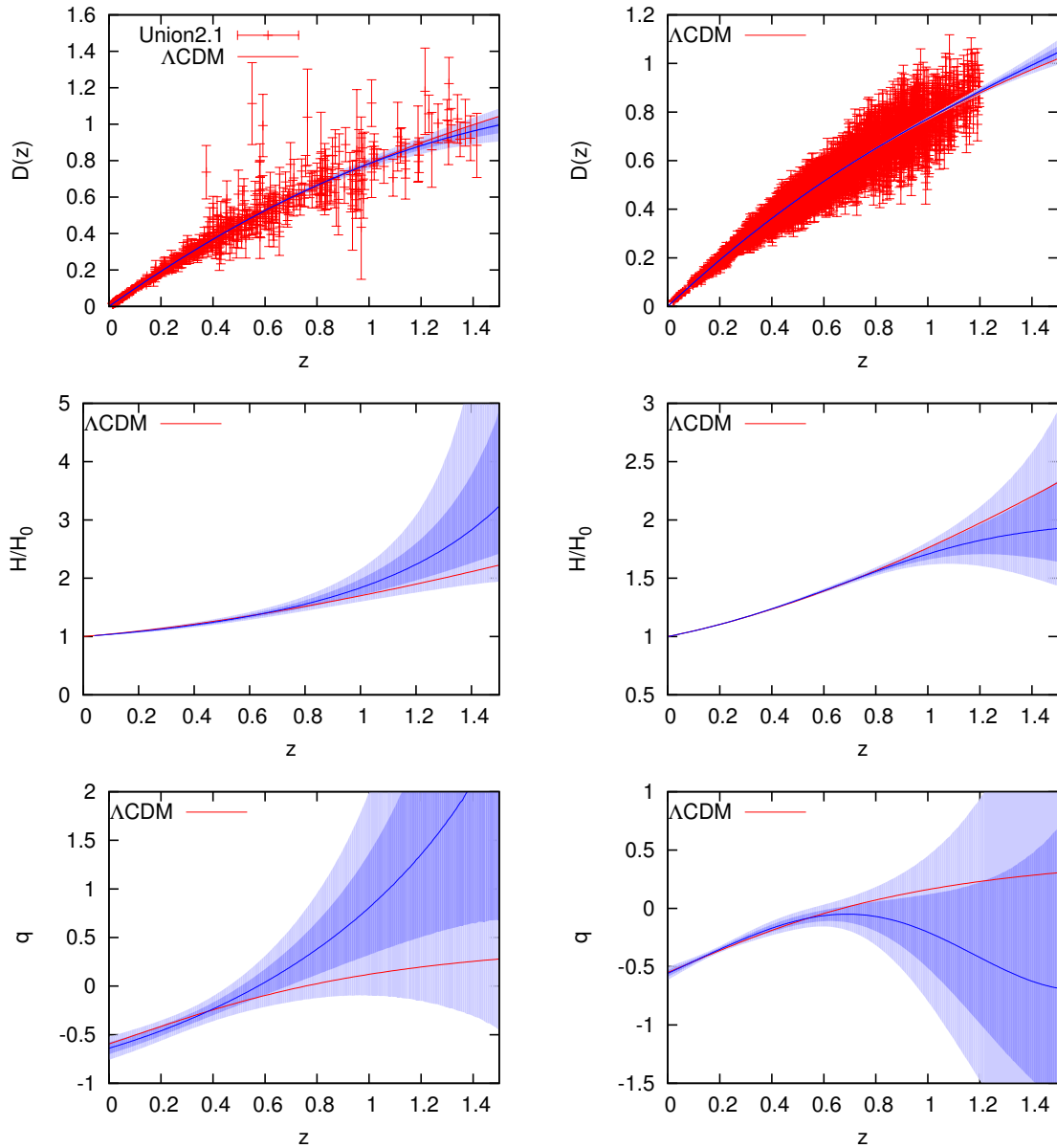


Figura 3.10: Reconstrução da distância D , do parâmetro de Hubble e do parâmetro de desaceleração a partir de dados de SNs Ia. Os painéis esquerdos correspondem ao resultados utilizando o conjunto Union2.1. Os painéis direitos correspondem aos resultados utilizando a amostra simulada com as especificações do levantamento DES. Figuras retiradas da Ref. [55].

3.5.2 Reconstrução de $H(z)$ via *splines*

Na Ref. [50], é realizada uma complexa análise estatística ao método de *splines* para calcular o parâmetro de Hubble e o parâmetro de desaceleração a partir das observações de SNs Ia, seis sinais de Oscilações Acústicas Bariônicas e estimativas da taxa de expansão do Universo.

Como foi apresentado na Seção 3.2, a implementação deste método se reduz, basicamente, à determinação dos valores dos polinômios em cada um dos nós do domínio da reconstrução vinculados a partir de dados. Uma possibilidade do método é a variação do número de nós. Todavia, em [50], é proposta uma abordagem em que na análise estatística se penalizam valores independentes dos parâmetros. O fator de penalização, proporcional à diferença dos valores dos coeficientes em nós consecutivos ($|\hat{q}_i - \hat{q}_{i+1}|$), correlaciona cada um dos parâmetros \hat{q}_i do método. A correlação será proporcional ao peso da penalização. Para uma correlação extrema, todos os coeficientes serão iguais, $\hat{q}_i = \hat{q}_{i+1}$. Nesta situação, independentemente do número de nós, o grau de liberdade da reconstrução será igual a 1. Desta forma, o número efetivo de graus de liberdade pode variar conforme varia a correlação.

O fator de penalização proposto está dado pela equação:

$$P_i(\sigma_i) = \left(\frac{\bar{q}_i - \hat{q}_i}{\sigma_i} \right)^2, \quad \bar{q}_i = \frac{(\hat{q}_{i-1} + \hat{q}_{i+1})}{2}, \quad \sigma_i = \sigma_{abs} + \bar{q}_i \sigma_{rel}, \quad (3.48)$$

onde $\sigma_{abs} = 10^{-7}$ evita denominadores nulos em caso de que algum \bar{q}_i seja igual a zero, e σ_{rel} caracteriza a complexidade da regressão. Quando $\sigma_{rel} \rightarrow 0$, a regressão tende a uma linha reta, enquanto valores elevados produzem uma curva flexível.

A determinação dos parâmetros obtém-se com a minimização de

$$-2 \ln [L_P(\vec{D}, \vec{\theta})] \equiv -2 \ln [L(\vec{D}, \vec{\theta})] + \sum_{i=2}^{n-1} P_i(\sigma_i). \quad (3.49)$$

A função total de verossimilhança está composta pela contribuição de cada um dos observáveis utilizados. A compilação de SNs Ia utilizada será descrita na Seção 4.1, assim como as estimativas do parâmetro de Hubble a partir de idades de galáxias.

O resultado do parâmetro de desaceleração é mostrado na Fig. 3.11.

3.5.3 Reconstrução dos testes nulos O_m e O_k via suavização

Na Ref. [103], é realizada a reconstrução de dois testes nulos a partir de dados de SNs do tipo Ia do conjunto [112] e de estimativas do parâmetro de Hubble a partir de idades de galáxias e de sinais de Oscilações Acústicas Bariônicas.

O teste $O_m(z)$ foi proposto, independentemente, nas Refs. [113, 114] com o objetivo de medir desvios do modelo cosmológico padrão Λ CDM. Este teste define-se como

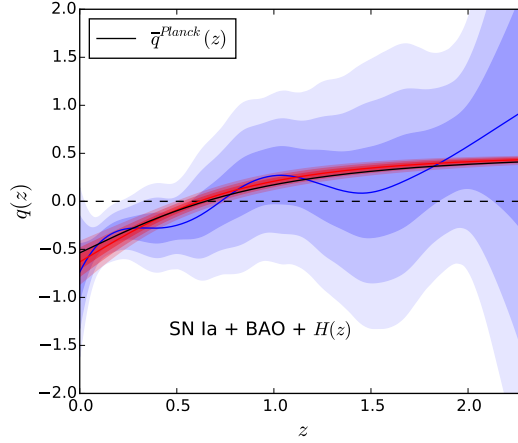


Figura 3.11: Reconstrução do parâmetro de desaceleração utilizando a técnica de *splines* proposta em [50]. Figura retirada da Ref. [50].

$$O_m = \frac{h^2(z) - 1}{(1+z)^3 - 1} = \frac{1 - D'(z)^2}{[(1+z)^3 - 1]D'(z)}, \quad (3.50)$$

sendo $h(z) \equiv H(z)/H_0$ e D' a deriva da distância definida na Eq. (3.47). Para o modelo Λ CDM espacialmente plano, o valor de O_m é igual ao valor do parâmetro de densidade da matéria hoje, Ω_m . Portanto, uma reconstrução da quantidade $h(z)$ ou da distância D , permite o cálculo de O_m em função do *redshift*. Independentemente do valor obtido, é necessário que este seja um valor constante em todo o intervalo de *redshift*. Desvios de um valor constante implicam em uma violação do modelo Λ CDM. Para a implementação do teste O_m , somente é necessário o uso de um observável cosmológico.

Em [103], utilizam uma modificação da suavização apresentada na Seção 3.4.1 sensível aos erros das observações e dada pela Eq. (4.9) (ver Seção 4.2.3). Com esta análise é obtida a distância D no intervalo de *redshift* $[0, 1.6]$. Os resultados deste teste são mostrados na Fig. 3.12(a).

Por outro lado, a quantidade O_k , definida por

$$O_k = \frac{[h(z)D'(z)]^2 - 1}{D(z)^2}, \quad (3.51)$$

é um teste de consistência do paradigma de um universo de FLRW (ver Seção 2.2.2). Similar ao teste anterior, o O_k corresponde ao valor constante do parâmetro de curvatura hoje Ω_k independente do *redshift*. Desvios de um valor constante implicam em uma violação da homogeneidade ou isotropia do Universo.

O teste O_k é um pouco mais complexo e precisa do conhecimento de dois observáveis cosmológicos independentes para ser calculado. Por tal motivo, são utilizadas as estimativas de $H(z)$ a partir de idades de galáxias (junto com as observações de SNs Ia). Estas estimativas não fazem nenhuma suposição sobre a curvatura do Universo e podem ser contempladas para este objetivo. Os resultados deste teste são apresentados na Fig. 3.12(b).

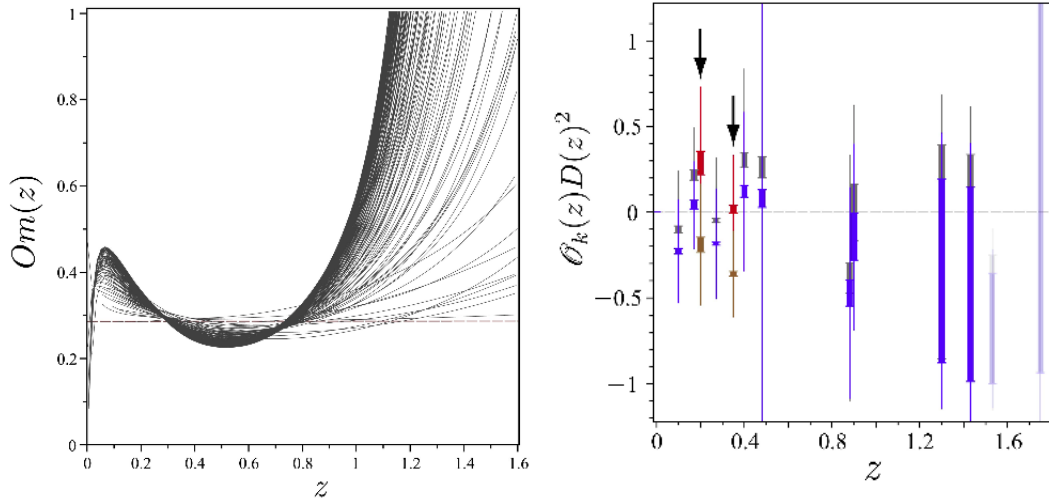


Figura 3.12: (a) Reconstrução do teste nulo O_m . (b) Reconstrução do teste nulo O_k . Figura retirada da Ref. [103].

3.5.4 Evidência da aceleração cósmica utilizando PCA

# modos	χ^2	h	α_1	α_2	α_3	α_4
1	177.7	.644	-1.10	—	—	—
2	173.2	.653	-1.08	-1.61	—	—
3	172.6	.664	-1.08	-1.71	-1.10	—
4	172.6	.662	-1.08	-1.56	-1.30	.61
$\sigma(\alpha_n)$			0.22	0.72	1.52	2.54

Tabela 3.1: Componentes principais do parâmetro de desaceleração. Tabela retirada da Ref. [96].

Na Ref. [96], é utilizado um PCA vinculado por observações de SNs Ia para obter várias características da aceleração cósmica a partir de um método independente de modelo cosmológico.

Como foi explicado na Seção 3.1, o parâmetro de desaceleração é modelado por uma função constante definida por intervalos. Os valores da função em cada intervalo são obtidos pela análise estatística com observações de 157 SNs do conjunto de dados [97].

Os valores dos coeficientes são apresentados na Tabela 3.1, onde é aumentado progressivamente o número de modos da parametrização começando com o componente principal melhor vinculado. Os coeficientes α_i do primeiro e segundo modo são negativos em até 5σ e 2σ , respectivamente. Enquanto modos de ordem superior são compatíveis com valores nulos devido ao grande incremento da variância. Como podemos observar, o incremento do número de modos modifica finamente os valores dos coeficientes do ajuste prévio. É esperado que a utilização de modos de maior ordem não produza mudanças significativas (maior do que 1σ) posto que os dados não são sensíveis a modos de altas ordens e que os coeficientes são totalmente

descorrelacionados pelas características do método.

A conclusão principal dos resultados, mostrados na Tabela 3.1, é a necessidade de uma fase acelerada do Universo. Devido à relação entre os coeficientes α_i e o parâmetro de desaceleração $q(z)$ dada pela Eq. (3.13), é necessário que a função $q(z)$ seja menor do que 0 em algum intervalo de z para obter um valor negativo dos coeficientes α_i . Em particular, o modo melhor vinculado (α_1) implica um valor negativo de $q(z)$ em até 5σ de confiança. Pela forma funcional da base $e_1(z)$, é esperado que esta fase tenha acontecido em baixos *redshifts* (ver Fig. 3.6).

4 Construção de um diagrama de Hubble de SN Ia independente de modelo cosmológico

Neste capítulo, apresentaremos os resultados obtidos da aplicação de dois métodos não paramétricos, Processos Gaussianos (3.3) e Suavização (3.4.1), para reconstruir a taxa de expansão do Universo de uma maneira independente de modelos cosmológicos. Para este fim, utilizamos 15 estimativas da taxa de expansão provenientes de dados de idades de galáxias passivamente evoluídas. A reconstrução do parâmetro de Hubble $H(z)$ nos permitirá calcular a distância de luminosidade em função do *redshift* e com isto calibrar os parâmetros das curvas de luz que determinam a magnitude absoluta de Supernovas do tipo Ia. Possibilitando assim, a construção de um diagrama de Hubble independente de modelo cosmológico para esta classe de supernovas. Esta análise será aplicada a uma das mais recentes compilações de Supernovas do tipo Ia, o conjunto JLA (*Joint light-curve analysis*).

4.1 Análise com Supernovas do tipo Ia

Uma supernova é a explosão de uma estrela que se encontra em uma das suas fases evolutivas finais. Nesta explosão, a supernova pode atingir uma luminosidade $\sim 10^9 L_{\odot}$, o que é uma fração considerável da luminosidade total de uma galáxia. Depois do pico característico, a luminosidade das supernovas decresce em uma escala de semanas. Neste evento, a estrela progenitora é dissociada e a maior parte do seu material é ejetado ao meio interestelar, enriquecendo o meio com os elementos pesados gerados nas diferentes fases estelares ou no processo de explosão [84].

Uma SN Ia é considerada a explosão de supernova de um sistema binário formado por uma anã branca e uma gigante vermelha. O intercâmbio de material da gigante vermelha para a

anã branca*, faz com que esta última alcance a massa máxima que permite a sua estabilidade. Este limite é chamado limite de Chandrasekhar e seu valor é $\approx 1.4M_{\odot}$. Quando o limite de Chandrasekhar é ultrapassado, a pressão de degeneração eletrônica não é suficiente para impedir o colapso gravitacional da anã branca†. A instabilidade produzida pelo excesso de massa gera uma contração da estrela e, conseqüentemente, um aumento de temperatura. As altas temperaturas causam a ignição de reações nucleares explosivas dos materiais que se encontravam inertes (carbono e oxigênio). O efeito resultante é a forte explosão de supernova sem nenhum tipo de remanescente.

O mecanismo de acreção de matéria por parte de uma anã branca para explicar a explosão de uma SN Ia faz com que estes fenômenos sejam bastante homogêneos enquanto à quantidade de energia que eles emitem. Entretanto, a sua luminosidade intrínseca apresenta uma grande dispersão, impedindo que estes objetos constituam estritamente uma vela padrão. A variabilidade destes objetos pode ser bem modelada por uma relação empírica entre o comprimento temporal da curva de luz x_1 e a cor no seu brilho máximo c . Esta relação permite que as SNs Ia sejam calibradas e analisadas como objetos padronizáveis.

A compilação de SNs Ia JLA utiliza o modelo de calibração SALT2 para obter os parâmetros da curva de luz (x_1 , c e o pico observado da magnitude no referencial em repouso na banda B m_B^*). O estimador de distância assume que SNs Ia com igual cor, forma e entorno galáctico tem a mesma luminosidade intrínseca independente do *redshift*. Esta suposição pode ser quantificada com a expressão linear

$$\mu = m_B^* - M_B + \alpha \times x_1 - \beta \times c, \quad (4.1)$$

produzindo um modulo de distância padronizável que, por sua vez, está relacionado com a distância de luminosidade via

$$\mu = 5 \log \left[\frac{d_L}{\text{Mpc}} \right] + 25. \quad (4.2)$$

O parâmetro α e o parâmetro β que caracterizam as relações entre o comprimento da curva de luz e a luminosidade; e entre a cor e a luminosidade, respectivamente, são cosmologicamente irrelevantes (*nuisance*). Estas relações bem conhecidas mostram que curvas mais compridas e mais azuis correspondem a supernovas mais brilhantes. O parâmetro M_B também é irrelevante e corresponde ao valor da magnitude absoluta na banda B de uma SN Ia. Este parâmetro depende das propriedades da galáxia hospedeira, como por exemplo a massa estelar da galáxia $M_{estelar}$ [115, 116]. A fim de corrigir este efeito, seguimos o procedimento da Ref. [117]:

* O caso degenerado deste sistema acontece quando o sistema binário esta formado por duas anãs brancas.

† Na fase de anã branca, a estrela não possui uma atividade termonuclear significativa, fazendo com que a pressão que compensa o colapso gravitacional seja, principalmente, devida ao princípio de exclusão de Pauli sobre os elétrons.

$$M_B = \begin{cases} M_B^1 & \text{se } M_{\text{estelar}} < 10^{10} M_{\odot}, \\ M_B^1 + \Delta_M & \text{se } M_{\text{estelar}} \geq 10^{10} M_{\odot}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Em geral, os parâmetros de ajuste, α e β , são tratados como parâmetros livres e determinados no ajuste global do diagrama de Hubble. Este tratamento resulta na dependência da estimativa da distância no modelo cosmológico utilizado na análise estatística. Portanto, as conclusões obtidas a partir da análise de SNs Ia com o ajuste dos parâmetros da Eq. (4.1) são, de alguma maneira, dependentes de modelo cosmológico. Por tal motivo, é de grande importância utilizar técnicas que permitam a determinação destes parâmetros de calibração de maneira independente de qualquer modelo cosmológico.

4.2 Determinação de distâncias a partir de dados de $H(z)$

A taxa de expansão do Universo $H(z) \equiv \dot{a}/a$ pode ser obtida a partir da derivada do *redshift* com respeito ao tempo cósmico, ou seja,

$$H(z) = -\frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt} \quad (4.4)$$

ou de maneira aproximada pela variação finita destas quantidades

$$H(z) \simeq -\frac{1}{1+z} \frac{\Delta z}{\Delta t}. \quad (4.5)$$

O principal desafio é a determinação da mudança na idade do Universo como uma função do *redshift*, $\Delta t(z)$. Uma abordagem possível é o cálculo da diferença de idades entre duas galáxias vermelhas luminosas que encontram-se em *redshifts* próximos. Esta técnica foi proposta na Ref. [118] e é conhecida como idade diferencial. As galáxias analisadas para determinar a variação do tempo cósmico são chamadas de cronômetros cósmicos. O motivo para usar galáxias elípticas vermelhas é que elas apresentam um único surto de formação estelar nas fases iniciais da sua formação, permitindo determinar a sua idade ao conhecer a idade do grupo estelar que a conforma. Atualmente, existe um total de 52 estimativas da taxa de expansão do Universo, sendo 31 baseadas na técnica de idade diferencial. Na Tabela 4.1, apresenta-se uma compilação atualizada das estimativas de $H(z)$.

Estas medidas de $H(z)$ não assumem um modelo cosmológico. Contudo, sua principal dependência encontra-se nos modelos de síntese de população estelar que influenciam a determinação da diferença de idades Δt . Estes modelos são de grande importância para galáxias em altos *redshifts* ($z \gtrsim 1.2$). Na Ref. [107] foi ressaltado que para estimativas em *redshifts* menores do que 1.2, os modelos de síntese de população estelar produzem as mesmas idades para o conjunto de dados da Tabela 4.2, em outras palavras, em *redshifts* baixos e intermediários estas estimativas tornam-se, também, independentes dos modelos estelares. Por esta razão, utilizare-

z	$H_{obs}(z)$ [km s ⁻¹ Mpc ⁻¹]	Método	Ref.
0.00	73.240 ± 1.74	SN/Cefeidas	[119]
0.07	69.0 ± 19.6	Cronômetro Cósmico	[120]
0.10	69.0 ± 12.0	Cronômetro Cósmico	[121]
0.12	68.600 ± 26.2	Cronômetro Cósmico	[120]
0.17	83.000 ± 8.0	Cronômetro Cósmico	[121]
0.1791	75.000 ± 4.0	Cronômetro Cósmico	[122]
0.1993	75.000 ± 5.0	Cronômetro Cósmico	[122]
0.20	72.900 ± 29.5	Cronômetro Cósmico	[120]
0.24	79.690 ± 2.65	BAO	[123]
0.27	77.000 ± 14.0	Cronômetro Cósmico	[121]
0.28	88.800 ± 36.6	Cronômetro Cósmico	[120]
0.30	81.700 ± 6.22	BAO	[124]
0.31	78.170 ± 4.74	BAO	[125]
0.35	76.300 ± 5.6	BAO	[126]
0.3520	83.000 ± 14.0	Cronômetro Cósmico	[122]
0.36	79.930 ± 3.39	BAO	[125]
0.38	81.500 ± 1.9	BAO	[127]
0.3802	83.000 ± 13.5	Cronômetro Cósmico	[128]
0.40	95.000 ± 17.0	Cronômetro Cósmico	[121]
0.4004	77.000 ± 10.2	Cronômetro Cósmico	[128]
0.4247	87.100 ± 11.2	Cronômetro Cósmico	[128]
0.4290	91.800 ± 5.3	Cosmic chronometer	[128] [‡]
0.43	86.450 ± 3.68	BAO	[123]
0.44	82.600 ± 7.8	BAO	[129]
0.4497	92.800 ± 12.9	Cronômetro Cósmico	[128]
0.47	89.000 ± 34.0	BAO	[130]
0.4783	80.900 ± 9.0	Cronômetro Cósmico	[128]
0.48	97.000 ± 62.0	Cronômetro Cósmico	[131]
0.51	90.400 ± 1.9	BAO	[127]
0.52	94.350 ± 2.65	BAO	[125]
0.56	93.330 ± 2.32	BAO	[125]
0.57	92.900 ± 7.8	BAO	[132]
0.59	98.480 ± 3.19	BAO	[125]
0.593	104.00 ± 13.0	Cronômetro Cósmico	[122]
0.60	87.900 ± 6.1	BAO	[129]
0.61	97.300 ± 2.1	BAO	[127]
0.64	98.820 ± 2.99	BAO	[125]
0.68	92.000 ± 8.0	Cronômetro Cósmico	[122]
0.73	97.300 ± 7.0	BAO	[129]
0.781	105.00 ± 12.0	Cronômetro Cósmico	[122]
0.875	125.00 ± 17.0	Cronômetro Cósmico	[122]
0.88	90.000 ± 40.0	Cronômetro Cósmico	[131]
0.90	117.00 ± 23.0	Cronômetro Cósmico	[121]
1.037	154.00 ± 20.0	Cronômetro Cósmico	[122]
1.30	168.00 ± 17.0	Cronômetro Cósmico	[121]

Tabela 4.1: Estimativas atuais da taxa de expansão do Universo e seu respectivo método. Tabela retirada da Ref. [133].

z	$H_{obs}(z)$ [km s ⁻¹ Mpc ⁻¹]	Método	Ref.
1.363	160.00 ± 36.3	Cronômetro Cósmico	[134]
1.43	177.00 ± 18.0	Cronômetro Cósmico	[121]
1.53	140.00 ± 14.0	Cronômetro Cósmico	[121]
1.75	202.00 ± 40.0	Cronômetro Cósmico	[121]
1.965	186.50 ± 50.4	Cronômetro Cósmico	[134]
2.33	224.00 ± 8.0	BAO Quasar	[135]
2.34	222.00 ± 7.0	BAO Quasar	[136]
2.36	226.00 ± 8.0	BAO Quasar	[137]

Tabela 4.1: Estimativas atuais da taxa de expansão do Universo e seu respectivo método. Tabela retirada da Ref. [133].

z	$H_{obs}(z)$ [km s ⁻¹ Mpc ⁻¹]	Ref.
0.100	69 ± 12	[121]
0.170	83 ± 8	[121]
0.179	75 ± 4	[122]
0.199	75 ± 5	[122]
0.270	77 ± 14	[121]
0.352	83 ± 14	[122]
0.400	95 ± 17	[121]
0.480	97 ± 62	[131]
0.593	104 ± 13	[122]
0.680	92 ± 8	[122]
0.781	105 ± 12	[122]
0.875	125 ± 17	[122]
0.880	90 ± 40	[131]
0.900	117 ± 23	[121]
1.037	154 ± 20	[122]

Tabela 4.2: Estimativas da taxa de expansão do Universo independentes de modelos de síntese de população estelar.

mos em nossa análise as 15 estimativas do parâmetro de Hubble via cronômetros cósmicos que satisfazem a condição de independência dos modelos estelares. Estas medidas encontram-se no intervalo $z \in [0.1, 1.037]$. Assim como na Ref. [107], aumentamos em 20% o erro do ponto de maior *redshift* para levar em consideração incertezas dos modelos de síntese de população estelar. Feitas essas considerações, espera-se que ao aplicar métodos não paramétricos aos dados analisados, nossos resultados sejam independentes tanto de modelos cosmológicos como de síntese estelar.

4.2.1 Integração de $H(z)$ e propagação de erro

Para obter o valor da distância comóvel a partir do conhecimento da expansão do Universo, temos que resolver numericamente a integral (2.39)

$$d_c = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')},$$

que pode ser aproximada por um método trapezoidal [138]

$$d_c \approx \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N (z_{i+1} - z_i) \left(\frac{1}{H_{i+1}} + \frac{1}{H_i} \right). \quad (4.6)$$

Com esta aproximação o erro associado ao i -ésimo intervalo é propagado a partir dos erros da função $H(z)$ com a expressão:

$$s_i^2 = \frac{1}{2} (z_{i+1} - z_i) \left(\frac{\sigma_{H_{i+1}}^2}{H_{i+1}^4} + \frac{\sigma_{H_i}^2}{H_i^4} \right), \quad (4.7)$$

e, portanto, o erro da integral da Eq. (2.20) entre $z = 0$ e $z = z_n$ é:

$$\sigma_{d_c}^2(n) = \sum_{i=1}^n s_i^2. \quad (4.8)$$

A precisão deste método é sensível ao espaçamento dos valores de $H(z)$, bem como, ao número de valores acessíveis. Como indicado na Ref. [139], os erros relativos da integração trapezoidal decresce quando o número de intervalos aumenta.

Nós reconstruímos a função $H(z)$ aplicando dois métodos de regressão não paramétricos aos dados de cronômetros cósmicos mostrados na Fig. 4.2. Estes métodos são: Processos Gaussianos (3.3) e Suavização (3.4.1). Obtida uma curva contínua de $H(z)$, calculamos de maneira independente de modelo cosmológico a distância comóvel com um espaçamento pequeno e uniforme Δz . Sob esta abordagem é possível atingir o limite de precisão do método de integração relacionado ao número de valores disponíveis da função a integrar.

4.2.2 Reconstrução com Processos Gaussianos

Um dos métodos que utilizamos para reconstruir o parâmetro de Hubble é o método não paramétrico de Processos Gaussianos, apresentado em detalhe na Seção 3.3. Como foi mencionado anteriormente e visto explicitamente na Eq. (3.30), a reconstrução via PGs depende da função média *prior* escolhida. Esta dependência foi discutida no anexo da Ref. [103]. Para conseguir uma reconstrução sem viés, devemos escolher um *prior* não informativo, o que se traduz no contexto dos PGs em uma função média *prior* constante. Além disto, é razoável e seguro selecionar uma função constante quando não temos informações prévias sobre o reconstruído. Como foi amplamente utilizado na literatura, esta é a melhor escolha porque qualquer modelo utilizado como *prior* pode introduzir um viés significativo nos resultados. No entanto, também é necessário verificar a dependência da reconstrução e suas implicações quando a função média *prior* selecionada não é a padrão. Aqui, fazemos isso utilizando os melhores ajustes de diferentes modelos como *priors*. Estes modelos são: modelo Einstein-de Sitter (E-D), Λ CDM e

wCDM. Os resultados são resumidos na Tabela 4.3.

Para realizar as reconstruções via Processos Gaussianos, é utilizado o programa disponibilizado GaPP (*Gaussian Processes in Python*)[§] [55].

4.2.3 Reconstrução com suavização não linear

Modificação da suavização não linear

O método de suavização não linear apresentado na Seção 3.4.1 possui grandes vantagens como: a independência de modelos cosmológicos dos resultados com ele obtidos; a flexibilidade do método para se ajustar aos dados; o controle contínuo da suavidade da função; a suavização é aplicada principalmente ao ruído dos dados e não à quantidade em si. Entretanto, ele também possui alguns pontos fracos que podem ser aliviados.

A primeira modificação do método foi proposta por Shafieloo em 2010 na Ref. [103], onde a insensibilidade do método aos erros das observações é resolvido ao adicionarmos um peso ao *kernel* inversamente proporcional ao erro da medida. Em termos matemáticos, isto é

$$f^s(z, \Delta) = f^s(z) + N(z) \sum_i \frac{[f(z_i) - f^s(z_i)]}{\sigma_{f(z_i)}^2} \times \mathcal{K}(z, z_i; \Delta), \quad (4.9)$$

e, conseqüentemente, também deve ser modificada a função de normalização,

$$N(z)^{-1} = \sum_i \frac{\mathcal{K}(z, z_i; \Delta)}{\sigma_{f(z_i)}^2}. \quad (4.10)$$

Nós desenvolvemos o algoritmo computacional para realizar este tipo de suavização e verificamos que o problema do ruído ser adicionado novamente à reconstrução a partir de um número de iterações ótimas é resolvido, ou seja, o ruído é eliminado. Nós encontramos que o comportamento do valor χ^2 com o número de iterações é monotonicamente decrescente e atinge assintoticamente um valor constante. Este comportamento cria um segundo problema: a delimitação dos contornos de confiança. Embora o valor global mínimo do χ^2 não seja estritamente atingido, podemos considerar um valor do χ^2 de um número elevado de iterações n_{max} . Neste caso, a delimitação do nível de confiança com a condição $\chi^2 < \chi_{min}^2 + 1$ unicamente demarcaria um limite em alguma iteração $n < n_{max}$. Este comportamento anômalo permitiria uma reconstrução em que o valor esperado do estimador da quantidade analisada ($E[m]$) encontra-se como limite (superior ou inferior) do nível de confiança. Esta impossibilidade para determinar os limites do nível de confiança da reconstrução faz inviável a aplicação deste método quando a função χ^2 comporta-se assintoticamente com o número de iterações. Como pode ser observado na Fig. 3.9(b) no intervalo $0.2 < z < 0.4$, este resultado peculiar apresenta-se, inclusive, quando a função χ^2 possui o comportamento mostrado na Fig. 3.9(a).

O problema anteriormente descrito pode surgir pelo fato de considerar a variável discreta

[§] <http://www.acgc.uct.ac.za/~seikel/GAPP/index.html>

n (número de iterações) como o grau de liberdade da função χ^2 que determina os níveis de confiança da reconstrução. Para resolver esta complicação do método, calculamos o nível de confiança 1σ extrapolando a técnica desenvolvida na Ref. [100] para suavização linear. Neste formalismo, o erro da reconstrução é obtido com a expressão:

$$\sigma_{f^s(z)} = \left(\sum_i v_i^2 \hat{\sigma}^2 \right)^{1/2}, \quad (4.11)$$

onde $\sigma_{f^s(z)}$ é o erro em 1σ da reconstrução, v_i é o fator de suavização

$$v_i = N(z)\mathcal{K}(z, z_i)/\sigma_{H(z_i)}^2 \quad (4.12)$$

e $\hat{\sigma}$ é o estimador da variância das observações dado por:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_i (H(z_i) - H^s(z_i))^2}{\sum_j (1 - v_j(z_j))}, \quad (4.13)$$

onde a quantidade no denominador corresponde ao fator que determina o grau de liberdade do método.

Para testar a validade desta técnica aplicada à suavização não linear, simulamos vários conjuntos de dados com distintos tipos de modelos fiduciais. Na Fig. 4.1, apresentamos as reconstruções obtidas para dados simulados a partir de uma função sinusoidal e a partir de uma combinação linear entre uma senoide e uma parábola. Como é observado, a função que gera os dados, encontra-se dentro do nível de confiança estimado com o método proposto.

A outra modificação que propusemos para este tipo de suavização é a implementação de uma quantidade estatística que permita estimar, de maneira mais rigorosa, o valor do parâmetro Δ .

É bem conhecido para vários tipos de regressões (ver seção anterior 3.4.1) que se o objetivo principal é ajustar finamente os dados, obteremos uma reconstrução com variância elevada. Por outro lado, se pretendemos obter um estimador dando *prioridade* à suavidade da função, obteremos um incremento no viés [92]. Este conflito entre o valor do viés e da variância de uma regressão é chamado de *trade-off* entre viés e variância. A impossibilidade da minimização do viés e da variância ao mesmo tempo leva a explorar outro tipo de quantidade como estimador da fidelidade de uma regressão. Como já foi mencionado, a quantidade usualmente utilizada é o risco ou erro quadrático médio (EQM), dado pela Eq. (3.7),

$$EQM[\hat{m}(x)] = \mathbb{E}[(\hat{m}(x) - m(x))^2],$$

e que em termos do viés e a variância é dado pela Eq. (3.8). Contudo, o EQM é uma quantidade que depende de um valor específico da variável preditor. Ou seja, o EQM estima a fiabilidade da regressão de maneira local. Para lograr um resultado que consiga estimar quão boa é a reconstrução ao longo do domínio de interpolação, consideramos o erro quadrático médio integrado, definido como:

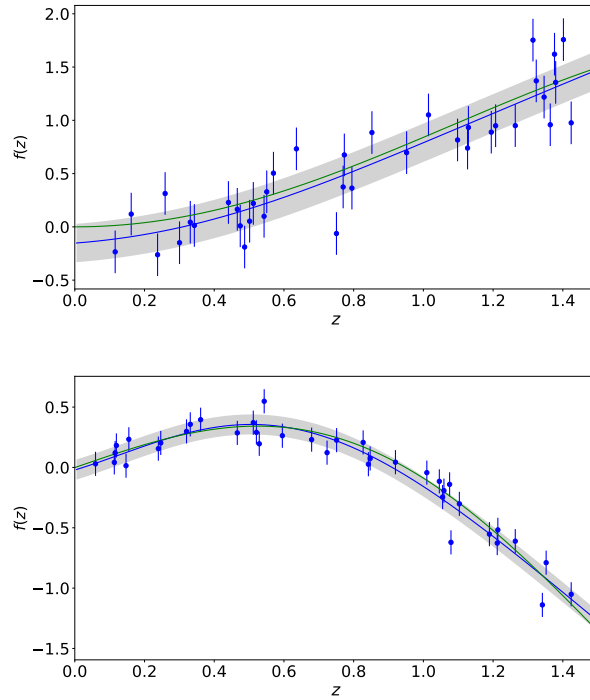


Figura 4.1: Reconstrução utilizando a suavização não linear dada pela Eq. (4.9) e calculando os intervalos de confiança com a Eq. (4.11). A linha verde corresponde à função geradora dos dados, enquanto a linha azul e a região sombreada correspondem à função média e ao nível de confiança de 1σ da reconstrução. (a) Dados simulados utilizando uma função sinusoidal. (b) Dados simulados utilizando uma combinação linear de uma senoide e uma parábola.

$$EQMI[\hat{m}(x), f(x)] = \int EQM[\hat{m}(x)]f(x)dx = \int \mathbb{E}[(\hat{m}(x) - m(x))^2]f(x)dx, \quad (4.14)$$

onde $f(x)$ representa a distribuição de probabilidade da variável independente. Quando não conhecemos a distribuição espacial das nossas medidas ($f(x)$), podemos considerar unicamente os pontos de observação. Neste caso, a distribuição corresponde à superposição de distribuições δ de Dirac,

$$f(x) = \frac{\sum_i^n \delta(x - X_i)}{n}. \quad (4.15)$$

Isto faz com que a Eq. (4.14) torne-se uma soma ordinária. Como o valor do EQMI e do EQM dependem da função desconhecida $m(x)$, eles não são determináveis diretamente. Na prática, constrói-se um estimador do EQMI chamado validação cruzada (*cross validation*) definido por

$$CV(\Delta) = \frac{\sum_i^n (Y_k - \hat{m}_{-k}(X_k))^2}{n}. \quad (4.16)$$

A quantidade $\hat{m}_{-k}(x_k)$ representa a reconstrução realizada utilizando o conjunto de dados $\{(X_i, Y_i)\}$ sem levar em conta o par (X_k, Y_k) . Em outras palavras, a validação cruzada calcula a diferença

(soma das diferenças) entre uma observação e a reconstrução obtida sem levar em conta tal observação. Em certo sentido, isto estima o efeito que tem uma medida sobre o conjunto total.

No caso do método de suavização, o valor da validação cruzada depende unicamente do parâmetro Δ . Portanto utilizamos a expressão

$$CV(\Delta) = \frac{1}{n} \sum_i (f(x_i) - f_{-i}^s(x_i; \Delta))^2. \quad (4.17)$$

O valor de Δ que minimiza esta função é utilizado como o melhor valor para realizar a reconstrução de um conjunto de dados específicos.

Aplicação da Suavização não linear

Com as modificações mencionadas do método de suavização não linear apresentado na Seção 3.4.1, aplicamos a Eq. (4.9) aos dados de $H(z)$ obtidos a partir de idades de galáxias e mostrados na Fig. 4.2. Posteriormente, testamos reconstruções tanto com o *kernel* lognormal utilizado nas Refs. [102, 59, 57] e um *kernel* Gaussiano. Encontramos que as diferenças entre as reconstruções obtidas com estes dois tipos de *kernels* não são significativas. Portanto, adotaremos o *kernel* Gaussiano para uma comparação mais direta com os resultados das reconstruções via PGs que utilizam um *kernel* deste tipo.

É factível pensar que o método de suavização poderia ser mais geral, ou melhor ainda, mais flexível no momento de descrever os dados, ao acrescentar um parâmetro análogo a σ_f dos PGs (Eq. (3.23)). Todavia, a inclusão de um parâmetro multiplicando ao *kernel* nas Eqs. (3.43) e (4.9) mostra-se desnecessária, uma vez que um fator multiplicativo global no *kernel* seria cancelado pela função de normalização.

Como descrito na Seção (3.4.1), o método de suavização é um processo iterativo em que é necessária a utilização de um modelo fiducial inicial. Este modelo será substituído pelos resultados de cada uma das suavizações da função. Observamos que o comportamento da função χ^2 é assintoticamente decrescente e paramos o processo na milésima iteração.

A reconstrução depende do valor do parâmetro de suavização Δ . Por exemplo, para valores $\Delta < 0.6$, a regressão obtida apresenta várias oscilações, o que não é compatível com o esperado para a taxa de expansão do Universo; para valores de Δ entre [0.6,0.9], as oscilações desaparecem, mas a reconstrução é altamente dependente da escala de suavização em altos *redshifts*; enquanto que para valores de $\Delta > 1.0$, a curva obtida é fracamente dependente da escala de suavização em todo o intervalo considerado ($z \in [0, 1.2]$). Entretanto, valores muito altos do comprimento de suavização carecem de sentido porque os dados em altos *redshifts* não deveriam estar fortemente correlacionados com dados em baixos *redshifts*. Para estimar o melhor valor de Δ , minimizamos a função de validação cruzada dada pela Eq. (4.17). Para os dados considerados, o valor da validação cruzada é assintoticamente minimizado e o fixamos em $\Delta = 1.4$.

Com o objetivo de determinar o erro da reconstrução, utilizamos a técnica proposta na seção

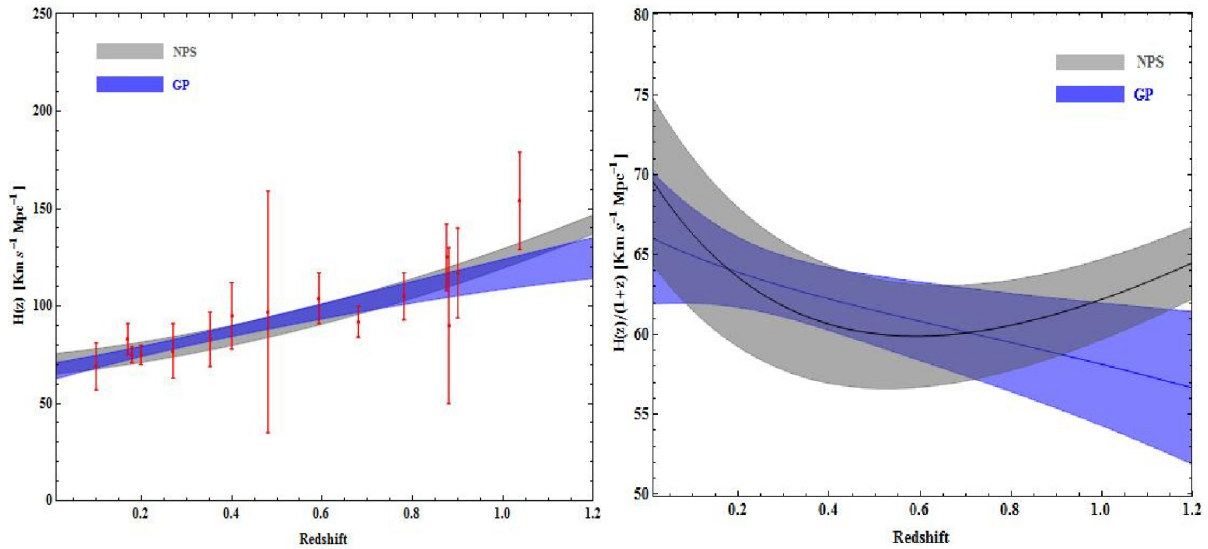


Figura 4.2: (a) Reconstrução da taxa de expansão aplicando o método de PGs com uma função *prior* constante (região azul) e o método NPS com um modelo Λ CDM como modelo fiducial inicial (região cinza). Os dados utilizados para realizar estas regressões são representados com pontos vermelhos. (b) Cálculo da função $H(z)/(1+z)$ para ambas as reconstruções.

anterior resumida nas Eqs. (4.11), (4.12) e (4.13). Como estas expressões provêm da extrapolação do erro para uma suavização linear, simulamos dados de $H(z)$ utilizando o modelo Λ CDM como modelo fiducial com diferentes valores do erro das medidas simuladas. Ao compararmos os erros da reconstrução σ_{rec} e dos dados simulados σ_{sim} , encontramos que σ_{rec} é $\approx 30\%$ menor do que σ_{sim} . Para levar em conta esta discrepância, aumentamos o valor do erro da reconstrução em 30%.

Na Figura 4.2(a), apresenta-se ambas as reconstruções via PGs e suavização (referida como NPS - *Non Parametric Smoothing*) da história de expansão utilizando os dados de cronômetros cósmicos e os valores ótimos dos hiperparâmetros de cada um dos métodos. Os resultados mostrados nesta figura correspondem às reconstruções em que uma função *prior* $\mu(z) = 0$ e o modelo Λ CDM como modelo fiducial são utilizados no PG e no NPS, respectivamente. Por completeza, apresentamos o gráfico da função $H(z)/(1+z) = \dot{a}$ na Fig. 4.2(b). Como podemos observar, a reconstrução via NPS mostra um mínimo em $z_t \sim 0.6$ correspondente à transição entre a fase desacelerada e acelerada do Universo, enquanto o resultado via PG não evidencia esta transição no intervalo considerado. Por tal motivo, poderia se pensar que se a expansão real (desconhecida) do Universo for compatível com o modelo padrão da cosmologia, a reconstrução via NPS produzirá uma melhor e mais razoável calibração da amostra de SNs JLA.

4.3 Calibração dos parâmetros da curva de luz

Com o objetivo de calibrar os parâmetros da curva de luz e construir um diagrama de Hubble independente de modelo cosmológico para a amostra de SNs JLA, transformamos as reconstru-

ções da taxa de expansão em medidas de distância seguindo o método descrito na Seção 4.2.1. Assumindo um universo espacialmente plano, calculamos os valores da distância com seu respectivo erro, considerando um passo $\Delta z=0.005$. Para finalizar, comparamos a diferença entre os resultados a partir da solução numérica da Eq. (2.20) com o cálculo analítico para um modelo cosmológico. No intervalo de *redshift* considerado $[0,1.2]$, e assumindo um modelo Λ CDM, a diferença dos módulos de distância é menor do que 0.003 mag, o que é desprezível comparado com as incertezas atuais das observações de SNs Ia ($\approx 10^{-1}$ mag).

Tanto as estimativas da taxa de expansão obtidas a partir dos dados de cronômetros cósmicos quanto os métodos de regressão utilizados são independentes de modelos cosmológicos, as distâncias derivadas da integração de $H(z)$ são consideradas os valores verdadeiros de d_L^{ver} ou, conseqüentemente, μ^{ver} . Os parâmetros α e β são ajustados utilizando uma análise de χ^2 marginalizando analiticamente a magnitude absoluta M_B ,

$$\chi^2(\alpha, \beta, M_B) = A - 2 \times M_B \times B + M_B^2 \times C, \quad (4.18)$$

onde

$$A(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{740} \frac{[\mu^{\text{SN}}(z_i, \alpha, \beta; M=0) - \mu_{\text{true}}(z_i)]^2}{\sigma_{\text{tot},i}^2(\alpha, \beta)}, \quad (4.19)$$

$$B(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{740} \frac{[\mu^{\text{SN}}(z_i, \alpha, \beta; M=0) - \mu_{\text{true}}(z_i)]}{\sigma_{\text{tot},i}^2(\alpha, \beta)}, \quad (4.20)$$

$$C(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{740} \frac{1}{\sigma_{\text{tot},i}^2(\alpha, \beta)}. \quad (4.21)$$

Os termos σ_{tot}^2 são propagados a partir das incertezas estatísticas das SNs Ia e das incertezas produzidas no cálculo de μ^{ver} . A função $\chi^2(\alpha, \beta, M_B)$ na Eq. (4.18) possui um mínimo em $M_B = B/C$ [140], igual a

$$\tilde{\chi}^2(\alpha, \beta) = A(\alpha, \beta) - \frac{B(\alpha, \beta)^2}{C(\alpha, \beta)}. \quad (4.22)$$

Desse modo, ao minimizarmos $\tilde{\chi}^2(\alpha, \beta)$, podemos obter calibrações para α e β com distâncias verdadeiras derivadas das observações dos cronômetros cósmicos. Por outro lado, também podemos obter uma estimativa para o parâmetro M_B a partir deste ajuste. No item a seguir, ao investigarmos as implicações cosmológicas do diagrama de Hubble, iremos notar que a estimativa da magnitude absoluta quebra a degenerescência entre a constante Hubble de H_0 e M_B .

4.4 Resultados

Os resultados da análise estatística realizada para calcular os parâmetros da curva de luz são resumidos nas Tabelas 4.3 e 4.4, para PGs e NPS, respectivamente. Nesta tabela, são levadas

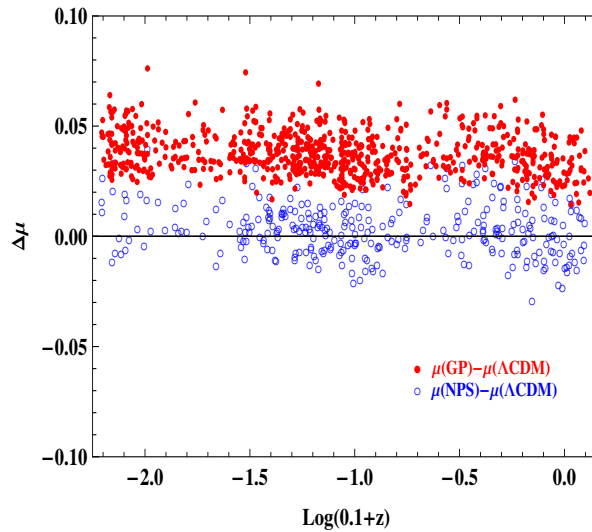


Figura 4.3: Diferença do módulo de distância calculado utilizando as reconstruções via PGs e NPS e o modelos para calibrar os parâmetros da curva de luz.

em consideração as possíveis variações nos resultados relativas aos modelos utilizados como *priors* em nos dois métodos. Como é mostrado na Tabela 4.3, as reconstruções via PGs e as correspondentes calibrações e implicações cosmológicas são sensíveis ao pressuposto da função *prior*. No entanto, os resultados mostrados na Tabela 4.4 são essencialmente diferentes. Verifica-se que as reconstruções via NPS e suas implicações cosmológicas não dependem do modelo fiducial inicial.

A diferença entre o módulo de distância $\mu(z)$ derivado das funções $H(z)$ reconstruídas com PGs e com NPS apresentadas na Fig. 4.2 e o $\mu(z)$ obtido com o modelo Λ CDM é mostrada na Fig. 4.3. De acordo com os resultados da Fig. 4.2(b), os valores obtidos aplicando o método NPS resultam em um diagrama de Hubble mais consistente com a previsão do modelo Λ CDM do que os valores via PGs. Cabe ressaltar que em vez de fixar o valor da constante de Hubble (por exemplo em $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [77]) -como usualmente é feito nas análises com dados de SNs Ia- para determinar os valores de M_B^1 e Δ_M no ajuste global do modelo cosmológico, estes valores, em nossa análise, podem ser estimados a partir da calibração independente de modelo. Isto é realizado através do contraste dos módulos de distância obtidos com o ajuste da curva de luz com aqueles obtidos a partir da reconstrução de $H(z)$ (ver Eqs. (4.1) e (4.2)).

Por último, quantificamos algumas das implicações deste diagrama de Hubble independente de modelo cosmológico para a compilação JLA. Assumimos um modelo de universo Λ CDM espacialmente plano, cujo parâmetro de Hubble está dado pela expressão:

$$H(z) = H_0[\Omega_m(1+z)^3 + (1 - \Omega_m)]^{1/2}. \quad (4.23)$$

Realizando uma análise estatística com os dados da compilação JLA com os módulos de distâncias calibrados com o procedimento anteriormente descrito, vinculamos o plano $\Omega_m - H_0$. Estes resultados são apresentados nas Tabelas 4.3 e 4.4. Conforme esperado, os resultados obtidos

Função <i>prior</i>	Calibração de $(\alpha, \beta, M, \Delta M)$	Vínculos em Ω_m e H_0 (km/s/Mpc)
Constante	0.137, 3.036, -19.081, -0.056	$0.291^{+0.029}_{-0.027}$, $68.924^{+0.476}_{-0.477}$
E-D	0.149, 3.157, -19.042, -0.029	$0.270^{+0.028}_{-0.027}$, $70.838^{+0.493}_{-0.494}$
Λ CDM	0.158, 3.439, -18.983, -0.031	$0.255^{+0.029}_{-0.028}$, $72.795^{+0.521}_{-0.522}$
wCDM	0.152, 3.307, -19.053, -0.042	$0.267^{+0.029}_{-0.028}$, $70.216^{+0.497}_{-0.498}$

Tabela 4.3: Resultados obtidos para diferentes funções médias *prior* no método PGs.

Modelo <i>ansatz</i>	Calibração de $(\alpha, \beta, M, \Delta M)$	Vínculos em Ω_m e H_0 (km/s/Mpc)
E-D	0.154, 3.190, -19.022, -0.019	$0.264^{+0.028}_{-0.027}$, $71.738^{+0.500}_{-0.501}$
Λ CDM	0.155, 3.221, -19.014, -0.017	$0.261^{+0.028}_{-0.027}$, $72.070^{+0.504}_{-0.505}$
wCDM	0.153, 3.172, -19.028, -0.021	$0.265^{+0.028}_{-0.027}$, $71.525^{+0.498}_{-0.499}$

Tabela 4.4: Resultados obtidos para diferentes modelos *ansatz* no método NPS.

via PGs são dependentes do modelo *prior*. Contrariamente, ao utilizarmos o método NPS, os resultados obtidos são fracamente sensíveis ao modelo fiducial inicial. Os contornos de confiança do plano $\Omega_m - H_0$ são apresentados na Fig. 4.4(a). Para os PGs, obtemos que o valor da constante do Hubble é compatível com o valor de H_0 estimado a partir das flutuações de temperatura da RCF, das colaborações Planck + WMAP9 + BICEP2 reportado na Ref. [141]. Para o método de suavização, encontramos que o vínculo da constante de Hubble é compatível com a medida recente da constante de Hubble local, obtida a partir da velocidade de recessão de objetos próximos ($H_0 = 73.80 \pm 2.40$ km/s/Mpc com 68.3 % de confiança) [142] (ver Fig. 4.4(b)).

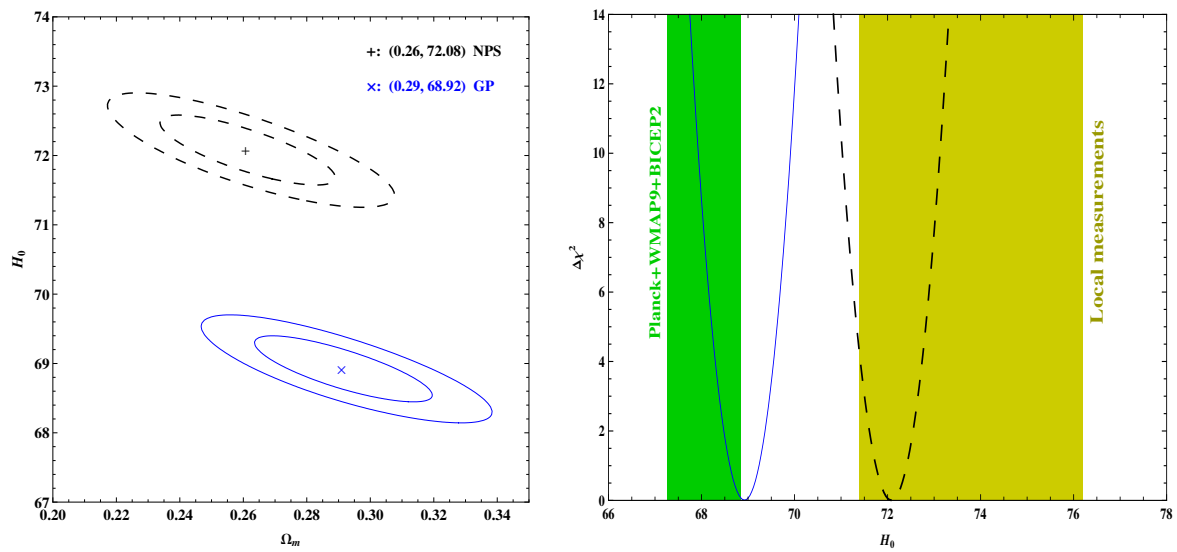


Figura 4.4: (a) Vínculos no plano $\Omega_m - H_0$ assumindo um modelo Λ CDM espacialmente plano utilizando a compilação JLA calibrada de maneira independente de modelo. (b) Distribuição de probabilidade marginalizada do parâmetro H_0 . A linha azul contínua corresponde aos resultados utilizando a calibração via PGs, enquanto a linha preta tracejada corresponde à calibração via NPS. As regiões sombreadas verde e amarela correspondem aos intervalos de 68% de confiança do parâmetro H_0 provenientes das medidas de RCF das colaborações Planck+WMAP9+BICEP2 [141] e de observações de variáveis cefeidas [142], respectivamente.

5 Reconstrução das Perturbações Cosmológicas de Matéria na Teoria da Relatividade Geral

Nos capítulos anteriores, foram apresentadas várias aplicações dos métodos de reconstrução não paramétricos na área da cosmologia. Estes métodos têm sido utilizado para reconstruir o parâmetro de Hubble e de desaceleração, a equação de estado da energia escura, os testes nulos O_k e O_m , validar a relação de dualidade cósmica, entre outros. A característica comum de todas estas aplicações é que estão focadas no estudo de quantidades em um nível de *background*, ou seja, no contexto de um universo sem perturbações.

Do ponto de vista observacional, é bem conhecido que a precisão das medidas de quantidades em um nível de *background* (por exemplo, a distância de diâmetro angular, a distância de luminosidade e a taxa de expansão do Universo) não é suficiente para distinguir entre modelos de EE e teorias de GM. Além disso, do ponto de vista teórico, mesmo com dados de alta precisão, é impossível decidir se a aceleração cósmica é um efeito geométrico ou dinâmico. Esta impossibilidade decorre do fato de que diferentes cenários de GM podem produzir a mesma taxa de expansão que modelos de EE e, conseqüentemente, os observáveis cosmológicos em um nível de *background* encontram-se degenerados [47, 83]. No entanto, quando consideramos um modelo de universo mais realístico possuindo flutuações geométricas e flutuações nos campos de energia, esta degenerescência pode ser quebrada ao analisarmos o crescimento das perturbações da densidade de matéria, uma vez que diferentes classes de modelos produzem, em geral, previsões características do crescimento das estruturas cósmicas (ver Fig. 5.1). As quantidades perturbativas, como o contraste de densidade δ , a taxa f e o índice de crescimento γ , constituem ferramentas de vital importância para desvendar a verdadeira natureza da aceleração cósmica [47, 83]. Nas teorias da gravidade modificada, a taxa de crescimento geralmente é diferente da predita por modelos no marco da TRG. A constante gravitacional efetiva G_{eff} aparece no termo fonte que impulsiona a evolução de δ , mudando significativamente em relação à

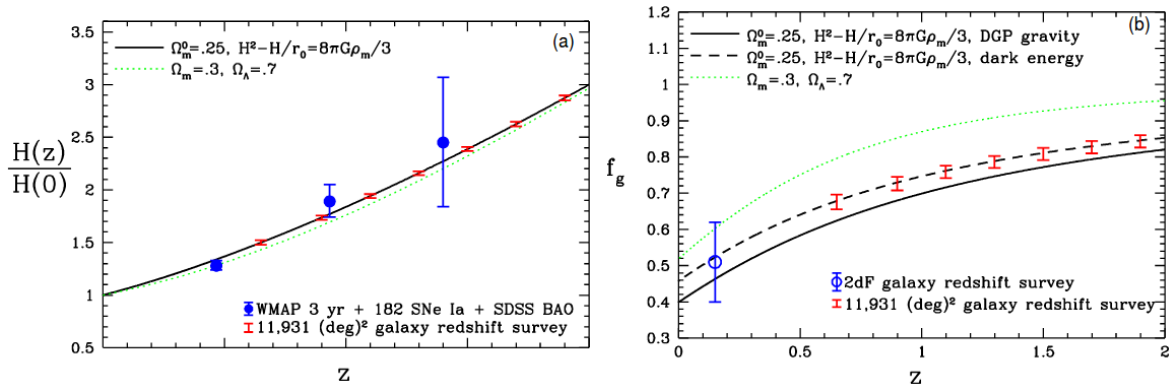


Figura 5.1: (a) Taxa de expansão e (b) taxa de crescimento para diferentes modelos cosmológicos. Os pontos azuis correspondem a dados reais enquanto os pontos vermelhos correspondem a dados simulados assumindo um modelo de EE como modelo fiducial. A linha pontilhada representa o modelo Λ CDM, a linha tracejada um modelo de EE e a linha sólida o modelo DGP. Estes modelos produzem a mesma taxa de expansão cósmica com diferente taxa de crescimento das perturbações de matéria. Figura retirada da referência [47].

constante gravitacional de Newton G , usual no regime da TRG*.

Neste capítulo, apresentaremos um estudo pioneiro ao utilizarmos métodos de regressão não paramétrica, Processos Gaussianos e Suavização, para reconstruir de maneira contínua quantidades em um nível perturbativo a partir de observáveis no nível de *background*. Especificamente, calcularemos a taxa de expansão do Universo utilizando as estimativas provenientes do método de idades diferenciais de galáxias, que são independentes de modelos cosmológicos e de modelos de síntese de população estelar, e estimativas em altos *redshifts* obtidas a partir da função de correlação tridimensional da fração de fluxo transmitido em sistemas *Ly α -forest* de quasares. Com a reconstrução do parâmetro de Hubble $H(z)$ -assumindo que a teoria que descreve corretamente a gravidade é a TRG e que o Universo (sem perturbar) é plano, homogêneo e isotrópico- calcularemos as perturbações lineares de matéria não relativística dentro do horizonte de Hubble, o que corresponde ao cálculo do contraste de densidade e as quantidades que dele se derivam. Iremos comparar nossos resultados obtidos a partir da taxa de expansão do Universo com as estimativas da taxa de crescimento obtidas a partir das observações do Universo em grande escala, permitindo a validação das hipóteses envolvidas nas nossas reconstruções. Finalmente, reconstruiremos um teste nulo definido utilizando tanto observáveis do tipo *background* quanto observáveis do nível perturbativo.

5.1 O contraste de densidade e outras quantidades perturbativas

* As perturbações em teorias de GM serão desenvolvidas no Capítulo 6.

Na Seção 2.3, foi apresentado o arcabouço teórico das perturbações cosmológicas dentro do marco da TRG. O ponto de partida desta análise é a perturbação da métrica, em que por simplicidade assumimos um universo espacialmente plano. Baseados no contexto de um universo de *background* homogêneo e isotrópico, consideramos as perturbações escalares da métrica de FLRW no calibre Newtoniano

$$ds^2 = a^2[(1 + 2\phi)d\eta^2 - ((1 - 2\psi)\delta_{i,j})dx^i dx^j], \quad (5.1)$$

onde $\psi = \phi$ em ausência de um estresse anisotrópico. Estas quantidades estão relacionadas com o contraste de densidade

$$\delta(x, t) \equiv \frac{\delta\rho_m(x, t) - \bar{\rho}_m(t)}{\bar{\rho}_m(t)}, \quad (5.2)$$

via a equação de Poisson

$$k^2\phi = -4\pi G a^2 \rho_m \delta, \quad (5.3)$$

sendo consideradas distâncias dentro do horizonte de Hubble. Seguindo o formalismo desenvolvido na Seção 2.3.2, obtemos a equação diferencial de segunda ordem que governa a evolução das perturbações de matéria

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m - 4\pi G\rho_m\delta = 0. \quad (5.4)$$

Onde foi assumido que a EE escura não se aglomera nestas escalas e que a matéria é covariantemente conservada.

No caso simples em que o universo pode ser descrito com matéria, curvatura e uma constante cosmológica, ou seja, que o parâmetro de Hubble ao quadrado pode ser escrito em termos de um polinômio de terceiro grau [143],

$$H^2(z) = C_1 + C_2(1 + z)^2 + C_3(1 + z)^3, \quad (5.5)$$

a Eq. (5.4) possui solução analítica exata dada por

$$\delta \propto H(z) \int_{\infty}^z \frac{1 + z'}{H^3(z')} dz', \quad (5.6)$$

correspondente ao modo crescente das perturbações. Para uma evolução distinta, da anteriormente mencionada, a Eq. (5.4) tem que ser solucionada numericamente. Este é o caso de um campo de EE arbitrário. A Eq. (5.4) pode ser reescrita em termos da distância física adimensional,

$$D = H_0 \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = H_0 \int_0^z \frac{dz_1}{H(z_1)}, \quad (5.7)$$

como:

$$\left(\frac{\delta'}{1+z(D)}\right)' = \frac{3}{2}\Omega_{m0}\delta, \quad (5.8)$$

onde a linha representa a derivada com respeito a D e foi utilizada a suposição que $\rho_m \propto (1+z)^{3\dagger}$. A solução desta equação diferencial pode ser escrita em termos do seguinte sistema de equações integrais [48, 144]:

$$\begin{aligned} \delta(D) = & 1 + \delta'_0 \int_0^D [1+z(D_1)] dD_1 \\ & + \frac{3}{2}\Omega_{m0} \int_0^D [1+z(D_1)] \left(\int_0^{D_1} \delta(D_2) dD_2 \right) dD_1, \end{aligned} \quad (5.9a)$$

$$\begin{aligned} \delta'(D) = & \delta'_0 [1+z(D)] \\ & + \frac{3}{2}\Omega_{m0} [1+z(D)] \int_0^D \delta(D_1) dD_1. \end{aligned} \quad (5.9b)$$

O fato do processo de integração reduz a propagação de erros de dados ruidosos constitui a vantagem principal desta solução de δ . Note que esta solução integral do contraste de densidade δ não está acoplada com a sua primeira derivada δ' . Contrariamente, a solução de δ' requer a informação sobre o contraste de densidade.

Para resolver o sistema integral de equações, nós devemos utilizar informação *a priori* do valor do parâmetro de densidade da matéria hoje Ω_m . Em nossa análise, adotamos duas diferentes estimativas desta quantidade, provenientes das colaborações Planck e WMAP. Com o objetivo de obter uma solução única do sistema de equações, fixamos as duas constantes de integração da Eq. (5.9b) na nossa solução integral. A primeira constante de integração é implicitamente fixada na Eq. (5.9b), visto que foi normalizada a solução do contraste de densidade ao seu valor atual, isto é, $\delta_0 = \delta(z=0) = 1$. Para fixar a segunda constante de integração, $\delta'_0 = \delta'(z=0)$, é necessário analisar o comportamento de δ na era dominada pela matéria, e escolher o valor desta constante tal que o contraste de densidade seja proporcional ao fator de escala em altos *redshifts*. Na prática, entretanto, é mais simples fixar o valor de δ'_0 ao analisar o fator de crescimento, definido como[‡]:

$$g(z) \equiv (1+z)\delta(z). \quad (5.10)$$

Uma solução única da Eq. (5.4) implica que a história da expansão cósmica e o valor do conteúdo de matéria em um momento específico (em nossas equações, o valor atual $\Omega_m(z=0) = \Omega_{m0}$) determinam univocamente o contraste de densidade da matéria. Cabe ressaltar que no contexto de um modelo cosmológico dado, não há dependência entre as perturbações de matéria

[†] Neste capítulo e posteriores, escrevemos explicitamente o sub-índice 0 para denotar a densidade atual de matéria, Ω_{m0} .

[‡] Em alguns textos, o contraste de densidade normalizado em $z=0$ é chamado de fator de crescimento.

e a constante de Hubble H_0 [§]. Portanto, podemos realizar uma determinação indireta de δ ao reconstruirmos o parâmetro de Hubble a partir dos dados de $H(z)$. Além disso, como mostrado na Ref. [81], a unicidade da Eq. (5.9b) permite uma solução analítica do problema inverso, ou seja, a determinação da expansão cósmica como uma função do contraste de densidade $H(\delta(z))$,

$$H^2(z) = 3\Omega_{m0}H_0^2 \frac{(1+z)^2}{(d\delta/dz)^2} \int_z^\infty \frac{\delta|d\delta/dz|}{1+z} dz. \quad (5.11)$$

Porém, enquanto a taxa de expansão cósmica pode ser estimada diretamente a partir da idade de galáxias -ou por meio da derivada das distâncias de diâmetro angular ou de luminosidade- o contraste de densidade não constitui um observável cosmológico e não pode ser determinado diretamente das observações. Por tal motivo, é útil definir outras quantidades que tenham uma conexão direta com as observações para poder vincular o crescimento das estruturas. Podemos definir o espectro de potência da matéria como:

$$P(k, a) \equiv A|\delta_k(a)|^2, \quad (5.12)$$

sendo equivalente à transformada de Fourier da função de correlação de dois pontos $\zeta(r)$, cujo estimador é dado por

$$\zeta(r) = \frac{DD(r)}{RR(r)} - 1, \quad (5.13)$$

onde $DD(r)$ é o número de galáxias que localizam-se a uma distância r num catálogo real e $RR(r)$ o número de galáxias que localizam-se na mesma distância num catálogo aleatório. Outros tipos de estimadores para $\zeta(r)$ têm sido explorados na literatura. Alguns deles podem ser encontrados nas referências [145, 146, 147]. Por sua vez, podemos relacionar o espectro de potência com o valor quadrático médio da amplitude das flutuações de massa (a variância das flutuações de massa) dado por:

$$\sigma_R^2 = \int_0^\infty \frac{k^3 P_{linear}(k, a)}{2\pi^2} W(kR) d \ln k, \quad (5.14)$$

onde $W(x) = 3j_1(x)/x$ é a transformada de Fourier da função janela no espaço real e P_{linear} o espectro de potência no regime linear. $\sigma_R(a)$ contém a informação do valor médio da quantidade de flutuações de matéria em uma esfera de raio R em um dado *redshift*, assumindo que as perturbações encontram-se no regime linear e, portanto, que a Eq. (5.4) é válida. O tamanho desta esfera é padronizado em $R = 8h^{-1}$ Mpc e o valor *rms* das flutuações em função do *redshift* em termos do contraste de densidade é

$$\sigma_8(z) = \sigma_8 \delta(z) / \delta(0) \quad (5.15)$$

sendo $\sigma_8 \equiv \sigma_{8h^{-1}Mpc}(z=0)$.

[§] Este fato pode ser conferido diretamente nas soluções de δ apresentadas, onde as expressões sempre envolvem o parâmetro de Hubble normalizado ($h(z) = H(z)/H_0$) que independe de H_0 .

A partir das observações da estrutura em grande escala do Universo, analisando o *espectro* de potência da matéria ou os dados de lenteamento gravitacional, podem ser inferidas as variações de $\sigma_8(z)$ e $\delta(z)$. Estas observações são sensíveis à taxa de crescimento, definida como

$$f(z) \equiv \frac{d \ln \delta}{d \ln a} = -\frac{(1+z)H_0}{H(z)} \frac{\delta'}{\delta}, \quad (5.16)$$

e à taxa de variação da amplitude de aglomeração definida como

$$f\sigma_8(z) \equiv f(z)\sigma_8(z) = \frac{d\sigma_8(a(z))}{d \ln a}. \quad (5.17)$$

As estimativas de $f(z)$ e de $f\sigma_8(z)$ a partir das observações da estrutura em grande escala e as estimativas obtidas solucionando as Eqs. (5.4), (5.16) e (5.17) a partir de uma reconstrução do parâmetro de Hubble são independentes. Consequentemente, uma tensão entre estas evidenciaria uma violação de algum dos nossos postulados para derivar a Eq. (5.4). As implicações da discrepância destas estimativas são:

- O Universo não é homogêneo, isotrópico ou espacialmente plano em grandes escalas. Por exemplo, em um cenário cosmológico LTB, universo inomogêneo, as equações das perturbações têm que ser modificadas, como mostrado na Ref. [45, 46];
- A EE e a matéria escura não se conservam separadamente e, portanto, a densidade de matéria não decai proporcional a a^{-3} . Estes cenários correspondem a modelos em que existe interação entre as componentes escuras [148, 149, 150, 151] ou quando elas constituem um único campo, como é o caso do gás de Chaplygin [152]. Nestes modelos a EE aglomera-se parcialmente junto com a matéria escura em pequenas escalas. Como consequência disto, o contraste de densidade torna-se dependente da escala k [144].
- A TRG não é a teoria correta para descrever a gravitação em grandes escalas ou a EE aglomera-se e seu efeito tem que ser levado em conta, inclusive, em distâncias menores do que o horizonte de Hubble. Em ambos os casos, G não se comporta como uma constante e deve ser reescrita em termos de uma função gravitacional efetiva que pode depender tanto da escala quanto do tempo (*redshift*), $G_{eff} = G_{eff}(k, t)$ [153, 154, 155, 156].

Finalmente, se introduz o índice de crescimento γ como uma forma de aproximar a taxa de crescimento em termos do conteúdo de matéria [157, 158, 159]

$$f(z) \simeq \Omega_m(z)^\gamma. \quad (5.18)$$

Nesta expressão, a dependência com respeito ao *redshift* está totalmente contida no parâmetro de densidade, sendo γ uma constante. Para a precisão atual dos dados, esta expressão constitui uma boa aproximação de f , no entanto, para dados futuros será necessária uma forma funcional mais geral [47]. Por este motivo, definimos o índice de crescimento de maneira geral como uma função de z ,

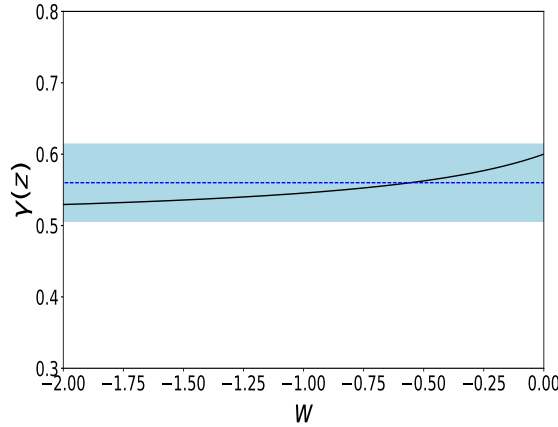


Figura 5.2: Valores do índice de crescimento em modelos de EE lentamente variável. A linha preta denota o valor do índice de crescimento em função da equação de estado da EE dado por $\gamma \simeq \frac{3(w-1)}{6w-5}$. A linha azul e a região sombreada denotam os vínculos do índice de crescimento encontrados nesta tese.

$$\gamma(z) \equiv \frac{\ln f(z)}{\ln \Omega_m(z)}, \quad (5.19)$$

onde o parâmetro de densidade da matéria é definido como

$$\Omega_m(z) \equiv \frac{\Omega_{m0}(1+z)^3 H_0^2}{H^2(z)}. \quad (5.20)$$

Como foi mencionado, tanto a taxa de crescimento quanto o índice de crescimento são quantidades essenciais para distinguir entre modelos de EE e teorias de GM [47, 83, 153]. Especificamente, o índice de crescimento é útil na caracterização de teorias de gravitação. Por exemplo, $\gamma = 6/11$ para o modelo Λ CDM [159, 160, 161], $\gamma = 11/16$ para o modelo DGP [160] e o valor de γ encontra-se no intervalo $0.40 < \gamma < 0.43$ [153] para o tipo de teoria $f(R)$ proposta na Ref. [37]. Por outro lado, para modelos de EE, sem aglomeração, com uma equação de estado que evoluciona lentamente, $\gamma \simeq \frac{3(w-1)}{6w-5}$ [47]. É possível utilizar vínculos sobre o índice de crescimento para restringir a equação de estado da EE escura. Porém, como é visto na Fig. 5.2, as estimativas do valor de γ , não vinculam fortemente w , não sendo estes limites competitivos com os obtidos com dados de observáveis de *background* (SNs Ia, flutuações na RCF, sinais de BAO).

5.2 Construção do teste nulo

Podemos construir um teste nulo assumindo a validade da Eq. (5.4) que governa o crescimento das perturbações. Por tal motivo, os postulados utilizados para derivar esta expressão devem ser satisfeitos. Este teste nulo que faz uso de quantidades de *background* e perturbativas

foi proposto nas Refs. [162, 163]. A seguir, apresentamos a forma de construir este teste:

Primeiramente, escrevemos a Eq. (5.4) em termos do fator de escala

$$\delta''(a) + \left(\frac{3}{a} + \frac{H'(a)}{H(a)} \right) \delta'(a) - \frac{3}{2} \frac{\Omega_m H_0^2 \delta(a)}{a^5 H(a)^2} = 0, \quad (5.21)$$

onde a linha representa a derivada com respeito ao argumento da função. Assumimos que esta expressão provém das equações de Euler-Lagrange, com δ considerada uma coordenada generalizada,

$$\frac{d}{da} \left(\frac{\partial \mathcal{L}(a, \delta, \delta')}{\partial \delta'} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}(a, \delta, \delta')}{\partial \delta} = 0. \quad (5.22)$$

Como usual, escrevemos a Lagrangiana em função de um termo "cinético" e um "potencial" da coordenada generalizada,

$$\mathcal{L} = T - V, \quad (5.23)$$

onde T e V são escritas como

$$T = \frac{1}{2} f_1(a, H(a)) \delta'(a)^2 \quad (5.24)$$

$$V = \frac{1}{2} f_2(a, H(a)) \delta(a)^2 \quad (5.25)$$

sendo f_1 e f_2 duas funções desconhecidas a serem determinadas. Substituindo esta Lagrangiana nas equações de Euler-Lagrange (5.22), obtemos

$$\delta''(a) + \left(\frac{\partial_a f_1(a, H)}{f_1(a, H)} + \frac{H'(a) \partial_H f_1(a, H)}{f_1(a, H)} \right) \delta'(a) + \frac{f_2(a, H)}{f_1(a, H)} \delta(a) = 0. \quad (5.26)$$

Por comparação com a Eq. (5.21), determinamos as funções f_1 e f_2 :

$$f_1(a, H(a)) = a^3 H(a) / H_0, \quad (5.27)$$

$$f_2(a, H(a)) = -\frac{3\Omega_{m0}}{2a^2 H(a) / H_0}. \quad (5.28)$$

Desta forma, o Lagrangiano e o Hamiltoniano do sistema ficam definidos como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} a^3 \delta'(a)^2 H(a) / H_0 + \frac{3\Omega_{m0}}{4a^2 H(a) / H_0} \delta(a)^2, \quad (5.29a)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} a^3 \delta'(a)^2 H(a) / H_0 - \frac{3\Omega_{m0}}{4a^2 H(a) / H_0} \delta(a)^2. \quad (5.29b)$$

Neste sistema, o Hamiltoniano depende explicitamente da parâmetro "temporal" a e, portanto, \mathcal{H} não é uma constante de "movimento", ou seja, não é uma quantidade conservada deste sis-

tema. Contudo, ao conhecermos a função Lagrangiana do sistema, podemos aplicar o teorema de Noether para encontrar uma quantidade conservada e adaptá-la a um teste nulo. Para este fim, utilizamos a derivada de Lie do Lagrangiano ao longo da direção do vetor X para encontrar uma direção de simetria do sistema.

Dado um vetor X

$$\mathbf{X} = \alpha(a) \frac{\partial}{\partial \delta} + \frac{d\alpha(a)}{da} \frac{\partial}{\partial \delta'} \quad (5.30)$$

ao longo de uma direção de simetria do sistema, temos que a derivada de Lie do Lagrangiano na direção X é nula,

$$L_X \mathcal{L} = 0. \quad (5.31)$$

Aplicando a derivada de Lie de uma função escalar na direção do vetor X , $X[f]$, temos que

$$\Sigma = \alpha(a) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \delta'} \quad (5.32)$$

é uma constante de "movimento" do sistema. Para o caso particular do Lagrangiano na Eq. (5.29a), esta constante é

$$\Sigma = \alpha(a) \delta'(a) a^3 H(a) / H_0. \quad (5.33)$$

Neste ponto basta determinar a função $\alpha(a)$, o que pode ser feito pela substituição da Eq. (5.29a) no operador da Eq. (5.30). Esta operação produz a equação diferencial

$$\alpha'(a) a^3 H(a) / H_0 \delta'(a) + \frac{3\Omega_m \delta(a) \alpha(a)}{2a^2 H(a) / H_0} = 0, \quad (5.34)$$

cujas solução de $\alpha(a)$ é dada por

$$\alpha(a) = c \exp \left[- \int_{a_0}^a \frac{3\Omega_m \delta(x)}{2x^5 H(x)^2 / H_0^2 \delta'(x)} dx \right], \quad (5.35)$$

onde c é uma constante de integração. Substituindo o valor de α na Eq. (5.33) e escolhendo o valor de c de tal forma que Σ seja igual a 1, temos

$$\Sigma = \frac{a^2 H(a) f(a)}{a_0^2 H(a_0) f(a_0)} \exp \left[\int_{a_0}^a \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{3\Omega_m}{2x^4 H(x)^2 f(x)} \right) dx \right] = 1, \quad (5.36)$$

onde δ foi escrito em termos da taxa de crescimento como $\delta(a) = \delta(a_0) e^{\int_{a_0}^a \frac{f(x)}{x} dx}$. Finalmente, escrevemos o teste nulo em termos de $f(a)$

$$O(z) = \frac{a^2 H(a) f(a)}{a_0^2 H(a_0) f(a_0)} \exp \left[\int_{a_0}^a \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{3\Omega_m}{2x^4 H(x)^2 f(x)} \right) dx \right] \quad (5.37)$$

ou em termos de $f\sigma_8(a)$

$$O(z) = \frac{a^2 H(a) f\sigma_8(a)}{a_0^2 H(a_0) f\sigma_8(a_0)} \exp \left[-\frac{3}{2} \Omega_m \int_{a_0}^a \frac{\sigma_8(a=1) \frac{\delta(a_0)}{\delta(1)} + \int_{a_0}^x \frac{f\sigma_8(y)}{y} dy}{x^4 H(x)^2 / H_0^2 f\sigma_8(x)} dx \right]. \quad (5.38)$$

Este teste nulo tem a vantagem de utilizar uma quantidade de *background* como o parâmetro de Hubble e uma quantidade perturbativa como o contraste de densidade ou as funções $f(z)$ ou $f\sigma_8(z)$.

5.3 Dados

Para realizar a reconstrução da taxa de expansão cósmica aplicando os métodos não paramétricos - Processos Gaussianos e Suavização- utilizamos o conjunto de dados descrito na Seção 5.3. Estes dados correspondem a estimativas de $H(z)$ a partir de idade de galáxias passivamente evoluídas. A vantagem principal deste conjunto de medidas é a sua independência de modelos cosmológicos quanto de modelos de síntese de populações estelares, fazendo com que os resultados não sejam enviesados por estes modelos.

Contudo, este conjunto de dados não é suficiente para realizar a reconstrução do contraste de densidade e as outras quantidades perturbativas, descritas na seção anterior. O problema fundamental é a necessidade de informação em altos *redshifts* para fixar as condições iniciais (constantes de integração). Como podemos observar na Fig. 4.2, a reconstrução de $H(z)$ via PGs para este conjunto de dados não apresenta uma transição entre uma fase acelerada e uma desacelerada na expansão cósmica. Esta reconstrução evidencia, unicamente, uma fase acelerada. Portanto, não é possível utilizar esta informação para reconstruir as perturbações assumindo que existe uma fase dominada pela matéria em que $\delta \propto a$. No caso da reconstrução efetuada com o método de suavização, esta apresenta as duas fases. Contudo, os resultados obtidos não seriam robustos ao extrapolarmos a informação em *redshifts* baixos e intermediários ($z < 1.2$) a *redshifts* muito altos ($z > 2$).

Para resolver este problema, acrescentamos ao nosso conjunto de cronômetros cósmicos, duas estimativas de $H(z)$ provenientes do sinal de BAO em *redshifts* muito altos ($z \sim 2.4$), utilizando dados de quasares. Na teoria, qualquer traçador da distribuição de matéria em grande escala pode ser utilizado para estimar o sinal de BAO, ou seja, pode ser usado como uma régua padrão estatística como prova cosmológica. A primeira detecção do sinal de BAO foi realizada analisando a distribuição espacial de galáxias em baixos *redshifts* ($z < 0.4$) [164, 165] e depois estendido a galáxias em *redshifts* intermediários ($0.4 < z < 0.8$) [166, 167]. Entretanto, há uma grande variedade de levantamentos cujo objetivo é determinar o sinal de BAO a partir da distribuição de fontes de raios [168], emissão de 21 cm [169], galáxias emissoras de Ly α [170], quasares [171] e a distribuição de hidrogênio neutro traçado pelo Ly α forest [172].

z	f_{obs}	σ	Ref.
0.15	0.51	0.11	[174],[175]
0.22	0.60	0.10	[176]
0.32	0.654	0.18	[177]
0.35	0.70	0.18	[178]
0.41	0.70	0.07	[176]
0.55	0.75	0.18	[179]
0.60	0.73	0.07	[176]
0.77	0.91	0.36	[180]
0.78	0.70	0.08	[176]
1.4	0.90	0.24	[181]

Tabela 5.1: Estimativas de f_{obs} utilizadas na análise. Tabela adaptada da Ref. [182]

Estas duas estimativas de $H(z)$ a partir de dados de quasares são:

- $H(z = 2.34) = 222 \pm 7 \text{ km/s/Mpc}$. Este valor foi determinado através da função de autocorrelação do *Ly α -forest* utilizando dados de aproximadamente 160.000 quasares do SDSS DR11 [137, 173];
- $H(z = 2.36) = 226 \pm 8 \text{ km/s/Mpc}$. Este valor foi determinado através da correlação cruzada (*cross-correlation*) do campo de densidade de quasares e absorções de *Ly α* utilizando, também, dados de aproximadamente 160.000 quasares do SDSS DR11.

Cabe ressaltar que estas duas estimativas da taxa de expansão cósmica, utilizando dados de quasares em *redshifts* muito altos do SDSS DR11, não estão correlacionadas [136].

Por outro lado, em sua maioria, as estimativas da taxa de crescimento $f(z)$ e a taxa de variação da amplitude de aglomeração $f\sigma_8(z)$ provém da análise das distorções no espaço de *redshift* (*redshift-space distortion*, RSD).

As galáxias e os quasares são traçadores enviesados da estrutura subjacente do Universo. Este viés provém da natureza dos objetos observáveis. A impossibilidade de observar a matéria escura faz com que sua distribuição tenha que ser inferida a partir dos objetos luminosos. Relaciona-se, então, a sobre-densidade de galáxias (ou qualquer outro traçador, como quasares) com a sobre-densidade de matéria escura via uma função viés b , tal que $\delta_g(z, k) = b(z, k)\delta_{me}(z, k)$, o que causa uma degenerescência entre as estimativas das flutuações de matéria e os parâmetros de b . Entretanto, os dados de levantamentos espectroscópicos possuem informações adicionais sobre o campo de velocidade produzido pelo colapso gravitacional, medindo separadamente o espectro de potência ao longo e perpendicular à linha de visada. Esta informação do campo de velocidade ajuda a diferenciar os efeitos da EE ou da modificação da gravidade através das medidas de RSD, quebrando a degenerescência produzida pela função viés.

As RSD originam-se porque a atração gravitacional das sobre-densidades de matéria causa desvios de velocidade com respeito ao fluxo de Hubble. Essas velocidades peculiares são impressas nos dados de levantamentos em que a velocidade de recessão é utilizada como a coordenada radial das posições dos objetos, levando a uma aparente compressão da aglomeração

z	$f\sigma_8(z)$	Refs.
0.02	0.360 ± 0.040	[184]
0.067	0.423 ± 0.055	[185]
0.25	0.3512 ± 0.0583	[186]
0.37	0.4602 ± 0.0378	[186]
0.30	0.407 ± 0.055	[187]
0.40	0.419 ± 0.041	[187]
0.50	0.427 ± 0.043	[187]
0.60	0.433 ± 0.067	[187]
0.17	0.510 ± 0.060	[188]
0.35	0.440 ± 0.050	[188]
0.77	0.490 ± 0.018	[180, 188]
0.44	0.413 ± 0.080	[129]
0.60	0.390 ± 0.063	[129]
0.73	0.437 ± 0.072	[129]
0.80	0.470 ± 0.080	[189]
0.35	0.445 ± 0.097	[126]
0.32	0.384 ± 0.095	[190]
0.57	0.423 ± 0.052	[191]

Tabela 5.2: Estimativas de $f\sigma_8(z)$ utilizadas na nossa análise. Tabela retirada da Ref. [163]

radial em relação à aglomeração transversal em grandes escalas espaciais (algumas dezenas de Mpc). Em escalas menores (alguns Mpc), observa-se um alongamento adicional, conhecido como dedo de Deus (*finger-of-God*), devido às velocidades aleatórias das galáxias no aglomerado. A anisotropia resultante na aglomeração de galáxias está correlacionada com a velocidade em que a estrutura cresce. Portanto, as RSD são sensíveis às taxas de crescimento $f(z)$ e $f\sigma_8(z)$.

As medidas de $f(z)$ e $f\sigma_8(z)$, utilizadas neste trabalho para comparar com as reconstruções das mesmas realizadas via dados de $H(z)$, são apresentadas nas Tabelas 5.1 e 5.2. Uma tabela completa das estimativas atuais de $f\sigma_8(z)$, junto com um conjunto de medidas que não apresenta correlações, pode ser encontrada na Ref. [183].

5.4 Reconstrução das Perturbações de Matéria utilizando Processos Gaussianos

Utilizamos os dados de $H(z)$, descritos na seção anterior, para obter uma curva suave da história da expansão cósmica utilizando o método de PGs. Como descrito na Seção 3.3, maximizamos a função de verossimilhança (3.32), obtendo, desta maneira, os valores ótimos dos hiper-parâmetros para realizar a reconstrução de $H(z)$. Na Fig. 5.3(a), mostramos os resultados desta reconstrução junto com os dados utilizados. Também apresentamos, na Fig. 5.3, a variação temporal do fator de escala em função do *redshift*, dado pela quantidade $\dot{a} = H(z)/(1+z)$. Esta função apresenta um mínimo em $z \simeq 0.62$ correspondente à recente transição entre a de-

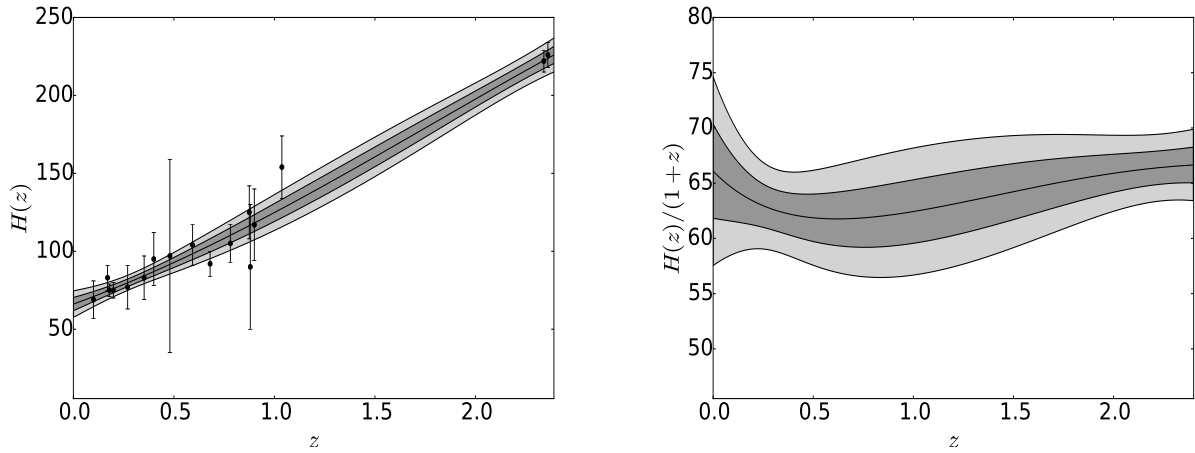


Figura 5.3: (a) Reconstrução da expansão cósmica (em km/s/Mpc) via PGs a partir de dados de cronômetros cósmicos de quasares em altos- z . A linha preta sólida corresponde à reconstrução via PGs enquanto as regiões sombreadas correspondem aos intervalos de confiança em 1σ e 2σ . Os pontos representam os dados observacionais apresentados. (b) $H(z)/(1+z)$ como função de z .

saceleração e aceleração cósmica. Como podemos ver, diferentemente da Fig 4.2, o efeito da inclusão dos dados de quasares em altas *redshifts* modifica consideravelmente a reconstrução via PGs, produzindo uma fase desacelerada. Conforme mencionado, esta fase é necessária em nossa análise uma vez que as constantes de integração são fixadas de acordo com o comportamento de δ na era da matéria.

Na Fig. 5.4, apresentamos a evolução de $\Omega_m(z)$ (Eq. (5.20)). Nas Figs. 5.4(a) e 5.4(b), foram adotados os valores atuais do parâmetro de densidade da matéria, dados pela colaboração Planck [14], $\Omega_{m0} = 0.308 \pm 0.012$ e pela colaboração WMAP [13], $\Omega_{m0} = 0.279 \pm 0.025$, respectivamente. Este comportamento implica no aumento da importância da matéria na dinâmica do Universo em altas *redshifts* (para uma comparação com o comportamento desta quantidade no modelo padrão, ver Fig. 2.2).

Após a reconstrução de $H(z)$ via PGs, calculamos a distância física adimensional e, com esta informação e os valores de Ω_{m0} mencionados, calculamos a solução do contraste de densidade (Eq. (5.9b)) de maneira iterativa. O único parâmetro livre na Eq. (5.9b) é δ'_0 , sendo necessário encontrar um valor apropriado. Como estudado na Seção 2.3.3, da teoria de perturbações cosmológicas, é esperado que $\delta \propto a = 1/(1+z)$ em altas *redshifts* ou, igualmente, que $g(z) \rightarrow \text{constant}$. Na prática, calculamos o fator de crescimento $g(z)$ para vários valores de δ'_0 até obter o comportamento requerido em $z \simeq 2.36$, o ponto de maior *redshift* de nossos dados. Para os valores de Ω_{m0} das colaborações Planck e WMAP, respectivamente, estimamos $\delta'_0 = 0.515 \pm 0.003$ e $\delta'_0 = 0.485 \pm 0.003$. Os fatores de crescimento calculados são apresentados na Fig. 5.5. Como esperado, a reconstrução de $g(z)$ depende significativamente do valor atual da fração de matéria hoje assumido na análise. Estas reconstruções de $g(z)$ são similares às obtidas na Ref. [144] que utiliza uma suavização linear dos dados de SNIa para derivar $H(z)$ e, com isto, calcular as perturbações de matéria.

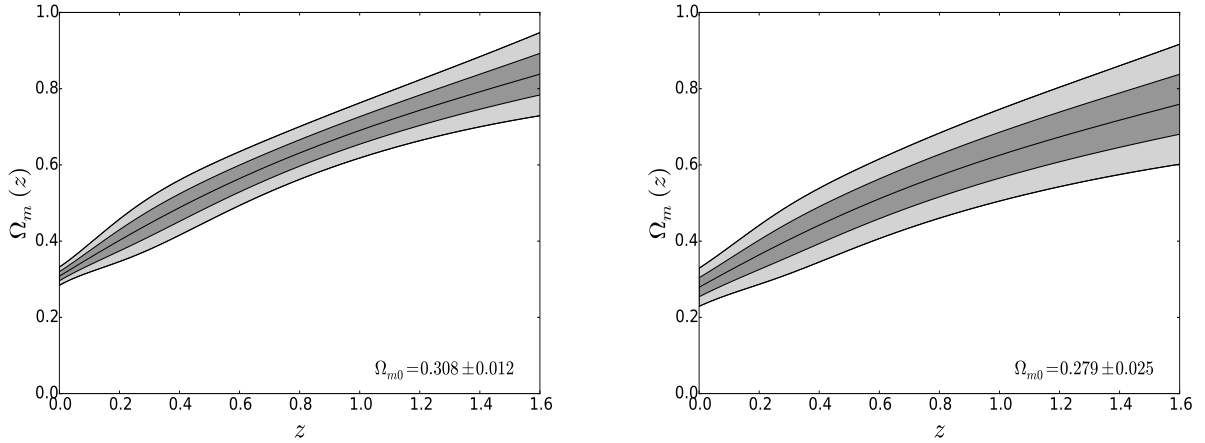


Figura 5.4: Evolução do parâmetro de densidade de matéria calculado utilizando a reconstrução de $H(z)$ mostrada na Fig. 5.3(a) e as estimativas atuais de Ω_{m0} provenientes das colaborações Planck (a) e WMAP (b). As regiões sombreadas correspondem ao intervalos de confiança em 1σ e 2σ .

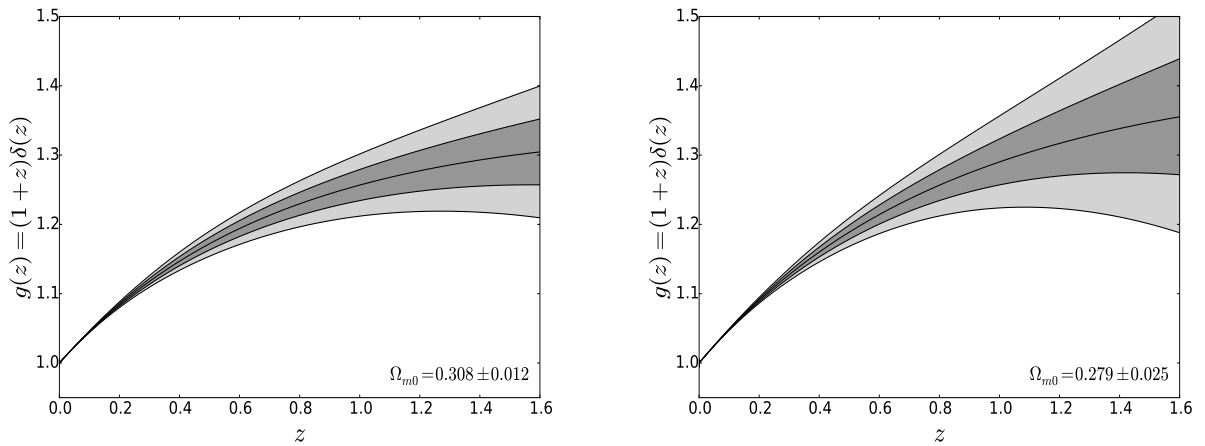


Figura 5.5: (a) Fator de crescimento em escalas menores do que o horizonte de Hubble obtido resolvendo a Eq. 5.9b e utilizando o valor de Ω_{m0} da colaboração Planck. (b) Fator de crescimento calculado assumindo o valor de Ω_{m0} dado pela colaboração WMAP.

Na reconstrução da taxa de crescimento, o valor de δ'_0 tem um papel importante pela sua relação com o valor atual de f , $f(0) = -\delta'_0$. Esta relação pode ser derivada a partir da Eq. (5.16). A reconstrução de f como uma função do *redshift*, junto com as medidas desta quantidade mostradas na Tabela 5.1, é apresentada na Fig. 5.6. Esta clara compatibilidade entre a reconstrução de $f(z)$, a partir dos dados de cronômetros cósmicos e quasares em altos *redshifts*, com as medidas da taxa de crescimento provenientes de levantamentos de galáxias, pode ser interpretada como uma medida da consistência do formalismo teórico apresentado, bem como, do método de reconstrução não paramétrica utilizado na nossa análise.

Mais importante ainda, para os valores de Ω_{m0} dados pelos experimentos de RCF atuais, os resultados da Fig. 5.6 mostram ser compatíveis com a descrição cosmológica padrão, ou seja, um universo relativista geral descrito pelo elemento de linha de FLRW e cujo campo

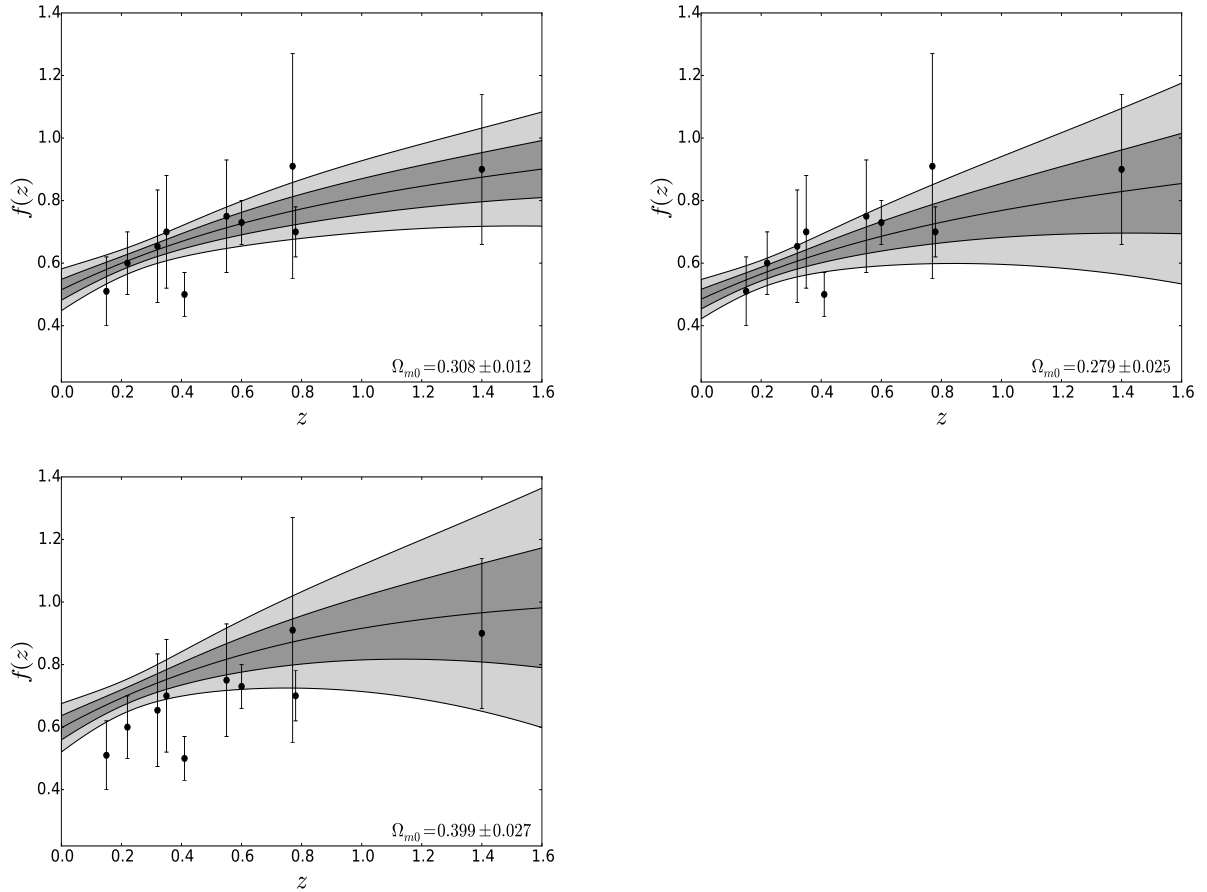


Figura 5.6: Taxa de crescimento das perturbações de matéria. A linha preta sólida corresponde ao valor médio da reconstrução solucionado a Eq. (5.16), enquanto as regiões sombreadas correspondem aos intervalos de confiança em 1σ e 2σ . (a) Taxa de crescimento obtida assumindo o valor de Ω_{m0} dado pela colaboração Planck. (b) Taxa de crescimento obtida assumindo o valor de Ω_{m0} dado pela colaboração WMAP. (c) Taxa de crescimento obtida assumindo o valor de Ω_{m0} dado pela análise de SNs Ia [192]. Os dados foram extraídos da Tabela II da Ref. [182]

de matéria é covariavelmente conservado. Note que, no entanto, esta conclusão pode mudar se considerarmos os valores dos parâmetros de densidade de matéria fora dos intervalos permitidos pelos experimentos atuais de RCF. Isto é claramente visto na Fig. 5.6(c) que assume $\Omega_{m0} = 0.399 \pm 0.025$, conforme obtido de uma análise recente de dados de SNs Ia (assumindo o modelo Λ CDM) [192]. Quantitativamente falando, os valores do χ^2 entre os dados de $f(z)$ e o valor esperado das curvas reconstruídas de $f(z)$ (linhas sólidas nos gráficos) são: $\chi^2 = 7.51$ e $\chi^2 = 5.20$ para os valores de Ω_{m0} mostrado nos painéis 4a e 4b, respectivamente, e $\chi^2 = 25.80$ para o valor de Ω_{m0} considerado no painel 4c.

Finalmente, calculamos o índice de crescimento γ utilizando a função reconstruída de $f(z)$ e os valores de Ω_{m0} discutidos acima. Em $z = 0$, encontramos $\gamma_0 = 0.56 \pm 0.12$ (2σ) e $\gamma_0 = 0.57 \pm 0.13$ (2σ) para os valores Planck e WMAP de Ω_{m0} , respectivamente. A partir de nossa reconstrução, o índice de crescimento é mais efetivamente limitado em $z = 0.09$, ou seja, $\gamma = 0.57 \pm 0.11$ (2σ), assumindo o Ω_{m0} dado pela Colaboração Planck. Para a estima-

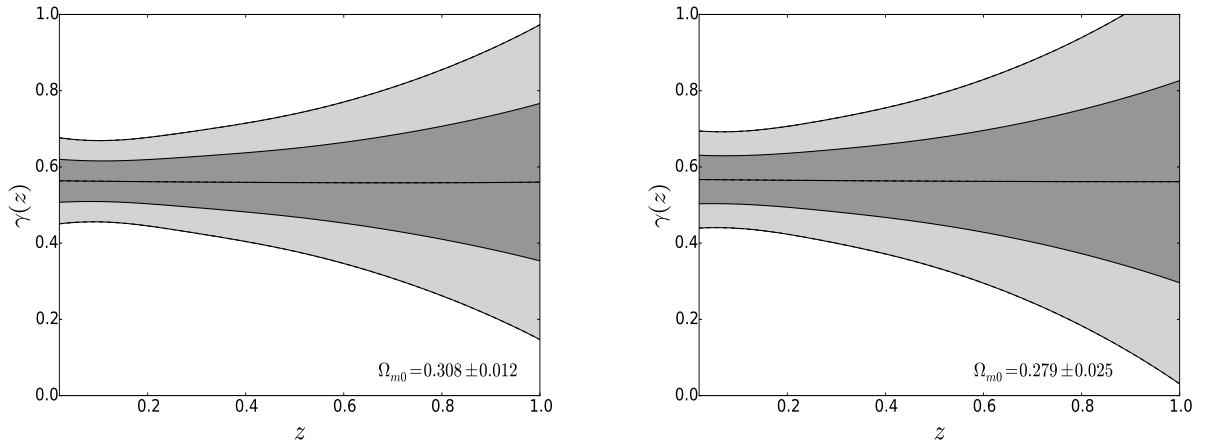


Figura 5.7: Índice de crescimento $\gamma(z)$ das perturbações de matéria. A linha preta sólida corresponde ao valor médio da reconstrução, enquanto as regiões sombreadas correspondem aos intervalos de confiança em 1σ e 2σ . (a) Índice de crescimento obtido assumindo o valor de Ω_{m0} dado pela colaboração Planck. (b) Índice de crescimento obtido assumindo o valor de Ω_{m0} dado pela colaboração WMAP.

tiva do WMAP-9 do parâmetro densidade da matéria, encontramos um valor muito similar em $z = 0.05$. Observa-se também que a precisão atual das medidas de $H(z)$ não é suficiente para colocar restrições significativas no valor γ'_0 , que poderia fornecer um teste do modelo Λ CDM [153]. A reconstrução final do índice de crescimento é apresentada na Fig. 5.7.

5.5 Reconstrução das Perturbações de Matéria utilizando Suavização

Nesta seção, iremos comparar os resultados apresentados na seção anterior com os resultados obtidos a partir da reconstrução de $H(z)$ via o método de Suavização modificado (Seção 3.4.1 e 4.2.3). Além da diferença do método de reconstrução, vamos acrescentar ao nosso conjunto de dados da taxa de expansão (Seção 5.3), o ponto $H(z = 0.4293) = 91.8 \pm 5.3$ km/s/Mpc [128]. Também apresentamos os resultados da reconstrução do teste nulo $O_p(z)$ calculado com as reconstruções de $H(z)$ e $f\sigma_8(z)$ (Tabela 5.2) via suavização.

A reconstrução final utilizando o método de suavização é mostrada na Fig. 5.8(a), juntamente com a variação temporal do fator de escala, ou seja, $\dot{a} = H(z)/(1+z)$ (Fig. 5.8(b)). Na Fig. 5.8(b), o z de transição (desaceleração / aceleração) corresponde ao mínimo da função em $z_t \approx 0,48$, o que está de acordo com estimativas recentes desta quantidade [128, 193, 194]. Vale notar que os valores da constante Hubble e o z_t derivado do método NPS são, respectivamente, $\sim 4\%$ maiores e $\sim 29\%$ menores que os valores obtidos com os PGs (Seção 5.4).

Nas Figs. 5.4(a) e 5.4(b), mostramos o parâmetro de densidade de matéria (Eq. (5.20)) obtido a partir da função suavizada $H(z)$ e de dois *priors* por Ω_{m0} fornecido pela colaboração Planck

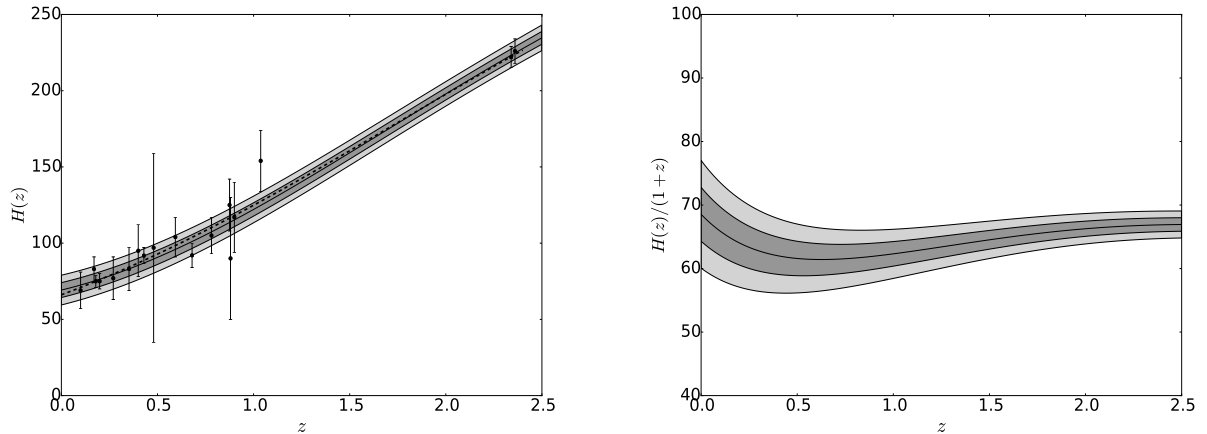


Figura 5.8: Reconstrução da expansão cósmica (em km/s/Mpc) via PGs a partir de dados de cronômetros cósmicos de quasares em altos- z . A linha preta sólida corresponde à reconstrução via PGs enquanto as regiões sombreadas correspondem ao intervalos de confiança em 1σ e 2σ . A linha tracejada corresponde à reconstrução utilizando PGs Os pontos representam os dados observacionais apresentados na Seção 5.3. b) $H(z)/(1+z)$ como função de z .

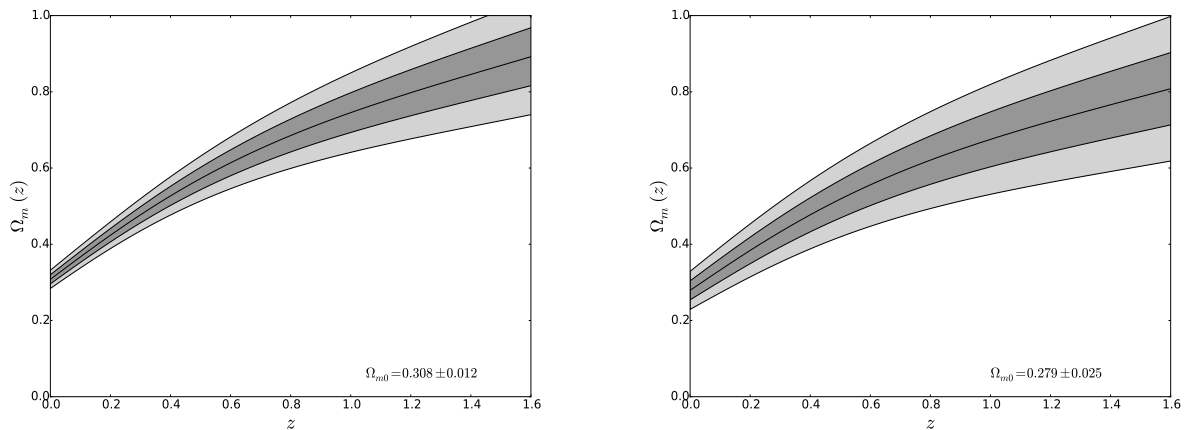


Figura 5.9: Evolução do parâmetro de densidade de matéria calculado utilizando a reconstrução de $H(z)$ via suavização, mostrada na Fig. 5.8(a), e assumindo as estimativas atuais de Ω_{m0} provenientes das colaborações Planck (a) e WMAP (b). As regiões sombreadas correspondem ao intervalos de confiança em 1σ e 2σ .

[14], $\Omega_{m0} = 0.308 \pm 0.012$ e pela colaboração WMAP-9, $\Omega_{m0} = 0.279 \pm 0.025$ [13]. Utilizando a função suavizada $H(z)$ e os *priors* de Ω_{m0} , conforme mencionado na Seção 5.4, calculamos o contraste de densidade de matéria resolvendo a integral (5.9b). Como foi discutido, a evolução de $\delta(z)$ é totalmente determinada pela expansão cósmica normalizada e pelo conteúdo de matéria no presente, quando o valor da constante de integração δ'_0 é fixado. Seguindo o procedimento descrito na seção anterior, exploramos diferentes valores para a constante δ'_0 e o fixamos quando alcançamos a evolução esperada do fator de crescimento ($g(z) = (1+z)\delta(z) \rightarrow const$) próximo ao *redshift* mais alto da nossa amostra, $z = 2.34$. O fator de crescimento final é muito sensível ao valor δ'_0 , portanto, podemos obter uma estimativa precisa dessa constante de integração.

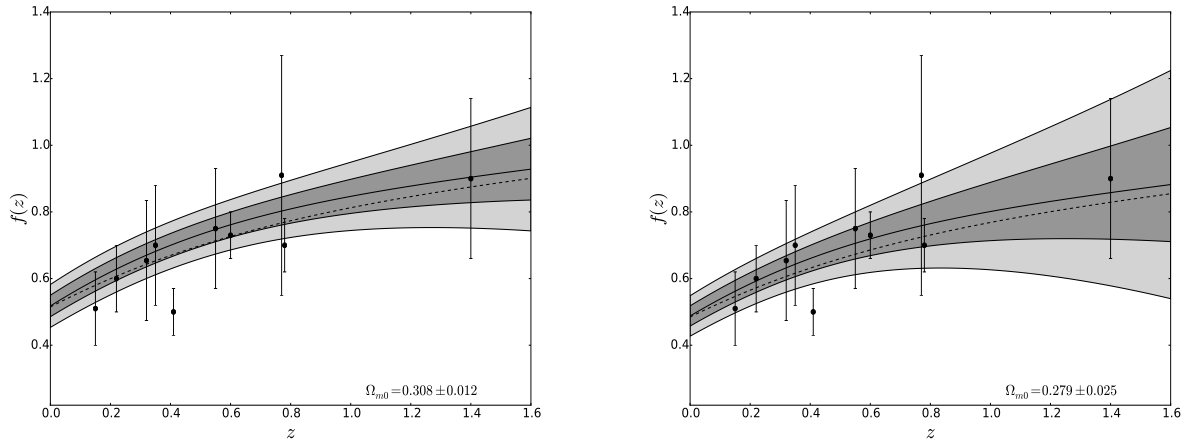


Figura 5.10: Reconstrução da taxa de crescimento das perturbações de matéria. A linha sólida corresponde à reconstrução via suavização. (a) Taxa de crescimento obtida assumindo o valor de Ω_{m0} dado pela colaboração Planck. (b) Taxa de crescimento obtida assumindo o valor de Ω_{m0} dado pela colaboração WMAP. A linha tracejada corresponde à taxa de crescimento calculada utilizando a reconstrução de $H(z)$ via PGs. Os pontos foram tomados da Tabela II da Ref. [182] e as regiões sombreadas representam os níveis de confiança da reconstrução em 1σ and 2σ .

O $g(z)$ resultante depende do Ω_{m0} e, conseqüentemente, o valor δ'_0 correto também depende do conteúdo material. Para o contraste de densidade de matéria calculado com os valores de Ω_{m0} - provenientes das colaborações Planck e WMAP-9- estimamos $\delta'_0 = 0.518 \pm 0.003$ e $\delta'_0 = 0.488 \pm 0.003$, respectivamente.

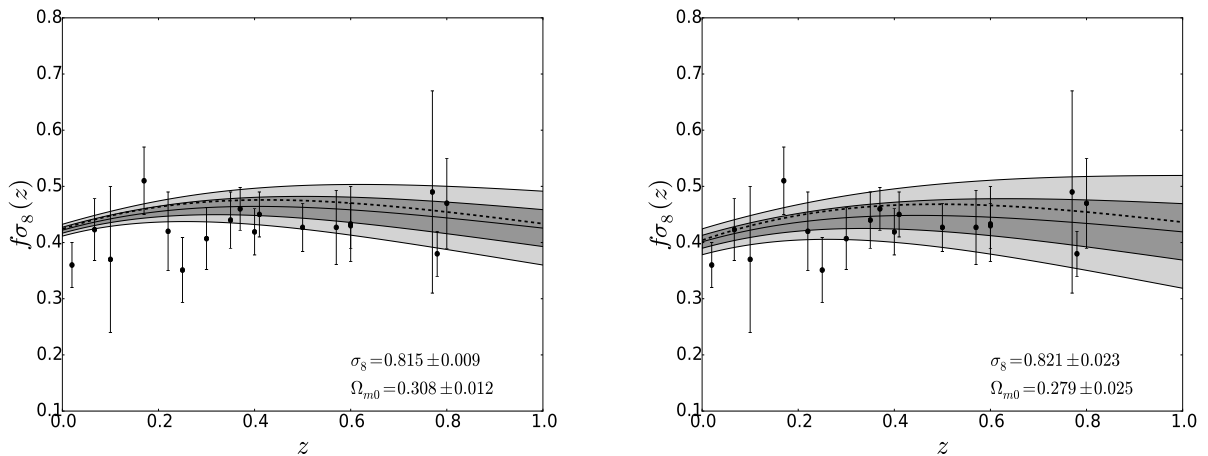


Figura 5.11: Taxa de variação da amplitude de aglomeração $f\sigma_8(z)$. A linha sólida corresponde à reconstrução enquanto as regiões sombreadas representam os níveis de confiança em 1σ e 2σ . Por comparação, apresentamos o valor de $f\sigma_8$ previsto pelo modelo Λ CDM (linha tracejada). Taxa de variação da amplitude de aglomeração obtida assumindo o valor de Ω_{m0} dado pela colaboração Planck (a) e assumindo o valor de Ω_{m0} dado pela colaboração WMAP (b). Os dados foram tomados da Tabela I da Ref. [163].

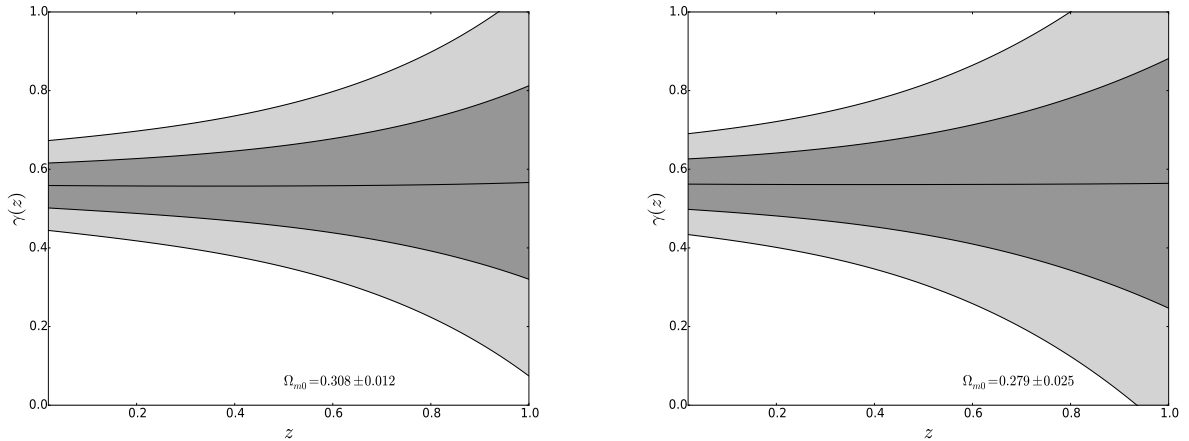


Figura 5.12: Índice de crescimento $\gamma(z)$ das perturbações de matéria. A linha preta sólida corresponde ao valor médio da reconstrução, enquanto as regiões sombreadas correspondem aos intervalos de confiança em 1σ e 2σ . (a) Índice de crescimento obtido assumindo o valor de Ω_{m0} dado pela colaboração Planck. (b) Índice de crescimento obtido assumindo o valor de Ω_{m0} dado pela colaboração WMAP.

Na Fig. 5.10, apresentamos a reconstrução resultante da taxa de crescimento, junto com os dados provenientes da estrutura em grande escala. Para comparar estes resultados com os apresentados na seção anterior, também traçamos a taxa de crescimento calculada utilizando a reconstrução de $H(z)$ via PGs (ver a Fig. 5.8(a)). Este resultado mostra claramente a sensibilidade das quantidades perturbativas à taxa de expansão. Neste caso, a principal diferença entre as reconstruções da expansão de Hubble (via suavização e PGs) é o valor em $z = 0$. Note-se que, quando consideramos um modelo cosmológico com expansão cósmica dado por $H(z) = H_0 E(z)$, as perturbações de matéria são independentes da constante de Hubble visto que dependem apenas de $H(z)/H_0$. Porém, no caso de uma reconstrução não paramétrica, o valor da normalização (H_0) afetará a função $H(z)/H_0$ em todo o intervalo de *redshift*.

O observável $f\sigma_8(z)$ é mostrado na Fig. 5.11. Neste caso, também é necessária a informação sobre o parâmetro σ_8 para determinar a função (Eq. (5.17)) a partir da expansão cósmica reconstruída. Utilizamos os valores da colaboração Planck e WMAP-9, $\sigma_8 = 0.815 \pm 0.009$ e $\sigma_8 = 0.821 \pm 0.023$, respectivamente. Na Fig. 5.11, também mostramos as medidas de $f\sigma_8(z)$ compiladas na Ref. [163]. A compatibilidade entre as quantidades reconstruídas via o conhecimento de $H(z)$ e os dados observacionais demonstra a coerência do modelo cosmológico padrão, isto é, a validade da hipótese de um universo homogêneo e isotrópico, contendo matéria e um fluido de EE covariantemente conservados no cenário da TRG (ver Seção 5.1). Conforme descrevemos, a aplicação do método de suavização ou dos PGs traz resultados compatíveis com os dados observacionais, portanto, notamos que a coerência dos resultados não depende do método não paramétrico utilizado para reconstruir a expansão cósmica.

A última quantidade perturbativa definida, $\gamma(z)$, é calculada com a taxa de crescimento reconstruída (Fig. 5.10) e com o parâmetro de densidade de matéria (Fig. 5.9) para ambos os

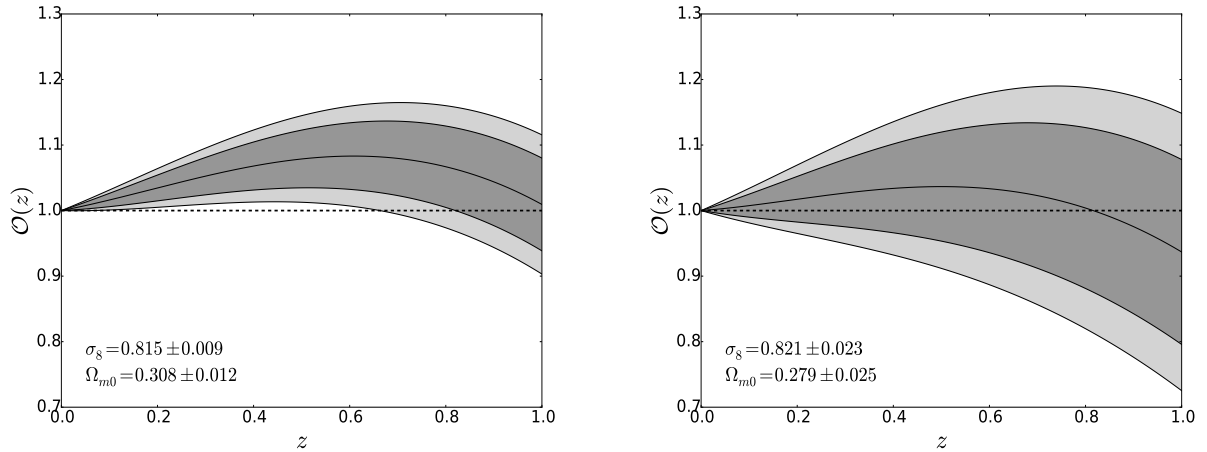


Figura 5.13: Resultados do teste nulo $O_p(z)$. (a) Evolução de $O(z)$ obtida assumindo o valor de Ω_{m0} e de σ_8 da colaboração Planck. (b) TEvolução de $O(z)$ obtida assumindo o valor de Ω_{m0} e de σ_8 da colaboração WMAP. As regiões sombreadas denotam os níveis de confiança de 2σ e 3σ . A linha tracejada denota o valor de $O_p(z)$ quando a TRG é válida.

valores de Ω_{m0} . Em $z = 0$, encontramos $\gamma_0 = 0.56 \pm 0.11$ (2σ) e $\gamma_0 = 0.56 \pm 0.13$ (2σ) para os valores de Ω_{m0} das colaborações Planck e WMAP-9, respectivamente. O que é compatível com os resultados apresentados na seção anterior. A reconstrução do índice de crescimento é mostrada na Fig. 5.12.

Finalmente, também aplicamos o método de suavização aos dados de $f\sigma_8(z)$ exibidos, na Tabela 5.2, para obter a evolução dessa quantidade em uma forma não paramétrica. Com os observáveis $H(z)$ e $f\sigma_8(z)$ reconstruídos e os valores de $f\sigma_8(z)$ e Ω_{m0} dos experimentos de RCF, calculamos o teste nulo perturbativo $O_p(z)$, discutido na Seção 5.2. Os resultados são mostrados na Fig. 5.13. Observamos que a reconstrução não paramétrica da quantidade $O_p(z)$ mostra uma tensão entre a previsão do modelo padrão e os dados num nível de $\sim 3\sigma$ para os resultados obtidos com os *priors* da colaboração Planck. Como foi apontado na Ref. [163] o valor do teste $O_p(z)$ é muito sensível ao processamento dos dados que, no nosso caso, corresponde à escala de suavização para realizar a reconstrução. Exploramos diferentes valores de Δ para reconstruir o $f\sigma_8(z)$, apesar disso, a tensão em baixos *redshifts* permanece. Esta tensão entre os dados da taxa de crescimento e os resultados da colaboração Planck foi apontada nas Refs. [183, 195]. Por outro lado, a mesma reconstrução realizada com os *priors* da colaboração WMAP-9 é consistente com a cosmologia padrão.

6 Reconstrução das Perturbações Cosmológicas de Matéria em Teorias de Gravidade Modificada

As inconsistências teóricas no modelo cosmológico padrão (por exemplo, ajuste fino e problemas de coincidência cósmica [19]) e algumas tensões do ponto de vista observacional (ver Ref. [20] para uma breve revisão) têm motivado a investigação de diferentes mecanismos para explicar a aceleração cósmica. Conforme discutido ao longo desta tese, tais mecanismos podem ser divididos em dois tipos: uma abordagem dinâmica em que as equações de campo da TRG são mantidas, somada a inclusão de um campo no conteúdo material com pressão negativa que chamamos de energia escura; a outra abordagem consiste na modificação das equações de campo, é considerada uma abordagem geométrica e que chamamos de teoria de gravidade modificada (GM). Em ambos os casos, a EE ou a GM podem ser descritas pela inclusão de campos escalares (por exemplo, *chameleons* [196], *symetrans* [197], *dilatons* [198], *galileons* [199]). O efeito desses campos é fortemente limitado por experimentos locais, o que implica que eles são ocultados (*screened*) em ambientes densos [90, 200]. Conforme discutido, a resposta da causa da aceleração cósmica não pode ser resolvida simplesmente aumentando a precisão e o número de dados de observáveis cosmológicos em um nível de *background*. Por exemplo, todos os campos mencionados (*dilatons*, *chameleons*, *symetrans*, *galileons*) produzem a mesma expansão cósmica que o modelo Λ CDM. Porém, o crescimento das quantidades perturbativas apresenta um comportamento anômalo [90].

Por tal motivo, neste capítulo, estudaremos o comportamento das perturbações de matéria em teorias de GM aplicando técnicas de reconstrução não paramétricas para extrair informação dos dados observacionais. Iremos generalizar a solução integral do contraste de densidade de matéria válido no marco da TRG, apresentado na Ref. [48, 144], para teorias de GM, onde a matéria decai proporcionalmente a a^{-3} e o efeito da modificação da gravidade é levado em conta na constante efetiva de Newton, $G_{eff}(k, a)$. Esta solução requer o conhecimento do parâmetro

Hubble, o parâmetro de densidade da matéria na época presente e a forma funcional do efeito da teoria de GM. Para obter uma reconstrução independente de modelo do parâmetro Hubble, aplicaremos o método de suavização [57, 59, 60, 61, 62, 102, 104] aos dados de cronômetros cósmicos na faixa de *redshift* [0,07, 1,04] [121, 122, 128, 131, 134, 201] e os dados de quasares em altos- z ($z \approx 2.3$ [173]). Por fim, reconstruiremos as perturbações de matéria seguindo o processo descrito no capítulo anterior para os mesmos valores dos parâmetros da teoria de GM utilizada na Ref. [90]. Para isso, utilizaremos a reconstrução não paramétrica da taxa de expansão e a parametrização da GM exibida na Ref. [90, 200]. Essa abordagem nos permitirá explorar a validade da teoria selecionada utilizando apenas dados de background, comparando os cálculos puramente teóricos e os obtidos neste trabalho.

6.1 Solução Integral Generalizada

Para estudar o comportamento das perturbações de matéria em teorias de GM em grandes escalas, consideramos a parametrização $\{m(a), \beta(a)\}$ apresentada em [90, 200]. Esses modelos são definidos pelo efeito sobre a evolução das perturbações da matéria, enquanto a dinâmica do Universo é a mesma do modelo Λ CDM no nível de *background*. Nesta abordagem, a gravidade é modificada em grandes escalas por um campo escalar e permanece inalterada em ambientes densos.

Na Ref. [90], os autores obtêm as equações que regem a evolução das perturbações da matéria em um universo homogêneo e isotrópico com os efeitos de uma *Screened Modified Gravity* (SMG). Neste caso, as perturbações escalares podem ser descritas pela métrica

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + (1 - 2\Psi)a^2(t)d\vec{x}^2, \quad (6.1)$$

onde Φ e Ψ são os potenciais escalares no calibre longitudinal. Além disso, assumimos que os potenciais são proporcionais por uma função que depende da escala e do tempo, $\Gamma(k, a)$, como:

$$\Phi_k = \Gamma(k, a)\Psi_k. \quad (6.2)$$

onde o sub-índice k representa a quantidade no espaço de Fourier. Nesse cenário, a equação de Poisson é modificada pela função paramétrica $\mu(k, a)$ como:

$$k^2\Phi_k = -4\pi\mu(k, a)G_N\rho_m\delta_k, \quad (6.3)$$

onde G_N , ρ_m e δ_k correspondem à constante de Newton, à densidade da matéria no nível de *background* e ao contraste de densidade ($\delta(\vec{x}, t) \equiv (\rho(\vec{x}, t) - \rho(t))/\rho(t)$), respectivamente.

Finalmente, é encontrada a equação diferencial de segunda ordem para as perturbações da

matéria [90] *

$$\delta'' + \frac{a'}{a}\delta' - \frac{3\Omega_m(a)}{2}\left(\frac{a'}{a}\right)^2\mu(k, a)\delta = 0, \quad (6.4)$$

ou

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - \frac{3\Omega_m(a)}{2}H^2\mu(k, a)\delta = 0, \quad (6.5)$$

a linha denota a derivada em relação ao tempo conforme e o ponto refere-se à derivada em relação ao tempo cósmico. $\Omega_m(a)$ é o parâmetro de densidade da matéria definido por:

$$\Omega_m(a) \equiv \frac{\Omega_{m0}H_0^2}{a^3H^2(a)}. \quad (6.6)$$

Neste caso, a evolução das estruturas de matéria é totalmente determinada pelas funções H e $\mu(k, a)$ e o valor da densidade da matéria hoje Ω_{m0} . Nessas equações, qualquer efeito da GM é codificado na função $\mu(k, a)$.

Como foi feito no caso da TRG (capítulo anterior), definimos a distância física adimensional como:

$$D = H_0 \int_t^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = H_0 \int_0^z \frac{dz_1}{H(z_1)}, \quad (6.7)$$

e reescrevemos as Eqs. (6.4) e (6.5) em termos do *redshift* e de D como:

$$\frac{d}{dD} \left(\frac{d\delta/dD}{1+z(D)} \right) = \frac{3}{2}\Omega_{m0}\mu(k, a)\delta, \quad (6.8)$$

onde é assumido que $\rho_m \propto a^{-3}$.

A solução da equação anterior pode ser escrita como uma função integral:

$$\begin{aligned} \delta(D) &= 1 + \delta'_0 \int_0^D [1+z(D_1)] dD_1 + \frac{3}{2}\Omega_{m0} \\ &\times \int_0^D [1+z(D_1)] \left(\int_0^{D_1} \mu(k, a)\delta(D_2) dD_2 \right) dD_1, \end{aligned} \quad (6.9a)$$

$$\begin{aligned} \delta'(D) &= \delta'_0[1+z(D)] \\ &+ \frac{3}{2}\Omega_{m0}[1+z(D)] \int_0^D \mu(k, a)\delta(D_1) dD_1 \end{aligned} \quad (6.9b)$$

que são facilmente calculados se conhecemos o parâmetro de Hubble e $\mu(k, a(D))$.

A forma particular da função $\mu(k, a)$ depende dos valores dos parâmetros $\{m(a), \beta(a)\}$. Nesta parametrização, $m(a)$ representa a massa do campo escalar no nível de *background* e $\beta(a)$ representa a função de acoplamento entre o campo e as partículas de matéria escura fria [90]. Neste

* No resto do texto, ignoramos o sub-índice do espaço de Fourier k

pesquisa, consideramos a mesma família de parametrização do que as Refs. [90, 200], onde a GM selecionada é caracterizada por

$$\mu(k, a) = \frac{(1 + 2\beta(a)^2)k^2 + m(a)^2 a^2}{k^2 + m(a)^2 a^2}. \quad (6.10)$$

Estudamos casos com função de acoplamento constante $\beta = 1/\sqrt{6}$ e com a massa do campo dada por:

$$m(a) = m_0 a^{-3(n+2)/2}, \quad (6.11)$$

onde m_0 é uma escala livre próxima de 1 Mpc^{-1} e $n > 0$. É importante destacar que, para este valor β , a parametrização (6.10) descreve modelos $F(R)$ [200].

Se identificamos

$$\frac{G_{eff}(k, a)}{G_N} = \mu(k, a), \quad (6.12)$$

a Eq (5.9b) constitui uma generalização da solução para o contraste de densidade mostrado na Ref. [144] para qualquer teoria de GM que satisfaça a equação diferencial de segunda ordem [202]

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - 4\pi G_{eff}\rho_m = 0, \quad (6.13)$$

onde G_{eff} é a constante efetiva de Newton.

Assim, definimos a taxa de crescimento como:

$$f(k, z) \equiv \frac{d \ln \delta(k, z)}{d \ln a} = -\frac{(1+z)H_0}{H(z)} \frac{\delta'(k, z)}{\delta(k, z)}. \quad (6.14)$$

Esta quantidade tem importância crucial porque é estimada diretamente pelas observações da estrutura em grande escala do Universo. Partindo do fato da taxa de crescimento constituir um observável cosmológico, é possível comparar o resultado da equação anterior utilizando informações de background com o resultado obtido das observações da estrutura em grande escala. Esta comparação nos permite provar as hipóteses da dinâmica de *background* do Universo utilizadas para calcular a Eq. (6.4). Tais hipóteses são:

- O princípio cosmológico é válido, portanto, a geometria do Universo no nível de *background* é descrita pela métrica FLRW não perturbada. Por exemplo, em geometrias não homogêneas, as equações são modificadas conforme apresentado nas Refs. [45, 46];
- O TME da matéria é covariantemente conservado. Isso implica que a densidade da matéria decai proporcionalmente a a^{-3} . Nos modelos em que há interação no setor escuro, a matéria escura não decai na mesma taxa e, no caso geral, a equação diferencial precisa ser modificada [148, 149, 150, 151, 156, 203];

- A teoria correta da gravidade é a GM selecionada, caracterizada pela função $\mu(k, a)$ no nível de perturbação (Eq. (6.10)) que se comporta como uma cosmologia Λ CDM no nível de *background*. Conforme mencionado acima, podemos generalizar esta condição para qualquer teoria de GM que satisfaça a Eq. (6.13).

Finalmente, completamos o conjunto de quantidades perturbativas, definindo o índice de crescimento

$$\gamma(k, z) = \frac{\ln f(k, z)}{\ln \Omega_m(z)}, \quad (6.15)$$

que é uma excelente ferramenta para caracterizar teorias de GM. Como foi dito, no capítulo anterior, alguns valores destacáveis do índice de crescimento são: modelo Λ CDM, $\gamma_0 = 6/11$; modelos de EE com equação de estado w lentamente variável $\gamma \simeq \frac{3(w-1)}{6w-5}$ [159, 160] e modelo DGP, $\gamma_0 = 11/16$ [160]. Nestes casos, o índice de crescimento é bem descrito por uma função constante [204]. No entanto, de uma maneira geral, ele pode evoluir com o *redshift* e para dados futuros de alta precisão, sua evolução deve ser levada em consideração [47].

6.2 Resultados da Reconstrução de Perturbações em SMG

Aplicamos o método de suavização apresentado na Seção 3.4.1 e modificado na Seção 4.2.3 aos dados de $H(z)$ descritos na Seção 5.3 obtendo uma função suave para a taxa de expansão cósmica. Como o método de reconstrução e os dados são independentes do modelo, espera-se que nossa estimativa do parâmetro Hubble não esteja enviesada por qualquer modelo cosmológico. Estes resultados podem ser encontrados na Fig. 5.8 da Seção 5.5, onde, por comparação, também mostramos o resultado obtido utilizando o método não-paramétrico PG. Como foi visto, esta reconstrução apresenta uma fase desacelerada em altos *redshifts*, o que é esperado na cosmologia padrão quando a matéria domina a dinâmica do Universo. Enfatizamos que esse comportamento é exigido por causa das premissas utilizadas para resolver a equação diferencial do contraste de densidade. Também apresentamos o parâmetro de densidade de matéria (Eq. (6.6)) utilizando a reconstrução de $H(z)$ e o valor do parâmetro de densidade na época atual da colaboração WMAP-9 [13] (ver Fig. 5.4(b)).

Dando prosseguimento ao raciocínio, para resolver a Eq. (6.9a) é necessário escolher um valor para Ω_{m0} e uma parametrização para a teoria de SMG. Utilizamos a parametrização mostrada na Eq. (6.10). Para realizar uma comparação direta de nossos resultados -obtidos a partir de uma reconstrução não paramétrica do parâmetro Hubble- e a previsão das perturbações de matéria neste cenário de GM, exploramos os mesmos valores que os utilizados na Ref. [90] para $\{(m_0, n)\} = \{(1 \text{ Mpc}^{-1}, 0), (0,1 \text{ Mpc}^{-1}, 0), (1 \text{ Mpc}^{-1}, 1), (0,1 \text{ Mpc}^{-1}, 1)\}$ e o mesmo valor Ω_{m0}

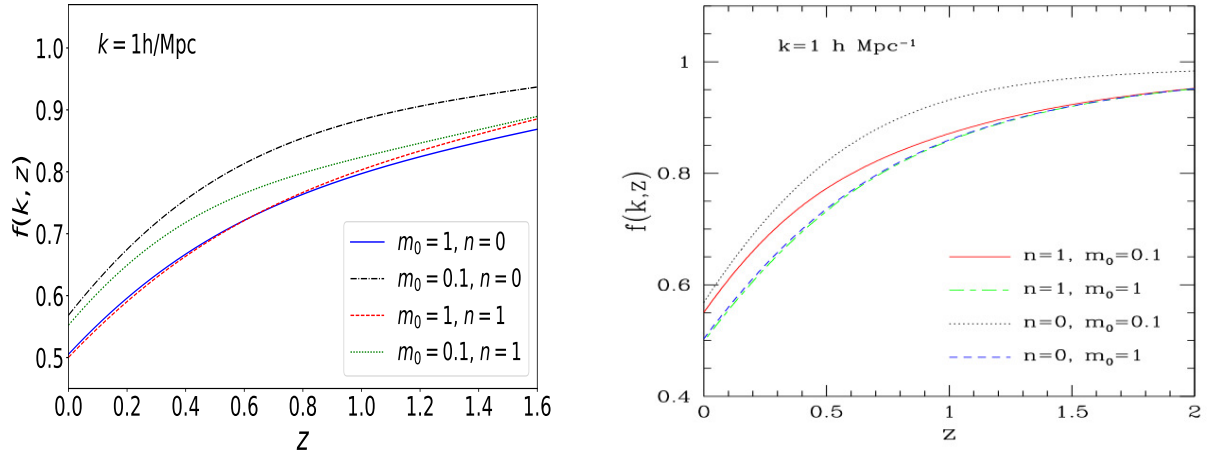


Figura 6.1: (a) Taxa de crescimento em escalas menores do que o horizonte de Hubble. As curvas correspondem à solução da Eq. (6.9a) utilizando o valor de Ω_{m0} dado pela colaboração WMAP-9 e os parâmetros $\{(m_0, n)\}$ da SMG (Eq. (6.10)). (b) A mesma quantidade do painel anterior obtida de maneira analítica na Ref. [90]. m_0 é dada em unidades de Mpc^{-1} .

m_0	n	γ_0^{eo}	γ_0^{rec}
1 Mpc^{-1}	1	0.54	0.54 ± 0.06
0.1 Mpc^{-1}	1	0.47	0.46 ± 0.06
1 Mpc^{-1}	0	0.54	0.53 ± 0.06
0.1 Mpc^{-1}	0	0.44	0.44 ± 0.06

Tabela 6.1: Valor do índice de crescimento calculado via reconstrução das perturbações de matéria e os valores teóricos obtidos em [90].

do WMAP-9 [13]. Com uma teoria da gravidade fixa e uma densidade de matéria hoje, resolvemos a Eq. (6.9a) para muitos valores de δ'_0 e selecionamos aquele que produz $(1+z)\delta \propto const$ no *redshift* da última observação $H(z)$ (ver Seção. 5.4 para mais detalhes). Esta condição é exigida pela teoria padrão de perturbações cosmológicas em uma época de dominância da matéria e compatível com a teoria de GM estudada.

Obtivemos a taxa de crescimento para quatro valores dos parâmetros da SMG utilizando os cálculos do contraste de densidade. Estes resultados são mostrados na Fig. 6.1(a). Encontramos compatibilidade entre os resultados obtidos e os teóricos mostrados na Fig. 6.1(b) [90]. No entanto, reconhecemos uma diferença na intersecção das curvas com $(m_0, n) = \{(1, 0), (1, 1)\}$ e seus comportamentos em altos- z . Na Fig. 6.2, traçamos a taxa de crescimento para os parâmetros da SMG $(m_0, n) = (1, 0), (0.1, 0)$ com o respectivo nível de confiança de 1σ , seguindo a abordagem proposta neste trabalho. Isto mostra que a informação do parâmetro do Hubble pode distinguir entre esses dois parâmetros nessa teoria de GM no nível 1σ . A comparação desses resultados com os dados observacionais da taxa de crescimento pode restringir os parâmetros da teoria de gravidade considerada ou, de maneira mais geral, outras teorias GM.

Finalmente, calculamos o índice de crescimento (Eq. (6.15)) apresentado na Fig. 6.3. É

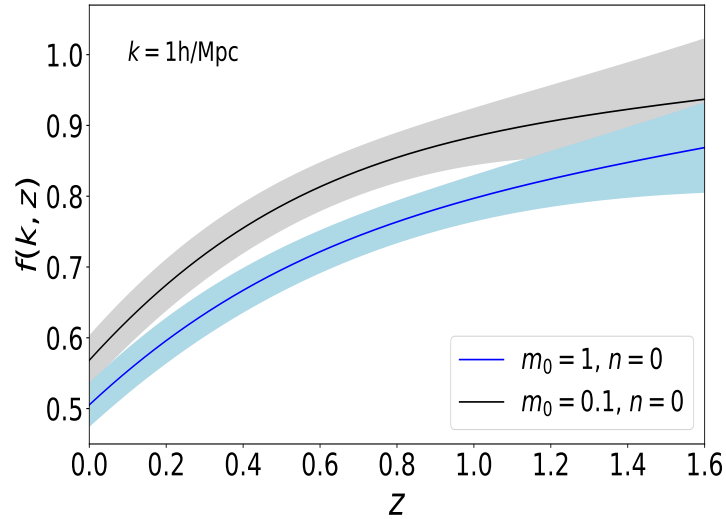


Figura 6.2: a) Taxa de crescimento em escalas menores do que o horizonte de Hubble para dois pares de parâmetros $\{(m_0, n)\}$. As linhas contínuas correspondem aos valores médios da reconstrução enquanto as regiões sombreadas correspondem ao níveis de confiança de 1σ . m_0 é dada em unidades de Mpc^{-1} .

possível observar que o índice de crescimento com os parâmetros $(m_0, n) = \{(1.0), (1.1)\}$ não evidencia evolução com o *redshift* (tempo) e, neste caso, $f \approx \Omega_m(z)^{\gamma_0}$ seria uma boa aproximação da taxa de crescimento. Por outro lado, para os parâmetros da SMG selecionados $(m_0, n) = \{(0.1, 0), (0.1, 1)\}$, há evolução do índice de crescimento, o que é compatível com o esperado em teorias além da TRG [153, 205]. Como apontado na Ref. [206], a derivada do índice de crescimento pode ser usada para caracterizar teorias de gravidade. Na Tabela 6.1, apresentamos os valores de γ_0 para a abordagem analítica da Ref. [90] e os valores obtidos com os cálculos das perturbações da densidade de matéria, através da reconstrução não paramétrica da taxa de expansão.

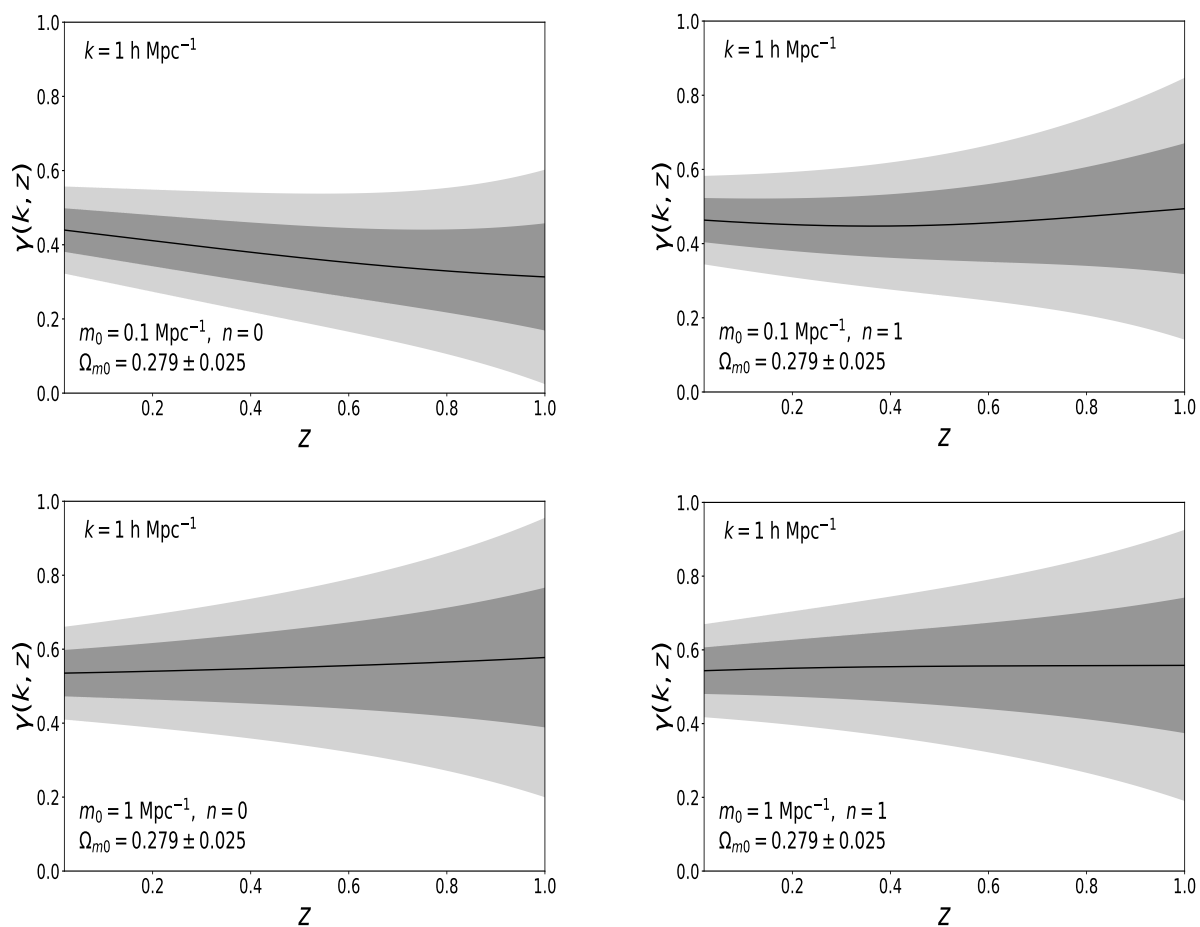


Figura 6.3: Índice de crescimento calculado solucionando a Eq. 6.9a para quatro combinações dos parâmetros m_0 and n utilizando o valor de Ω_{m0} dado pela colaboração WMAP9. A linha contínua corresponde ao valor médio da reconstrução enquanto a região sombreada denota os níveis de confiança em 1σ e 2σ .

7 Conclusões

A busca por um mecanismo satisfatório que explique a aceleração cósmica tem motivado o estudo de um grande número de modelos compatíveis com as observações atuais. Em algumas ocasiões, as conclusões obtidas da análise estatística podem estar enviesadas pelo modelo proposto para representar os dados. Por esta razão, na área da cosmologia, a implementação de técnicas que produzam resultados independentes de modelos cosmológicos vem crescendo continuamente. Nesta tese, temos explorado em detalhes alguns métodos de reconstrução ou regressão não paramétricos. Tais métodos não modelam os dados assumindo uma forma funcional específica, em vez disso, permitem a obtenção de uma curva que represente os dados de maneira flexível. Desta forma, evita-se o possível viés introduzido ao assumir um modelo particular. Os métodos não paramétricos que temos explorado em profundidade são Processos Gaussianos e Suavização. Podemos ressaltar algumas similaridades globais destes métodos como: i) não assumem uma forma funcional para modelar um conjunto de dados; ii) assumem que existe correlação entre as diferentes medidas, limitando, assim, os valores da função que representa os dados; iii) assumem que a função que descreve os dados é contínua e suave e não são processos lineares. No entanto, estes dois métodos são independentes e podem produzir resultados consideravelmente diferentes. Neste trabalho, estudamos duas aplicações da reconstrução não paramétrica da taxa de expansão do Universo via PGs e Suavização com dados que também são independentes de modelos cosmológicos. Estas duas aplicações correspondem à calibração do diagrama de Hubble de SNs Ia e à reconstrução das perturbações cosmológicas de matéria.

As aplicações derivadas das análises de SNs Ia, onde os parâmetros de ajuste da curva de luz são normalmente determinados no ajuste global no marco de um modelo cosmológico, são dependentes do modelo considerado. Com o objetivo de obter uma calibração independente, aplicamos os dois métodos não paramétricos mencionados a 15 estimativas da taxa de expansão provenientes de cronômetros cósmicos em $z \leq 1.2$. A escolha desta amostra reduzida de dados de $H(z)$ está baseada no fato que estas medidas são independentes de modelos cosmológicos e de síntese de populações estelares [107]. Portanto, ao utilizarmos dados e métodos independentes

de modelos, é esperado que os resultados obtidos desta análise também sejam independentes. Com a reconstrução do parâmetro de Hubble calculamos a distância de luminosidade, o que permite calibrar os parâmetros da curva de luz e construir um diagrama de Hubble independente de modelo para a amostra de supernovas JLA.

Os resultados obtidos sugerem que as incertezas dos parâmetros próprios do ajuste da curva de luz -obtidos a partir das reconstruções de $H(z)$ - são da mesma ordem de grandeza que os determinados no ajuste global para o modelo Λ CDM. Portanto, esperamos que o poder restritivo de uma análise derivada desses diagramas de Hubble calibrados com medidas de $H(z)$ seja semelhante àquele obtido quando o ajuste global é realizado com um modelo específico, com a vantagem de ser livre de viés.

Foi mostrado que os diagramas e suas implicações dependiam razoavelmente do método utilizado para reconstruir o parâmetro de Hubble. Especificamente, para a reconstrução via PGs, e suas implicações, a análise é sensível à função média *prior*. Ao assumirmos um modelo Λ CDM espacialmente plano, impomos vínculos no parâmetro de densidade da matéria Ω_{m0} e na constante de Hubble utilizando a amostra JLA. Como esperado, estes vínculos nos parâmetros Ω_{m0} e H_0 variam quando são utilizadas diferentes funções *prior*. No caso conservador em que a função média *prior* é uma constante, mostra-se que a estimativa de H_0 é compatível com o derivado das observações recentes de Planck + WMAP9 + BICEP2 em um nível de confiança de 68.3%. Por outro lado, quando o método de suavização não paramétrica é aplicado, os resultados dependem fracamente do modelo fiducial e favorecem consistentemente um valor maior de H_0 , o que é compatível com o média local recente da taxa de expansão proveniente de observações de variáveis cefeidas. É importante notar que ao contrário dos resultados da reconstrução de $H(z)$ via PGs, a taxa de expansão obtida a partir do método de suavização comporta-se de forma semelhante ao previsto pelo modelo Λ CDM, com uma transição entre a fase desacelerada e acelerada do Universo acontecendo em torno de $z \simeq 0.6$ (Fig. 4.2(b)). Portanto, tomando a evolução prevista pelo modelo cosmológico padrão como uma boa descrição para a evolução tardia do Universo, os resultados obtidos com o método de suavização nesta análise são mais consistentes do que aqueles derivados com o método de PGs.

Por outro lado, também utilizamos a função suave de $H(z)$ obtida a partir destes métodos não paramétricos para reconstruir as perturbações cosmológicas de matéria no regime linear dentro do horizonte de Hubble. Entretanto, para calcular estas perturbações é necessária informação do parâmetro de Hubble em altos *redshift* quando a matéria dominava a dinâmica do Universo. Por este motivo, acrescentamos à nossa amostra de cronômetros cósmicos as estimativas de $H(z)$ provenientes de dados de quasares em altos *redshifts*. O contraste de densidade e demais quantidades perturbativas são obtidas univocamente solucionando a Eq. (5.4) a partir da informação de $H(z)$ reconstruído e do valor de Ω_{m0} proveniente das colaborações Planck e WMAP9. Esta equação é obtida sob as hipóteses de um universo homogêneo, isotrópico e espacialmente plano onde a gravidade é corretamente descrita pela TRG (ver Seção 5.1). Encontramos que as quantidades perturbativas calculadas via a reconstrução de $H(z)$ (com ambos os métodos) e,

em particular, a taxa de crescimento $f(z)$ e a taxa de aglomeração $f\sigma_8(z)$ são consistentes com as estimativas observacionais destas quantidades provenientes do mapeamento da estrutura em grande escala do Universo, o que não evidencia desvios da cosmologia padrão. Também mostramos a influência que tem o parâmetro de densidade da matéria nestas reconstruções e a possibilidade de se obter resultados anômalos quando o valor deste parâmetro ultrapassa os limites estabelecidos pelas análises das flutuações de temperatura da RCF.

A consistência da cosmologia padrão também é confirmada calculando o teste $\mathcal{O}_p(z)$ através da suavização de $H(z)$ e $f\sigma_8(z)$ e assumindo os valores de σ_8 e Ω_{m0} da colaboração WMAP-9. No entanto, o resultado não é o mesmo quando calculamos o teste nulo perturbativo assumindo os valores correspondentes da colaboração Planck. Nesse caso, encontramos uma violação do teste nulo num nível de $\sim 3\sigma$, o que não é evidente nas Figs. 5.10(a) e 5.11(a), mostrando a alta sensibilidade do teste $\mathcal{O}_p(z)$ quando comparado com as quantidades perturbativas usuais. Essa tensão merece investigação adicional e parece estar de acordo com os resultados discutidos na Ref. [183], onde uma discrepância 3σ foi relatada utilizando uma abordagem diferente. A última quantidade analisada no marco da TRG é o índice de crescimento. Nesta tese, o vínculo obtido é $\gamma_0 = 0.56 \pm 0.06$, sendo aproximadamente igual para os dois valores de Ω_{m0} (Planck e WMAP9) independente do método não paramétrico utilizado para realizar a reconstrução. Este vínculo de γ_0 é uma estimativa mais precisa do que as encontradas na literatura [207]. Ressaltamos que este valor é compatível com o valor esperado no modelo Λ CDM onde $\gamma \simeq 0.545$ e com a sua primeira derivada $\gamma'_0 \simeq -0.015$ [153]. Visto que os PGs e a suavização são métodos de reconstrução independentes que podem produzir resultados distintos para os mesmos conjuntos de dados, o fato de que a estimativa do índice de crescimento obtida com os dois métodos seja compatível mostra a robustez de ambas as análises.

Finalmente, generalizamos a solução do contraste de densidade dada na Eq. (5.4) e proposta nas Refs. [48, 144]. Esta generalização é válida para qualquer teoria de gravidade que satisfaz a Eq. (6.13) e que apresenta no passado uma fase dominada pela matéria. Com esta expressão generalizada, calculamos as perturbações de matéria assumindo o valor Ω_{m0} e a parametrização de uma SMG $\mu(k, a)$ proposta na Ref. [90, 200]. Os resultados da taxa de crescimento mostrados nesta tese são compatíveis com os cálculos teóricos [90], o que evidencia a validade da expressão generalizada. Como mostrado na figura 6.2, analisando a taxa de crescimento, os diferentes valores dos parâmetros de $\mu(k, a)$ podem ser distinguidos pelos dados de $H(z)$ num nível de confiança de 1σ . Por tal motivo, é esperado que comparando as reconstruções das perturbações de matéria com as futuras estimativas da taxa de crescimento dependentes da escala, seremos capazes de testar a validade das hipóteses fundamentais envolvidas na análise (seção 6.1). Calculamos o índice de crescimento (apresentado na Fig. 6.3), encontrando que, para os casos $(m_0, n) = \{(1, 0), (1, 1)\}$, o índice de crescimento é degenerado e pode ser bem descrito por um índice de crescimento constante. Os outros dois casos considerados são caracterizados univocamente e revelam uma possível evolução de $\gamma(z)$. Os valores calculados do índice de crescimento na presente época são compatíveis com os teóricos (ver Tabela. 6.1). Por compara-

ção, calculamos o índice de crescimento utilizando a reconstrução não paramétrica de $H(z)$ via PGs e encontramos que as diferenças nos valores de γ_0 não são superiores a 5 %. Isso expõe a robustez dos métodos aplicados.

Temos mostrado que a reconstrução das perturbações de matéria a partir de dados de *background* é competitiva em ordem de grandeza. Com a metodologia apresentada, podemos testar a compatibilidade do paradigma cosmológico atual ao compararmos estas reconstruções com os dados provenientes do mapeamento da estrutura em grande escala do Universo. Com dados futuros que levem em conta não linearidades e sua dependência com a escala, poderá se testar a validade de teorias de gravidade alternativas à relatividade geral. Portanto, o presente estudo apresenta uma maneira promissora de integrar dados provenientes de diferentes tipos de observações para revelar se a natureza da aceleração cósmica é geométrica ou dinâmica.

Referências

- [1] H. Kragh. *Conceptions of Cosmos*. Oxford University Press, 2007. [pg: 1, 11]
- [2] A. Einstein. Die feldgleichungen der gravitation. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, page 844–847, 1915. [pg: 1]
- [3] B. P. Abbott et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116(6):061102, 2016, 1602.03837. [pg: 1]
- [4] Benjamin P. Abbott et al. GW170104: Observation of a 50-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence at Redshift 0.2. *Phys. Rev. Lett.*, 118(22):221101, 2017, 1706.01812. [pg: 1]
- [5] B. P. Abbott et al. GW170814: A Three-Detector Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Coalescence. *Phys. Rev. Lett.*, 119(14):141101, 2017, 1709.09660. [pg: 1]
- [6] G. Lemaître. *Université catholique de Louvain*, 47:49–59, 1927. [pg: 1]
- [7] E. Hubble. *Proceedings of the National Academy of Science*, 15:168–173, 1929. [pg: 1, 11]
- [8] A. A. Penzias and R. W. Wilson. A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s. *The Astrophysical Journal*, 142:419–421, July 1965. [pg: 2]
- [9] R. A. Alpher, H. Bethe, and G. Gamow. The origin of chemical elements. *Phys. Rev.*, 73:803–804, Apr 1948. [pg: 2]
- [10] Ralph A. Alpher, James W. Follin, and Robert C. Herman. Physical conditions in the initial stages of the expanding universe. *Phys. Rev.*, 92:1347–1361, Dec 1953. [pg: 2]
- [11] G. Steigman. Primordial nucleosynthesis in the precision cosmology era. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*. [pg: 2]

- [12] F. Zwicky. On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae. *The Astrophysical Journal* , 86:217, October 1937. [pg: 2]
- [13] G. Hinshaw et al. Nine-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results. *Astrophys. J. Suppl.*, 208:19, 2013, 1212.5226. [pg: 2, 89, 93, 101, 102]
- [14] P. A. R. Ade et al. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 594:A13, 2016, 1502.01589. [pg: 2, 89, 93]
- [15] A. G. Riess et al. *Astronomical Journal* , 116:1009–1038, 1998, astro-ph/9805201. [pg: 2, 17]
- [16] S. Perlmutter et al. *The Astrophysical Journal* , 517:565–586, 1999, astro-ph/9812133. [pg: 2, 17]
- [17] Sean M. Carroll, Mark Hoffman, and Mark Trodden. Can the dark energy equation - of - state parameter w be less than -1 ? *Phys.Rev.*, D68:023509, 2003, astro-ph/0301273. [pg: 2, 14]
- [18] S. Weinberg. The cosmological constant problem. *Rev. Mod. Phys.*, 61:1–23, Jan 1989. [pg: 2]
- [19] D. H. Weinberg, M. J. Mortonson, D. J. Eisenstein, C. Hirata, A. G. Riess, and E. Rozo. Observational probes of cosmic acceleration. *Physics Reports* , 530:87–255, September 2013, 1201.2434. [pg: 2, 97]
- [20] W. Lin and M. Ishak. Cosmological discordances: A new measure, marginalization effects, and application to geometry versus growth current data sets. *Physical Review D* , 96(2):023532, July 2017, 1705.05303. [pg: 2, 97]
- [21] R.R. Caldwell and Eric V. Linder. The Limits of quintessence. *Phys.Rev.Lett.*, 95:141301, 2005, astro-ph/0505494. [pg: 3]
- [22] Eric V. Linder. The Dynamics of Quintessence, The Quintessence of Dynamics. *Gen.Rel.Grav.*, 40:329–356, 2008, 0704.2064. [pg: 3]
- [23] Bharat Ratra and P.J.E. Peebles. Cosmological Consequences of a Rolling Homogeneous Scalar Field. *Phys.Rev.*, D37:3406, 1988. [pg: 3]
- [24] Philippe Brax, Jerome Martin, and Alain Riazuelo. Exhaustive study of cosmic microwave background anisotropies in quintessential scenarios. *Phys.Rev.*, D62:103505, 2000, astro-ph/0005428. [pg: 3]
- [25] Varun Sahni and Alexei A. Starobinsky. The Case for a positive cosmological Lambda term. *Int.J.Mod.Phys.*, D9:373–444, 2000, astro-ph/9904398. [pg: 3]

- [26] Michel Chevallier and David Polarski. Accelerating universes with scaling dark matter. *Int.J.Mod.Phys.*, D10:213–224, 2001, gr-qc/0009008. [pg: 3]
- [27] Eric V. Linder. Exploring the expansion history of the universe. *Phys. Rev. Lett.*, 90:091301, 2003, astro-ph/0208512. [pg: 3]
- [28] E. M. Barboza Jr. and J. S. Alcaniz. *Phys.Lett.B.*, 666:415–419, 2008, 0805.1713. [pg: 3]
- [29] E.M. Barboza, J.S. Alcaniz, Z.-H. Zhu, and R. Silva. A generalized equation of state for dark energy. *Phys.Rev.*, D80:043521, 2009, 0905.4052. [pg: 3]
- [30] Ruth Lazkoz, Vincenzo Salzano, and Irene Sendra. Oscillations in the dark energy EoS: new MCMC lessons. *Phys.Lett.*, B694:198–208, 2010, 1003.6084. [pg: 3]
- [31] Debabrata Adak, Debasish Majumdar, and Supratik Pal. Generalizing thawing dark energy models: the standard vis-à-vis model independent diagnostics. 2012, 1210.2565. [pg: 3]
- [32] H. K. Jassal, J. S. Bagla, and T. Padmanabhan. WMAP constraints on low redshift evolution of dark energy. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 356:L11–L16, 2005, astro-ph/0404378. [pg: 3]
- [33] Varun Sahni, Tarun Deep Saini, Alexei A. Starobinsky, and Ujjaini Alam. Statefinder: A New geometrical diagnostic of dark energy. *JETP Lett.*, 77:201–206, 2003, astro-ph/0201498. [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.77,249(2003)]. [pg: 3]
- [34] Ujjaini Alam, Varun Sahni, Tarun Deep Saini, and A. A. Starobinsky. Is there supernova evidence for dark energy metamorphosis ? *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 354:275, 2004, astro-ph/0311364. [pg: 3]
- [35] Salvatore Capozziello. Curvature quintessence. *Int. J. Mod. Phys.*, D11:483–492, 2002, gr-qc/0201033. [pg: 3]
- [36] J. Santos, J. S. Alcaniz, M. J. Reboucas, and F. C. Carvalho. Energy conditions in f(R)-gravity. *Phys. Rev.*, D76:083513, 2007, 0708.0411. [pg: 3]
- [37] Alexei A. Starobinsky. Disappearing cosmological constant in f(R) gravity. *JETP Lett.*, 86:157–163, 2007, 0706.2041. [pg: 3, 83]
- [38] Arthur Lue. The phenomenology of dvali-gabadadze-porrati cosmologies. *Phys. Rept.*, 423:1–48, 2006, astro-ph/0510068. [pg: 3]
- [39] Nicola Bartolo and Massimo Pietroni. Scalar tensor gravity and quintessence. *Phys. Rev.*, D61:023518, 2000, hep-ph/9908521. [pg: 3]

- [40] G. R. Dvali, Gregory Gabadadze, and Massimo Porrati. 4-D gravity on a brane in 5-D Minkowski space. *Phys. Lett.*, B485:208–214, 2000, hep-th/0005016. [pg: 3]
- [41] Varun Sahni and Yuri Shtanov. Brane world models of dark energy. *JCAP*, 0311:014, 2003, astro-ph/0202346. [pg: 3]
- [42] Jailson S. Alcaniz and N. Pires. Cosmic acceleration in brane cosmology. *Phys. Rev.*, D70:047303, 2004, astro-ph/0404146. [pg: 3]
- [43] Edmund J. Copeland, M. Sami, and Shinji Tsujikawa. Dynamics of dark energy. *Int. J. Mod. Phys.*, D15:1753–1936, 2006, hep-th/0603057. [pg: 3]
- [44] Kazuharu Bamba, Salvatore Capozziello, Shin’ichi Nojiri, and Sergei D. Odintsov. Dark energy cosmology: the equivalent description via different theoretical models and cosmography tests. *Astrophys. Space Sci.*, 342:155–228, 2012, 1205.3421. [pg: 3]
- [45] C. Clarkson, T. Clifton, and S. February. Perturbation theory in Lemaître-Tolman-Bondi cosmology. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 6:025, June 2009, 0903.5040. [pg: 3, 82, 100]
- [46] S. February, C. Clarkson, and R. Maartens. Galaxy correlations and the BAO in a void universe: structure formation as a test of the Copernican Principle. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 3:023, March 2013, 1206.1602. [pg: 3, 82, 100]
- [47] Yun Wang. Differentiating dark energy and modified gravity with galaxy redshift surveys. *JCAP*, 0805:021, 2008, 0710.3885. [pg: 3, 77, 78, 82, 83, 101]
- [48] Varun Sahni and Alexei Starobinsky. Reconstructing Dark Energy. *Int. J. Mod. Phys.*, D15:2105–2132, 2006, astro-ph/0610026. [pg: 4, 38, 80, 97, 107]
- [49] Irene Sendra and Ruth Lazkoz. SN and BAO constraints on (new) polynomial dark energy parametrizations: current results and forecasts. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 422:776–793, 2012, 1105.4943. [pg: 4]
- [50] S. D. P. Vitenti and M. Penna-Lima. A general reconstruction of the recent expansion history of the universe. *JCAP*, 1509(09):045, 2015, 1505.01883. [pg: 4, 38, 44, 58, 59]
- [51] Ariadna Montiel, Ruth Lazkoz, Irene Sendra, Celia Escamilla-Rivera, and Vincenzo Salzano. Nonparametric reconstruction of the cosmic expansion with local regression smoothing and simulation extrapolation. *Phys. Rev.*, D89(4):043007, 2014, 1401.4188. [pg: 4]
- [52] C.E. Rasmussen and C.K.I Williams. *Gaussian Processes for Machine Learning*. MIT Press, 2006. [pg: 4, 48]

- [53] Tracy Holsclaw, Ujjaini Alam, Bruno Sanso, Herbert Lee, Katrin Heitmann, Salman Habib, and David Higdon. Nonparametric Dark Energy Reconstruction from Supernova Data. *Phys. Rev. Lett.*, 105:241302, 2010, 1011.3079. [pg: 4, 56]
- [54] Tracy Holsclaw, Ujjaini Alam, Bruno Sanso, Herbie Lee, Katrin Heitmann, Salman Habib, and David Higdon. Nonparametric Reconstruction of the Dark Energy Equation of State from Diverse Data Sets. *Phys. Rev.*, D84:083501, 2011, 1104.2041. [pg: 4, 56]
- [55] Marina Seikel, Chris Clarkson, and Mathew Smith. Reconstruction of dark energy and expansion dynamics using Gaussian processes. *JCAP*, 1206:036, 2012, 1204.2832. [pg: 4, 50, 51, 56, 57, 68]
- [56] Marina Seikel, Sahba Yahya, Roy Maartens, and Chris Clarkson. Using $H(z)$ data as a probe of the concordance model. *Phys. Rev.*, D86:083001, 2012, 1205.3431. [pg: 4, 56]
- [57] Arman Shafieloo. Crossing Statistic: Reconstructing the Expansion History of the Universe. *JCAP*, 1208:002, 2012, 1204.1109. [pg: 4, 71, 98]
- [58] Arman Shafieloo, Alex G. Kim, and Eric V. Linder. Gaussian Process Cosmography. *Phys. Rev.*, D85:123530, 2012, 1204.2272. [pg: 4, 56]
- [59] Arman Shafieloo. Model Independent Reconstruction of the Expansion History of the Universe and the Properties of Dark Energy. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 380:1573–1580, 2007, astro-ph/0703034. [pg: 4, 54, 55, 71, 98]
- [60] Zhengxiang Li, J. E. Gonzalez, Hongwei Yu, Zong-Hong Zhu, and J. S. Alcaniz. Constructing a cosmological model-independent Hubble diagram of type Ia supernovae with cosmic chronometers. *Phys. Rev.*, D93(4):043014, 2016, 1504.03269. [pg: 4, 5, 53, 54, 56, 98]
- [61] J. E. Gonzalez, J. S. Alcaniz, and J. C. Carvalho. Non-parametric reconstruction of cosmological matter perturbations. *JCAP*, 1604(04):016, 2016, 1602.01015. [pg: 4, 5, 98]
- [62] J. E. Gonzalez, J. S. Alcaniz, and J. C. Carvalho. Smoothing expansion rate data to reconstruct cosmological matter perturbations. *JCAP*, 1708(08):008, 2017, 1702.02923. [pg: 4, 5, 98]
- [63] J. E. Gonzalez. Reconstruction of cosmological matter perturbations in Modified Gravity. *Phys. Rev.*, D96(12):123501, 2017, 1710.07656. [pg: 4, 5]
- [64] R. S. Gonçalves, G. C. Carvalho, C. A. P. Bengaly, Jr., J. C. Carvalho, A. Bernui, J. S. Alcaniz, and R. Maartens. Cosmic homogeneity: a spectroscopic and model-independent measurement. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 475:L20–L24, March 2018, 1710.02496. [pg: 6]

- [65] C. A. P. Bengaly, Jr., A. Bernui, and J. S. Alcaniz. Probing Cosmological Isotropy with Type Ia Supernovae. *The Astrophysical Journal*, 808:39, July 2015, 1503.01413. [pg: 7]
- [66] C. A. P. Bengaly, Jr., A. Bernui, J. S. Alcaniz, H. S. Xavier, and C. P. Novaes. Is there evidence for anomalous dipole anisotropy in the large-scale structure? *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 464:768–774, January 2017, 1606.06751. [pg: 7]
- [67] C. A. P. Bengaly, Jr., R. Maartens, and M. G. Santos. Probing the Cosmological Principle in the counts of radio galaxies. *ArXiv e-prints*, October 2017, 1710.08804. [pg: 7]
- [68] U. Andrade, C. A. P. Bengaly, Jr, J. S. Alcaniz, and B. Santos. The isotropy of low redshift type Ia Supernovae: A Bayesian analysis. *ArXiv e-prints*, November 2017, 1711.10536. [pg: 7]
- [69] S. Weinberg. *Gravitation & Cosmology*. John Wiley and Sons, Inc., 1972. [pg: 7]
- [70] T. Padmanabhan. *Gravitation, Foundation and Frontiers*. Cambridge University Press, 2010. [pg: 7, 14]
- [71] R.S. Gonçalves. *Observações de Aglomerados de Galáxias e a Relação de Dualidade de Distância Cósmica*. Observatório Nacional. [pg: 10]
- [72] H. Kragh. What's in a Name: History and Meanings of the Term 'Big Bang'. 2013, 1301.0219. [pg: 11]
- [73] E. Harrison. The redshift-distance and velocity-distance laws. *The Astrophysical Journal*, 403:28–31, 1 1993. [pg: 11]
- [74] Tamara M. Davis and Charles H. Lineweaver. Expanding confusion: Common misconceptions of cosmological horizons and the superluminal expansion of the universe. *Publications of the Astronomical Society of Australia*, 21:97–109, 1 2004. [pg: 11, 13]
- [75] Ali Kaya. Hubble's law and faster than light expansion speeds. *Am.J.Phys.*, 79:1151, 2011, 1107.5168. [pg: 11]
- [76] R. Maartens G.F.R. Ellis and M.A.H. Maccallum. *Relativistic Cosmology*. Cambridge University Press, 2012. [pg: 14, 15, 28, 30]
- [77] M. Betoule et al. Improved cosmological constraints from a joint analysis of the SDSS-II and SNLS supernova samples. *Astron. Astrophys.*, 568:A22, 2014, 1401.4064. [pg: 17, 19, 74]
- [78] Éric Aubourg et al. Cosmological implications of baryon acoustic oscillation measurements. *Phys. Rev.*, D92(12):123516, 2015, 1411.1074. [pg: 19]

- [79] L. Amendola and S. Tsujikawa. *Dark Energy*. Cambridge University Press, 2010. [pg: 20, 21, 23, 24, 27, 29]
- [80] V. V. Mukhanov. *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press, 2005. [pg: 20, 21, 22, 24, 27, 28]
- [81] Alexei A. Starobinsky. How to determine an effective potential for a variable cosmological term. *JETP Lett.*, 68:757–763, 1998, astro-ph/9810431. [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.68,721(1998)]. [pg: 27, 81]
- [82] A. Jenkins, C. S. Frenk, F. R. Pearce, P. A. Thomas, J. M. Colberg, Simon D. M. White, H. M. P. Couchman, J. A. Peacock, G. Efstathiou, and A. H. Nelson. Evolution of structure in cold dark matter universes. *Astrophys. J.*, 499:20, 1998, astro-ph/9709010. [pg: 28]
- [83] Dragan Huterer et al. Growth of Cosmic Structure: Probing Dark Energy Beyond Expansion. *Astropart. Phys.*, 63:23–41, 2015, 1309.5385. [pg: 28, 77, 83]
- [84] P. Schneider. *Extragalactic Astronomy and Cosmology*. Springer, 2006. [pg: 30, 62]
- [85] S. W. Allen, R. W. Schmidt, and A. C. Fabian. Cosmological constraints from the x-ray gas mass fraction in relaxed lensing clusters observed with Chandra. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 334:L11, 2002, astro-ph/0205007. [pg: 31]
- [86] Douglas Clowe, Anthony Gonzalez, and Maxim Markevitch. Weak lensing mass reconstruction of the interacting cluster 1E0657-558: Direct evidence for the existence of dark matter. *Astrophys. J.*, 604:596–603, 2004, astro-ph/0312273. [pg: 31]
- [87] M. Markevitch, A. H. Gonzalez, D. Clowe, A. Vikhlinin, W. Forman, C. Jones, S. Murray, and W. Tucker. Direct Constraints on the Dark Matter Self-Interaction Cross Section from the Merging Galaxy Cluster 1E 0657-56. *The Astrophysical Journal* , 606, May 2004, astro-ph/0309303. [pg: 31]
- [88] Takeshi Chiba, Takahiro Okabe, and Masahide Yamaguchi. Kinetically driven quintessence. *Phys. Rev.*, D62:023511, 2000, astro-ph/9912463. [pg: 32]
- [89] Jonathan Pearson. *Generalized Perturbations in Modified Gravity and Dark Energy*. Springer, 2014. [pg: 33, 35]
- [90] Philippe Brax and Patrick Valageas. Structure formation in modified gravity scenarios. *Phys. Rev. D*, 86:063512, Sep 2012. [pg: 35, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 107]
- [91] Kunio Takesawa. *Introduction to Nonparametric Regression*. John Wiley & Sons, Inc., 2006. [pg: 36, 37, 39, 40, 41, 42]

- [92] Randall L. Eubank. *Nonparametric Regression and Spline Smoothing*. Marcel Dekker, Inc., 1999. [pg: 37, 38, 41, 42, 69]
- [93] Theo Gasser, Hans-Georg Muller, Walter Kohler, Luciano Molinari, and Andrea Prader. Nonparametric regression analysis of growth curves. *The Annals of Statistics*, 12(1):210–229, 1984. [pg: 38]
- [94] D. Huterer and G. Starkman. Parametrization of Dark-Energy Properties: A Principal-Component Approach. *Physical Review Letters*, 90(3):031301, January 2003, astro-ph/0207517. [pg: 42]
- [95] J. Shlens. A Tutorial on Principal Component Analysis. *ArXiv e-prints*, April 2014, 1404.1100. [pg: 44]
- [96] C. Shapiro and M. S. Turner. What Do We Really Know about Cosmic Acceleration? *The Astrophysical Journal*, 649:563–569, October 2006, astro-ph/0512586. [pg: 44, 45, 60]
- [97] Adam G. Riess et al. Type Ia supernova discoveries at $z > 1$ from the Hubble Space Telescope: Evidence for past deceleration and constraints on dark energy evolution. *Astrophys. J.*, 607:665–687, 2004, astro-ph/0402512. [pg: 44, 60]
- [98] Kevin P. Murphy. *Machine Learning: A Probabilistic Perspective*. MIT Press, 2012. [pg: 48, 49, 50]
- [99] Z. Y. Wan and T. P. Sapsis. Reduced-space Gaussian Process Regression for data-driven probabilistic forecast of chaotic dynamical systems. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 345:40–55, April 2017, 1611.01583. [pg: 48]
- [100] Adrian W. Bowman and Adelchi Azzalini. *Applied Smoothing Techniques for Data Analysis*. Clarendon Press Oxford, 1997. [pg: 53, 69]
- [101] Jeffery S. Simonoff. *Smoothing Methods in Statistics*. Springer, 1996. [pg: 53]
- [102] Arman Shafieloo, Ujjaini Alam, Varun Sahni, and Alexei A. Starobinsky. Smoothing Supernova Data to Reconstruct the Expansion History of the Universe and its Age. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 366:1081–1095, 2006, astro-ph/0505329. [pg: 53, 54, 71, 98]
- [103] A. Shafieloo and C. Clarkson. Model independent tests of the standard cosmological model. *Physical Review D*, 81(8):083537, April 2010, 0911.4858. [pg: 53, 58, 59, 60, 67, 68]
- [104] N. Rani, D. Jain, S. Mahajan, A. Mukherjee, and M. Biesiada. Revisiting dark energy models using differential ages of galaxies. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 3:005, March 2017, 1612.07492. [pg: 54, 98]

- [105] S. Yahya, M. Seikel, C. Clarkson, R. Maartens, and M. Smith. Null tests of the cosmological constant using supernovae. *Physical Review D* , 89(2):023503, January 2014, 1308.4099. [pg: 56]
- [106] V. C. Busti, C. Clarkson, and M. Seikel. Evidence for a lower value for H_0 from cosmic chronometers data? *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* , 441:L11–L15, June 2014, 1402.5429. [pg: 56]
- [107] L. Verde, P. Protopapas, and R. Jimenez. The expansion rate of the intermediate universe in light of Planck. *Physics of the Dark Universe*, 5:307–314, December 2014, 1403.2181. [pg: 56, 64, 66, 105]
- [108] Y. Zhang. Reconstruct the Distance Duality Relation by Gaussian Process. *ArXiv e-prints*, August 2014, 1408.3897. [pg: 56]
- [109] S. Santos-da-Costa, V. C. Busti, and R. F. L. Holanda. Two new tests to the distance duality relation with galaxy clusters. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* , 10:061, October 2015, 1506.00145. [pg: 56]
- [110] N. Suzuki. The hubble space telescope cluster supernova survey. v. improving the dark-energy constraints above $z > 1$ and building an early-type-hosted supernova sample. *The Astrophysical Journal* , 746:85, February 2012, 1105.3470. [pg: 56]
- [111] J. P. Bernstein et al. Supernova Simulations and Strategies for the Dark Energy Survey. *The Astrophysical Journal* , 753:152, July 2012, 1111.1969. [pg: 56]
- [112] M. Hicken, W. M. Wood-Vasey, S. Blondin, P. Challis, S. Jha, P. L. Kelly, A. Rest, and R. P. Kirshner. Improved Dark Energy Constraints from ~ 100 New CfA Supernova Type Ia Light Curves. *The Astrophysical Journal* , 700:1097–1140, August 2009, 0901.4804. [pg: 58]
- [113] V. Sahni, A. Shafieloo, and A. A. Starobinsky. Two new diagnostics of dark energy. *Physical Review D* , 78(10):103502, November 2008, 0807.3548. [pg: 58]
- [114] Caroline Zunckel and Chris Clarkson. Consistency tests for the cosmological constant. *Phys. Rev. Lett.*, 101:181301, Oct 2008. [pg: 58]
- [115] M. Sullivan and others. SNLS3: Constraints on Dark Energy Combining the Supernova Legacy Survey Three-year Data with Other Probes. *The Astrophysical Journal* , 737:102, August 2011, 1104.1444. [pg: 63]
- [116] J. Johansson, D. Thomas, J. Pforr, C. Maraston, R. C. Nichol, M. Smith, H. Lampeitl, A. Beifiori, R. R. Gupta, and D. P. Schneider. SN Ia host galaxy properties from Sloan Digital Sky Survey-II spectroscopy. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* , 435:1680–1700, October 2013, 1211.1386. [pg: 63]

- [117] A. Conley et al. Supernova Constraints and Systematic Uncertainties from the First Three Years of the Supernova Legacy Survey. *The Astrophysical Journal, Supplement Series*, 192:1, January 2011, 1104.1443. [pg: 63]
- [118] R. Jimenez and A. Loeb. Constraining Cosmological Parameters Based on Relative Galaxy Ages. *The Astrophysical Journal*, 573:37–42, July 2002, astro-ph/0106145. [pg: 64]
- [119] Adam G. Riess et al. A 2.4% Determination of the Local Expansion Rate. *The Astrophysical Journal*, 826(1):56, 2016. [pg: 65]
- [120] Cong Zhang, Han Zhang, Shuo Yuan, Siqi Liu, Tong-Jie Zhang, and Yan-Chun Sun. Four new observational $h(z)$ data from luminous red galaxies in the sloan digital sky survey data release seven. *Research in Astronomy and Astrophysics*, 14(10):1221, 2014. [pg: 65]
- [121] J. Simon, L. Verde, and R. Jimenez. Constraints on the redshift dependence of the dark energy potential. *Physical Review D*, 71(12):123001, June 2005, astro-ph/0412269. [pg: 65, 66, 98]
- [122] M. Moresco et al. Improved constraints on the expansion rate of the universe up to $z = 1.1$ from the spectroscopic evolution of cosmic chronometers. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2012(08):006, 2012. [pg: 65, 66, 98]
- [123] Enrique Gaztanhaga, Anna Cabré, and Lam Hui. Clustering of luminous red galaxies – iv. baryon acoustic peak in the line-of-sight direction and a direct measurement of $h(z)$. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 399(3):1663–1680, 2009. [pg: 65]
- [124] Akira Oka, Shun Saito, Takahiro Nishimichi, Atsushi Taruya, and Kazuhiro Yamamoto. Simultaneous constraints on the growth of structure and cosmic expansion from the multipole power spectra of the sdss dr7 lrg sample. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 439(3):2515–2530, 2014. [pg: 65]
- [125] Y. Wang et al. The clustering of galaxies in the completed SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: tomographic BAO analysis of DR12 combined sample in configuration space. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 469:3762–3774, August 2017, 1607.03154. [pg: 65]
- [126] Chia-Hsun Chuang and Yun Wang. Modelling the anisotropic two-point galaxy correlation function on small scales and single-probe measurements of $h(z)$, $d_a(z)$ and $f(z)$ from the sloan digital sky survey dr7 luminous red galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 435(1):255–262, 2013. [pg: 65, 88]

- [127] Shadab Alam et al. The clustering of galaxies in the completed SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: cosmological analysis of the DR12 galaxy sample. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 470(3):2617–2652, 2017, 1607.03155. [pg: 65]
- [128] Michele Moresco, Lucia Pozzetti, Andrea Cimatti, Raul Jimenez, Claudia Maraston, Licia Verde, Daniel Thomas, Annalisa Citro, Rita Tojeiro, and David Wilkinson. A 6% measurement of the hubble parameter at $z = 0.45$: direct evidence of the epoch of cosmic re-acceleration. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2016(05):014, 2016. [pg: 65, 92, 98]
- [129] Chris Blake et al. The wigglez dark energy survey: joint measurements of the expansion and growth history at $z \leq 1$. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 425(1):405–414, 2012. [pg: 65, 88]
- [130] A. L. Ratsimbazafy, S. I. Loubser, S. M. Crawford, C. M. Cress, B. A. Bassett, R. C. Nichol, and P. Väisänen. Age-dating luminous red galaxies observed with the southern african large telescope. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 467(3):3239–3254, 2017. [pg: 65]
- [131] Daniel Stern, Raul Jimenez, Licia Verde, Marc Kamionkowski, and S. Adam Stanford. Cosmic chronometers: constraining the equation of state of dark energy. i: $H(z)$ measurements. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2010(02):008, 2010. [pg: 65, 66, 98]
- [132] Lauren Anderson et al. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 439(1):83–101, 2014. [pg: 65]
- [133] J. Magana, M. H. Amante, M. A. Garcia-Aspeitia, and V. Motta. The Cardassian expansion revisited: constraints from updated Hubble parameter measurements and Type Ia Supernovae data. *ArXiv e-prints*, June 2017, 1706.09848. [pg: 65, 66]
- [134] Michele Moresco. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 450(1):L16–L20, 2015. [pg: 66, 98]
- [135] J. E. Bautista et al. Measurement of baryon acoustic oscillation correlations at $z = 2.3$ with SDSS DR12 Ly-Forests. *Astronomy and Astrophysics*, 603:A12, June 2017, 1702.00176. [pg: 66]
- [136] T. Delubac. Baryon acoustic oscillations in the Ly-forest of BOSS DR11 quasars. *Astronomy and Astrophysics*, 574:A59, February 2015, 1404.1801. [pg: 66, 87]
- [137] Andreu Font-Ribera et al. Quasar-lyman forest cross-correlation from boss dr11: Baryon acoustic oscillations. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2014(05):027, 2014. [pg: 66, 87]

- [138] R. F. L. Holanda, J. C. Carvalho, and J. S. Alcaniz. Model-independent constraints on the cosmic opacity. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* , 4:027, April 2013, 1207.1694. [pg: 67]
- [139] Kai Liao, Zhengxiang Li, Jing Ming, and Zong-Hong Zhu. Testing cosmic opacity from sne ia and hubble parameter through three cosmological-model-independent methods. *Physics Letters B*, 718(4):1166 – 1170, 2013. [pg: 67]
- [140] Goliath, M., Amanullah, R., Astier, P., Goobar, A., and Pain, R. Supernovae and the nature of the dark energy. *A&A*, 380(1):6–18, 2001. [pg: 73]
- [141] Bin Hu, Jian-Wei Hu, Zong-Kuan Guo, and Rong-Gen Cai. Reconstruction of the primordial power spectra with planck and bicep2 data. *Phys. Rev. D*, 90:023544, Jul 2014. [pg: 75, 76]
- [142] A. G. Riess et al. A 3% Solution: Determination of the Hubble Constant with the Hubble Space Telescope and Wide Field Camera 3. *The Astrophysical Journal* , 730:119, April 2011, 1103.2976. [pg: 75, 76]
- [143] D. J. Heath. The growth of density perturbations in zero pressure Friedmann-Lemaitre universes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* , 179:351–358, May 1977. [pg: 79]
- [144] U. Alam, V. Sahni, and A. A. Starobinsky. Reconstructing Cosmological Matter Perturbations Using Standard Candles and Rulers. *The Astrophysical Journal* , 704:1086–1097, October 2009, 0812.2846. [pg: 80, 82, 89, 97, 100, 107]
- [145] P. J. E. Peebles and M. G. Hauser. Statistical Analysis of Catalogs of Extragalactic Objects. III. The Shane-Wirtanen and Zwicky Catalogs. *The Astrophysical Journal, Supplement Series* , 28:19, November 1974. [pg: 81]
- [146] S. D. Landy and A. S. Szalay. Bias and variance of angular correlation functions. *The Astrophysical Journal* , 412:64–71, July 1993. [pg: 81]
- [147] M. Davis and P. J. E. Peebles. A survey of galaxy redshifts. V - The two-point position and velocity correlations. *The Astrophysical Journal* , 267:465–482, April 1983. [pg: 81]
- [148] J. S. Alcaniz and J. A. S. Lima. Interpreting cosmological vacuum decay. *Phys. Rev. D*, 72:063516, Sep 2005. [pg: 82, 100]
- [149] S. Carneiro, C. Pigozzo, H. A. Borges, and J. S. Alcaniz. Supernova constraints on decaying vacuum cosmology. *Phys. Rev. D*, 74:023532, Jul 2006. [pg: 82, 100]

- [150] A. Pourtsidou, C. Skordis, and E. J. Copeland. Models of coupled dark matter to dark energy. *ArXiv e-prints*, July 2013, 1307.0458. [pg: 82, 100]
- [151] F. E. M. Costa and J. S. Alcaniz. Cosmological consequences of a possible Λ -dark matter interaction. *Phys. Rev. D*, 81:043506, Feb 2010. [pg: 82, 100]
- [152] Alexander Yu. Kamenshchik, Ugo Moschella, and Vincent Pasquier. An Alternative to quintessence. *Phys.Lett.*, B511:265–268, 2001, gr-qc/0103004. [pg: 82]
- [153] R. Gannouji, B. Moraes, and D. Polarski. The growth of matter perturbations in $f(R)$ models. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2:034, February 2009, 0809.3374. [pg: 82, 83, 92, 103, 107]
- [154] S. M. Carroll, I. Sawicki, A. Silvestri, and M. Trodden. Modified-source gravity and cosmological structure formation. *New Journal of Physics*, 8:323, December 2006, astro-ph/0607458. [pg: 82]
- [155] S. Tsujikawa, R. Gannouji, B. Moraes, and D. Polarski. Dispersion of growth of matter perturbations in $f(R)$ gravity. *Physical Review D*, 80(8):084044, October 2009, 0908.2669. [pg: 82]
- [156] A. Mehrabi, S. Basilakos, and F. Pace. How clustering dark energy affects matter perturbations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 452:2930–2939, September 2015, 1504.01262. [pg: 82, 100]
- [157] P. J. E. Peebles. Tests of cosmological models constrained by inflation. *The Astrophysical Journal*, 284:439–444, September 1984. [pg: 82]
- [158] O. Lahav, P. B. Lilje, J. R. Primack, and M. J. Rees. Dynamical effects of the cosmological constant. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 251:128–136, July 1991. [pg: 82]
- [159] L. Wang and P. J. Steinhardt. Cluster Abundance Constraints for Cosmological Models with a Time-varying, Spatially Inhomogeneous Energy Component with Negative Pressure. *The Astrophysical Journal*, 508:483–490, December 1998, astro-ph/9804015. [pg: 82, 83, 101]
- [160] E. V. Linder and R. N. Cahn. Parameterized beyond-Einstein growth. *Astroparticle Physics*, 28:481–488, December 2007, astro-ph/0701317. [pg: 83, 101]
- [161] E. V. Linder. Cosmic growth history and expansion history. *Physical Review D*, 72(4):043529, August 2005, astro-ph/0507263. [pg: 83]

- [162] S. Nesseris and D. Sapone. Novel null-test for the Λ cold dark matter model with growth-rate data. *International Journal of Modern Physics D*, 24:1550045, April 2015, 1409.3697. [pg: 84]
- [163] S. Nesseris, D. Sapone, and J. García-Bellido. Reconstruction of the null-test for the matter density perturbations. *Physical Review D*, 91(2):023004, January 2015, 1410.0338. [pg: 84, 88, 94, 95, 96]
- [164] Daniel J. Eisenstein et al. Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of SDSS luminous red galaxies. *Astrophys.J.*, 633:560–574, 2005, astro-ph/0501171. [pg: 86]
- [165] S. Cole et al. The 2dF Galaxy Redshift Survey: power-spectrum analysis of the final data set and cosmological implications. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 362:505–534, September 2005, astro-ph/0501174. [pg: 86]
- [166] C. Blake et al. The WiggleZ Dark Energy Survey: mapping the distance-redshift relation with baryon acoustic oscillations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 418:1707–1724, December 2011, 1108.2635. [pg: 86]
- [167] L. Anderson et al. The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: baryon acoustic oscillations in the Data Release 9 spectroscopic galaxy sample. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 427:3435–3467, December 2012, 1203.6594. [pg: 86]
- [168] A. Merloni et al. eROSITA Science Book: Mapping the Structure of the Energetic Universe. *ArXiv e-prints*, September 2012, 1209.3114. [pg: 86]
- [169] J. C. Pober et al. The Baryon Acoustic Oscillation Broadband and Broad-beam Array: Design Overview and Sensitivity Forecasts. *Astronomical Journal*, 145:65, March 2013, 1210.2413. [pg: 86]
- [170] D. J. Schlegel et al. BigBOSS: The Ground-Based Stage IV Dark Energy Experiment. *ArXiv e-prints*, April 2009, 0904.0468. [pg: 86]
- [171] G.-B. Zhao et al. The extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: a cosmological forecast. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 457:2377–2390, April 2016, 1510.08216. [pg: 86]
- [172] A. Slosar et al. The Lyman- α forest in three dimensions: measurements of large scale flux correlations from BOSS 1st-year data. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 9:001, September 2011, 1104.5244. [pg: 86]
- [173] N. G. Busca et al. Baryon acoustic oscillations in the Ly α forest of BOSS quasars. *Astronomy and Astrophysics*, 552:A96, April 2013, 1211.2616. [pg: 87, 98]

- [174] E. Hawkins et al. The 2dF Galaxy Redshift Survey: correlation functions, peculiar velocities and the matter density of the Universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* , 346:78–96, November 2003, astro-ph/0212375. [pg: 87]
- [175] L. Verde et al. The 2dF Galaxy Redshift Survey: the bias of galaxies and the density of the Universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* , 335:432–440, September 2002, astro-ph/0112161. [pg: 87]
- [176] C. Blake et al. The WiggleZ Dark Energy Survey: the growth rate of cosmic structure since redshift $z=0.9$. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* , 415:2876–2891, August 2011, 1104.2948. [pg: 87]
- [177] R. Reyes, R. Mandelbaum, U. Seljak, T. Baldauf, J. E. Gunn, L. Lombriser, and R. E. Smith. Confirmation of general relativity on large scales from weak lensing and galaxy velocities. *Nature* , 464:256–258, March 2010, 1003.2185. [pg: 87]
- [178] M. Tegmark et al. Cosmological constraints from the SDSS luminous red galaxies. *Physical Review D* , 74(12):123507, December 2006, astro-ph/0608632. [pg: 87]
- [179] N. P. Ross et al. The 2dF-SDSS LRG and QSO Survey: the LRG 2-point correlation function and redshift-space distortions. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* , 381:573–588, October 2007, astro-ph/0612400. [pg: 87]
- [180] L. Guzzo et al. A test of the nature of cosmic acceleration using galaxy redshift distortions. *Nature* , 451:541–544, January 2008, 0802.1944. [pg: 87, 88]
- [181] J. da Ângela et al. The 2dF-SDSS LRG and QSO survey: QSO clustering and the L-z degeneracy. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* , 383:565–580, January 2008, astro-ph/0612401. [pg: 87]
- [182] G. Gupta, S. Sen, and A. A. Sen. GCG parametrization for growth function and current constraints. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* , 4:028, April 2012, 1110.0956. [pg: 87, 91, 94]
- [183] S. Basilakos and S. Nesseris. Conjoined constraints on modified gravity from the expansion history and cosmic growth. *Physical Review D* , 96(6):063517, September 2017, 1705.08797. [pg: 88, 96, 107]
- [184] M. J. Hudson and S. J. Turnbull. The Growth Rate of Cosmic Structure from Peculiar Velocities at Low and High Redshifts. *The Astrophysical Journal, Letters* , 751:L30, June 2012, 1203.4814. [pg: 88]
- [185] F. Beutler, C. Blake, M. Colless, D. H. Jones, L. Staveley-Smith, G. B. Poole, L. Campbell, Q. Parker, W. Saunders, and F. Watson. The 6dF Galaxy Survey: z Astroparticle

- Physics 0 measurements of the growth rate and σ_8 . *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 423:3430–3444, July 2012, 1204.4725. [pg: 88]
- [186] L. Samushia, W. J. Percival, and A. Raccanelli. Interpreting large-scale redshift-space distortion measurements. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 420:2102–2119, March 2012, 1102.1014. [pg: 88]
- [187] R. Tojeiro et al. The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: measuring structure growth using passive galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 424:2339–2344, August 2012, 1203.6565. [pg: 88]
- [188] Y.-S. Song and W. J. Percival. Reconstructing the history of structure formation using redshift distortions. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 10:004, October 2009, 0807.0810. [pg: 88]
- [189] S. de la Torre et al. The VIMOS Public Extragalactic Redshift Survey (VIPERS). Galaxy clustering and redshift-space distortions at $z \approx 0.8$ in the first data release. *Astronomy and Astrophysics*, 557:A54, September 2013, 1303.2622. [pg: 88]
- [190] C.-H. Chuang et al. The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: single-probe measurements from CMASS anisotropic galaxy clustering. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 461:3781–3793, October 2016, 1312.4889. [pg: 88]
- [191] L. Samushia et al. The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: measuring growth rate and geometry with anisotropic clustering. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 439:3504–3519, April 2014, 1312.4899. [pg: 88]
- [192] H. Shariff, X. Jiao, R. Trotta, and D. A. van Dyk. BAHAMAS: New Analysis of Type Ia Supernovae Reveals Inconsistencies with Standard Cosmology. *The Astrophysical Journal*, 827:1, August 2016, 1510.05954. [pg: 91]
- [193] J. V. Cunha. Kinematic constraints to the transition redshift from supernovae type ia union data. *Phys. Rev. D*, 79:047301, Feb 2009. [pg: 92]
- [194] B. Santos, J.C. Carvalho, and J.S. Alcaniz. Current constraints on the epoch of cosmic acceleration. *Astroparticle Physics*, 35(1):17 – 20, 2011. [pg: 92]
- [195] M. Moresco and F. Marulli. Cosmological constraints from a joint analysis of cosmic growth and expansion. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 471:L82–L86, October 2017, 1705.07903. [pg: 96]
- [196] Justin Khoury and Amanda Weltman. Chameleon cosmology. *Phys. Rev. D*, 69:044026, Feb 2004. [pg: 97]

- [197] M. Pietroni. Dark energy condensation. *Physical Review D* , 72(4):043535, August 2005, astro-ph/0505615. [pg: 97]
- [198] P. Brax, C. van de Bruck, A.-C. Davis, and D. Shaw. Dilaton and modified gravity. *Physical Review D* , 82(6):063519, September 2010, 1005.3735. [pg: 97]
- [199] A. Nicolis, R. Rattazzi, and E. Trincherini. Galileon as a local modification of gravity. *Physical Review D* , 79(6):064036, March 2009, 0811.2197. [pg: 97]
- [200] P. Brax, A.-C. Davis, B. Li, and H. A. Winther. Unified description of screened modified gravity. *Physical Review D* , 86(4):044015, August 2012, 1203.4812. [pg: 97, 98, 100, 107]
- [201] R. Jimenez, L. Verde, T. Treu, and D. Stern. Constraints on the Equation of State of Dark Energy and the Hubble Constant from Stellar Ages and the Cosmic Microwave Background. *The Astrophysical Journal* , 593:622–629, August 2003, astro-ph/0302560. [pg: 98]
- [202] S. Tsujikawa. Matter density perturbations and effective gravitational constant in modified gravity models of dark energy. *Physical Review D* , 76(2):023514, July 2007, 0705.1032. [pg: 100]
- [203] S. Basilakos and S. Nesseris. Conjoined constraints on modified gravity from the expansion history and cosmic growth. *Physical Review D* , 96(6):063517, September 2017, 1705.08797. [pg: 100]
- [204] D. Polarski, A. A. Starobinsky, and H. Giacomini. When is the growth index constant? *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* , 12:037, December 2016, 1610.00363. [pg: 101]
- [205] H. Motohashi, A. A. Starobinsky, and J. Yokoyama. Phantom Boundary Crossing and Anomalous Growth Index of Fluctuations in Viable $f(R)$ Models of Cosmic Acceleration. *Progress of Theoretical Physics*, 123:887–902, May 2010, 1002.1141. [pg: 103]
- [206] D. Polarski and R. Gannouji. On the growth of linear perturbations. *Physics Letters B*, 660:439–443, March 2008, 0710.1510. [pg: 103]
- [207] S. Nesseris and L. Perivolaropoulos. *Physical Review D* , 77(2):023504, January 2008, 0710.1092. [pg: 107]