

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÕES E
COMUNICAÇÕES
OBSERVATÓRIO NACIONAL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ASTRONOMIA



A Influência do Planeta Nove nas Órbitas de TNOs

JESSICA GIOVANNA CÁCERES REÁTEGUI

Orientador:

DR. RODNEY DA SILVA GOMES

**Rio de Janeiro
Janeiro de 2020**

Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações
Observatório Nacional
Programa de Pós-Graduação em Astronomia

A Influência do Planeta Nove nas Órbitas de TNOs

Jessica Giovanna Cáceres Reátegui

Orientador:

Dr. Rodney da Silva Gomes.

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Astronomia do Observatório Nacional, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Astronomia.

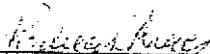
Rio de Janeiro, Janeiro de 2020

"A INFLUÊNCIA DO PLANETA NOVE NAS ÓRBITAS DE TNOs".

JESSICA GIOVANNA CÁ CERES REÁTEGUI

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ASTRONOMIA DO OBSERVATÓRIO NACIONAL COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTORA EM ASTRONOMIA.

Aprovada por:



Dr. Rodney da Silva Gomes - ON/MCTIC
(Orientador)



Dr. Roberto Vieira Martins - ON/MCTIC



Dr. Adrian Rodriguez Colucci - OV/UFRJ



Dr. André Izidoro Ferreira da Costa - UNESP



Dr. David Nesvorný - SWRI/Boulder

RIO DE JANEIRO - BRASIL

29 DE JANEIRO DE 2020

Dedico este trabalho aos meus pais e meu orientador.

Agradecimentos

À *Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior*, CAPES, pelo apoio financeiro. Ao *Observatório Nacional* pela oportunidade de realizar o doutorado. À *meu orientador*, o professor *Rodney*, pela paciência, os conhecimentos compartilhados e a oportunidade de aprender muito na área de Astronomia Dinâmica. Aos *meus pais*, *Rossana* e *Wilfredo*, pelo apoio. Às pessoas que, durante esses últimos anos, principalmente na etapa final do doutorado, estiveram presentes.

A Influência do Planeta Nove nas Órbitas de TNOs

Resumo

A hipótese da existência de um planeta adicional residindo no sistema solar externo foi recentemente proposta para explicar os confinamentos orbitais observados nos objetos trans-Netunianos distantes. Os parâmetros que foram sugeridos para o perturbador, conhecido como Planeta 9, são: semieixo maior entre 500 e 1000 au, distâncias ao periélio entre 200 a 400 au, inclinação de $\sim 30^\circ$ em relação à eclíptica, para massas entre 10 e 20 M_\oplus (Brown and Batygin, 2016).

Neste trabalho, se estuda a possibilidade que distâncias ao periélio menores para o planeta adicional possam conduzir à confinamentos orbitais como observados na população de objetos com semieixos maiores além das 250 au e distâncias ao periélio maiores do que 40 au.

Nós realizamos três conjuntos de integrações numéricas durante a idade do sistema solar: 1) simulações com Planeta 9 com semieixo maior em 700 au ou 1500 au, planetas gigantes conhecidos na configuração atual e partículas espalhadas, 2) simulações com Planeta 9 com semieixo maior além de 1500 au, planetas gigantes conhecidos na configuração atual e partículas próximas a Netuno e, 3) simulação com Planeta 9 com semieixo maior além de 1500 au, migração residual de Netuno e Urano e, partículas próximas à Netuno. Os resultados foram comparados com a população observada através de uma análise estatística.

Nossas investigações mostraram que um Planeta 9 com semieixo maior de 700 au ou 1500 au e distâncias ao periélio baixas (~ 90 au) usualmente conduzem à confinamentos mais substanciais, enquanto conservam o Cinturão de Kuiper Clássico e a razão do número de objetos destacados à espalhados no intervalo de semieixos maiores de 100 à 200 au.

Nos cenários de órbitas amplas do Planeta 9 (casos 2 e 3), apesar da distância ao periélio do planeta atingir valores baixos perto aos 4.5 Gyr de tempo de integração, os confinamentos angulares não são bem reproduzidos. Isto pode ser devido às condições iniciais assumidas para as partículas. Simulações numéricas considerando inicialmente órbitas estendidas das partículas precisam ser realizadas para verificar esta premissa, permitindo extrair conclusões sobre órbitas amplas permissíveis do Planeta 9 assim como do entorno no qual ele adquiriu sua órbita inferida.

Palavras-chaves: Cinturão de Kuiper: general - planetas e satélites: evolução dinâmica e estabilidade.

The Influence of Planet Nine on the TNOs Orbits

Abstract

The hypothesis about the existence of an additional planet residing in the external solar system was recently proposed to explain the orbital confinements observed on distant trans-Neptunian objects. The parameters that have been suggested for the perturber, known as Planet 9, are: semimajor axis between 500 and 1000 au, distances to perihelion between 200 and 400 au, inclination of $\sim 30^\circ$ relative to the ecliptic, for masses between 10 and 20 M_\oplus (Brown and Batygin, 2016).

In this work, we study the possibility that smaller perihelion distances to the additional planet may lead to orbital confinements as observed in the population of objects with semimajor axes beyond 250 au and perihelion distances greater than 40 au.

We performed three suites of numerical integrations for the solar system age: 1) simulations with Planet 9 with semimajor axis at 700 au or 1500 au, known giant planets in their current configurations and scattered particles, 2) simulations with Planet 9 with semimajor axis beyond 1500 au, known giant planets in their current configurations and particles close to Neptune and, 3) simulation with Planet 9 with semimajor axis beyond 1500 au, residual migration of Neptune and Uranus and particles close to Neptune. The results were compared with the population observed through a statistical analysis.

Our investigations have shown that a Planet 9 with a semimajor axis at 700 au or 1500 au and small perihelion distances (~ 90 au) usually lead to more substantial confinements, while retaining the Classic Kuiper Belt and the ratio of the number of detached to scattered objects in the range of semimajor axes from 100 to 200 au.

In the wide-orbit scenarios of Planet 9 (cases 2 and 3), despite the planet's perihelion distance reaches low values close to 4.5 Gyr integration time, angular confinements are not well reproduced. This could be due to the initial conditions assumed for the particles. Numerical simulations initially considering extended particle orbits need to be performed to verify this premise, allowing conclusions to be drawn about permissible wide orbits of Planet 9 as well as the surroundings in which it acquired its inferred orbit.

Key words: Kuiper belt: general - planets and satellites: dynamical evolution and stability.

O polished perturbation!

William Shakespeare, *Henry IV (2)*.

Lista de Figuras

1.1	Principais classes dinâmicas de TNOs.	5
1.2	(A) Circularização do argumento do periélio de 2012 VP ₁₁₃ considerando o sistema solar atual. (B) Libração do argumento do periélio em torno de 0° com amplitude de aproximadamente ±60° para o mesmo corpo menor incluindo na integração um planeta de 5 M _⊕ à 210 au.	8
1.3	A) Espaço de parâmetros $a_9 - e_9$ considerados para calcular a probabilidade de um Planeta 9 de 10 M _⊕ fornecer um adequado ajuste às órbitas de TNOs distantes. B) No caso de um Planeta 9 de 20 M _⊕ , as combinações aceitáveis se dão para 800 au < a < 1000 au e $e_9 = 0.75 - (650 \text{ au}/a_9)^8$	10
1.4	Zonas permitida, excluídas e incerta para o Planeta 9 de Batygin and Brown (2016a)	11
1.5	Parâmetros permissíveis para planetas ainda não descobertos no sistema solar	12
1.6	Plano de fase $q - \Delta\varpi$ mostrando as trajetórias de um subconjunto de objetos antialinhados e contornos do Hamiltoniano secular	14
1.7	<i>Esquerda:</i> Plano de fase $e - \Delta\varpi$ com contornos do Hamiltoniano médio para um TNO com a constante de 345 au. <i>Direita:</i> Trajetórias de todos os objetos sobreviventes nas simulações planares no plano de fase $\Delta\varpi - a$	15
1.8	Histogramas de densidades mostrando as regiões do espaço de parâmetros onde as partículas de longo período influenciadas pelo Planeta 9 foram colocadas após de terem sido espalhadas para dentro por Netuno	16
1.9	“Perihelion longitude” e inclinação para partículas com 300 au < a < 700 au e $q < 80$ au, desde $t > 3$ Gyr	17
1.10	Semieixo maior versus excentricidade do Planeta 9, para $i_9 = 30^\circ$ e quatro valores de m_9 ; que em 4.5 Gyr reproduzem a obliquidade solar	18
1.11	Evolução do eixo de rotação solar medido em relação ao plano iv4 momentâneo	19
2.1	Dinâmica secular da excentricidade induzida pelo Planeta 9	32
2.2	Dinâmica secular dos planos orbitais induzida pelo Planeta 9	34
2.3	Evolução dinâmica da população altamente inclinada	35
2.4	Dinâmica de alta inclinação facilitada pelo Planeta 9	37
2.5	Evolução do semieixo maior de partículas submetidas à influência do Planeta 9	38
2.6	Comparação entre dinâmica puramente secular e secular-ressonante induzida pelo Planeta 9	39
2.7	Comparação entre resultados de simulação de N corpos com $a_9 = 700$ au, $e_9 = 0.6$ e $m_9 = 10 M_\oplus$ e dados observacionais	42
3.1	Elementos angulares Ω , ω e ϖ de TNOs com $q \geq 40$ au, como função do semieixo maior	44
3.2	Órbitas heliocêntricas de TNOs distantes	45

3.3	Uma forma adequada para a função de transição K em função da separação, $ \mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_j $, entre dois corpos.	53
3.4	Os sistemas de referência não rotativo $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ e rotativo $(\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$	56
3.5	Distribuição de frequências, N , para Ω , ω e ϖ das partículas medidos em relação aos correspondentes ângulos do Planeta 9; no modelo $a1500 - q60 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$, no tempo $t = 2.18$ Gyr	62
3.6	Frequência, N_r , em função do número de pontos, n , para uma distribuição aleatória	63
3.7	Distribuições acumuladas em 6 parâmetros correspondentes aos 68 TNOs dispersos e Centauros observados, os preferidos “divot” e “knee” de Lawler et al. (2018) e a distribuição “knee” que fornece o melhor ajuste de Fraser et al. (2014)	66
4.1	a) Frequências principal, N_1 , e secundária, N_2 , em Ω , ω e ϖ como função do tempo; para o modelo $a1500 - q60 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$. b) Mesmo que a figura anterior para o modelo $a1500 - q300 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$	68
4.2	a) Ângulos das partículas em relação aos do Planeta 9, correspondentes as frequências principal e secundária; para o modelo $a1500 - q60 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$. b) Mesmo que a figura anterior para o modelo $a1500 - q300 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$	69
4.3	a) s em escala logarítmica como função do tempo em Ω , ω e ϖ , para o modelo $a1500 - q60 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$. b) Mesmo que a figura anterior para o modelo $a1500 - q300 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$	70
4.4	a) Média e desvio padrão dos confinamentos das partículas em Ω , ω e ϖ como função do tempo; para o modelo $a1500 - q60 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$. b) Mesmo que a figura anterior para o modelo $a1500 - q300 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$	70
4.5	Média do número de objetos observáveis, após 1000 realizações do OBIP, com $q > 40$ au entre os 46 mais brilhantes com $100 \text{ au} < a < 200 \text{ au}$ e $q > 30 \text{ au}$. Os resultados são mostrados para modelos com $i_9 = 30^\circ$ e $\omega_9 = 0^\circ$, como função da distância ao periélio do Planeta 9	72
4.6	a) Excentricidade e inclinação como função do semieixo maior para os objetos reais do CCKB (CCKBOs) e partículas simuladas em 4.5 Gyr considerando o modelo $a700 - q60 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m10$. b) Mesmo que a figura anterior para o modelo $a1500 - q60 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$	73
4.7	a) Distribuição de semieixos maiores para os objetos reais do CCKB e partículas simuladas em 4.5 Gyr para o modelo $a700 - q60 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m10$. b) Mesmo que a figura anterior para o modelo $a1500 - q60 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$	74
4.8	a) Excentricidade e inclinação como função do semieixo maior para os CCKBOs reais e partículas simuladas em 4.5 Gyr, considerando o melhor ajuste em semieixo maior para as partículas ao truncar a borda externa inicial do disco. Resultados para o modelo $a700 - q60 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m10$. b) Mesmo que a figura anterior para o modelo $a1500 - q60 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$	74
4.9	a) Excentricidade e inclinação como função do semieixo maior para os objetos reais do CKB (CKBOs), e sua configuração depois de 4.5 Gyr sob a influência do Planeta 9 considerando o modelo $a700 - q60 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m10$. b) Mesmo que a figura anterior para o modelo $a1500 - q60 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$	75
4.10	a) Razão do número de objetos sobreviventes ao final do tempo de integração ao número de objetos iniciais como função do semieixo maior e excentricidade a partir de uma distribuição inicialmente uniforme sob a influência dos planetas conhecidos. b) Mesmo que a figura superior mas adicionando um planeta com $a_9 = 700 \text{ au}$ e $q_9 = 70 \text{ au}$. c) Mesmo que a figura superior mas incluindo um planeta com $a_9 = 1500 \text{ au}$ e $q_9 = 90 \text{ au}$	76

4.11	Distância ao periélio do Planeta 9 como função do tempo, para o modelo GT- $a3000 - q900 - i30 - \omega0 - \Omega150 - m16.5$	77
4.12	Os gráficos mostram os resultados para o modelo GT- $a3000 - q900 - i30 - \omega0 - \Omega150 - m16.5$. a) Frequências principal e secundária em Ω , ω e ϖ como função do tempo. b) Ângulos relativos correspondentes às frequências N_1 e N_2 como função do tempo. c) Evolução temporal de s em Ω , ω e ϖ . d) Evolução temporal dos confinamentos nos três elementos angulares.	79
4.13	Os gráficos mostram os resultados para o modelo GT- $a3000 - q900 - i30 - \omega0 - \Omega150 - m16.5 - II$. a) Frequências principal e secundária em Ω , ω e ϖ como função do tempo. b) Ângulos relativos correspondentes às frequências N_1 e N_2 como função do tempo. c) Evolução temporal de s em Ω , ω e ϖ . d) Evolução temporal dos confinamentos nos três elementos angulares.	80
4.14	Média do número de objetos observáveis, após 1000 realizações do OBIP, com $q > 40$ au entre os 46 mais brilhantes com $100 \text{ au} < a < 200 \text{ au}$ e $q > 30 \text{ au}$, como função da distância ao periélio do Planeta 9	81
4.15	Os gráficos mostram os resultados para o modelo mig- $a3000 - q600 - i30 - \omega130 - \Omega20 - m16.5$. a) Frequências principal e secundária em Ω , ω e ϖ como função do tempo. b) Ângulos relativos correspondentes as frequências N_1 e N_2 como função do tempo. c) Evolução temporal de s em Ω , ω e ϖ . d) Evolução temporal dos confinamentos nos três elementos angulares.	82
4.16	Evolução temporal dos semieixos maiores de Júpiter, Saturno, Urano e Netuno num modelo que considera a migração residual dos gigantes de gelo	83
4.17	Excentricidade em função do semieixo maior no tempo 4.5 Gyr. <i>Painel superior</i> : um modelo com migração residual dos gigantes de gelo, sem Planeta 9 e partículas inicializadas próximas de Netuno. <i>Painel médio</i> : modelo GT- $a3000 - q600 - i30 - \omega130 - \Omega20 - m16.5$. <i>Painel inferior</i> : modelo mig- $a3000 - q600 - i30 - \omega130 - \Omega20 - m16.5$	84

Lista de Tabelas

3.1	Dados de TNOs distantes a partir da base de dados do MPC.	44
3.2	Condições iniciais para o Planeta 9 e as partículas testes nos três conjuntos de modelos testados.	60
4.1	Distância ao periélio mínima atingida pelo Planeta 9 durante a integração e o tempo em que atingiu esse valor, para as simulações que consideram maré galáctica.	78
4.2	Valores máximos e médios de s em Ω , ω e ϖ das partículas; calculados nos 4.5 Gyr e nos últimos 500 Myr de tempo de integração.	85
4.3	Média e desvio padrão (std) do número de objetos com $q > 40$ au entre os 46 mais brilhantes com $q > 30$ au, na faixa $100 \text{ au} < a < 200 \text{ au}$; após a aplicação de um viés observacional às partículas simuladas em cada modelo.	86
4.4	Número de objetos reais com $50 \text{ au} \leq a < 2000 \text{ au}$ e $q \geq 30 \text{ au}$ em quatro diferentes faixas de magnitudes visuais aparentes.	87
4.5	Número de objetos reais em 9 subpopulações da coleção de objetos com $50 \text{ au} \leq a < 2000 \text{ au}$ e $q \geq 30 \text{ au}$, com $V < 24$	88
4.6	Número de objetos em 9 subpopulações da coleção de objetos com $50 \text{ au} \leq a < 2000 \text{ au}$ e $q \geq 30 \text{ au}$ (N_i , $i = 1, 2, \dots, 9$), com magnitudes visuais aparentes menor do que 24; após a aplicação do OBIP em todos os modelos.	89

Sumário

Resumo	x
1 Introdução	1
1.1 A Região Trans-Netuniana	3
1.2 O Modelo de Nice	5
1.3 A Hipótese do Planeta 9	7
1.3.1 Objetos Apsidalmente Antialinhados e Alinhados	13
1.3.2 TNOs Altamente Inclinados	15
1.3.3 Obliquidade Solar	17
1.4 Origem da Órbita do Planeta 9	19
1.4.1 In Situ	19
1.4.2 Espalhamento	20
1.4.3 Ejeção	22
1.4.4 Captura	22
1.5 Teorias Alternativas	23
1.5.1 Viés Observacional	23
1.5.2 Autogravidade	24
1.5.3 Buraco Negro Primordial	24
1.6 Objetivos do Nosso Trabalho	25
2 Dinâmica de TNOs Distantes Perturbados pelo Planeta 9: Teoria	27
2.1 Anomalias em TNOs de Longo Período	27
2.2 Forçamento Secular	28
2.3 Confinamento Apsidal	30
2.4 Confinamento de Planos Orbitais	32
2.5 TNOs Altamente Inclinados	34
2.6 Ressonâncias de Movimento Médio	37
2.7 Comparação com as Observações	40
3 Metodologia	43
3.1 Amostra Observacional de TNOs Distantes	43
3.2 O Pacote de Subrotinas MERCURY	45
3.2.1 Integrador Simplético Híbrido	46
3.2.1.1 Métodos Simpléticos em Coordenadas Democráticas Heliocêntricas	49

3.2.1.2	Encontros Próximos	52
3.2.2	Arquivos de Entrada e Saída	54
3.2.3	Inclusão de Maré Galáctica	55
3.2.4	Migração Artificial	58
3.3	Modelos Testados	58
3.4	Análise do Confinamento de TNOs Distantes	61
3.5	Distribuição de Magnitude Absoluta	63
4	Resultados	67
4.1	Modelos 1	67
4.1.1	Confinamento de TNOs Distantes	67
4.1.2	Razão entre Objetos Espalhados e Destacados	70
4.1.3	Preservação do Cinturão de Kuiper Clássico	72
4.1.3.1	Cinturão de Kuiper Clássico Frio	72
4.1.3.2	Cinturão de Kuiper Clássico Quente	75
4.2	Modelos 2	77
4.3	Modelo 3	81
4.4	Subpopulações com $50 \text{ au} \leq a < 2000 \text{ au}$ e $q \geq 30 \text{ au}$	86
5	Conclusões	90
5.1	Modelos 1	90
5.2	Modelos 2	91
5.3	Modelo 3	92
5.4	Subpopulações com $50 \text{ au} \leq a \leq 2000 \text{ au}$ e $q \geq 30 \text{ au}$	93
A	Variação do Momento Angular de um Planeta Conhecido	94
B	Manuscrito	97
	Referências Bibliográficas	108

Capítulo 1

Introdução

Desde a antiguidade se conhecem cinco planetas que podem ser vistos a olho nu: Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno. Urano, com uma magnitude visual aparente em torno de $V = 6$, se coloca no limite da visibilidade.

A discrepância entre as observações de Urano e sua localização prevista pela mecânica celeste, sugeriram a existência de mais um planeta. Em 1846, Johan Galle descobriu Netuno muito perto dos parâmetros determinados por Joseph Le Verrier. Apesar da adição de Netuno aos planetas do sistema solar, esperava-se que outro planeta, chamado de Planeta X, pudesse explicar as aparentes irregularidades observadas nos movimentos de Urano e Netuno, apesar de estarem próximas das magnitudes dos erros aleatórios intrínsecos às observações. Clyde Tombaugh tentou descobrir esse planeta a partir das previsões de Percival Lowell, descobrindo o planeta anão Plutão em 1930, quase um ano após começar a busca e cerca de 6° longe do centro da previsão. O corpo descoberto foi inicialmente considerado o tão procurado Planeta X, mas a posterior determinação de sua massa revelou que não era a suficiente para explicar as perturbações. Posteriormente, uma estimativa mais precisa da massa de Netuno pela sonda espacial *Voyager 2*, permitiu explicar por si só as discrepâncias entre os movimentos de Urano e Netuno e as expectativas teóricas.

A descoberta de Netuno representa o único exemplo exitoso de previsão planetária motivada por evidência dinâmica. Algumas outras propostas planetárias ou de companheiras solar foram apresentadas ao longo da história.

Em meados do século XIX, Le Verrier propôs que um planeta interior a Mercúrio, que chegou a ser conhecido como Vulcano, seria responsável pela precessão extra de seu periélio, cuja taxa não poderia ser totalmente contabilizada pelos corpos conhecidos. Já no início do século XX, a teoria da Relatividade Geral de Einstein explicou as variações na órbita de Mercúrio como consequência dele se movimentar por um espaço-tempo distorcido.

Por outro lado, os registros geológicos mostram que a biosfera da Terra tem experimentado uma série de eventos de extinção em massa. Doze eventos de extinção distribuídos num lapso de ~ 250 Myr sugeriram que estes são periódicos, acontecendo a cada ~ 26 Myr ([Raup](#)

and Sepkoski, 1984). Uma forma de obter uma periodicidade nos eventos de extinção é propor uma companheira solar excêntrica (Davis et al., 1984). A companheira anã marrom/vermelha, conhecida como Nemesis, teria portanto um período orbital $P \sim 26$ Myr e assim um semieixo maior $a \sim 88,000$ au. Durante sua passagem pelo periélio perturbaria as órbitas dos cometas da Nuvem de Oort, encaminhando um número grande deles ao sistema solar interno, vários dos quais atingiriam a Terra.

Uma companheira solar distante de massa Joviana e $a \sim 25,000$ au, chamada de Tyche, foi proposta para explicar as anomalias na distribuição de afélios de uma fração de cometas na Nuvem de Oort (Matese et al., 1999; Matese and Whitmire, 2011).

O estudo de imagem direta do sistema solar distante pelo telescópio espacial *Wide-field Infrared Survey Explorer* (WISE) coloca limites rigorosos na existência de objetos, descartando análogos de Saturno e Júpiter dentro das 28,000 e 82,000 au, respectivamente, e coloca a distância mais próxima para uma anã marrom da massa de Júpiter em 26,000 au (Luhman, 2014). Os estudos observacionais deixam pouco espaço de parâmetros para uma companheira binária putativa do Sol (Beichman, 1987; Sykes et al., 2002).

Após a descoberta do Cinturão de Kuiper (Jewitt and Luu, 1993) surgiram propostas planetárias trans-Netunianas.

Brunini and Melita (2002) propuseram um planeta semelhante a Marte com $a \sim 60$ au para explicar a borda externa do Cinturão de Kuiper. Além de que foi difícil supor que tal objeto não tenha sido descoberto apesar de que as capacidades de observação da época o permitissem, tal corpo seria inconsistente com outras das características da distribuição orbital de Objetos Trans-Netunianos (TNOs, por sua sigla em inglês) (Melita et al., 2004).

Lykawka and Mukai (2008), por sua vez, sugeriram que um planeta com massa inferior à da Terra pode ter sido espalhado por um dos planetas gigantes e se tornado um objeto destacado mediante ressonância de movimento médio (RMM) com Netuno. Este planeta explicaria a borda externa do Cinturão de Kuiper, a depleção de massa e sua distribuição orbital. Não obstante, existem problemas com esse cenário. A maioria dos objetos espalhados por Netuno não conseguem se destacar e, por outro lado, os autores colocaram artificialmente o planetóide em posições estratégicas sem ter em conta se isso é plausível num modelo mais realístico onde ele interage com o disco.

Um planeta no sistema solar externo foi também proposto como um dos mecanismos para explicar as órbitas de corpos menores com distância ao periélio $q \gtrsim 40$ au e semieixo maior $a \gtrsim 200$ au (Gladman and Chan, 2006; Gomes et al., 2006). Objetos com tais distâncias ao periélio estão dinamicamente desacoplados de Netuno e não podem ser criados durante a formação do Cinturão de Kuiper mediante interações apenas com os planetas conhecidos.

Gomes et al. (2015) mostraram que um planeta distante ($a = 1500$ au, excentricidade $e = 0.4$, inclinação $i = 40^\circ$ e massa $m \sim 32 M_\oplus$) fornece uma melhor explicação ao fato de ter um excesso de Centauros brilhantes de semieixo maior grande em relação aos Centauros clássicos, do que um cenário sem um planeta adicional.

Por outro lado, Volk and Malhotra (2017) indicaram que o plano médio dos objetos na região em $a \sim 50 - 80$ au está inclinado em relação à eclíptica. As autoras sugeriram que a deformação pode ser devida a um objeto da massa de Marte ($\sim 0.1 M_{\oplus}$) residindo numa órbita moderadamente inclinada com $a \sim 65 - 80$ au.

Recentemente também, um perturbador distante, denominado de Planeta 9, foi proposto para explicar o agrupamento físico das órbitas dos corpos menores trans-Netunianos mais extremos, aos quais chamaremos de TNOs distantes. A mesma dinâmica responsável para reproduzir tal agrupamento gera naturalmente órbitas de TNOs com distâncias ao periélio que se estendem além do alcance gravitacional de Netuno, assim como TNOs em órbitas altamente inclinadas e incluso retrógradas (Batygin and Brown, 2016a,b; Batygin and Morbidelli, 2017; Becker et al., 2018; Brown and Batygin, 2016). Nosso trabalho é focado nesse perturbador na reprodução do confinamento das órbitas de TNOs distantes.

O restante deste capítulo é estruturado como segue. Na seção §1.1, definimos as diferentes populações localizadas além de Netuno. Na seção §1.2, se descreve o *Modelo de Nice*, que é o cenário aceito para a evolução primordial do sistema solar. Na seção §1.3, se apresenta a revisão bibliográfica da recente proposta planetária dirigida a explicar os confinamentos orbitais de TNOs distantes. Na seção §1.4, se descrevem os diferentes mecanismos propostos para explicar a origem da órbita deste planeta. Na seção §1.5, mencionamos as teorias alternativas à hipótese do Planeta 9. Na seção §1.6, definimos os objetivos do trabalho.

1.1 A Região Trans-Netuniana

A região além de Netuno é composta de alguns poucos milhares de corpos: quatro planetas anões¹ e muitos objetos com diâmetros menor do que 1000 km. A massa total estimada na região entre as 39.4 au – 47.8² au junto com a massa dos 31 TNOs maiores é de $\sim 1.97 \times 10^{-2} M_{\oplus}$ (Pitjeva and Pitjev, 2018). A seguinte classificação de TNOs (vide figura 1.1) é baseada em suas propriedades orbitais e não físicas.

- **Objetos Ressonantes:** São objetos capturados em RMM com Netuno, isto é, seus períodos orbitais podem ser expressados como múltiplos racionais do período orbital de Netuno. Porém, além da comensurabilidade no período, os elementos orbitais angulares devem ser tais que o ângulo de ressonância (ou também chamado de argumento crítico) oscile em torno de um valor específico, ao invés de circular. Os objetos ressonantes geralmente experimentam troca de energia orbital e momento angular com Netuno e podem ser estáveis a longo prazo, mesmo em altas excentricidades, através de um mecanismo de proteção de fase que permite que as órbitas dos objetos cruzem a órbita de Netuno sem serem desestabilizados rapidamente por encontros próximos. As comensurabilidades orbitais mais prominentes correspondem às RMMs 3:2, 2:1 e 5:2.

¹Corpos que possuem a massa suficiente para que sua auto-gravidade os tornem quase esféricos, mas não o suficientemente massivos para influenciar sensivelmente a vizinhança em torno de sua órbita.

²Além das 48 au o número de objetos com tamanhos maiores do que 40 km cai bruscamente.

- **Cinturão de Kuiper Clássico:** Esta população é composta de corpos gelados não ressonantes com semieixos maiores entre as RMMs 3:2 e 2:1 ($a \sim 39.4 - 47.8$ au); é por sua vez dividida nas populações dinamicamente fria e quente, onde a distinção está baseada na distribuição bimodal de suas inclinações (Brown, 2001), sendo $i \sim 5^\circ$ considerado como o valor divisório, mas tal limite não é agudo.
- **Disco Disperso:** A maioria dos objetos pertencentes a esta população residem em órbitas dinamicamente metaestáveis. Eles apresentam $a > 50$ au e $30 \text{ au} < q < 38$ au. O disco disperso seria a principal fonte de cometas da família de Júpiter.
- **Disco Disperso Estendido:** Os membros desta população são também chamados de objetos destacados. Eles têm $a > 50$ au e distâncias ao periélio fora do alcance gravitacional de Netuno, $q \gtrsim 38$ au³, portanto são dinamicamente estáveis em escalas de tempo longas. Alguns destes objetos não podem ser gerados através de interações com Netuno, requerendo um mecanismo adicional de perturbação gravitacional.
- **Centauros:** Os Centauros (clássicos) são definidos como corpos menores com distâncias ao periélio ou semieixos maiores entre as órbitas dos planetas externos (Gladman et al., 2008), razão pela qual suas órbitas são geralmente instáveis. Estes objetos se originariam no disco disperso.

Porém, existem também corpos com $a > 100$ au e distâncias ao periélio na mesma região do que os Centauros clássicos, pelo que estes objetos são conhecidos como Centauros de semieixo maior grande (Gomes et al., 2015).

Batygin et al. (2019) consideram como Centauros objetos com $q \leq 30$ au e $a \geq 30$ au, os quais exibem uma ampla dispersão nas inclinações, vários deles atingindo inclusive órbitas retrógradas. Dos 49 TNOs com $i > 40^\circ$, 10 deles apresentam $i > 90^\circ$. Com exceção do TNO recentemente descoberto, 2015 BP₅₁₉ ($i = 54^\circ$, $q = 36$ au, $a = 450$ au; Becker et al. (2018)), todos os objetos conhecidos com alta inclinação são Centauros ($q < 30$ au), habitando o espaço interplanetário no periélio. Tais inclinações elevadas requerem uma dinâmica adicional às interações apenas com os planetas gigantes conhecidos. Nós adotamos esta definição para os Centauros doravante.

- **Nuvem de Oort:** Esta é uma região hipotética aproximadamente esférica composta de planetesimais gelados que originariam os cometas de longo período. A única evidência concreta de sua existência provém das observações de cometas com $a \geq 20,000$ au. O fluxo cometário observado fornece uma estimativa da massa de $\sim 1 - 2 M_\oplus$, embora este valor seja altamente incerto (Francis, 2005). Acredita-se que a Nuvem de Oort se estende de $\sim 20,000$ a $200,000$ au, onde o limite externo corresponde à fronteira gravitacional do sistema solar e é dada aproximadamente pela esfera de Hill do Sol. Devido às distâncias grandes, estes objetos estão sujeitos à perturbação gravitacional de estrelas que passam.

³A diferença entre os objetos destacados e espalhados só pode ser estabelecida com segurança através de integrações numéricas das órbitas no campo gravitacional dos planetas, principalmente Netuno. Os espalhados apresentarão órbitas metaestáveis. Não se tendo o resultado de integrações numéricas para todos, usa-se um valor aproximado para o q divisório e isso pode variar de autor para autor.

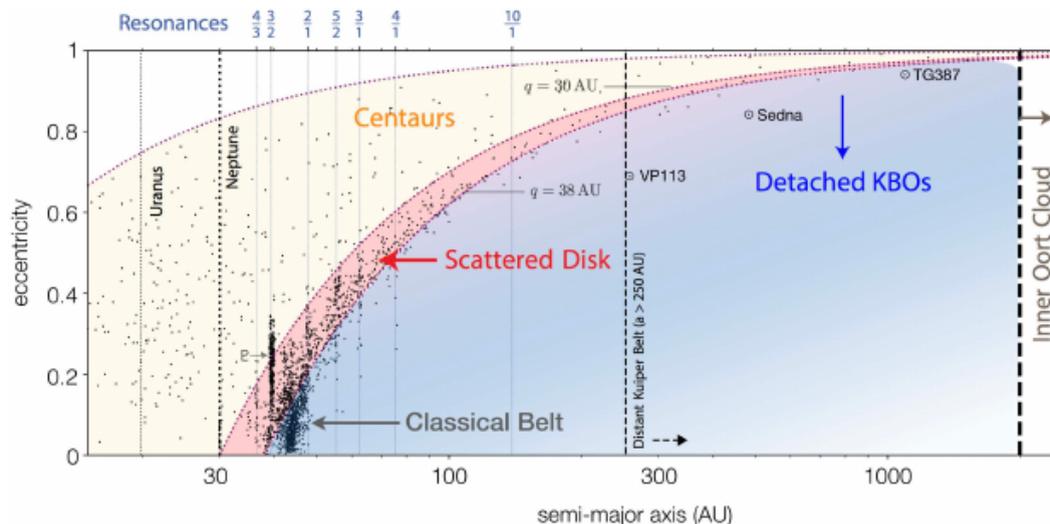


FIGURA 1.1: Principais classes dinâmicas de TNOs. Figura extraída do “review” de [Batygin et al. \(2019\)](#). Note que, diferente deles, nós definimos o semieixo maior dos objetos espalhados e destacados como sendo $a > 50$ au.

1.2 O Modelo de Nice

Os planetas gigantes do sistema solar provavelmente experimentaram duas etapas de migração, a primeira num disco de gás e a segunda, após a dissipação do gás no disco, induzida pela troca de momento angular e energia entre eles e um disco externo de planetesimais massivos. Esse último cenário é conhecido como o *Modelo de Nice* (originalmente apresentado numa trilogia: [Gomes et al. \(2005a\)](#); [Morbidelli et al. \(2005\)](#); [Tsiganis et al. \(2005\)](#)) e é remarcavelmente convincente porque consegue reproduzir muitas das características do sistema solar.

No *Modelo de Nice*, os planetas gigantes tinham inicialmente uma configuração mais compacta do que a atual, localizados entre 5 – 18 au, e órbitas quase circulares e coplanares. O disco de planetesimais tinha uma massa de $\sim 35 M_{\oplus}$, começando logo além das órbitas dos planetas e se estendendo até ~ 30 au ([Gomes et al., 2004](#)). Aproximadamente 700 Myr após a formação dos planetas gigantes (isto é, os planetas terrestres já estavam formados), Júpiter e Saturno cruzaram suas RMMs mútuas 2:1, desencadeando uma instabilidade global. Urano e Netuno adentraram no disco trans-planetário espalhando as partículas através do sistema solar.

Com o decorrer do tempo o *Modelo de Nice* precisou de algumas modificações. Por um lado, resultados de simulações hidrodinâmicas mostraram que os planetas gigantes emergem numa cadeia ressonante após a dissipação do gás no disco circunstelar, com Júpiter e Saturno bloqueados em sua RMM mútua 3:2 ([Masset and Snellgrove, 2001](#); [Morbidelli and Crida, 2007](#)). Esta configuração pode produzir os mesmos resultados que o cruzamento ressonante 2:1 ([Morbidelli et al., 2007](#)). Por outro lado, para preservar o sistema solar interno, manter o Cinturão Principal estável e induzir a dinâmica correta atual dos gigantes de gás, Júpiter tinha que pular sobre sua RMM 2:1 com Saturno, ao invés de migrar suavemente através dela (evolução conhecida como *Jumping Jupiter*), para isto era necessário que Júpiter experimentasse encontros próximos com um dos gigantes de gelo ([Brasser et al., 2009](#); [Morbidelli et al., 2010, 2009](#)).

O *Modelo de Nice* consegue explicar a configuração orbital atual dos planetas gigantes (Tsiganis et al., 2005), o intenso bombardeio tardio (LHB, por sua sigla em inglês, Gomes et al. (2005a); Levison et al. (2011)), a captura dos Troianos de Júpiter e Netuno (Gomes and Nesvorný, 2016; Morbidelli et al., 2005; Nesvorný and Vokrouhlický, 2009; Nesvorný et al., 2013), a estrutura orbital do Cinturão de Kuiper (Brasil et al., 2014a,b; Gomes et al., 2018; Gomes, 2011; Levison et al., 2008; Nesvorný, 2015a,b; Nesvorný and Vokrouhlický, 2016), a origem dos satélites irregulares dos planetas gigantes (Nesvorný et al., 2014a, 2007), várias propriedades dos satélites Jovianos (Deienno et al., 2014; Nesvorný et al., 2014b), os diferentes estados de diferenciação de Ganimedes e Calisto (Barr and Canup, 2010), a arquitetura orbital do Cinturão Principal (Roig and Nesvorný, 2015) e a ausência observacional de famílias de asteroides primordiais no Cinturão Principal (Brasil et al., 2016).

A instabilidade tardia no *Modelo de Nice* foi originalmente requerida para explicar o LHB ou cataclismo lunar, que teria acontecido há ~ 3.9 Gyr segundo a datação radiométrica das amostras de rochas lunares retornadas pelas missões Apollo (Tera et al., 1974). Porém, novas imagens de alta resolução do *Lunar Reconnaissance Orbiter* (LRO) e a missão *Gravity Recovery and Interior Laboratory* (GRAIL) tem incrementado significativamente o número de bacias de crateras antigas usadas na contagem, cobrindo um intervalo mais amplo de idades e implicando um bombardeio lunar estendido há $\sim 4.2 - 3.5$ Gyr (Fassett et al., 2012; Spudis et al., 2011; Zellner, 2017).

Por outro lado, as evoluções *Jumping Jupiter* acontecem no *Modelo de Nice*, mas elas são raras. Na maioria dos casos, o gigante de gelo que experimentou o encontro com Júpiter é ejetado. Esta taxa baixa de sucesso é incrementada quando um gigante de gelo extra, ejetado do sistema solar durante a instabilidade, é adicionado ao sistema (Batygin, 2012; Nesvorný, 2011). No entanto, inclusive em um cenário *Jumping Jupiter* favorável, os eventos de dispersão repetidos entre os planetas gigantes podem induzir um intercâmbio estocástico e difusivo do AMD⁴ entres os modos de excentricidade dos planetas planetas internos e externos (Agnor and Lin, 2012; Brasser et al., 2013). Por sua vez, Kaib and Chambers (2016) encontraram uma probabilidade de 1% de que as arquiteturas orbitais dos planetas terrestres e gigantes sejam reproduzidas simultaneamente. Isto sugere que a instabilidade dos planetas gigantes deve ter acontecido antes que os planetas terrestres se formaram. Uma instabilidade precoce, dentro dos primeiros 100 Myr, explicaria a baixa massa de Marte (Clement et al., 2018, 2019) (fornecendo mais um modelo viável aos de *Grand Tack* (Walsh et al., 2011) e *Low-mass Asteroid Belt* (Raymond and Izidoro, 2017)) e é apoiado pela existência do Troiano binário de Júpiter Patroclus-Menoetius (Nesvorný et al., 2018).

Particularmente, devido ao foco do trabalho, damos ênfase nos objetos destacados. A origem da população destacada com $a \lesssim 200$ au pode ser explicada como um resultado do incremento da distância ao periélio de objetos do disco disperso mediante captura ressonante com Netuno associado com o mecanismo de Kozai. Estes objetos podem ainda estar experimentando

⁴O AMD (angular momentum deficit) é a diferença entre a componente z do momento angular de uma órbita e o momento angular total de uma órbita circular com o mesmo semieixo maior no plano invariável (Laskar, 1997).

essas ressonâncias ou podem ter sido liberados do acoplamento ressonante Kozai-RMM durante a migração de Netuno após a fase de instabilidade do sistema solar, quando suas excentricidades orbitais foram suficientemente baixas (Brasil et al., 2014a; Gomes, 2011; Gomes et al., 2005b).

No entanto, as órbitas de objetos destacados com $q \gtrsim 40$ au e $a \gtrsim 200$ au não podem ser explicadas pela única influência dos planetas conhecidos. Entre os mecanismos propostos para explicar sua origem estão os seguintes: a interação do Sol com outras estrelas quando ele formava parte do aglomerado de nascimento e “stellar flybys” foram comuns (Brasser et al., 2012; Dukes and Krumholz, 2012), a captura de planetesimais do disco externo de outra estrela (Kenyon and Bromley, 2004; Morbidelli and Levison, 2004), um planeta que pode ter existido temporariamente no disco disperso (Gladman and Chan, 2006), ou um planeta ainda não descoberto (Gomes et al., 2006).

1.3 A Hipótese do Planeta 9

A recente proposta de um planeta adicional no sistema solar externo foi sugerida por Trujillo and Sheppard (2014). Eles além de reportar o descobrimento do segundo Sednoide⁵, 2012 VP₁₁₃, notaram que os argumentos do periélio (ω) de TNOs com $a > 150$ au e $q > 30$ au —incluindo Sedna e 2012 VP₁₁₃— estão agrupados próximos à 0° .

Trabalhos em relação à formação da Nuvem de Oort mostram que o mecanismo Lidov-Kozai⁶ pode criar objetos com valores de ω preferencialmente próximos de 0° e 180° (Brasser et al., 2006). Trujillo and Sheppard (2014) especularam que a escassez de objetos observados com $\omega \sim 180^\circ$ pode ser o resultado de algum evento estocástico (por exemplo, um encontro estelar forte) nos primórdios do sistema solar, levando à criação de populações assimétricas. No entanto, eles notaram que os torques gravitacionais exercidos subsequentemente pelos planetas gigantes conhecidos circula os argumentos do periélio de objetos com $a > 150$ au e $q > 30$ au em curtas (comparadas à idade do sistema solar) e diferentes escalas de tempo, dependentes de seus semieixo maior e periélio. Por exemplo, 100 Myr, 500 Myr e 1.3 Gyr para 2000 CR₁₀₅, 2012 VP₁₁₃ e Sedna; respectivamente (Trujillo and Sheppard, 2014). Por conseguinte, o confinamento em ω deve ter acontecido relativamente recentemente (alguns Myr atrás) ou algum mecanismo dinâmico está atualmente forçando o alinhamento em torno de $\omega \sim 0^\circ$.

Para evitar que os valores de ω se aleatorizem, Trujillo and Sheppard (2014) consideraram a presença de um planeta externo, o qual induziria um possível efeito Lidov-Kozai. Suas simulações numéricas considerando um perturbador de $2 - 15 M_\oplus$, em órbita *circular* e de baixa inclinação entre 200 – 300 au, indicaram que o ω dos Sednoides librou em torno de 0° por bilhões de anos, entando que os objetos com periélios menores não libraram por longos períodos. Como

⁵Definido como um TNO com $q > 50$ au e $a > 150$ au.

⁶O mecanismo Lidov-Kozai é caracterizado pela presença de um corpo primário, um perturbador massivo e um corpo perturbado. A perturbação da órbita da partícula causa libração (oscilação em torno de um valor constante) do argumento do pericentro, induzindo por sua vez um intercambio periódico entre sua excentricidade e inclinação, porque para ele $\sqrt{1 - e^2} \cos i = \text{const.}$

exemplo eles mostraram a libração do ω de 2012 VP₁₁₃ ($a = 258$ au) considerando um perturbador com semieixo maior próximo à do objeto (vide figura 1.2). Os autores testaram também com um planeta da massa de Netuno em órbita altamente inclinada à 1500 au, indicando que a maioria dos objetos exibem librações curtas em ω . Assim, eles mencionaram que existem provavelmente outras configurações planetárias que favoreceriam a restrição observacional.

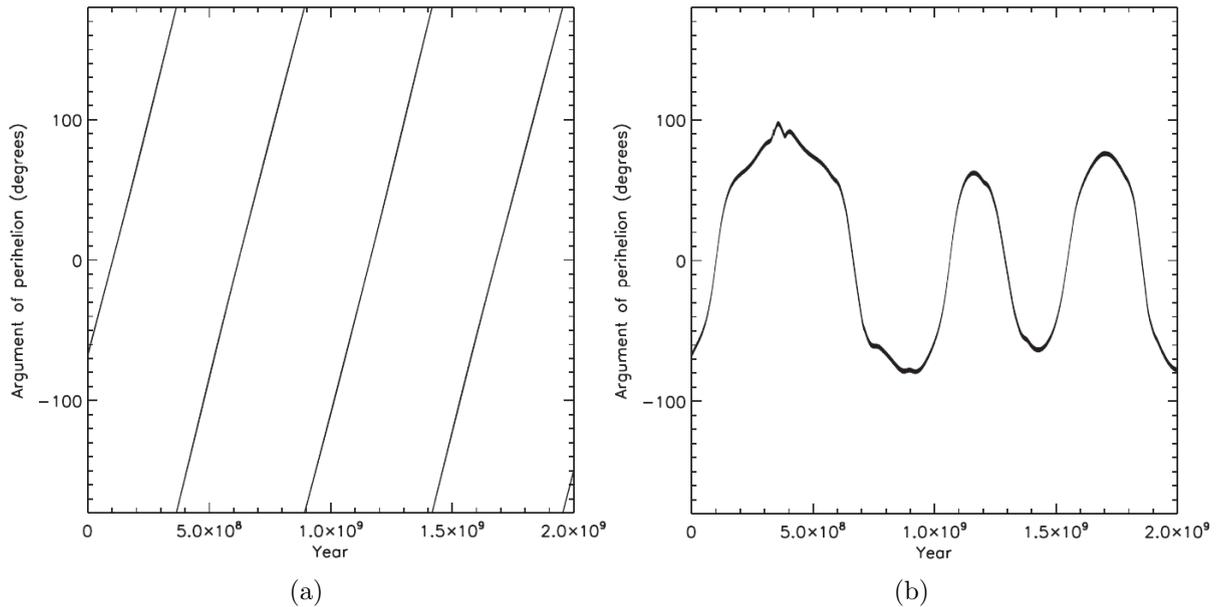


FIGURA 1.2: (A) Circularização do argumento do periélio de 2012 VP₁₁₃ considerando o sistema solar atual. (B) Libração do argumento do periélio em torno de 0° com amplitude de aproximadamente $\pm 60^\circ$ para o mesmo corpo menor incluindo na integração um planeta de $5 M_\oplus$ à 210 au.

Porém, invocar o mecanismo Lidov-Kozai para a libração ocorrer em torno a $\omega \sim 0^\circ$ requer que a razão de semieixos maiores do objeto perturbado ao perturbador seja próximo da unidade (de La Fuente Marcos and de La Fuente Marcos, 2014), o que implicaria que capturar todos objetos com $a > 150$ au e $q > 30$ au em ressonâncias de Kozai requer provavelmente a existência de múltiplos planetas.

Por sua vez, Jílková et al. (2015) determinaram os parâmetros que levariam ao Sol e uma estrela do aglomerado de nascimento a ter um encontro favorável que reproduza o confinamento em ω (e também na inclinação) como observado nos objetos com $a > 150$ au e $q > 30$ au. No entanto, eles assumem que os planetesimais capturados pelo Sol estariam na *parking zone* do sistema solar, pelo que os elementos orbitais deles não teriam mudado desde que adquiriram suas órbitas (Portegies Zwart and Jílková, 2015).

Iorio (2014) descartou a existência da super Terra entre 200 – 300 au sugerida por Trujillo and Sheppard (2014), a partir da determinação da distância mínima na qual um planeta externo poderia existir baseada na precessão das linhas apsidais de vários planetas do sistema solar (Iorio, 2012).

Posteriormente, Batygin and Brown (2016a) notaram que TNOs com $a > 250$ au ($P > 4,000$ yr) e $q > 30$ au estão confinados não só em ω , senão também na longitude do periélio (ϖ)

e na longitude do nodo ascendente (Ω), sugerindo que suas órbitas estão alinhadas no espaço físico. Eles mostraram que a presença de um planeta com massa similar à de Netuno, distante, *excêntrico* e moderadamente inclinado poderia reproduzir tais confinamentos como consequência de interações seculares e ressonantes. Este planeta, denominado de Planeta 9 e cujos parâmetros serão denotados com o subscrito 9, residiria aproximadamente no mesmo plano orbital do que os objetos confinados (isto é: $i_9 \sim 30^\circ$ e $\Delta\Omega = \Omega_9 - \Omega \sim 0^\circ$, onde Ω representa o valor médio das partículas) e estaria apsidalmente antialinhado com eles. O planeta nominal deles tem os seguintes parâmetros: massa $m_9 = 10 M_\oplus$, $a_9 = 700$ au, $e_9 = 0.6$, $i_9 = 30^\circ$, $\omega_9 = 150^\circ$ e $\Omega_9 = 113^\circ$.

Brown and Batygin (2016) refinaram as órbitas do Planeta 9 sugerindo as seguintes faixas (obtidas a partir da figura 1.3 para as probabilidades mais altas): $200 \text{ au} < q_9 < 400 \text{ au}$, $500 \text{ au} < a_9 < 1000 \text{ au}$ e $10 M_\oplus < m_9 < 20 M_\oplus$. Os autores descartaram excentricidades maiores e semieixos maiores menores do perturbador do que esses mencionados acima, porque supostamente tais valores criariam objetos com distâncias ao periélio altas na região $100 \text{ au} < a < 200 \text{ au}$. Valores de $m_9 = 0.1, 1$ e $30 M_\oplus$ não conseguem ajustar as observações. Os confinamentos nas “perihelion longitude”, “perihelion latitude” e ângulos polares⁷ dos TNOs distantes, assim como as restrições dadas pelas “perihelion longitude” e inclinação dos Centauros de semieixo maior grande e inclinação alta –que é uma predição forte da existência de um planeta no sistema solar externo (Batygin and Brown, 2016a; Gomes et al., 2015)– sugeriram $i_9 = 30^\circ$ e $\omega_9 = 120^\circ, 150^\circ$. Comparando as trajetórias orbitais permitidas e brilho estimado do Planeta 9 à estudos prévios e em andamento, os autores indicaram que o Planeta 9 estaria perto do afélio com $22 < V < 25$.

As análises dinâmicas a longo prazo de Batygin and Brown (2016a) e Brown and Batygin (2016) não restringem diretamente a localização do Planeta 9 dentro de sua órbita. Subsequentes trabalhos focaram nesta questão.

Fienga et al. (2016) analisaram os resíduos no movimento orbital de Saturno baseado nos dados de 10 anos de *Cassini*, usando o modelo dinâmico nominal de efemérides planetárias INPOP e adicionando ao modelo o Planeta 9 nominal de Batygin and Brown (2016a), ajustando todas as condições iniciais e parâmetros planetários. Eles excluíram valores de anomalia verdadeira $\nu \in [-130^\circ : -100^\circ] \cup [-65^\circ : 85^\circ]$, contradizendo a afirmação de Iorio (2017) que manifesta que um corpo de $10 M_\oplus$ é excluído se reside a uma distância menor do que 1000 au; enquanto que os resíduos decrescem significativamente no intervalo $\nu_9 \in [108^\circ : 129^\circ]$ (vide figura 1.4).

Holman and Payne (2016b) também utilizaram medidas precisas da distância Terra-Saturno obtidas por *Cassini* e as restrições dinâmicas de Batygin and Brown (2016a) e Brown and Batygin (2016), favorecendo a região em ascensão reta e declinação $(\alpha, \delta) = (40^\circ, -15^\circ)$, se

⁷Os três parâmetros referenciados à eclíptica: argumento do periélio, longitude do nodo ascendente e inclinação, são mais simples de descrever na posição absoluta no céu: i) “perihelion longitude”, a longitude eclíptica do ponto no céu onde o objeto está no periélio, ii) “perihelion latitude”, a latitude do periélio, e iii) o ângulo polar, que mede a projeção do polo da órbita no plano do céu, ou a direção perpendicular ao movimento do objeto no periélio.

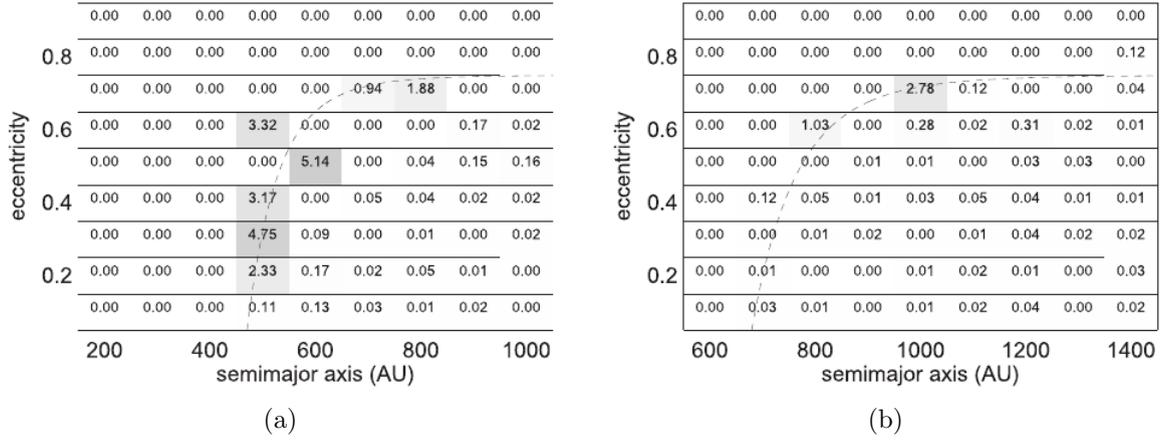


FIGURA 1.3: A) Espaço de parâmetros $a_9 - e_9$ considerados para calcular a probabilidade de um Planeta 9 de $10 M_{\oplus}$ fornecer um adequado ajuste às órbitas de TNOs distantes. O estreito intervalo de resultados aceitáveis caim dentro de $500 \text{ au} < a < 800 \text{ au}$ através de uma linha tracejada definida empiricamente como $e_9 = 0.75 - (450 \text{ au}/a_9)^8$. B) No caso de um Planeta 9 de $20 M_{\oplus}$, as combinações aceitáveis se dão para $800 \text{ au} < a < 1000 \text{ au}$ e $e_9 = 0.75 - (650 \text{ au}/a_9)^8$. As probabilidades devem ser consideradas mais qualitativas do que quantitativas, já que essas simulações foram exploratórias considerando um número limitado de partículas. Crédito: [Brown and Batygin \(2016\)](#).

estendendo $\sim 20^\circ$ em todas as direções, para $m_9 = 17.7^{+8.4}_{-9.1} M_{\oplus}$ e distâncias $r_9 = 629.4^{+92.3}_{-133.9}$ au, próximo ao apocentro de sua órbita ($a_9 = 478.7^{+70.5}_{-91.7}$ au, $e_9 = 0.5^{+0.1}_{-0.1}$).

[Holman and Payne \(2016a\)](#) ademais sugeriram que a inclusão de um planeta mais massivo ou mais próximo do que o argumentado por [Batygin and Brown \(2016a\)](#) fornece melhores ajustes às astrometrias de Plutão⁸ e de um conjunto de TNOs bem observados⁹, do que um modelo que considera apenas o Sol, os planetas conhecidos e os TNOs maiores.

[Malhotra et al. \(2016\)](#) assumiram que os quatro objetos do Cinturão de Kuiper de mais longo período estão em comensurabilidades de movimento médio $N:1$ e $N:2$ com um planeta hipotético com $a_9 \sim 665$ au. Os autores deram duas possibilidades para o par (i_9, Ω_9) que são $(18^\circ, 101^\circ)$ e $(48^\circ, 355^\circ)$ e, excluem pouco mais da metade da trajetória orbital, assumindo um planeta de $10 M_{\oplus}$.

Por sua vez, [Millholland and Laughlin \(2017\)](#) estenderam o trabalho de [Malhotra et al. \(2016\)](#), indicando os seguintes parâmetros para o planeta: $m_9 \sim 6 - 12 M_{\oplus}$, $a_9 = 654$ au, $e_9 = 0.45$, $i_9 = 30^\circ$, $\omega_9 = 150^\circ$, $\Omega_9 = 50^\circ$ e $M_9 = 180^\circ$.

[Lawler et al. \(2017\)](#) argumentaram que uma super-Terra distante numa órbita circular ($m_9 = 10 M_{\oplus}$, $a_9 = 250$ au, $e_9 = 0$, $i_9 = 5^\circ$) ou excêntrica ($m_9 = 10 M_{\oplus}$, $a_9 = 500$ au, $e_9 = 0.5$, $i_9 = 5^\circ$) afetaria a distribuição orbital na faixa $50 \text{ au} < a < 500 \text{ au}$ e $q > 37$ au, mas que tal assinatura seria indetectável nos “surveys”.

⁸Foram utilizadas as remedições de placas fotográficas de Plutão, usando catálogos estelares modernos ([Buie and Folkner, 2015](#)).

⁹Estes objetos ao terem sido observados por períodos longos, permitem que os efeitos de perturbações fracas se acumulem.

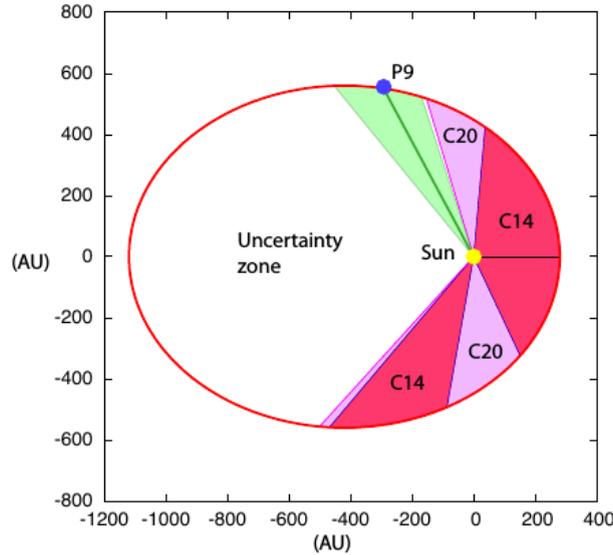


FIGURA 1.4: Zonas permitida (verde), excluídas (vermelho e rosa) e incerta (branca) para o Planeta 9 de [Batygin and Brown \(2016a\)](#). Na zona verde, os resíduos são diminuídos ao considerar o planeta em relação aos resíduos nominais de INPOP, pelo que sua presença é possível. Na zona branca a perturbação do Planeta 9 é muito fraca para ser detectada. As zonas excluídas são mostradas em vermelho considerando dados disponíveis até 2014.4 e em rosa, $\nu \in [-132^\circ : 106.5^\circ]$, se os dados *Cassini* são estendidos até 2020, ao incluir um ruído Gaussiano à dados simulados adicionais. Crédito: [Fienga et al. \(2016\)](#).

[Nesvorný et al. \(2017\)](#) encontraram que a inclusão de um Planeta 9 com: $m_9 = 15 M_\oplus$, $a_9 = 700$ au e $e_9 = 0.6$, origina uma distribuição na inclinação de cometas da família de Júpiter mais ampla do que a observada.

Simulações atuais de [Batygin et al. \(2019\)](#) sugerem um planeta de massa baixa, mais próximo e menos excitado dinamicamente do que o proposto anteriormente por eles: $m_9 \sim 5-10 M_\oplus$, $a_9 \sim 400-800$ au, $e_9 \sim 0.2-0.5$ e $i_9 \sim 15^\circ-25^\circ$. Apesar do raio físico menor, a distância heliocêntrica agora mais próxima permitiria que o Planeta 9 seja mais facilmente detectável por estudos ópticos convencionais do que se pensava. Os autores esperam que os parâmetros revisados do Planeta 9 diminuam a eficiência da geração de cometas da família de Júpiter de alta inclinação, eliminando potencialmente a discrepância entre as distribuições orbitais modelada e observada.

Utilizando limites observacionais e gravitacionais, [Batygin et al. \(2019\)](#) restringiram o espaço de parâmetros massa – raio orbital, para planetas que podem ainda não ter sido descobertos (vide figura 1.5). O espaço permitido tem em conta que as órbitas dos planetas conhecidos são bem determinadas, de modo que, a massa e distância de novos corpos não podem contradizer as efemérides, embora tal determinação é sensível ao modelo dinâmico empregado. As órbitas de novos planetas também têm que permanecer vinculadas ao Sol, aquelas com $a \gtrsim 30,000$ au provavelmente serão arrancadas do sistema solar, ou pelo menos terão seus elementos orbitais drasticamente alterados, por estrelas que passam no campo da vizinhança solar. No campo do aglomerado de nascimento solar, os planetas devem ter $a \lesssim 1000$ au ([Li and Adams, 2016](#)) para sobreviver. O limite superior na massa é fornecido pelas observações de

WISE e o limite inferior é dado pela definição de planeta, que deve ser o suficientemente massivo para limpar sua órbita sobre a idade do sistema solar, isto implica que a massa planetária mínima seja uma função crescente da distância orbital. Usando a restrição de [Margot \(2015\)](#):

$$m \gtrsim 1 M_{\oplus} \left(\frac{a}{380 \text{ au}} \right)^{9/8}$$

Nós enfatizamos que o tempo em que o planeta se coloca numa órbita destacada pode ser perto do fim da vida do aglomerado, podendo atingir valores $a > 1000$ au.

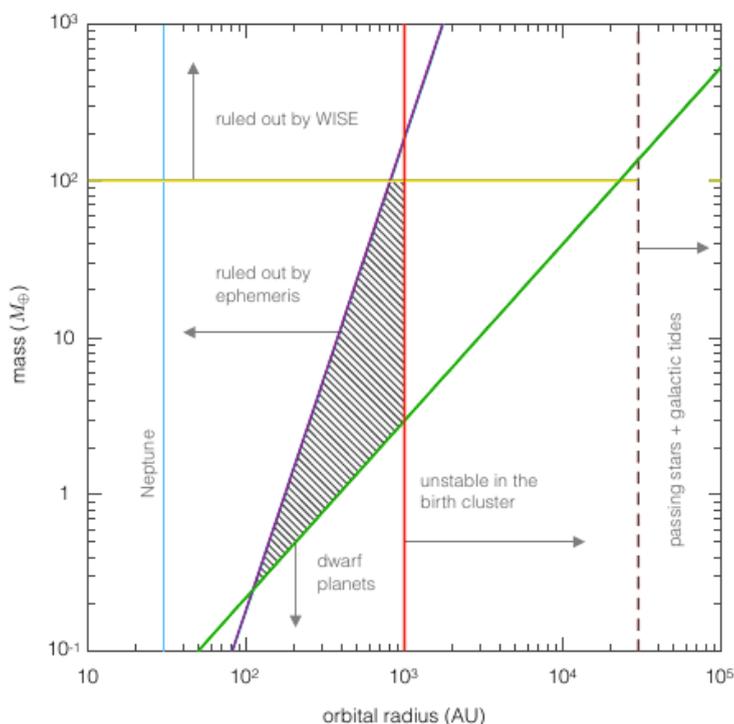


FIGURA 1.5: Parâmetros permissíveis para planetas ainda não descobertos no sistema solar. A região permitida é delimitada pelas linhas roxa, verde, vermelha e amarela. Embaixo da linha roxa, o planeta desconhecido não produz perturbações grandes nas órbitas dos planetas gigantes. Por acima da linha verde, os planetas são o suficientemente massivos para limpar gravitacionalmente suas órbitas. À esquerda da linha vermelha, o planeta conseguiria sobreviver à perturbações no aglomerado de nascimento do Sol. Embaixo da linha amarela, corpos com massa inferior a do Saturno podem existir a menos de 28,000 au. Crédito: [Batygin et al. \(2019\)](#).

O Planeta 9 não só explica o confinamento das órbitas de TNOs distantes no espaço físico, senão que também origina naturalmente órbitas com distâncias ao periélio altas como a de Sedna, prevê a existência de objetos apsidalmente alinhados com o planeta hipotético se uma distribuição ampla de periélio é inicialmente assumida para as partículas ([Khain et al., 2018](#)), reproduz objetos que seriam compatíveis com os Centauros de semieixo maior grande e inclinação alta ([Batygin and Brown, 2016a](#); [Brown and Batygin, 2016](#); [Gomes et al., 2015](#)), oferece uma explicação à origem dos Centauros altamente inclinados com $a < 100$ au ([Batygin and Brown, 2016b](#)), à alta inclinação do TNO de longo período, 2015 BP₅₁₉ ($q = 36$ au; [Batygin and Morbidelli \(2017\)](#); [Becker et al. \(2018\)](#)) e foi invocado para explicar a inclinação do equador

solar em relação ao plano médio dos planetas do sistema solar (Bailey et al., 2016; Gomes et al., 2017; Lai, 2016). Estes itens, detalhados abaixo, e os mecanismos propostos para explicar a origem da órbita do Planeta 9 foram estudados usando como base os trabalhos de Batygin and Brown (2016a) e Brown and Batygin (2016).

1.3.1 Objetos Apsidalmente Antialinhados e Alinhados

Khain et al. (2018) mostraram que a distribuição de distância ao periélio é fortemente dependente da distribuição q inicial no Cinturão de Kuiper. Eles consideraram em suas simulações¹⁰ um Planeta 9 com $m_9 = 10 M_\oplus$, $a_9 = 700$ au, $e_9 = 0.6$ e $i_9 = 0^\circ$ e, testaram dois modelos do Cinturão de Kuiper: i) um Cinturão de Kuiper inicialmente estreito ($30 \text{ au} < q < 36 \text{ au}$), correspondente à definição convencional do disco disperso (Gladman et al., 2008) e consistente com as expectativas do *Modelo de Nice* na ausência de perturbações externas e, ii) um Cinturão de Kuiper inicialmente amplo ($30 \text{ au} < q < 300 \text{ au}$), associado com mecanismos que envolvem encontros estelares os quais levantariam a distância ao periélio original do Planeta 9 assim como de alguns TNOs.

Em 4 Gyr, as distribuições inicialmente estreita e ampla retêm uma população antialinhada em relação à órbita do perturbador hipotético, de q baixo, que correspondem aos objetos confinados no espaço físico, onde a distribuição ampla consegue reter um número maior devido as condições iniciais, já que muitos deles experimentaram mínimas interações de espalhamento com os planetas gigantes. Mas só a distribuição ampla desenvolve uma população alinhada com o planeta, de q alto. Na distribuição estreita, os poucos objetos alinhados que sobrevivem são encontrados em ressonâncias de alta ordem com Netuno. A mediana da distância ao periélio final dos objetos que seriam detectáveis na distribuição estreita é de 38.13 au para os TNOs antialinhados e de 33.07 au para os TNOs alinhados, e na distribuição ampla, de 44.16 au para os TNOs antialinhados, e de 100.29 au para os TNOs alinhados.

Os objetos antialinhados são dominados por aqueles com $q < 100$ au. Isto é devido a que objetos antialinhados com q inicial $\gtrsim 100$ au residem em trajetórias seculares induzidas pelo Planeta 9 que experimentam oscilações de amplitude alta na distância ao periélio; eles atingem seu valor máximo em q e seguem aproximadamente as curvas de nível do Hamiltoniano médio (Batygin and Morbidelli, 2017) sendo conduzidos à órbitas cruzadoras de Netuno (vide figura 1.6). Neste ponto, estes objetos se tornam Centauros e como tais têm tempos de vida dinâmico curtos (Tiscareno and Malhotra (2003), Horner et al. (2004)). Os TNOs antialinhados estáveis executam dinâmica secular – ressonante com o Planeta 9 (vide Capítulo §2, para detalhes).

Os objetos alinhados executam ciclos de librações no plano de fase $e - \Delta\varpi$ devido a interações seculares com o Planeta 9 (vide figura 1.7, para um TNO com $a = 345$ au). Dependendo do valor de q inicial, estas librações podem estar completamente contidas dentro da região protegida do plano de fase $e - \Delta\varpi$, isto é, as órbitas colineares dos objetos permanecem

¹⁰Estas consideraram um Cinturão de Kuiper de inclinação baixa e um Planeta 9 não inclinado. O bom acordo com modelos que consideram um Cinturão de Kuiper com distribuição uniforme na inclinação com $0^\circ < i < 40^\circ$ e a presença de um Planeta 9 inclinado, implica que os resultados de suas simulações planares são representativas.

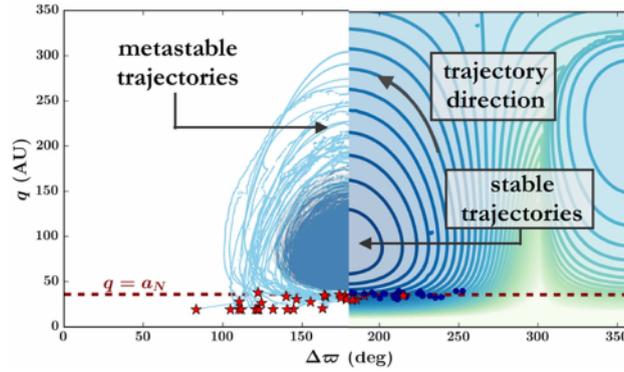


FIGURA 1.6: Plano de fase $q - \Delta\varpi$ mostrando as trajetórias de um subconjunto de objetos antialinhados (esquerda) e contornos do Hamiltoniano secular calculados por [Batygin and Morbidelli \(2017\)](#) (direita). Os pontos azuis denotam os valores iniciais de objetos metaestáveis e as estrelas vermelhas indicam o momento quando estes cruzam a órbita de Urano. Os objetos metaestáveis, cujas trajetórias são mostradas com a cor azul claro, são primeiramente conduzidos à valores de q altos e subsequentemente para o sistema solar interno, devido a interações seculares com o Planeta 9. As trajetórias azuis escuras, porém, correspondem a objetos antialinhados estáveis, estes experimentam librações leves em q e $\Delta\varpi$, sendo protegidas do espalhamento de Netuno e permanecendo estáveis durante o tempo de integração. Consequentemente, todos os objetos antialinhados que atingem valores de q altos ($\gtrsim 100$ au) em suas trajetórias são eventualmente ejetados, o que explica qualitativamente a distribuição de periélio de objetos antialinhados nas populações ampla e estreita. Crédito: [Khain et al. \(2018\)](#).

inteiramente dentro de ou fora da órbita do Planeta 9 (dependendo se $a < a_9$ ou $a > a_9$), neste caso, os objetos sobrevivem o tempo de integração completo. Porém, para objetos inicializados em órbitas próximas de Netuno a evolução secular conduz a órbitas de cruzamento com o Planeta 9, mas os encontros próximos com o Planeta 9 não desestabilizam diretamente estes objetos, ao invés disso, estas interações atuam para modular estocasticamente os TNOs dentro do regime de cruzamento de órbitas com o Planeta 9. Nesta região, os objetos são levados para o sistema solar interno mediante trajetórias seculares e um rápido decrescimento de q . Portanto, a curva de colisão tangencial (figura 1.7), embora não sinalize instabilidade, é um representante do tempo de vida dinâmico, objetos que cruzam esta linha são desestabilizados em dezenas de milhões de anos. Os únicos objetos que encontram estabilidade a longo prazo dentro da região de cruzamento de órbitas são aqueles que foram capturados em RMM com o Planeta 9. Porém, estas ressonâncias são raras, pelo que o Planeta 9 esculpe a população alinhada de q alto devido principalmente a efeitos seculares. A região alinhada estável se torna cada vez mais estreita conforme o semieixo maior da partícula se aproxima ao valor de a_9 , até que desaparece no limite $a \rightarrow a_9$.

Assim, os autores identificaram duas populações permanentemente estáveis no Cinturão de Kuiper externo: os objetos antialinhados de q baixo e os objetos alinhados de q alto. A presença de objetos alinhados de q alto indicaria que o Cinturão de Kuiper atual vem de uma distribuição q inicialmente ampla e que a origem da órbita do Planeta 9 provavelmente envolveu encontros estelares, já que este mecanismo criaria um Cinturão de Kuiper estendido.

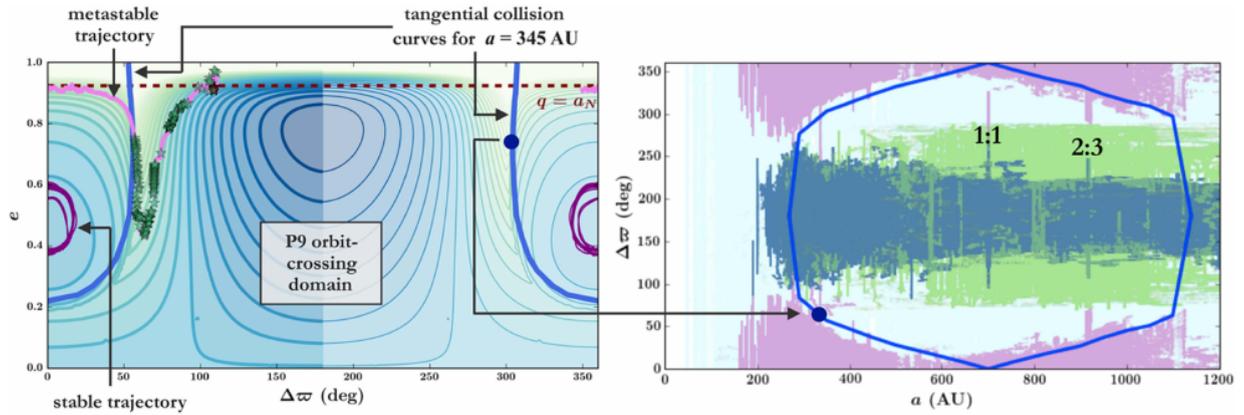


FIGURA 1.7: *Esquerda:* Plano de fase $e - \Delta\varpi$ com contornos do Hamiltoniano médio para um TNO com a constante de 345 au. A fronteira azul representa a curva de colisão tangencial com o Planeta 9. Dentro deste limite os objetos não cruzam a órbita do Planeta 9, sendo protegidos de encontros próximos (mostrados pelos ciclos de libração estáveis em roxo). Os objetos que cruzam esta curva são eventualmente conduzidos ao sistema solar interno através de dinâmica secular induzida pelo Planeta 9, tornando-se Centauros de vida curta (um exemplo é mostrado pela trajetória rosa, onde as estrelas denotam os encontros próximos). *Direita:* Trajetórias de todos os objetos sobreviventes nas simulações planares no plano de fase $\Delta\varpi - a$: objetos alinhados (rosa), antialinhados (azul), altamente inclinados (verde) e circulando (azul claro). A curva de colisão foi construída localizando a largura máxima de libração permitida da longitude do periélio relativa no correspondente gráfico $e - \Delta\varpi$ para cada valor de a . Todas as configurações orbitais dentro da curva azul estão cruzando a órbita do Planeta 9. Crédito: [Khain et al. \(2018\)](#).

1.3.2 TNOs Altamente Inclinados

Apesar do êxito conseguido pelo *Modelo de Nice* em explicar várias das características do sistema solar, a origem da população trans-Netuniana altamente inclinada ($i > 60^\circ$) com $a < 100$ au, tais como: “Drac” (2008 KV₄₂; $a = 42$ au, $e = 0.5$, $i = 103^\circ$; [Gladman et al. \(2009\)](#)), “Niku” (2011 KT₁₉, $a = 36$ au, $e = 0.3$, $i = 110^\circ$; [Chen et al. \(2016\)](#)), 2016 NM₅₆ ($a = 73$ au, $e = 0.9$, $i = 144^\circ$) e 2017 KZ₃₁ ($a = 53$ au, $e = 0.8$, $i = 162^\circ$), permanece elusiva dentro desse contexto.

Os experimentos numéricos realizados por [Batygin and Brown \(2016b\)](#) e [Batygin et al. \(2019\)](#), mostraram que o Planeta 9 consegue também explicar a distribuição orbital da componente trans-Netuniana anômala. [Batygin et al. \(2019\)](#) consideraram partículas testes distribuídas inicialmente através dos intervalos $100 \text{ au} < a < 800 \text{ au}$ e $30 \text{ au} < q < 100 \text{ au}$, e, adotaram uma dispersão na inclinação semi-gaussiana com desvio padrão de $\sigma_i = 15^\circ$.

Estes objetos, inicialmente de longo período, teriam experimentado oscilações Lidov-Kozai conduzidas pelo Planeta 9 e subsequentemente se espalharam para dentro devido a encontros próximos com Netuno. Esta trajetória dinâmica é reversível no tempo, pelo que estes objetos podem voltar a ser de longo período e de inclinação baixa. Esta população, portanto, pode ter tido semieixos maiores substancialmente mais altos no passado, vindo do disco disperso estendido.

Como pode-se observar na figura 1.8, a distribuição teórica na inclinação para estes objetos apresenta duas componentes: uma se estendendo a partir de $i = 0^\circ$ até $i \sim 110^\circ$ e

a segunda, menos densamente povoada, está centrada em $i \sim 150^\circ$. Estas duas componentes diferem em suas distâncias ao periélio características, com a componente com inclinação menor apresentando $q \sim 5$ au até $q \sim 35$ au e a componente com inclinação maior apresentando valores substancialmente menores do que $q \sim 12$ au. Estes resultados são fortemente consistentes com o conjunto de dados observacionais.

Simulações convencionais desta classe de TNOs deram órbitas estritamente instáveis na ordem de ~ 10 Myr – 1 Gyr (por exemplo, [Chen et al. \(2016\)](#); [Gladman et al. \(2009\)](#)). No entanto, apesar que o domínio orbital atual desses objetos residir fora da região de influência gravitacional direta do Planeta 9, ele pode substancialmente prolongar seus tempo de vida dinâmico.

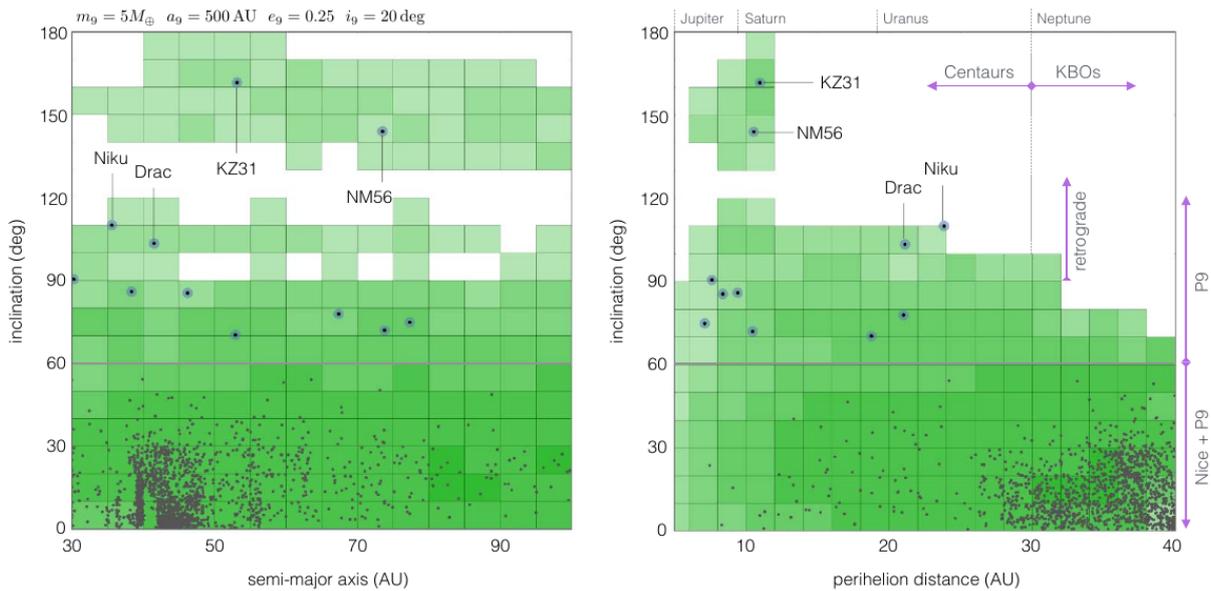


FIGURA 1.8: Histogramas de densidades mostrando as regiões do espaço de parâmetros onde as partículas de longo período influenciadas pelo Planeta 9 foram colocadas após de terem sido espalhadas para dentro por Netuno. Os parâmetros do Planeta 9 são: $m_9 = 5 M_\oplus$, $a_9 = 500$ au, $e_9 = 0.25$ e $i_9 = 20^\circ$. A transparência é usada como um aproximado para o tempo gasto pelas partículas numa região dada. Os domínios mais densamente povoados sinalizam uma forte consistência com os dados observacionais. O censo observacional atual de TNOs com $30 \text{ au} < a < 100 \text{ au}$ é mostrado por pontos pretos para objetos com $i < 60^\circ$ e são adicionalmente destacados com círculos azuis para os objetos anômalos com $i > 60^\circ$ que não podem ser explicados pelo modelo padrão da evolução do sistema solar. Crédito: [Batygin et al. \(2019\)](#).

Além dos TNOs de curto período em órbitas quasi ortogonais e retrógradas, interações com o Planeta 9 podem também modular dramaticamente as excentricidades e inclinações de corpos menores distantes, reproduzindo a população de Centauros altamente inclinados e de semieixo maior grande ([Batygin and Brown, 2016a](#); [Brown and Batygin, 2016](#); [Gomes et al., 2015](#)), como pode-se apreciar na figura 1.9. Os cinco Centauros observados de inclinação alta e semieixo maior grande ($i > 50^\circ$ e $a > 200$ au) apresentam $8 \text{ au} < q < 15$ au. Nas simulações realizadas por [Brown and Batygin \(2016\)](#), os efeitos seculares de Júpiter, Saturno e Urano foram modelados atribuindo um melhorado campo quadrupolar ao Sol, de modo que os objetos são removidos dentro das 20 au, não obstante, existe uma tendência onde objetos com distâncias

ao periélio menores se movimentam para a borda externa das regiões de agrupamento vistas na figura 1.9, onde os objetos reais estão.

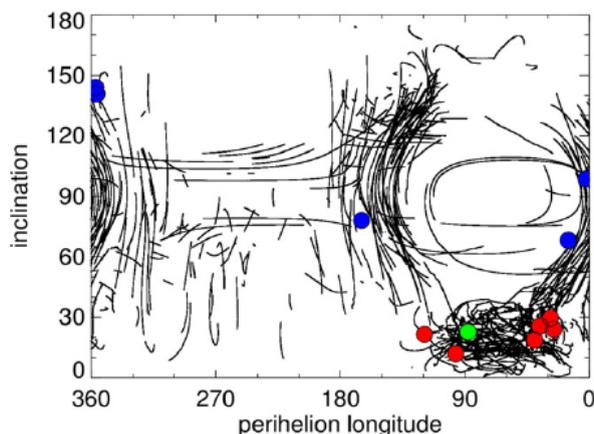


FIGURA 1.9: “Perihelion longitude” e inclinação para partículas com $300 \text{ au} < a < 700 \text{ au}$ e $q < 80 \text{ au}$, desde $t > 3 \text{ Gyr}$. A simulação considera $a_9 = 700 \text{ au}$, $e_9 = 0.6$ e $i_9 = 30^\circ$. A população de inclinação baixa está antialinhada com o Planeta 9, os pontos vermelhos e verde representam os TNOs distantes observados. A população de inclinação alta está em concordância com os pontos azuis, que representam os Centauros altamente inclinados e de semieixo maior grande. Crédito: [Brown and Batygin \(2016\)](#).

Portanto, estes estudos colocam aos Centauros altamente inclinados com $a < 100 \text{ au}$ e com semieixos maiores grandes no mesmo contexto evolutivo.

1.3.3 Obliquidade Solar

O efeito de um planeta adicional residindo numa órbita distante e inclinada sobre os planetas gigantes conhecidos faz com que a dinâmica destes últimos possa ser decomposta numa dinâmica clássica Lagrange-Laplace em relação a seu plano orbital médio e uma lenta precessão desse plano em relação ao definido pelo vetor momento angular total do sistema, isto é, incluindo o planeta adicional ([Gomes et al. \(2017\)](#); vide Apêndice A).

Desta maneira, vários trabalhos focaram em mostrar se a atual inclinação entre o equador do Sol e o plano invariável do sistema solar (referido doravante como iv_4 e considerado como o plano perpendicular ao vetor momento angular resultante dos planetas gigantes conhecidos), de 6° ([Souami and Souchay, 2012](#)), poderia ter sido induzida total ou parcialmente pelo torque gravitacional secular exercido pelo proposto Planeta 9 sobre os planetas gigantes em 4.5 bilhões de anos.

Usando tratamentos formais (teoria de perturbação secular e cálculo do momento angular) e/ou integrações numéricas, [Bailey et al. \(2016\)](#); [Gomes et al. \(2017\)](#); [Lai \(2016\)](#) mostraram que os parâmetros de um planeta adicional que conseguem explicar o desalinhamento spin-órbita em 4.5 Gyr a partir de uma configuração estritamente alinhada, são praticamente incompatíveis

com aqueles¹¹ que explicariam os confinamentos de TNOs distantes (Batygin and Brown, 2016a; Brown and Batygin, 2016).

Como pode se apreciar na figura 1.10, Gomes et al. (2017) encontraram que alguns dos parâmetros do planeta adicional que reproduzem a inclinação entre o equador solar e o plano iv_4 , seriam compatíveis aos de Batygin and Brown (2016a) e Brown and Batygin (2016) se excentricidades maiores do que as encontradas por estes últimos correspondessem a um dado semieixo maior.

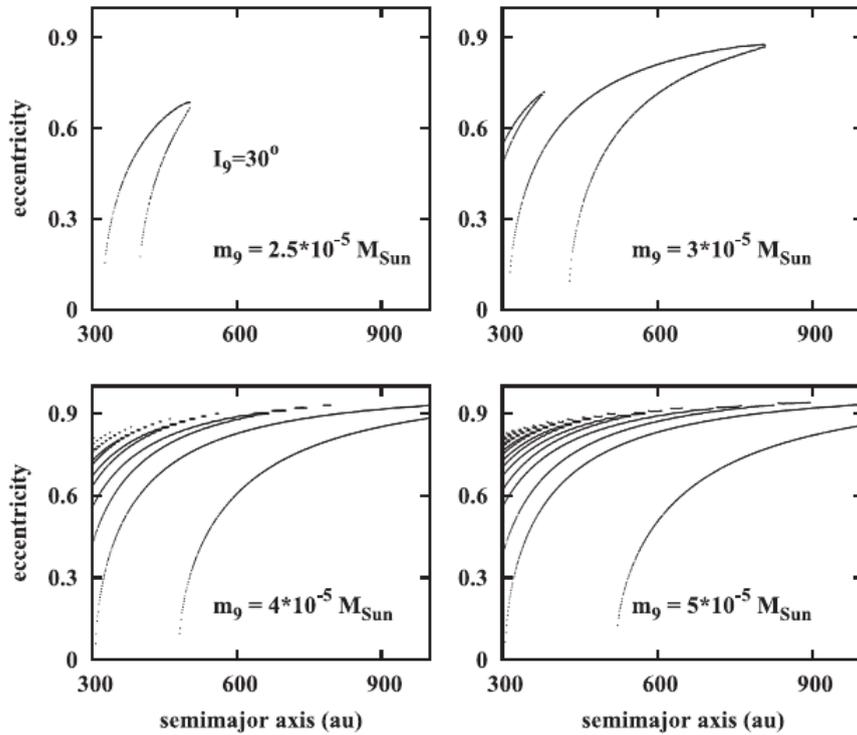


FIGURA 1.10: Semieixo maior versus excentricidade do Planeta 9, para $i_9 = 30^\circ$ e quatro valores de m_9 ; que em 4.5 Gyr reproduzem a obliquidade solar. O Planeta 9 padrão de Batygin and Brown (2016a): $m_9 = 10 M_\oplus = 3 \times 10^{-5} M_\odot$, $i_9 = 30^\circ$, $a_9 = 700$ au e $e_9 = 0.6$, deveria ter uma excentricidade de 0.8 para explicar o valor atual da obliquidade. No caso do melhor Planeta 9 de Brown and Batygin (2016): $m_9 = 10 M_\oplus$, $i_9 = 30^\circ$, $a_9 = 600$ au e $e_9 = 0.5$, a excentricidade deveria ser de 0.71. Crédito: Gomes et al. (2017).

Por outra parte, integrações das equações de movimento para trás no tempo, partindo da obliquidade solar atual e considerando um intervalo de parâmetros para o planeta adicional plausíveis com os previstos por Batygin and Brown (2016a) e Brown and Batygin (2016), mostraram que o desalinhamento spin-órbita primordial pode ter sido muito pequeno (vide figura 1.11) (Bailey et al., 2016); como os sugeridos para uma fração de sistemas de exoplanetas em multi-trânsito, onde as inclinações típicas atingem valores tão baixos quanto $1^\circ - 2^\circ$ (Spalding and Batygin, 2016).

Assim, perturbações devidas unicamente ao Planeta 9 não conseguem reproduzir o desalinhamento spin-órbita a partir de um valor estritamente nulo. Se bem que uma obliquidade

¹¹Estes trabalhos incluem a restrição de que o Planeta 9 reside no mesmo plano do que os TNOs distantes: $\Omega_9 = 113^\circ \pm 13^\circ$ (Batygin and Brown, 2016a), $\Omega_9 = 80^\circ - 120^\circ$ (Brown and Batygin, 2016).

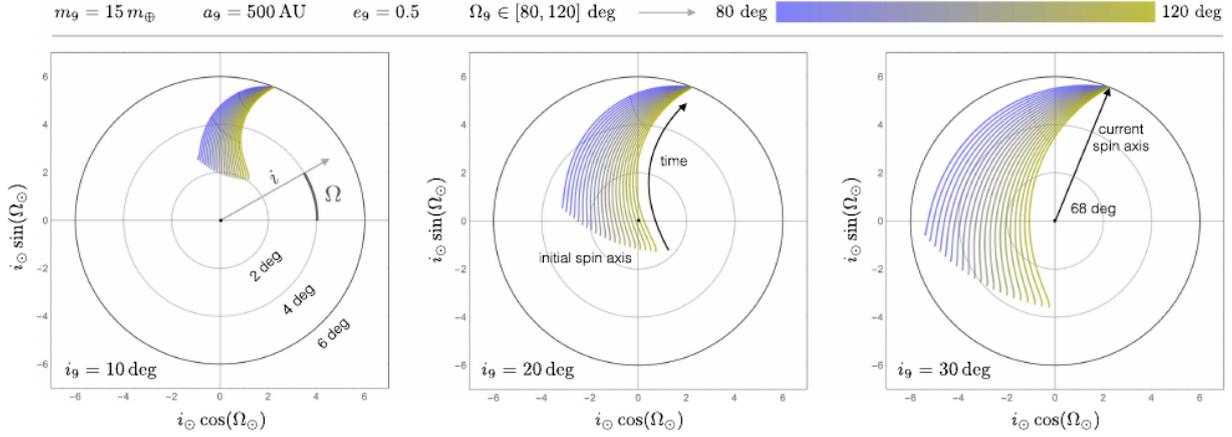


FIGURA 1.11: Evolução do eixo de rotação solar medido em relação ao plano iv_4 momentâneo. Os gráficos são apresentados em coordenadas polares, onde i_{\odot} e Ω_{\odot} representam as variáveis radial e angular, respectivamente. As integrações foram inicializadas na configuração atual ($i_{\odot} = 6^{\circ}$ e $\Omega_{\odot} = 68^{\circ}$) e evoluídas para trás no tempo. Os parâmetros testados para o Planeta 9 são: $m_9 = 15 M_{\oplus}$, $a_9 = 500 \text{ au}$, $e_9 = 0.5$, $i_9 = 10^{\circ}, 20^{\circ}$ e 30° e $80^{\circ} < \Omega_9 < 120^{\circ}$. O painel do médio fornece o menor desalinhamento spin-órbita primordial, consistente com a inclinação rms dos planetas ($i_{\text{rms}} \sim 1^{\circ}$). Crédito: [Bailey et al. \(2016\)](#).

primordial nula possa ser um resultado esperado da hipótese nebular, outros processos físicos podem ter agido para excitá-la, tais como: interações magneto-hidrodinâmicas entre a magnetosfera de uma estrela jovem e seu disco protoestelar ([Lai et al., 2011](#)), assimetria inicial na distribuição de massa do núcleo protoestelar ([Bate et al., 2010](#); [Fielding et al., 2015](#)), um torque gravitacional devido a i) um encontro com uma estrela passando, ii) uma nuvem molecular ([Adams, 2010](#); [Heller, 1993](#)) ou iii) uma companheira estelar primordial ([Batygin, 2012](#); [Lai, 2014](#); [Spalding and Batygin, 2014](#)).

1.4 Origem da Órbita do Planeta 9

Nesta seção se descrevem os cenários propostos para explicar a origem da órbita inferida do Planeta 9 ([Brown and Batygin, 2016](#)): formação *in situ*, espalhamento de sua órbita original e captura i) de um planeta de outro sistema estelar ou ii) de um “freely floating planet” (FFP). Aqui também se apresenta a probabilidade de ejeção após o planeta atingir a órbita proposta.

1.4.1 In Situ

A formação *in situ* do Planeta 9 requereria uma eficiente conglomeração de sólidos à distâncias heliocêntricas grandes, bem como um disco se estendendo a centenas de au. [Kenyon and Bromley \(2016\)](#), assumindo condições favoráveis, mostraram que a formação de um planeta de massa super-Terra seria possível em 250 au em 100 – 200 Myr e em 750 au em 1 – 2 Gyr, mediante coagulação lenta dentro de um anel distante composto de um enxame de “pebbles” (do tamanho de $\sim 1 \text{ cm}$), e uns poucos oligarcas grandes ($\sim 100 \text{ km}$).

Porém, propriedades observadas do sistema solar indicam que ele se formou dentro de um aglomerado contendo $10^3 - 10^4$ estrelas (Adams, 2010; Adams and Laughlin, 2001), tal ambiente pode ter sido altamente disruptivo nas regiões externas do disco protoplanetário do sistema solar, fortemente desfavorecendo a formação do Planeta 9.

1.4.2 Espalhamento

Trabalhos dirigidos a formar os planetas gigantes de gelo sugerem o espalhamento de núcleos protoplanetários da região dos planetas gigantes, devido a encontros próximos entre núcleos ou com os planetas gigantes (Izidoro et al., 2015; Thommes et al., 1999). Desta maneira, o Planeta 9 poderia ter sido originalmente espalhado para fora a partir desta região. Para evitar que repetidos encontros próximos com o planeta que o espalhou termine na ejeção do Planeta 9, a órbita deste último teve que ter sido subsequentemente circularizada, aumentando assim sua distância ao periélio e facilitando sua retenção numa órbita limitada.

O potencial gravitacional do aglomerado de nascimento solar fornece um mecanismo para essa finalidade (Brasser et al., 2006, 2012), não obstante, como mencionado embaixo, a probabilidade de produzir a órbita inferida do Planeta 9 é baixa.

Li and Adams (2016) estimam as probabilidades de reproduzir a órbita do Planeta 9 em diferentes cenários de formação a partir de seções transversais de interação, tanto no campo do aglomerado de nascimento solar como no campo das estrelas na vizinhança do Sol. A probabilidade é quantificada pela profundidade ótica, P , para dispersão, dada por:

$$P \equiv \sigma_{\text{int}}(\nu_b) \Delta t \nu_b \langle n_* \rangle$$

onde σ_{int} é a seção transversal para o evento particular, Δt é o tempo gasto no campo, ν_b é a dispersão da velocidade do campo e $\langle n_* \rangle$ é a média da densidade numérica de estrelas no sistema no tempo e velocidade. Para $P < 1$, a quantidade define a probabilidade de dispersão; para $P > 1$, a probabilidade de sobrevivência frente à dispersão é dada por e^{-P} . No aglomerado de nascimento a dispersão de velocidade $\nu_b = 1 \text{ km s}^{-1}$, a média da densidade numérica de estrelas $\langle n_* \rangle \approx 100 \text{ pc}^{-3}$. O sistema solar provavelmente residiu no aglomerado por um tempo de $\Delta t \approx 100 \text{ Myr}$, um valor típico para o tempo de vida de um aglomerado aberto. No campo das estrelas na vizinhança solar, a dispersão da velocidade é maior, $\nu_b = 40 \text{ km s}^{-1}$, a densidade estelar é muito menor, $\langle n_* \rangle \approx 0.1 \text{ pc}^{-3}$, e o tempo de residencia é $\Delta t \sim 4.5 \text{ Gyr}$. Embora o sistema solar tenha gasto mais tempo no campo das estrelas na vizinhança solar, as interações são mais prováveis de terem acontecido no aglomerado de nascimento solar devido a que a densidade de estrelas e seções transversais são maiores.

Li and Adams (2016)¹² consideraram o espalhamento do planeta na sua órbita proposta a partir de uma órbita menor com a_0 ¹³ = 200, 400, 600 e 800 au e $e_0 = 0$. O sistema solar é

¹²O requerimento de Li and Adams (2016) para reproduzir exitosamente a órbita do Planeta 9 é que no final ela atinga $400 \text{ au} < a_9 < 1500 \text{ au}$, $0.4 < e_9 < 0.9$ e $i_9 < 60^\circ$.

¹³A formação do Planeta 9 seria difícil para os semieixos maiores mais altos, mas as seções transversais de interação são pequenas para valores menores.

assumido a residir no aglomerado de nascimento. Os autores encontraram que as probabilidades são baixas a menos que $a_0 \gtrsim 400$ au, isto é, comparável aos valores finais requeridos de a_9 . Para $a_0 = 600$ au, a probabilidade é só de $\sim 25\%$ e cai à $\sim 3\%$ para $a_0 = 200$ au. Planetas com órbitas iniciais mais internas tem ainda menores seções transversais. [Li and Adams \(2016\)](#) também calcularam seções transversais para produzir a órbita do Planeta 9 a partir de órbitas excêntricas, correspondentes a um cenário onde o planeta teria se formado na região dos planetas gigantes e sido espalhado para fora, com $a_0 = 50 - 200$ au e $q_0 = 5 - 40$ au. Porém, estas seções transversais são um pouco menores do que as correspondentes às órbitas inicialmente circulares.

Por sua parte, [Bromley and Kenyon \(2016\)](#)¹⁴ sugeriram a circularização da órbita do planeta espalhado através de fricção dinâmica com i) um disco de gás de baixa massa, estático e de longa vida, ou ii) um disco de gás massivo, que evolui e de curta vida. Em seus modelos o planeta começa já espalhado com $m_9 = 1 - 50 M_\oplus$, $q_0 = 10$ au, $Q_0 = 1600 - 3600$ au e $i_0 = 0^\circ$ ¹⁵. No primeiro caso, eles encontraram que o planeta amortece numa taxa proporcional à massa do planeta e a densidade superficial do disco; o semieixo maior final depende da borda interna do disco, quanto menor ele for o planeta se deposita mais rapidamente e mais próximo ao Sol. No segundo caso, órbitas inferidas para o Planeta 9 são produzidas quando existe um balanço entre a taxa de amortecimento e a escala de tempo de evolução do disco.

Outra alternativa para levantar o periélio da órbita do planeta espalhado é mediante fricção dinâmica com um disco de planetesimais localizado além das 100 ou 200 au, denominado de *cryobelt*. [Eriksson et al. \(2018\)](#) consideraram inicialmente um planeta de $10 M_\oplus$ numa órbita excêntrica com $q_0 = 30$ au, $a_0 = 400 - 1000$ au e $i_0 = 5^\circ$ submetido à influência de um *cryobelt* de $\sim 60 M_\oplus$. Eles encontraram uma probabilidade de 20 – 30% do planeta atingir uma órbita semelhante¹⁶ à do Planeta 9, ou seja, maiores do que as dadas pela dinâmica do aglomerado. Este modelo foi baseado em simulações de formação de planetesimais por “streaming instability”¹⁷ ([Carrera et al., 2017](#)), onde discos de planetesimais massivos ($60 - 130 M_\oplus$) são produzidos além das 100 au como um resultado robusto das integrações, enquanto que a quantidade de planetesimais interior às 100 au é fortemente dependente do modelo e parâmetros que estão sendo utilizados.

Uma provável desvantagem do modelo de [Eriksson et al. \(2018\)](#) seria sua incompatibilidade com o modelo de disco de planetesimais primordial do sistema solar que não se estendeu muito além de 30 au ([Gomes et al., 2004](#)), o que é necessário para evitar que Netuno migre além da sua localização atual. Portanto, algum processo físico adicional seria requerido para criar uma lacuna entre 30 – 100 au no disco primordial.

¹⁴O requerimento de [Bromley and Kenyon \(2016\)](#) para reproduzir exitosamente a órbita do Planeta 9 é que no final ela atinga $a_9 > 300$ au e $0.2 < e_9 < 0.8$.

¹⁵A inclinação baixa é necessária para uma ótima interação com o disco. Mas, provavelmente o amortecimento pelo gás e planetesimais na região dos gigantes de gás, manteve os corpos maiores em órbitas quase coplanares com o disco de gás.

¹⁶O requerimento de [Eriksson et al. \(2018\)](#) é similar ao de [Mustill et al. \(2016\)](#).

¹⁷Mecanismo aerodinâmico para a concentração de sólidos à densidades altas em discos protoplanetários, facilitando o colapso gravitacional em planetesimais.

Eriksson et al. (2018) também mostraram que a alta velocidade de um planeta na passagem do periélio, antes do “detachment”, faz com que o efeito de espalhamento sobre os objetos do Cinturão de Kuiper Clássico seja muito baixo, mantendo sua similaridade com o Cinturão real.

1.4.3 Ejeção

Uma vez que o Planeta 9 atinge sua órbita inferida, ele pode ser removido do sistema solar por estrelas que passam.

Neste cenário, Li and Adams (2016) consideraram o Planeta 9 em sua órbita atual inferida: $a_9 = 400, 600, 800$ e 1000 au e $e_9 = 0.4, 0.6$ e 0.8 , nos campos do aglomerado de estrelas primordial e das estrelas na vizinhança do Sol. As seções transversais para ejeção do Planeta 9 no campo do aglomerado de nascimento são aproximadamente uma ordem de magnitude maior do que as encontradas por eles para espalhar o Planeta 9 a partir de uma órbita mais interna à sua órbita atual (isto sugere que o cenário de espalhamento do Planeta 9 é improvável). As profundidades óticas são da ordem da unidade se o Sol reside dentro de seu aglomerado de nascimento e de $0.002 - 0.02$ devido à passagem de estrelas no campo da vizinhança solar sobre a idade do Sol. As taxas de interação se incrementam com a excentricidade orbital.

Já que a ejeção do planeta constitui uma possibilidade dentro da evolução primordial do Sistema Solar, o mesmo raciocínio pode ser aplicado a outros membros do aglomerado. Isto é, ao invés de se originar dentro do sistema solar o Planeta 9 poderia ter sido capturado quando o Sol ainda residia em seu aglomerado de nascimento.

1.4.4 Captura

Um dos cenários de captura sugere que o Planeta 9 orbitava originalmente em torno de outra estrela e teria sido capturado pelo campo gravitacional do Sol durante um encontro próximo no aglomerado de nascimento. Uma restrição que tal cenário deve satisfazer é que o encontro deve ser mais distante do que ~ 150 au para evitar perturbar o Cinturão de Kuiper Clássico Frio (Mustill et al., 2016), que é provavelmente primordial.

Li and Adams (2016) consideraram a captura do Planeta 9 de um sistema binário¹⁸. Neste cenário o Planeta 9 começa com $a_0 = 50, 100, 150$ e 200 au e $e_0 = 0$, as estrelas hospedeiras com massas $M_* = 1 M_\odot, M_* = 0.3 M_\odot$ (anã M) e com um intervalo amostrando o “initial mass function” (IMF) estelar. As seções transversais de captura são muito menores do que as seções transversais de ejeção dentro do aglomerado de nascimento solar, mas são aproximadamente comparáveis às seções transversais de ejeção na vizinhança solar. Os autores também calcularam seções transversais para captura a partir de órbitas com $e_0 = 0.6$, sendo estas comparáveis a aquelas com $e_0 = 0$. A probabilidade de produzir a órbita do Planeta 9 nesse cenário é baixa,

¹⁸Os autores fazem esta consideração porque uma fração considerável de estrelas são binárias e porque elas produzem efeitos de dispersão significativamente maiores.

$\lesssim 1\%$, onde as maiores seções transversais para captura ocorrem para órbitas amplas do Planeta 9. Portanto, estas duas probabilidades baixas indicam que é improvável que o Planeta 9 se forme numa órbita ampla em outro sistema estelar e seja subsequentemente capturado.

Por sua vez, [Mustill et al. \(2016\)](#)¹⁹ consideraram partículas em torno à outra estrela em configurações consistentes com as sequelas de uma fase de forte dispersão planeta-planeta (órbitas altamente excêntricas, $q_0 = 1, 10$ au, e semieixo maior de várias centenas de au). A probabilidade de captura do Planeta 9 é de $\sim 0.001 - 0.1\%$ ²⁰.

O outro cenário proposto é a captura de um FFP dentro do aglomerado de nascimento solar.

[Li and Adams \(2016\)](#) encontraram que a probabilidade de captura de um FFP numa órbita viável é de 0.084.

Por sua vez, [Parker et al. \(2017\)](#)²¹ encontraram que somente 5 – 10 de 10^4 FFPs são capturados numa órbita consistente com a do Planeta 9. Tendo em conta, adicionalmente, o enriquecimento do sistema solar de radioisótopos de curta vida, a partir da explosão de uma supernova em seu ambiente de nascimento, a probabilidade é quase nula.

1.5 Teorias Alternativas

1.5.1 Viés Observacional

Uma das teorias alternativas que surgiram à proposta do Planeta 9 foi que o agrupamento observado em TNOs extremos em $\omega \approx 0^\circ$ fosse devido a viés observacional. Já que os objetos altamente excêntricos são mais simples de ser detectados próximos a seus periélios (onde eles estão mais próximos e são mais brilhantes), os estudos restringidos ao plano da eclíptica favoreceriam a descoberta daqueles com ω em torno de 0° e 180° . Não obstante, i) não existe um confinamento em torno de $\omega = 180^\circ$ e ii) os estudos que descobriram aqueles objetos foram frequentemente estudos “all-sky” ou “off-ecliptic”. O viés para encontrar objetos em torno de $\omega = 0^\circ$ ou 180° é só significativo para estudos que exploram latitudes eclípticas entre -10° a 10° . Portanto, o agrupamento visto em ω ao redor de 0° não é devido a um viés observacional ([Trujillo and Sheppard, 2014](#)).

Por outro lado, [Shankman et al. \(2017\)](#) usaram a amostra de TNOs com $a > 150$ au e $q > 30$ au de *The Outer Solar System Origins Survey* (OSSOS) juntamente com o simulador de “survey” OSSOS para argumentar que os ângulos orbitais dos objetos são consistentes com a detecção a partir de uma distribuição angular uniforme.

¹⁹O requerimento de [Mustill et al. \(2016\)](#) para reproduzir exitosamente a órbita do Planeta 9 é que no final ela atinga $300 \text{ au} < a_9 < 900 \text{ au}$ e $0.1 < e_9 < 0.8$.

²⁰Considerando também a restrição em i_9 de [Brown and Batygin \(2016\)](#).

²¹O requerimento de [Parker et al. \(2017\)](#) para reproduzir exitosamente a órbita do Planeta 9 é que no final ela atinga $380 \text{ au} < a_9 < 980 \text{ au}$, $150 \text{ au} < q_9 < 350 \text{ au}$, $0.34 < e_9 < 0.72$ e $i_9 < 30^\circ - 60^\circ$.

Recentemente, [Brown and Batygin \(2019\)](#) desenvolveram um método para quantificar os vieses observacionais tanto na longitude do periélio quanto no polo orbital, calculando que a probabilidade de que os 14 TNOs conhecidos com $a > 230$ au e $q > 30$ au estejam confinados devido a uma combinação de vieses observacionais e chance aleatória é somente de 0.2%. [Brown and Batygin \(2019\)](#) mostraram que, devido à região limitada de estudos OSSOS, nenhuma conclusão poderia se extrair sobre o confinamento na longitude do periélio, pois mesmo o agrupamento sendo tão forte quanto o observado o “survey” OSSOS seria estatisticamente incapaz de detectá-lo.

1.5.2 Autogravidade

[Madigan and McCourt \(2016\)](#) mostraram que as forças gravitacionais entre corpos em órbitas altamente excêntricas que compõem um disco fino axisimétrico, conduzem à um aumento exponencial das inclinações orbitais e ao agrupamento no argumento do periélio, com as longitudes do nodo ascendente distribuídas uniformemente, reconfigurando o disco numa estrutura cônica. Esse cenário é referido como “inclination instability” e explicaria o confinamento em ω para os corpos menores, suas inclinações altas ($i \sim 5^\circ - 30^\circ$), assim como a população destacada. No entanto, não reproduz o confinamento observado nas *longitudes* do periélio assim como os vetores de momento angular. Para esse cenário funcionar na escala de tempo apropriada é necessária uma massa de $\sim 1 - 10 M_\oplus$ entre ~ 50 e 10^4 au, isto é, pelo menos uma ordem de magnitude maior do que a massa atual estimada no Cinturão de Kuiper entre $a \sim 30 - 50$ au. O modelo dos autores não considera as perturbações dos planetas gigantes nem o campo de maré galáctica.

Simulações do *Modelo de Nice* considerando um disco planetesimal auto-gravitante²² conduzem naturalmente a um disco axisimétrico de planetesimais excêntricos durante os estágios iniciais da instabilidade dinâmica. Em comparação ao modelo de [Madigan and McCourt \(2016\)](#), as interações tanto seculares quanto de curto-período entre as partículas e os planetas gigantes são tidas em conta, mas a “inclination instability” não se manifesta nesse cenário²³ ([Fan and Batygin, 2017](#)), sugerindo que é improvável que o confinamento de TNOs distantes tenha uma origem auto-gravitacional.

1.5.3 Buraco Negro Primordial

Outra hipótese proposta recentemente sugere um buraco negro primordial (PBH, na sigla em inglês) capturado pelo sistema solar que, ao ter massa similar ao do Planeta 9, poderia explicar os confinamentos orbitais de TNOs distantes assim como as anomalias gravitacionais recentemente

²²Em integrações convencionais do Modelo de Nice, a auto-gravidade do disco planetesimal é frequentemente negligenciada.

²³Os planetas tinham inicialmente $i = 0^\circ$, $e \leq 0.05$ e estavam contidos dentro das 13 au em configurações multirressonante, com razões de períodos J:S, S:U e U:N de 2:1, 4:3 e 4:3; como sugeridos por interações disco-planeta em simulações hidrodinâmicas. O disco planetesimal, de $30 M_\oplus$, consistiu de 1000 partículas de igual massa em órbitas quase circulares e coplanares entre 14 au – 30 au.

observadas pelo *Optical Gravitational Lensing Experiment* (OGLE) (Scholtz and Unwin, 2019). A diferença dos buracos negros que se formam pelo colapso de estrelas de alta massa, se acredita que os PBHs se originaram a partir de sobre densidades no universo primitivo, pouco após o Big Bang, e como resultado seriam muito mais ligeiros. OGLE é um projeto que tem como objetivo principal a busca de matéria escura com fenômenos de microlente e tem detectado 6 eventos que correspondem à lente por objetos de massa $\sim 0.5 M_{\oplus} - 20 M_{\oplus}$, que poderiam ser interpretados como uma população de FFPs ou PBHs. Os autores mostraram que, embora baixa, a probabilidade de captura de um PBH pelo sistema solar é aproximadamente comparável à captura de um FFP no campo da vizinhança do Sol²⁴. Enquanto que as estratégias principais de busca para um planeta é empregar estudos ópticos e infravermelho/de microondas, a detecção de um PBH consistiria em procurar as sinais emitidas pelo microhalo de matéria escura que o rodeia, já que as aniquilações de partículas de matéria escura emitem raios X, raios gamma e outros raios cósmicos de alta energia. Conduzir essas observações pode ser uma forma de testar essa hipótese.

1.6 Objetivos do Nosso Trabalho

Como mencionado anteriormente, Brown and Batygin (2016) apresentaram tabelas (vide figura 1.3) com as probabilidades de que uma dada combinação de semieixo maior e excentricidade do Planeta 9 induzam um confinamento orbital favorável de TNOs distantes. Um dos critérios dos autores para escolher a melhor órbita para o Planeta 9 foi descartar aquelas que aparentemente produzem demasiados TNOs com distâncias ao periélio altas e semieixos maiores baixos. Por sua vez, Gomes et al. (2017) encontraram parâmetros compatíveis com os propostos por Brown and Batygin (2016), embora com excentricidades maiores correspondendo a um dado semieixo maior do planeta.

1. Assim, o primeiro objetivo de nosso trabalho é restringir os parâmetros orbitais do nono planeta sem ignorar os casos de planetas com distâncias ao periélio baixas, que foram negligenciados em Brown and Batygin (2016), já que estes aparentemente produziriam um excesso de TNOs com distâncias ao periélio altas para semieixos maiores relativamente pequenos. Nós particularmente analisamos a influência de planetas com q_9 baixos sobre o Cinturão de Kuiper e na relação entre objetos espalhados e destacados.
2. O segundo objetivo de nosso trabalho é testar outras grades, considerando dessa vez órbitas amplas do Planeta 9 ($a_9 > 1500$ au), submetidas à força de maré galáctica. Devido a que os efeitos de tais planetas seriam menores sobre os TNOs distantes do que as grades anteriores, aqui se tem em conta que as distâncias ao periélio sejam baixas perto dos 4.5 Gyr de tempo de integração.

²⁴O campo do aglomerado de nascimento pode ter um efeito altamente disruptivo já que o planeta capturado provavelmente seria despojado por interações com estrelas próximas. Enquanto que, na vizinhança solar a densidade de FFPs é menor, mas o tempo disponível para a captura é muito maior e a probabilidade de sobrevivência após a captura é a unidade.

A tese está organizada da seguinte maneira. No Capítulo §2, se aborda a teoria da dinâmica de TNOs distantes perturbados pelo Planeta 9. No Capítulo §3, descrevemos a metodologia usada para testar a influência dos planetas de nossas grades nestes objetos. Nossos resultados são apresentados no Capítulo §4. Finalmente, no Capítulo §5 se apresentam as conclusões.

Capítulo 2

Dinâmica de TNOs Distantes Perturbados pelo Planeta 9: Teoria

Neste Capítulo se caracterizam os processos dinâmicos que descrevem as anomalias observadas em TNOs de longo período, devidas à perturbação do Planeta 9. Como veremos, uma dinâmica puramente secular induzida pelo planeta não consegue explicar a estabilidade dos TNOs distantes, senão que a sobrevivência destes objetos a longo prazo é permitida pela dinâmica secular dentro de RMMs com o perturbador. Por outro lado, o começo de oscilações na inclinação a grande escala de corpos de longo período se dá através da captura de objetos de inclinação baixa em uma ressonância secular de ordem alta. Este Capítulo está baseado principalmente nas referências: [Batygin et al. \(2019\)](#); [Batygin and Morbidelli \(2017\)](#).

2.1 Anomalias em TNOs de Longo Período

Órbitas submetidas a um potencial puramente Kepleriano descrevem elipses perfeitas. Se consideramos as perturbações gravitacionais dos planetas gigantes, os confinamentos apsidais e de planos orbitais (o que requer um alinhamento simultâneo das longitudes de nodo ascendente e das inclinações) observados em TNOs de longo período estariam sujeitos à dispersão, devido à precessão diferencial do periélio e à regressão diferencial do nodo ascendente dos objetos.

A média do potencial gravitacional dos planetas gigantes sobre a trajetória Kepleriana de um TNO é dada por

$$\bar{V} = -\frac{1}{8} \frac{GM_{\odot}}{a} \frac{3 \cos^2 i - 1}{(1 - e^2)^{3/2}} \sum_{j=5}^8 \frac{m_j a_j^2}{M_{\odot} a^2} \quad (2.1)$$

onde as quantidades pertencentes à Júpiter, Saturno, Urano e Netuno são marcadas com os índices 5–8 e as variáveis não marcadas correspondem ao TNO ([Gallardo et al., 2012](#); [Mardling, 2010](#)). Aplicando este potencial às equações planetárias de Lagrange, as taxas de precessão do

periélio e de regressão nodal são dadas por (Murray and Dermott, 1999):

$$\frac{d\varpi}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{GM_\odot a}} \frac{\partial \bar{V}}{\partial e} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{GM_\odot}{a^3}} \frac{1}{(1-e^2)^2} \sum_{j=5}^8 \frac{m_j a_j^2}{M_\odot a^2} \quad (2.2a)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{-1}{\sqrt{GM_\odot a(1-e^2)} \sin i} \frac{\partial \bar{V}}{\partial i} = -\frac{3}{4} \sqrt{\frac{GM_\odot}{a^3}} \frac{\cos i}{(1-e^2)^2} \sum_{j=5}^8 \frac{m_j a_j^2}{M_\odot a^2} \quad (2.2b)$$

onde na equação 2.2a se assumiu que a inclinação é o suficientemente pequena para aproximar $\tan(i) \approx 0$ e $\cos(i) \approx 1$. A coleção de objetos atualmente confinados seriam distribuídos uniformemente em ϖ em uma escala de tempo da ordem de algumas centenas de milhões de anos. A regressão diferencial do nodo opera em uma escala de tempo comparável à precessão do periélio. Assim, o campo gravitacional quadrupolar associado com os planetas gigantes conhecidos aleatorizaria as orientações das órbitas dos objetos distantes em uma escala de tempo curta comparada à idade do sistema solar. É preciso, portanto, um mecanismo gravitacional para manter o quase-alinhamento das órbitas no espaço físico de TNOs de longo período.

Um perturbador externo é também requerido para gerar as órbitas distantes observadas de inclinação alta, já que estas não são uma saída esperada da evolução post-nebular do sistema solar. Inclusive a órbita de 2015 BP₅₁₉ tem uma probabilidade insignificante de ser produzida auto-consistentemente através da dispersão de Netuno (Becker et al., 2018).

Vários estudos tem demonstrado que estas anomalias, assim como o “detachment” do periélio de órbitas de longo período, podem ser explicadas simultaneamente por um planeta externo de várias vezes a massa da Terra (Batygin et al., 2019; Batygin and Brown, 2016a; Batygin and Morbidelli, 2017; Becker et al., 2017; Brown and Batygin, 2016; Cáceres and Gomes, 2018; Hadden et al., 2018; Khain et al., 2018; Li et al., 2018; Millholland and Laughlin, 2017).

Nas seguintes seções se apresentam descrições analíticas dos mecanismos dinâmicos mediante os quais o Planeta 9 esculpe o Cinturão de Kuiper distante, dentro do marco da teoria de perturbação secular.

2.2 Forçamento Secular

Na teoria de perturbação secular, a média do movimento Kepleriano de todos os objetos no sistema é calculada, deixando o intercambio de momento angular (mas não de energia) a longo prazo entre os corpos constituintes como o único processo fisicamente ativo. Em outras palavras, ao invés de calcular a evolução das partículas testes sob a influência de massas pontuais como no tratamento direto do problema gravitacional de N corpos, aqui se calcula o comportamento a longo prazo de órbitas testes, submetidas às perturbações de fios massivos que traçam as trajetórias planetárias.

A expansão no nível octupolar do potencial gravitacional da órbita média do Planeta 9 em termos dos elementos Keplerianos tem a forma (Mardling, 2010):

$$\begin{aligned}
 \bar{V}_9 = & -\frac{1}{16} \frac{GM_\odot}{a_9} \left(\frac{a}{a_9}\right)^2 \frac{1}{(\sqrt{1-e_9^2})^3} \left[\underbrace{\left(1 + \frac{3}{2}e^2\right)(3\cos^2 i - 1)(3\cos^2 i_9 - 1)}_{\text{Precessão}} \right. \\
 & + \underbrace{15e^2 \sin^2 i \cos(2\omega)}_{\text{Efeito Lidov-Kozai}} + \underbrace{3(\sin(2i) \sin(2i_9) \cos(\Delta\Omega) + \sin^2 i \sin^2 i_9 \cos(2\Delta\Omega))}_{\text{Interações dos Planos}} \\
 & - \frac{15}{8} \frac{ee_9}{1-e_9^2} \left(\frac{a}{a_9}\right) \left[\underbrace{(1 + \cos i)(15\cos^2 i - 10\cos i - 1) \cos(\Delta\varpi)}_{\text{Acoplamento na Excentricidade}} \right. \\
 & \left. \left. + \underbrace{(1 - \cos i)(15\cos^2 i - 10\cos i - 1) \cos(\varpi + \varpi_9 - 2\Omega)}_{\text{Dinâmica de Alta Inclinação}} \right] \right] \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

Cada harmônico na expressão 2.3 governa um efeito dinâmico particular que, se for dominante, implica uma arquitetura orbital específica no Cinturão de Kuiper distante. Os significados físicos de cada um dos termos são os seguintes:

- **Precessão:** Esta componente do potencial governa a precessão apsidal e regressão nodal de um TNO forçado pelo Planeta 9. Por si só, este termo aceleraria a orientação física aleatória das órbitas já fornecida pelos campos quadrupolares dos planetas gigantes conhecidos.
- **Efeito Lidov-Kozai:** Este termo governa o mecanismo Lidov-Kozai, facilitando um intercambio periódico entre a excentricidade e inclinação de uma partícula teste enquanto conserva a componente \hat{z} do vetor momento angular orbital $h_z = \sqrt{1-e^2} \cos i$ (Kozai, 1962; Lidov, 1962). Se for dominante, este termo pode conduzir ao agrupamento do argumento do periélio, tal que ω livre em torno de 90° ou 270° para órbitas bem separadas, ou alternativamente em torno a 0° e 180° para órbitas próximas ao perturbador; no entanto, tais distribuições orbitais não seriam compatíveis com os dados observacionais. Por outro lado, a ressonância Lidov-Kozai é facilmente destruída por fontes externas de precessão do periélio, como as devidas aos planetas gigantes.
- **Interações dos Planos:** Este termo contém a diferença das longitudes de nodos ascendentes do TNO e do Planeta 9, $\Delta\Omega = \Omega - \Omega_9$, como argumento e governa as interações entre seus planos orbitais. Na região do espaço de parâmetros onde o forçamento devido ao Planeta 9 é dominante (em oposição à regressão nodal forçada pelos planetas conhecidos), os vetores momento angular dos TNOs precessam em torno da normal à órbita do Planeta 9. Para TNOs com períodos orbitais menores, os vetores de momento angular precessarão em torno ao momento angular total dos planetas gigantes. Isto sugere que perturbar os planos de TNOs distantes requer que a órbita do Planeta 9 esteja apreciavelmente inclinada em relação à eclíptica.

- **Acoplamento na Excentricidade:** Esta componente contém a diferença de longitudes do periélio, $\Delta\varpi = \varpi - \varpi_9$, e descreve o acoplamento entre os vetores excentricidade (Runge-Lenz) do Planeta 9 e TNOs. Conseqüentemente, oscilações na excentricidade de TNOs e orientação orbital em relação à linha apsidal do Planeta 9 são regulados por este termo. Diferente dos harmônicos quadrupolares anteriores, este termo é octupolar em natureza e portanto depende explicitamente da excentricidade do Planeta 9. Isto implica que para o Planeta 9 possibilitar qualquer grau de confinamento apsidal mediante a libração limitada de $\Delta\varpi$, sua órbita deve ter excentricidade diferente de zero.
- **Dinâmica de Alta Inclinação:** Este termo é também octupolar em natureza, mas suas conseqüências dinâmicas são consideravelmente mais sutis. Este termo mistura as longitudes do periélio e do nodo, facilitando uma complexa evolução dinâmica que simultaneamente modula os graus de liberdade relacionados à excentricidade e inclinação de TNOs (Batygin and Morbidelli, 2017). Este harmônico conduzirá a dinâmica de alta inclinação e virada da órbita na região Trans-Netuniana.

Tendo descrito o forçamento secular, consideramos a seguir modelos analíticos simplificados baseados em Hamiltonianos integráveis, para examinar qualitativamente a dinâmica anômala do Cinturão de Kuiper distante induzida pelo Planeta 9.

2.3 Confinamento Apsidal

Consideramos um modelo perturbativo caracterizado pelo argumento $\Delta\varpi$. É conveniente restringir a evolução ao plano (exata coplanaridade entre o TNO, Planeta 9 e o restante do sistema solar), assumindo que $\sin(i_9), \sin(i) \rightarrow 0$. A partir da equação 2.3, temos que o único harmônico que permanece na função perturbadora é $\cos(\varpi - \varpi_9)$. Esta simplificação permite obter um modelo integrável para o movimento secular de um TNO perturbado pelos planetas gigantes e o Planeta 9.

Sob estas considerações, o Hamiltoniano de uma partícula teste submetida às perturbações planetárias tem a forma (Batygin and Morbidelli, 2017; Beust, 2016)

$$H = -\frac{1}{4} \frac{GM_\odot}{a} \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}} \sum_{j=5}^8 \frac{m_j a_j^2}{M_\odot a^2} + \dot{\varpi}_9 \sqrt{GM_\odot a} (1 - \sqrt{1-e^2}) - \frac{1}{4\pi^2} \oint \oint \frac{Gm_9}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_9|} \Big|_{i,i_9=0} d\lambda d\lambda_9 \quad (2.4)$$

onde G é a constante gravitacional, M_\odot a massa do Sol, \mathbf{r} o vetor posição e λ a longitude média (um ângulo rápido que varia na escala de tempo orbital). A taxa de precessão da órbita média do Planeta 9 é dada pela equação 2.2a.

O primeiro termo na equação 2.4 governa a precessão lenta da longitude do periélio do TNO devido ao potencial gravitacional de fase média de Júpiter, Saturno, Urano e Netuno. O

segundo termo tem em conta o fato de que o marco de referencia é co-linear com o semieixo maior da órbita do Planeta 9 e está portanto também precessando lentamente numa taxa $\dot{\varpi}_9$. O terceiro termo governa as interações seculares entre o Planeta 9 e o TNO.

Dentro do marco do modelo puramente secular, a atua como um parâmetro do problema, ao invés de uma variável. O único par de variáveis dinâmicas no Hamiltoniano 2.4 é $(e, \Delta\varpi)$, pelo que o sistema é integrável.

A figura 2.1, mostra os contornos do Hamiltoniano 2.4 projetados no plano $e - \Delta\varpi$ para um TNO com $a = 200, 300, 400$ e 500 au, e parâmetros do Planeta 9 de: $a_9 = 500$ au, $e_9 = 0.25$ e $m_9 = 5 M_{\oplus}$. Nos painéis correspondentes a $a \gtrsim 250$ au, o espaço $e - \Delta\varpi$ é caracterizado por dois pontos de equilíbrio (elíptico) estáveis: em $\Delta\varpi = 0^\circ$ e $\Delta\varpi = 180^\circ$. As duas regiões de libração em torno destes pontos fixos estão separados por uma curva sólida que corresponde à uma configuração tangencial das órbitas do TNO e do Planeta 9. Em todos os painéis com $a \gtrsim 250$ au, o ponto de equilíbrio $\Delta\varpi = 180^\circ$ reside numa excentricidade maior do que o correspondente à $\Delta\varpi = 0^\circ$. Para semieixos maiores menores as órbitas ocupam trajetórias seculares que circulam na longitude do periélio e só existe um ponto de equilíbrio ($\Delta\varpi = 0^\circ$).

TNOs de longo período inicializados com distâncias ao periélio próximas a Netuno experimentarão diferente evolução secular dependendo do valor inicial de $\Delta\varpi$ (figura 2.1). Aqueles inicialmente próximos a $\Delta\varpi \sim 0^\circ$ serão conduzidos à curva tangencial de cruzamento de órbita através de precessão apsidal e serão posteriormente removidos do sistema. Aqueles inicializados próximos a $\Delta\varpi \sim 180^\circ$ se depositam em trajetórias seculares que rodeiam esse ponto de equilíbrio e nunca encontram a curva de colisão tangencial; estas órbitas experimentarão oscilações seculares em excentricidade, periodicamente destacando-se de Netuno e subsequentemente aproximando-se a ele. Órbitas de longo período com distâncias ao periélio próximas à Netuno predominantemente popularão a ilha de libração apsidalmente anti-alinhada, aqueles que não estão bloqueados numa oscilação estável serão conduzidos à excentricidades altas, cruzando eventualmente a órbita de Netuno e deixando o sistema.

Note também (figura 2.1) que existe uma ilha de libração apsidal estável em torno de $\Delta\varpi = 0^\circ$ que evita cruzar a curva de configuração tangencial e é assim protegida de encontros próximos, tais órbitas apresentam distâncias ao periélio grandes pelo que seria difícil detectar estes objetos observacionalmente se ocupassem estas ilhas de estabilidade.

Assim, a existência do Planeta 9 explicaria a transição entre populações distribuída aleatoriamente e apsidalmente confinada nos dados observacionais, onde a última configuração surge para objetos com $a \gtrsim 250$ au e apresentam uma distribuição ampla de distâncias ao periélio, naturalmente explicando a população destacada do Cinturão de Kuiper.

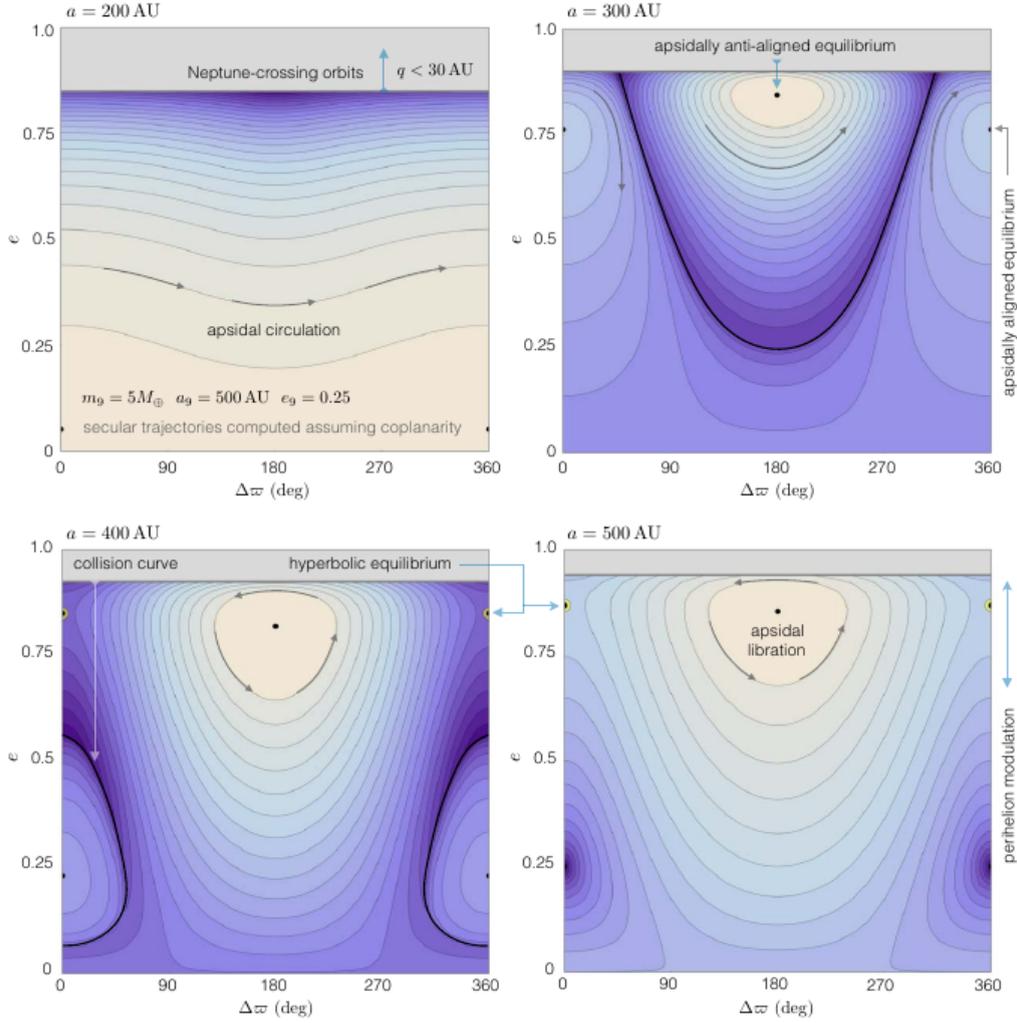


FIGURA 2.1: Dinâmica secular da excentricidade induzida pelo Planeta 9. Curvas de nível do Hamiltoniano 2.4 projetadas no plano $e - \Delta\varpi$, para vários semieixos maiores de TNOs. O Planeta 9 tem os parâmetros: $a_9 = 500$ au, $e_9 = 0.25$ e $m_9 = 5 M_\oplus$. Os contornos de igual H representam aproximações analíticas às variações lentas experimentadas por órbitas de TNOs, isto é, em escalas de tempo muito maiores do que um período orbital. TNOs com $a = 200$ au apresentam uma distribuição de longitudes de periélio aproximadamente uniforme. Para $a \gtrsim 300$ au, existem configurações apsidalmente alinhadas e antialinhadas com o planeta, separadas pela curva de colisão tangencial. Um ponto de equilíbrio hiperbólico adicional emerge em $\Delta\varpi = 0^\circ$ e excentricidade alta para TNOs com $a \gtrsim 400$ au. Crédito: [Batygin et al. \(2019\)](#).

2.4 Confinamento de Planos Orbitais

Aqui abandonamos a simplificação da coplanaridade e introduzimos uma inclinação pequena mas finita à órbita do Planeta 9 em relação a eclíptica. Assumamos que a natureza qualitativa para a dinâmica $e - \Delta\varpi$ não é fortemente afetada por este desenvolvimento e foquemos nossa atenção em caracterizar as mudanças lentas em i e Ω no Cinturão de Kuiper distante.

Para descrever a evolução secular dos planos orbitais de TNOs de longo período é suficiente considerar a componente quadrupolar da função perturbadora 2.3 sob a suposição que

as inclinações permanecem pequenas, ou seja, $\sin(i) \ll 1$. Negligenciando os termos com amplitudes $\propto \sin^2(i)$, se obtém um Hamiltoniano integrável contendo só um harmônico secular, $\Delta\Omega$:

$$\begin{aligned}
H = & -\frac{3GM_\odot}{8} \frac{\cos i}{a} \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}} \sum_{i=5}^8 \frac{m_i a_i^2}{M_\odot a^2} + \dot{\Omega}_9 \sqrt{GM_\odot a} \sqrt{1-e^2} (1-\cos i) \\
& - \frac{1}{4} \frac{Gm_9}{a_9} \left(\frac{a}{a_9}\right)^2 (1-e_9^2)^{-3/2} \left[\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8}e^2\right) (3\cos^2 i_9 - 1)(3\cos^2 i - 1) \right. \\
& \left. + \frac{3}{4} \sin(2i_9) \sin(2i) \cos(\Delta\Omega) \right] \quad (2.5)
\end{aligned}$$

Na expressão 2.5, os primeiro e segundo termos descrevem a regressão da longitude do nodo ascendente do TNO e a rotação lenta do marco de referência (tal que Ω_9 seja sempre zero), respectivamente, e o terceiro termo governa o intercambio de momento angular entre o Planeta 9 e o TNO. Já que o Hamiltoniano 2.5 descreve um sistema com um grau de liberdade, pode-se examinar a evolução secular correspondente projetando as curvas de nível de H no plano $i - \Delta\Omega$.

A figura 2.2 mostra a dinâmica dos planos orbitais de TNOs em diferentes valores de a . O forçamento secular do Planeta 9 conduz à mudança gradual da inclinação de equilíbrio em função do semieixo maior e à aparição de uma ilha de libração $\Delta\Omega$ em torno deste equilíbrio. Fora da ilha, $\Delta\Omega$ circula e as órbitas dos TNOs experimentam modulação considerável na inclinação. Simulações numéricas mostram que o acoplamento não linear entre a excentricidade e a inclinação origina que órbitas que se localizam longe do equilíbrio no plano $i - \Delta\Omega$ desenvolvam distâncias ao periélio baixas sendo ejetados do sistema ou não seriam observáveis devido a excursões a grande escala na excentricidade e inclinação. Consequentemente, órbitas confinadas apsidalmente só são estáveis a longo prazo se residem próximas ao ponto fixo $i - \Delta\Omega$, que coincide aproximadamente com o plano orbital do Planeta 9 para a grandes.

Desta forma, a ilha estável de libração nodal em $a \gtrsim 250$ au explicaria qualitativamente o agrupamento observado de planos orbitais de TNOs de longo período.

Note que as trajetórias apsidalmente antialinhadas (figura 2.1) provém da aparição de um novo ponto de equilíbrio no espaço de fase mediante uma transição marcante em a , sinalizando uma *ressonância secular*. Pelo contrário, nenhum ponto de equilíbrio novo emerge nos painéis da figura 2.2, o confinamento dos planos orbitais emerge suavemente pelo que o ponto fixo $i - \Delta\Omega$ é um *equilíbrio forçado*.

O confinamento apsidal de TNOs requer que o Planeta 9 seja excêntrico mas não necessariamente inclinado, enquanto que o agrupamento de seus planos orbitais ocorreria inclusive se a órbita fosse circular. Independentemente, estes dois processos dinâmicos sinalizam a necessária excentricidade e inclinação do Planeta 9.

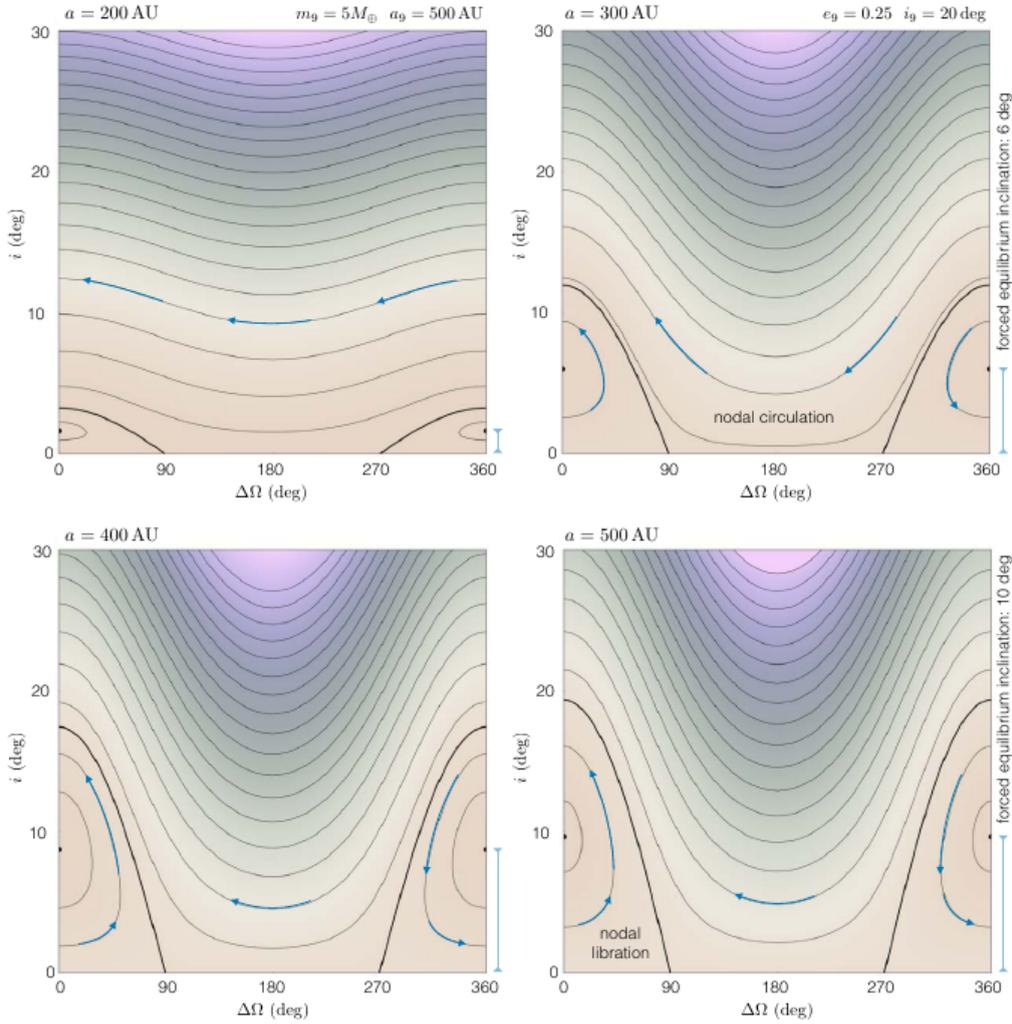


FIGURA 2.2: Dinâmica secular dos planos orbitais induzida pelo Planeta 9. Contornos do Hamiltoniano secular 2.5 para vários semieixos maiores de TNOs, que fornecem uma aproximação analítica às variações lentas da inclinação e longitude do nodo ascendente do TNO facilitado pelo Planeta 9. O Planeta 9 tem os parâmetros: $a_9 = 500$ au, $e_9 = 0.25$ e $m_9 = 5 M_{\oplus}$. Regiões de libração nodal associadas com confinamento dos vetores momento angular se tornam proeminentes com o aumento do semieixo maior do TNO. Note que, diferente ao caso de confinamento apsidal, nenhum novo ponto de equilíbrio surge com o incremento de a . Crédito: [Batygin et al. \(2019\)](#).

2.5 TNOs Altamente Inclinados

Resultados de integrações numéricas para seis partículas com a inicial entre 500–600 au que não permanecem confinadas ao plano orbital do Planeta 9 durante o tempo de integração completo, apresentam uma fase de variação extrema de suas inclinações orbitais (figura 2.3a) durante a segunda metade do tempo de vida do sistema solar; após experimentar uma única oscilação a grande escala eles se reúnem com a população de inclinação baixa apsidalmente antialinhada. Este tipo de excursão orbital é representativa, mas dentro do jogo de simulações alguns objetos experimentaram uma multitude de oscilações sequenciais. Estes objetos que atingem altos valores de i , descrevem uma estrutura com três lóbulos no plano $e - \Delta\varpi$ (ao invés de rodear

um equilíbrio elíptico em $\Delta\varpi = 180^\circ$), com excentricidade máxima à $\sim \pm 70^\circ$ longe do perfeito antialinhamento apsidal com o Planeta 9 (figura 2.3b). As excentricidades máximas (distâncias ao periélio mínimas) são atingidas quando as partículas residem em $i \approx 90^\circ$.

Portanto, segundo o modelo do Planeta 9, os objetos altamente inclinados são mais fáceis de serem observados quando se encontram perpendiculares à eclíptica e estariam ligeiramente ortogonais em orientação apsidal às órbitas distantes antialinhadas. Isto explicaria o estado dinâmico observado em Centauros de semieixo maior grande assim como do objeto 2015 BP₅₁₉, constituindo uma outra linha de evidência à existência do planeta. Durante a fase de excentricidade baixa, estes objetos se localizariam em torno de $\Delta\varpi = 180^\circ$.

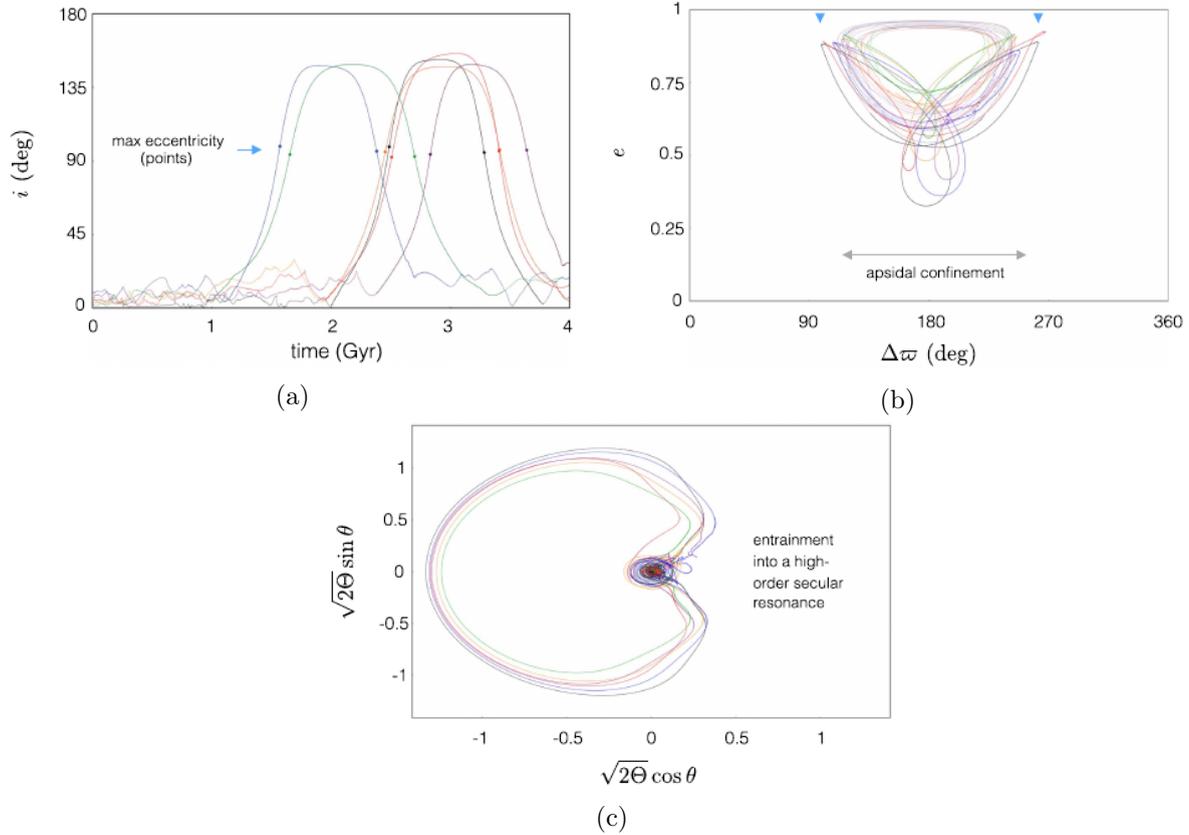


FIGURA 2.3: Evolução dinâmica da população altamente inclinada. A) Inclinação como função do tempo para seis partículas que exibem excursões orbitais de grande amplitude e conseguem órbitas retrógradas temporalmente. B) A projeção $e - \Delta\varpi$ apresenta três lóbulos, onde as excentricidades máximas estão localizadas aproximadamente 70° longe de $\Delta\varpi = 180^\circ$ e ocorrem quando $i \approx 90^\circ$. C) Evolução das coordenadas cartesianas relacionadas à (θ, Θ) . Em contraste com a dinâmica Lidov-Kozai, a evolução da população de alto i é caracterizada pela simultânea libração dos ângulos críticos θ e $\Delta\varpi$, e constitui uma forma extremamente forte de acoplamento secular. Crédito: [Batygin and Morbidelli \(2017\)](#).

Devido a que as partículas atingem suas excentricidades máximas próximas à $i \approx 90^\circ$ e a que excursões orbitais observadas nas simulações mostram que a componente \hat{z} do vetor momento angular específico $h = \sqrt{1 - e^2} \cos i$ apresenta variações de amplitude grande, ao invés de se conservar, a ressonância Lidov-Kozai não é responsável para a evolução dinâmica desta população.

A libração de ω só não pode facilitar a dinâmica observada, e $\Delta\varpi$ só não pode forçar oscilações na inclinação, o que significa que a ressonância secular em jogo que descreva a dinâmica de alta inclinação induzida pelo Planeta 9 deve envolver a modulação acoplada dos dois graus de liberdade relacionados à excentricidade e inclinação.

Batygin and Morbidelli (2017) propuseram que as variações orbitais a grande escala são conduzidas pela libração do ângulo secular θ :

$$\begin{aligned}\theta &= 2\omega - \Delta\varpi = \varpi + \varpi_9 - 2\Omega \\ \Theta &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{2}(1 - \cos i)\end{aligned}\tag{2.6}$$

onde Θ é a ação conjugada à θ , que surge ao adotar $\Delta\varpi$ como o ângulo secular para o outro grau de liberdade. O ângulo θ surge na ordem de expansão octupolar quando o Hamiltoniano é expressado como uma série em razões de semieixo maior (Mardling, 2010). O significado físico de θ é a diferença entre as longitudes do periélio do Planeta 9 e do TNO, para o qual a longitude do periélio retrógrada é definida como $\varpi' = \Omega - \omega = 2\Omega - \varpi$.

A figura 2.3c mostra a evolução das coordenadas cartesianas canônicas relacionadas às variáveis ângulo-ação (θ, Θ). Durante a fase de alta inclinação da evolução orbital, θ executa uma oscilação limitada e a trajetória secular traça a forma de uma separatriz ressonante típica. Portanto, a dinâmica mostrada na figura 2.3 é caracterizada pela libração simultânea de $\Delta\varpi$ e o ângulo θ (que conjuntamente leva à libração da longitude do nodo ascendente), representando um forte acoplamento secular.

Então, a evolução secular em (θ, Θ) está intimamente acoplada ao movimento em $(e, \Delta\varpi)$, significando que durante excursão a grande escala da inclinação do TNO, a excentricidade muda em concerto. Porém, para poder examinar as curvas de nível do Hamiltoniano, congelamos a evolução em $(e, \Delta\varpi)$. Com estas aproximações, tomando $\alpha = a/a_9 = 1$, $\Delta\varpi = 180^\circ$ e $e = 0.5$, se calcula a função

$$\begin{aligned}H &= -\frac{1}{4} \frac{GM_\odot}{a} \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}} \sum_{j=5}^8 \frac{m_j a_j^2}{M_\odot a^2} + \dot{\varpi}_9 \sqrt{GM_\odot a} (1 - \sqrt{1-e^2} \cos i) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi^2} \oint \oint \frac{Gm_9}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_9|} \Big|_{e=0.5, \Delta\varpi=\pi} d\lambda d\lambda_9\end{aligned}\tag{2.7}$$

em forma fechada no plano (θ, Θ) .

Os contornos do Hamiltoniano 2.7 são mostrados na figura 2.4. Pode-se apreciar que θ circula para valores baixos de Θ e que existe uma ilha prominente de libração em θ para valores altos da ação. A ressonância (θ, Θ) não tem nenhum papel na evolução dinâmica sempre que a excentricidade seja alta e a inclinação baixa (equação 2.6, valores baixos de Θ). Assim, o regime de Θ baixo de movimento secular é o único onde os modelos integráveis esboçados nas duas seções prévias se aplicam. Pelo contrário, se Θ atinge um valor suficientemente alto por algum processo dinâmico, o sistema pode fazer a transição à um regime onde θ começa a

experimentalmente oscilações limitadas, resultando em variações acopladas em Θ . Estas excursões em Θ correspondem a grandes mudanças na inclinação orbital.

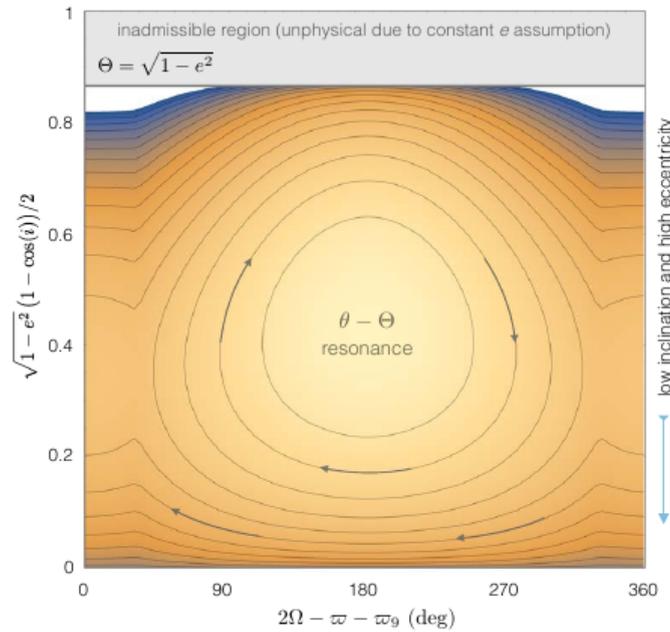


FIGURA 2.4: Dinâmica de alta inclinação facilitada pelo Planeta 9. Este diagrama secular só fornece uma reprodução muito rude do comportamento real de TNOs de alta inclinação. Pode-se notar duas famílias de trajetórias: em valores baixos da ação Θ o ângulo θ circula, implicando que a ressonância joga um papel pequeno na evolução dinâmica; em valores altos de Θ , porém, a trajetória secular do TNO é caracterizada pela libração de θ , conduzindo à variações de grande escala da inclinação orbital. Crédito: [Batygin et al. \(2019\)](#).

Apesar de ser rudimentária, esta interpretação da dinâmica é consistente com resultados numéricos, onde a virada da órbita de objetos distantes facilitada pelo Planeta 9 é quase sempre desencadeada no mínimo do ciclo de excentricidade do TNO (um máximo em Θ).

2.6 Ressonâncias de Movimento Médio

A figura 2.1 ao ser comparada com a figura 4 de [Batygin and Brown \(2016a\)](#) confirma que a teoria puramente secular fornece um bom ajuste às simulações numéricas no mesmo regime dinâmico. Porém, considerando uma configuração planar é possível demonstrar que, sob a suposição de movimento Kepleriano não correlacionado, todos os objetos antialinhados com o Planeta 9 experimentarão encontros próximos em escalas de tempo muito menores à idade do sistema solar. Já que integrações numéricas publicadas mostram a existência de partículas estáveis residindo dentro da ilha de libração anti-alinhada ([Batygin and Brown, 2016a](#); [Brown and Batygin, 2016](#)), algum mecanismo adicional à teoria secular deve estar em jogo para garantir a estabilidade das órbitas distantes.

As três seções anteriores foram tratadas dentro do marco da teoria de perturbação de órbita média. Esta aproximação não é válida quando os períodos orbitais do Planeta 9 e do TNO são comensuráveis. Neste caso, os harmônicos do Hamiltoniano que envolvem as longitudes

médias do Planeta 9 e do TNO podem experimentar oscilações limitadas, ocasionando que as perturbações devidas ao Planeta 9 sejam ressonantes em natureza (ao invés de secular) e facilitando um intercambio coerente de energia orbital e momento angular.

Assumindo uma configuração física planar, experimentos numéricos mostraram que as órbitas que são estáveis estão em RMM com o perturbador externo, sendo protegidas de encontros próximos através do mecanismo de proteção de fase (Batygin and Morbidelli, 2017). Inclusive neste marco idealizado de tratamento da dinâmica induzida pelo Planeta 9, o confinamento notável na longitude de periélio além de um dado semieixo maior crítico não é estritamente perfeito, senão que está contaminado por objetos que apresentam circulação apsidal. Isto significa que objetos que não fazem parte da população antialinhada são uma consequência esperada do modelo.

As simulações de Batygin and Brown (2016a) mostraram que TNOs de longo período podem ser capturados temporalmente em RMMs com o Planeta 9 durante $\sim 10 - 100$ Myr (vide figura 2.5). Millholland and Laughlin (2017) notaram que configurações ressonantes geralmente tem tempos de vida dinâmico consideravelmente mais curtos do que a idade do sistema solar, pelo que inclusive TNOs estáveis a longo prazo não permaneceriam limitados a uma única comensurabilidade.

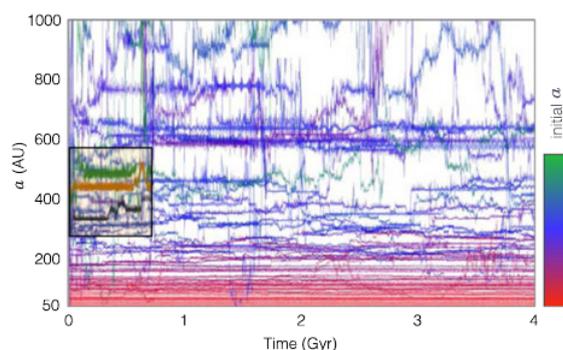


FIGURA 2.5: Evolução do semieixo maior de partículas submetidas à influência do Planeta 9. Aquelas com $a \gtrsim 250$ au exploram uma complexa rede de RMM enquanto mantém sua estabilidade, pulam sobre uma faixa extensa em a ocupando temporalmente distintos valores. Este comportamento é característico da *instabilidade de Lagrange*, onde RMMs marginalmente sobrepostas permitem que as órbitas se difundam através do espaço de fase. Crédito: Batygin and Brown (2016a).

Assim, embora possa ser esperado que uma fração de TNOs observados estejam em RMM com o Planeta 9 (Malhotra et al., 2016), seria provavelmente impossível identificar um TNO ressonante de um não ressonante ou determinar o valor do ângulo ressonante específico. Portanto, o semieixo maior do perturbador externo não pode ser obtido a partir da distribuição de períodos orbitais de TNOs observados (Bailey et al., 2018).

Batygin and Morbidelli (2017) examinaram a dinâmica de objetos simulados confinados apsidalmente e indicaram que os multipletes ressonantes responsáveis por conduzir a evolução

típica de um TNO tem a forma

$$\varphi_{\text{ress}} = p\lambda_9 - q\lambda - (p - q)\varpi_9 \quad (2.8)$$

onde p e q são inteiros. Ao conter só a longitude do periélio do Planeta 9 e não do TNO mesmo, a libração de φ_{ress} conduz à oscilação do semieixo maior da partícula mas não afeta a evolução de sua excentricidade (porque $de/dt \propto \partial \cos \varphi / \partial \varpi = 0$). Estas ressonâncias são às vezes referidas como ressonâncias de “corrotação” e já implica uma certa desconexão entre os graus de liberdade relacionados ao semieixo maior e excentricidade da partícula.

Partículas estáveis a longo prazo cuja dinâmica ressonante é conduzida pelo ângulo $\psi_{\text{ress}} = p\lambda_9 - q\lambda - (p - q)\varpi$, exibem circulação em suas longitude do periélio (Beust, 2016; Malhotra et al., 2016).

Realizando o procedimento de órbita média sob condição ressonante, Batygin and Morbidelli (2017) demonstraram que a dinâmica secular acoplada à RMMs com o Planeta 9 tem uma topologia de espaço de fase muito similar aos correspondentes ao tratamento puramente secular encontrados utilizando o Hamiltoniano 2.4. A figura 2.6 ilustra a semelhança entre dinâmica co-orbital puramente secular e a dinâmica secular $e - \Delta\varpi$ acoplada à RMM 1:1 com o Planeta 9.

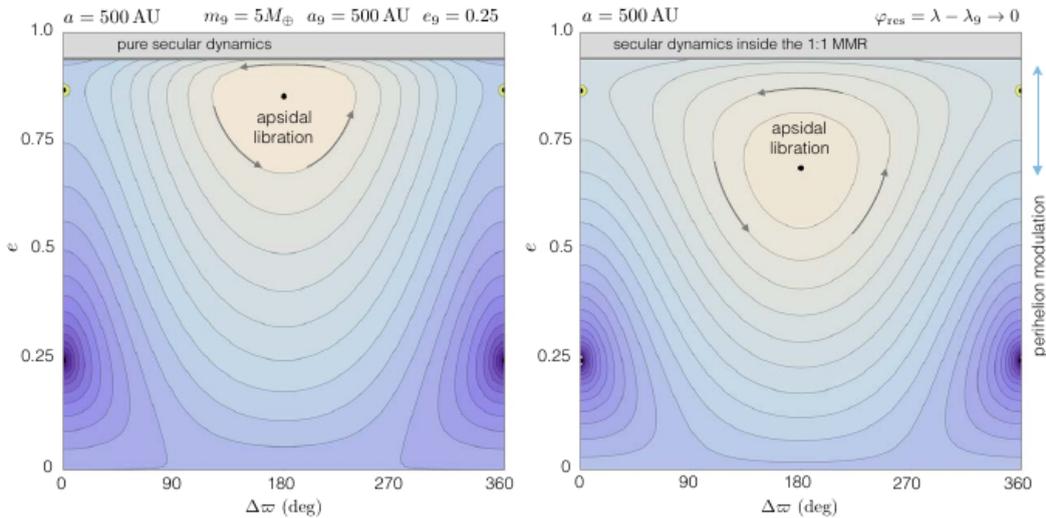


FIGURA 2.6: Comparação entre dinâmica puramente secular e secular-ressonante induzida pelo Planeta 9. A figura da esquerda corresponde ao Hamiltoniano 2.4. A figura da direita corresponde à um TNO em RMM 1:1 com o Planeta 9, onde o procedimento de órbita média foi realizado sob a condição $\varphi_{\text{ress}} = \lambda - \lambda_9 \rightarrow 0$. Crédito: Batygin et al. (2019).

Deste modo, a dinâmica ressonante é a responsável por garantir a estabilidade a longo prazo de TNOs distantes, mas o agrupamento de órbitas no espaço físico assim como a excitação à inclinações extremas de TNOs de longo período são grandemente um efeito secular (Batygin and Morbidelli, 2017). Isto explica por que o tratamento da dinâmica esboçada na seção 2.3 fornece uma boa aproximação aos resultados de experimentos numéricos.

2.7 Comparação com as Observações

Nesta seção se apresentam os resultados de integrações numéricas que não resolvem o movimento Kepleriano dos planetas gigantes nem suas inclinações em relação ao Planeta 9. Portanto, se analisam o confinamento na longitude do periélio e o comportamento da população altamente inclinada de longo período, mas não se considera o confinamento das longitudes de nodo ascendente em baixo i .

A amostra observacional considerada por [Batygin and Morbidelli \(2017\)](#) é composta por objetos com $a > 250$ au e $q > 30$ au, dos quais dez pertencem a um confinamento principal na longitude do periélio e são destacados com cor roxo na figura 2.7a, dois estão confinados diametralmente opostos ao agrupamento anterior e são destacados com verde e, um “outlier” que não corresponde a nenhuma das populações anteriores é mostrado como ponto cinza.

A figura 2.7 mostra as partículas simuladas com tempos de vida dinâmico maior à 4 Gyr. Se considera que são observáveis aquelas que tem $q \leq 100$ au e $i \leq 40^\circ$, estas estão representadas com a cor azul; as que não satisfazem o critério de observabilidade em q ou i são mostrados em cinza, e em vermelho aquelas que experimentam grandes oscilações na inclinação quando são observáveis. As partículas metaestáveis são também mostradas na figura 2.7a com cor laranja.

A figura 2.7a mostra a longitude do periélio relativa como função do semieixo maior. Pode-se observar que órbitas apsidalmente antialinhadas estão contaminadas por aquelas que circulam em $\Delta\varpi$. Como foi mencionado anteriormente, as trajetórias confinadas apsidalmente são conduzidas pelo harmônico ressonante φ_{ress} , enquanto que as trajetórias que circulam, que são menos frequente, tendem a residir dentro dos multipletes ressonantes caracterizados pela libração de baixa amplitude de outros ângulos ressonantes que contém a longitude do periélio da partícula, ϖ . Desta maneira, os TNOs que compõem o confinamento principal e o “outlier” são explicados pelos resultados da simulação, onde o último pertence à classe de partículas estáveis e observáveis que exibem circulação apsidal, enfatizando que a existência de um pequeno número de objetos apsidalmente não confinados não constitui uma evidência forte contra a hipótese do Planeta 9.

Como vimos anteriormente, objetos alinhados apsidalmente residindo no domínio secular são protegidos de encontros próximos pela colinearidade geométrica das órbitas, porém, aqueles com q baixos são metaestáveis já que precessam para a configuração tangencial e tem tempos de vida dinâmico que são da ordem da escala de tempo de precessão, isto é, de uns poucos 100 Myr. Nestes experimentos numéricos o q inicial das partículas varia de 30 – 36 au, pelo que não se originam órbitas apsidalmente alinhadas estáveis a longo prazo. Os dois TNOs observados se localizam em $\Delta\varpi = 0^\circ$ e na região de trajetórias destacadas em laranja pelo que seriam metaestáveis. Os objetos 2013 TF₂₈ e 2015 KG₁₆₃, portanto, poderiam ter sido colocados relativamente recentemente no Cinturão de Kuiper distante e serão eventualmente desestabilizados por interações de curto período com o Planeta 9. Não obstante, para este cenário funcionar é preciso que a região trans-Netuniana distante seja reabastecida com TNOs

metaestáveis. Assim como os TNOs de longo período altamente inclinados são rotineiramente espalhados para dentro para criar a população de inclinação alta com $a < 100$ au (Batygin and Brown, 2016b), os objetos do disco disperso com $a < 250$ au são espalhados continuamente para fora por Netuno, providenciando a região trans-Netuniana distante com TNOs metaestáveis.

Uma outra interpretação para 2013 TF₂₈ e 2015 KG₁₆₃ é que, ao invés de pertencerem à população metaestável de corpos que experimentam evolução puramente secular, eles poderiam ter entrado na ilha de libração secular estável em torno de $\Delta\varpi = 0^\circ$ e são observados atualmente por estarem próximos aos picos de seus ciclos de excentricidade. Porém, dentro do contexto de estabilidade a longo prazo é requerido um mecanismo, diferente ao espalhamento de Netuno, que levante inicialmente as distâncias ao periélio dos objetos (por exemplo, interações com o aglomerado de nascimento) e bloqueá-los na ilha de libração secular apsidalmente alinhada. Isto seria necessário porque corpos espalhados à órbitas elípticas distantes pelos planetas gigantes tem distâncias ao periélio baixas, não conseguindo residir dentro da ilha de libração estável.

Nas figuras 2.7b e 2.7c, os pontos amarelos representam a população de objetos distantes ($a > 250$ au), altamente inclinados ($i > 40^\circ$) com $q < 30$ au. Os gráficos da inclinação orbital como função do argumento do periélio e da ação Θ como função de seu ângulo conjugado θ , mostram uma concordância entre a teoria e as observações. O monitoramento observacional continuado do Cinturão de Kuiper distante fora do plano da eclíptica constitui uma avenida para caracterizar ainda mais a evolução dinâmica a longo prazo destes objetos, induzida pela presença do Planeta 9.

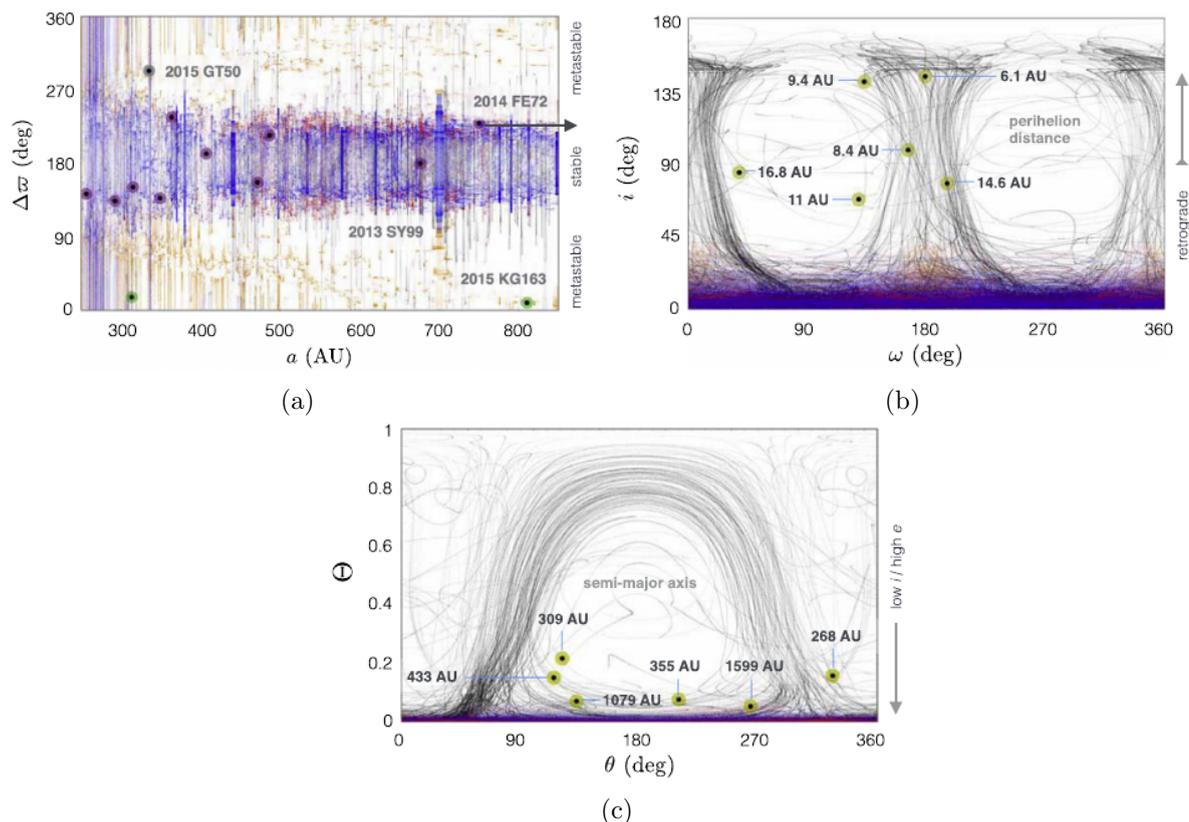


FIGURA 2.7: Comparação entre resultados de simulação de N corpos com $a_9 = 700$ au, $e_9 = 0.6$ e $m_9 = 10 M_{\oplus}$ e dados observacionais. A evolução de objetos estáveis a longo prazo é mostrada pelas trajetórias azuis quando satisfazem o critério de observabilidade ($q \leq 100$ au e $i \leq 40^\circ$) e com cinza quando tem $q > 100$ au ou $i > 40^\circ$. Os objetos que experimentam ciclos a grande escala na inclinação são mostrados em vermelho quando são visíveis e com cinza em caso contrário. A) $\Delta\omega - a$ para partículas estáveis a longo prazo e metaestáveis. As trajetórias de objetos metaestáveis com tempos de vida dinâmico entre 100 e 500 Myr são mostradas com cor laranja. O censo observacional atual é sobreplotado, onde o semieixo maior de 2014 FE₇₂ é de 1923 au e é mostrado por completeza. B) Inclinação orbital das partículas simuladas como função do argumento do periélio. C) Coordenadas ângulo – ação, θ e Θ . Os seis Centauros de longo período ($a > 250$ au) são sobrepostos na duas últimas figuras, suas distâncias ao periélio e semieixos maiores são etiquetados. Crédito: [Batygin and Morbidelli \(2017\)](#).

Capítulo 3

Metodologia

Neste capítulo se apresenta a metodologia seguida para restringir a órbita do Planeta 9. Nós testamos diversas grades visando reproduzir os agrupamentos observados em Ω , ω e ϖ de TNOs distantes. Na seção §3.1, se apresenta a amostra observacional com a qual as saídas das simulações devem ser comparadas. Na seção §3.2, descrevemos o pacote de integração utilizado e as forças que foram implementadas ao mesmo: i) a força devido à maré galáctica, que deve ser considerada nos casos de órbitas amplas do Planeta 9, e ii) uma força artificial que muda o semi-eixo maior de um corpo, que nós consideramos em modelos que simulam uma migração residual de Netuno. Nós testamos três conjuntos de modelos, que são expostos na seção §3.3. Na seção §3.4, detalhamos as análises realizadas para medir o grau de confinamento de TNOs distantes. Na seção §3.5, falamos sobre as distribuições de tamanho ou magnitude absoluta, as quais serão usadas em regiões que requeiram considerar um viés observacional ao serem comparadas com os dados observacionais.

3.1 Amostra Observacional de TNOs Distantes

Os TNOs distantes são definidos aqui como corpos menores com $a \geq 250$ au e $q \geq 40$ au. Os elementos orbitais destes objetos são mostrados na Tabela 3.1, de acordo com a base de dados do Minor Planet Center (MPC). Atualmente¹, existem 11 objetos nesta categoria observados em mais do que uma oposição, eles apresentam $i < 26^\circ$ e $q < 81$ au, exibem um confinamento grande em Ω , de $278^\circ.3$, ao redor de $\Omega = 89^\circ.7$, um confinamento em ω de $215^\circ.2$ em torno de $\omega = 1^\circ$ e dois confinamentos em ϖ , um deles de $110^\circ.7$ em torno de $\varpi = 54^\circ.3$, formado por 9 objetos, e o outro ao redor de $\varpi = 254^\circ.8$, formado pelos dois objetos restantes. Nós ignoramos objetos com semieixos maiores e distâncias ao periélio menores do que os mencionados acima já que quanto maior sejam os valores de a e q , mais prováveis são estes objetos de não ter experimentado um encontro próximo com Netuno num passado relativamente recente. Assim, estes objetos são propensos a conservar o alinhamento angular induzido pelo Planeta 9.

¹Até Julho de 2019.

Os elementos angulares Ω , ω e ϖ em função do semieixo maior são plotados na figura 3.1 para objetos com $q \geq 40$ au, destacando-se com cor violeta aqueles com $a \geq 250$ au. Considerando nossa definição de TNOs distantes, pode-se observar que estes apresentam confinamentos mais notáveis em ϖ e ω do que em Ω , se considerarmos os dois confinamentos em ϖ que se justificam pelas simulações que serão apresentadas adiante. Em Ω e ω esse confinamento duplo não é verificado nas observações. As órbitas no espaço físico de nossos alvos podem ser visualizadas na figura 3.2, onde se exibem dois conjuntos antialinhados entre si.

TABELA 3.1: Dados de TNOs distantes a partir da base de dados do MPC.

Nome	a (au)	e	q (au)	i ($^\circ$)	Ω ($^\circ$)	ω ($^\circ$)	ϖ ($^\circ$)	H	Descobrimto
2015 TG ₃₈₇	1042.0	0.938	65.018	11.7	300.8	118.0	58.8	5.5	Sheppard et al. (2019)
2015 RX ₂₄₅	412.0	0.889	45.597	12.1	8.6	65.1	73.7	6.2	Shankman et al. (2017) ^a
2015 KG ₁₆₃	833.0	0.951	40.498	14.0	219.1	32.2	251.3	8.2	Shankman et al. (2017) ^a
2014 SR ₃₄₉	302.0	0.842	47.691	18.0	34.8	340.9	15.7	6.7	Sheppard and Trujillo (2016)
2013 SY ₉₉	694.0	0.928	50.019	4.2	29.5	32.1	61.6	6.7	Bannister et al. (2017) ^a
2013 RA ₁₀₉	458.0	0.899	45.986	12.4	104.7	262.8	7.5	6.1	Stebbins et al. (2019)
2013 FT ₂₈	312.0	0.861	43.454	17.3	217.8	40.5	258.3	6.7	Sheppard and Trujillo (2016)
2012 VP ₁₁₃	258.0	0.689	80.389	24.1	90.7	293.5	24.2	4.0	Trujillo and Sheppard (2014)
2010 GB ₁₇₄	351.0	0.861	48.746	21.6	130.8	347.4	118.2	6.5	Chen et al. (2013)
2004 VN ₁₁₂	319.0	0.852	47.296	25.6	66.0	326.8	32.8	6.5	Becker et al. (2008)
2003 VB ₁₂	479.0	0.841	76.163	11.9	144.3	311.5	95.8	1.3	Brown et al. (2004)

^a Descobertos pelo OSSOS.

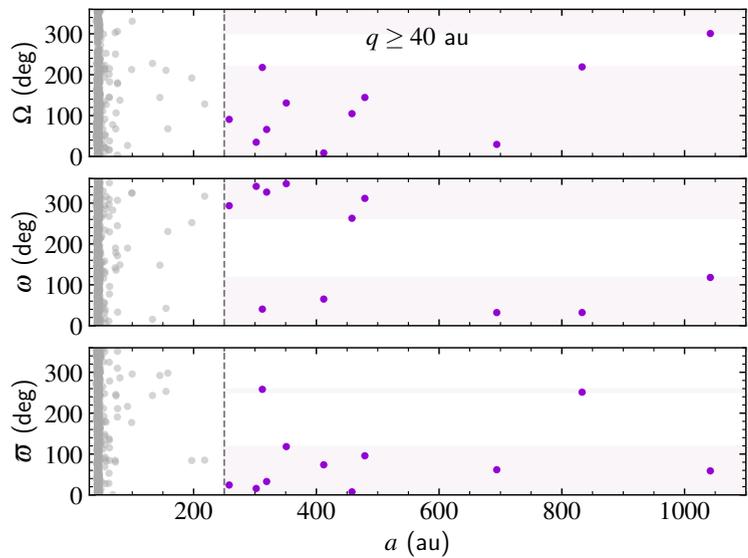


FIGURA 3.1: Elementos angulares Ω , ω e ϖ de TNOs com $q \geq 40$ au, como função do semieixo maior. Em violeta se destacam os correspondentes aos 11 TNOs distantes. As bandas e as linhas horizontais à direita do gráfico apresentam os confinamentos e valores médios nos ângulos dos TNOs de longo período, respectivamente. Os TNOs distantes apresentam um confinamento em ω em torno de 1° e dois confinamentos em ϖ , separados entre si em $\sim 201^\circ$; os valores das longitudes de nodo ascendente encontram-se espalhados.

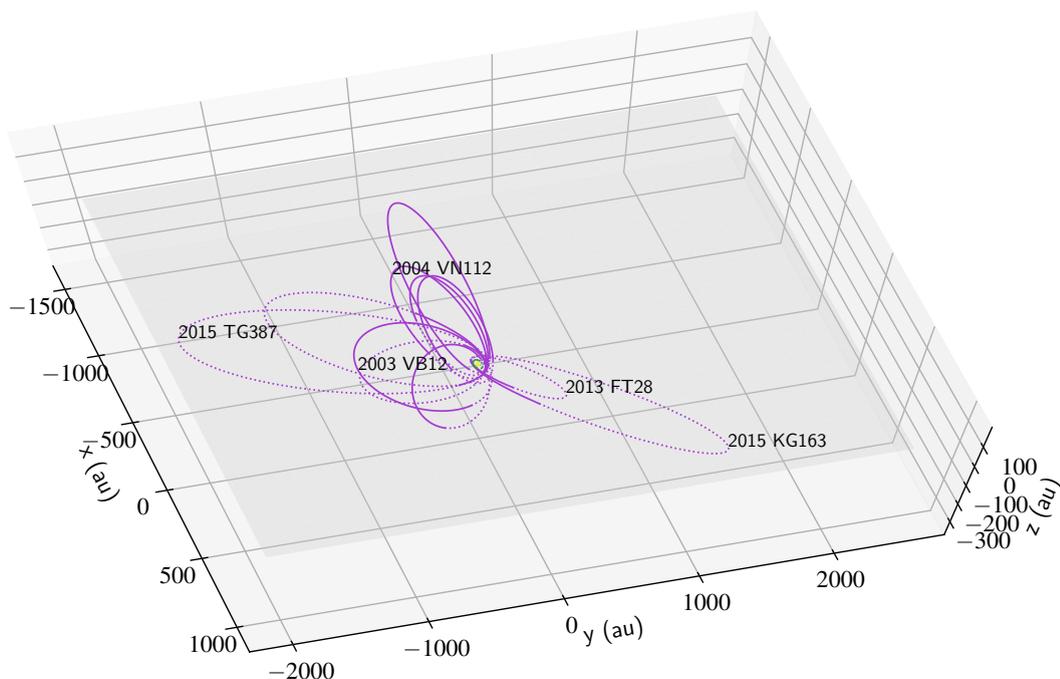


FIGURA 3.2: Órbitas heliocêntricas de TNOs distantes, representadas com cor violeta. Em verde se mostra a órbita de Netuno para comparação. O plano em $z = 0$ representa o plano da eclíptica e as curvas pontilhadas as regiões das órbitas dos TNOs que se encontram embaixo dele.

3.2 O Pacote de Subrotinas MERCURY

O MERCURY (Chambers, 1999) é um pacote de subrotinas escritas em Fortran 77, que permite integrar um sistema de N corpos interagindo entre si e submetidos à influência de um corpo central dominante. As subrotinas só consideram forças gravitacionais entre corpos, pelo que forças adicionais devem ser incluídas pelo usuário (tal como, efeitos de relatividade geral). O MERCURY permite, por exemplo, calcular a evolução orbital de planetas, asteroides e cometas em torno do Sol, de um sistema de satélites orbitando um planeta, de um sistema exoplanetário, etc. O pacote pode ser descarregado desde: <http://www.arm.ac.uk/~jec/home.html>. Ele contém os seguintes integradores:

- **Algoritmo Simplético de segunda ordem com Variáveis Mistas (MVS):** Muito rápido, mas não consegue computar encontros próximos entre objetos.
- **Bulirsch-Stoer Geral:** Lento, mas geralmente preciso. Ele pode ser usado quando os outros algoritmos falham ou para testar se um dado algoritmo é apropriado para o problema em questão.
- **Bulirsch-Stoer Conservativo:** Duas vezes mais rápido do que o Bulirsch-Stoer Geral, mas só trabalha para sistemas conservativos (por exemplo, gravidade newtoniana, mas não relatividade geral).

- **RA15 de Everhart (RADAU)**: $\sim 2-3$ vezes mais rápido do que o Bulirsch-Stoer Geral. Usualmente confiável, exceto para encontros muito próximos ou órbitas muito excêntricas (por exemplo, “Sun grazing”).
- **Integrador Simplético Híbrido**: Muito rápido, moderadamente preciso e capaz de calcular encontros próximos.

Nossas integrações numéricas foram realizadas usando o Integrador Simplético Híbrido.

3.2.1 Integrador Simplético Híbrido

Os *integradores simpléticos* não apresentam acúmulo de erro na energia a longo prazo e são substancialmente mais rápidos do que integradores convencionais de N corpos, no entanto, se tornam imprecisos quando dois corpos experimentam um encontro próximo. O passo de tempo fixo inerente aos algoritmos simpléticos torna difícil o tratamento de encontros próximos, já que sua alteração, requerida para preservar a precisão da integração, introduz um erro na energia. O *Integrador Simplético Híbrido* de [Chambers \(1999\)](#) permite manipular encontros próximos entre corpos massivos e foi originalmente desenhado para estudos de acreção planetária, caracterizados por repetidos encontros entre corpos massivos. Este esquema utiliza um integrador convencional durante encontros próximos enquanto que órbitas bem separadas são resolvidas analiticamente. Este esquema híbrido é simplético ainda quando ele incorpora uma componente não simplética.

Começemos considerando a derivada total em relação ao tempo de uma função arbitrária $u(q, p)$ das variáveis do sistema, escrita na formulação de colchetes de Poisson

$$\frac{du}{dt} = \{u, H\} \quad (3.1)$$

Esta expressão é conhecida como a *equação de movimento generalizada*, a qual é uma invariante canônica e inclui como caso particular às próprias equações de Hamilton quando u é substituído por algumas das variáveis canônicas.

A solução formal de 3.1 pode ser obtida desenvolvendo $u(t)$ em série de Taylor em torno do valor inicial $u(0)$

$$u(t) = u(0) + \tau \{u, H\}_0 + \frac{\tau^2}{2!} \{\{u, H\}, H\}_0 + \frac{\tau^3}{3!} \{\{\{u, H\}, H\}, H\}_0 + \dots \quad (3.2)$$

onde τ é o passo da solução e as derivadas temporais de u na série foram encontradas através da aplicação reiterada da equação 3.1.

Em função da série de Lie², $\mathcal{L}_H u$, a evolução temporal de u pode-se escrever como

$$u(\tau) = e^{\tau \mathcal{D}_H} u(0) \quad (3.3)$$

onde a n -ésima potência do operador de Lie, $\mathcal{D}_H = \{ \cdot, H \}$, é igual à n -ésima aplicação repetida pela direita de $\{ \cdot, H \}$.

Esta formulação das equações de movimento nos permitirá construir os integradores numéricos simpléticos, os quais apresentam as seguintes propriedades:

1. A transformação de $(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0))$ a $(\mathbf{q}(\tau), \mathbf{p}(\tau))$ ao longo da solução é simplética (canônica), de modo que a estrutura simplética:

$$d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q} = \text{constante}$$

2. Resolvem um sistema Hamiltoniano substituto próximo ao sistema real, $\tilde{H} = H + H_{\text{err}}$, onde a variação da energia do sistema se mantém limitada e o acúmulo dos erros de truncamento não introduz uma variação secular.
3. Alguns integradores simpléticos são reversíveis no tempo.

O truque dos integradores simpléticos consiste em dividir o Hamiltoniano em várias partes onde cada uma delas seja integrável isoladamente, de modo que, ao aplicar as soluções uma por vez, elas aproximem a solução do problema como um todo. Isto é

$$H = \sum_{i=0}^N H_i \quad (3.4)$$

Se dividimos o Hamiltoniano em duas partes, a evolução temporal de u é dada por

$$u(\tau) = e^{\tau(\mathcal{D}_{H_0} + \mathcal{D}_{H_1})} u(0) \quad (3.5)$$

Suponhamos agora que (c_i, d_i) , $(i = 1, 2, \dots, k)$ são um conjunto de números reais que satisfazem a relação

$$e^{\tau(\mathcal{D}_{H_0} + \mathcal{D}_{H_1})} = \prod_{i=1}^k e^{c_i \tau \mathcal{D}_{H_0}} e^{d_i \tau \mathcal{D}_{H_1}} + \mathcal{O}(\tau^{m+1}) \quad (3.6)$$

²A série de Lie se define como o operador

$$\mathcal{L}_B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \mathcal{D}_B^k = e^{t \mathcal{D}_B}$$

onde a derivada de Lie é definida como o operador

$$\mathcal{D}_B = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right)$$

Estes operadores obedecem muitas regras usuais da álgebra exceto a propriedade comutativa: $\mathcal{D}_A \mathcal{D}_B \neq \mathcal{D}_B \mathcal{D}_A$. Note-se que $\mathcal{D}_B F := \{F, B\}$.

para um dado inteiro m , que representa a ordem do integrador. A solução exata 3.5 pode ser aproximada até a ordem τ^m por

$$u(\tau) = \prod_{i=1}^k e^{c_i \tau \mathcal{D}_{H_0}} e^{d_i \tau \mathcal{D}_{H_1}} u(0) \quad (3.7)$$

Tal integrador é simplético pois está composto por um produto de transformações simpléticas elementares. Notemos que aplicar apenas um dos operadores exponenciais é equivalente a resolver as equações de movimento considerando apenas uma das partes do Hamiltoniano, desprezando a outra.

Assim, uma solução para um integrador simplético de primeira ordem, $m = 1$, é $c_1 = d_1 = 1$ ($k = 1$), que corresponde à relação:

$$u(\tau) = e^{\tau \mathcal{D}_{H_0}} e^{\tau \mathcal{D}_{H_1}} u(0) + \mathcal{O}(\tau^2) \quad (3.8)$$

Cada passo deste integrador consiste de dois subpassos. Primeiro o sistema evolui sujeito às forças associadas com H_1 durante um tempo τ (ignorando o efeito de H_0) e depois o sistema resultante evolui sujeito às forças associadas com H_0 durante um tempo τ (ignorando o efeito de H_1).

Para um integrador de segunda ordem, $m = 2$, se tem a solução $c_1 = c_2 = 1/2$, $d_1 = 1$ e $d_2 = 0$ ($k = 2$), resultando em

$$u(\tau) = e^{\frac{\tau}{2} \mathcal{D}_{H_0}} e^{\tau \mathcal{D}_{H_1}} e^{\frac{\tau}{2} \mathcal{D}_{H_0}} u(0) + \mathcal{O}(\tau^3) \quad (3.9)$$

No esquema de integração simplético de segunda ordem o sistema evolui sob a influência unicamente de H_0 durante a metade de um passo, logo evolui durante um passo completo sob a influência de H_1 , e depois evolui durante a outra metade do passo sob a influência de H_0 .

Integradores simpléticos de ordem superior podem ser construídos dividindo ainda mais os termos exponenciais, embora estes não são usualmente mais eficientes do que o método de segunda ordem já que o aumento na precisão não é compensado pelos cálculos adicionais requeridos em cada passo.

Usar estes integradores é equivalente a resolver as equações do movimento para um sistema substituto com Hamiltoniano $\tilde{H} = H + H_{\text{err}}$, que é próximo ao do problema real. \tilde{H} é conservado em forma exata pelo integrador simplético, salvo por um erro de arredondamento vinculado a τ . Se τ é pequeno e constante, H diferirá de \tilde{H} por uma pequena quantidade e não haverá acúmulo de erro na energia a longo prazo.

O erro em cada passo de um integrador simplético depende dos operadores \mathcal{D}_{H_0} e \mathcal{D}_{H_1} ³. Isto quer dizer que se $\mathcal{D}_{H_1} \sim \epsilon \mathcal{D}_{H_0}$, onde ϵ é uma pequena quantidade, o erro por passo também será proporcional a ϵ . Por esta razão, vale a pena dividir o Hamiltoniano em uma parte dominante mais uma pequena perturbação sempre que for possível.

Consideremos agora um sistema de referência inercial. O Hamiltoniano para o problema gravitacional de um sistema composto de $N + 1$ corpos é dado por

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{i=0}^N \frac{|\mathbf{p}_i|^2}{2m_i} - G \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{m_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|} \quad (3.10)$$

onde $\mathbf{q}_i = (x_i, y_i, z_i)$ e $\mathbf{p}_i = (p_{x_i}, p_{y_i}, p_{z_i})$ são as coordenadas e os momentos do corpo i -ésimo no sistema inercial. No caso do sistema solar, o Sol, identificado pelo índice $i = 0$, é muito mais massivo do que os outros corpos, pelo que é conveniente dividir o Hamiltoniano como:

$$H = H_{\text{Kep}} + H_{\text{int}} \quad (3.11)$$

onde H_{Kep} é a parte do Hamiltoniano que descreve a órbita Kepleriana não perturbada do objeto ao redor do Sol e H_{int} é a parte que descreve a perturbação devida aos outros corpos. Os detalhes precisos da evolução do sistema dependem do conjunto de variáveis escolhidas para escrever o Hamiltoniano. Usando coordenadas bariocêntricas, $H_{\text{Kep}} \gg H_{\text{int}}$ para todos os corpos que orbitam o Sol, mas não para o próprio Sol, pelo que o erro por passo já não se beneficia do fator ϵ . [Wisdom and Holman \(1991\)](#) utilizam *coordenadas de Jacobi*, ou seja, a posição e momento de cada corpo i é tomado em relação ao centro de massa de todos os corpos com índices $j < i$. As coordenadas de Jacobi trabalham satisfatoriamente quando não existe cruzamento de órbitas. Porém, é mais conveniente usar *coordenadas democráticas heliocêntricas*, isto é, as posições dos corpos são tomadas em relação ao Sol e seus momentos em relação ao baricentro do sistema; estas coordenadas permitem construir integradores capazes de tratar órbitas que se intersectam e manipular encontros próximos.

3.2.1.1 Métodos Simpléticos em Coordenadas Democráticas Heliocêntricas

Consideremos o sistema de referência inercial cujo Hamiltoniano é dado por 3.10. Desejamos definir um novo conjunto de variáveis canônicas, \mathbf{Q}_i e \mathbf{P}_i , de maneira que as novas posições sejam as posições heliocêntricas para $i \neq 0$ e a posição do centro de massa para $i = 0$:

$$\mathbf{Q}_i = \begin{cases} \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_0 & \text{se } i \neq 0 \\ \frac{1}{M} \sum_{j=0}^N m_j \mathbf{q}_j & \text{se } i = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

³ Por exemplo, o erro de truncamento para um integrador de primeira ordem pode ser estimado a partir da expressão:

$$e^{\tau \mathcal{D}_{H_0}} e^{\tau \mathcal{D}_{H_1}} = e^{\tau(\mathcal{D}_{H_0} + \mathcal{D}_{H_1})} + \frac{\tau^2}{2} (\mathcal{D}_{H_0} \mathcal{D}_{H_1} - \mathcal{D}_{H_1} \mathcal{D}_{H_0}) + \dots$$

onde $M = \sum_{j=0}^N m_j$ é a massa total do sistema. Usamos uma função geratriz de posições novas e momentos velhos (Szebehely, 1967)

$$F(\mathbf{p}_i, \mathbf{Q}_i) = -\mathbf{p}_0 \left(\mathbf{Q}_0 - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{Q}_j \right) - \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \left(\mathbf{Q}_i + \mathbf{Q}_0 - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{Q}_j \right) \quad (3.13)$$

As novas coordenadas são canônicas se

$$\mathbf{q}_i = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}_i} = \begin{cases} \mathbf{Q}_i + \mathbf{Q}_0 - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{Q}_j & \text{se } i \neq 0 \\ \mathbf{Q}_0 - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{Q}_j & \text{se } i = 0 \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{P}_i = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{Q}_i} = \begin{cases} \mathbf{p}_i - \frac{m_i}{M} \sum_{j=0}^N \mathbf{P}_j & \text{se } i \neq 0 \\ \sum_{j=0}^N \mathbf{P}_j & \text{se } i = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

Desta forma, os novos momentos canônicos são os momentos baricêntricos (se $i \neq 0$) e o momento total do sistema (se $i = 0$). A transformação canônica é dada pelas equações 3.12 e 3.15 e a transformação inversa pelas equações:

$$\mathbf{q}_i = \begin{cases} \mathbf{Q}_i + \mathbf{Q}_0 - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{Q}_j & \text{se } i \neq 0 \\ \mathbf{Q}_0 - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{Q}_j & \text{se } i = 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{P}_i = \begin{cases} \mathbf{P}_i + \frac{m_i}{M} \mathbf{P}_0 & \text{se } i \neq 0 \\ \frac{m_0}{M} \mathbf{P}_0 - \sum_{j=1}^N \mathbf{P}_j & \text{se } i = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

O Hamiltoniano transformado, $H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = H(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}))$, é

$$H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = \frac{|\mathbf{P}_0|^2}{2M} + \frac{1}{2m_0} \left| \sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i \right|^2 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{|\mathbf{P}_i|^2}{2m_i} - \frac{Gm_i m_0}{|\mathbf{Q}_i|} \right) - G \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{m_i m_j}{|\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_j|} \quad (3.18)$$

onde N agora se refere ao número de objetos sem incluir o Sol. Já que a coordenada \mathbf{Q}_0 é cíclica, o momento \mathbf{P}_0 é uma constante de movimento, como era de se esperar devido a que o centro de massa do sistema se move como uma partícula livre, portanto, sua contribuição ao Hamiltoniano pode ser negligenciada. Desta maneira, usando coordenadas democráticas heliocêntricas, o Hamiltoniano pode ser dividido como $H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = H_{\text{Kep}} + H_{\odot} + H_{\text{int}}$, sendo:

$$H_{\text{int}} = -G \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{m_i m_j}{|\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_j|} \quad (3.19a)$$

$$H_{\odot} = \frac{1}{2m_0} \left| \sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i \right|^2 \quad (3.19b)$$

$$H_{\text{Kep}} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{|\mathbf{P}_i|^2}{2m_i} - \frac{Gm_i m_0}{|\mathbf{Q}_i|} \right) \quad (3.19c)$$

A parte do Hamiltoniano denotada por H_{\odot} se deve a que $-\sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i = \mathbf{p}_0 - (m_0/M) \sum_{i=0}^N \mathbf{p}_i$ é o momento baricêntrico do Sol. Um integrador simplético de segunda ordem para esta divisão do Hamiltoniano em três partes é dado por

$$u(\tau) = e^{\frac{\tau}{2}\mathcal{D}_{H_{\text{int}}}} e^{\frac{\tau}{2}\mathcal{D}_{H_{\odot}}} e^{\tau\mathcal{D}_{H_{\text{Kep}}}} e^{\frac{\tau}{2}\mathcal{D}_{H_{\odot}}} e^{\frac{\tau}{2}\mathcal{D}_{H_{\text{int}}}} u(0) \quad (3.20)$$

onde cada um dos Hamiltonianos parciais pode ser resolvido de forma exata (analiticamente) na ausência dos outros:

- As equações de movimento devidas a 3.19a para o k -ésimo corpo são

$$\dot{\mathbf{Q}}_k = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{P}}_k = -Gm_k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N m_j \frac{\mathbf{Q}_k - \mathbf{Q}_j}{|\mathbf{Q}_k - \mathbf{Q}_j|^3}$$

ou seja

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_k(0), \quad \mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k(0) - \frac{\tau}{2} Gm_k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N m_j \frac{\mathbf{Q}_k(0) - \mathbf{Q}_j(0)}{|\mathbf{Q}_k(0) - \mathbf{Q}_j(0)|^3} \quad (3.21)$$

- As equações de movimento correspondentes a 3.19b estão dadas por

$$\dot{\mathbf{Q}}_k = \frac{1}{m_0} \sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i, \quad \dot{\mathbf{P}}_k = \mathbf{0}$$

isto é

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_k(0) + \frac{\tau}{2m_0} \sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i(0), \quad \mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k(0) \quad (3.22)$$

- Por último, as equações de movimento correspondentes a 3.19c são

$$\dot{\mathbf{Q}}_k = \frac{\mathbf{P}_k}{m_k}, \quad \dot{\mathbf{P}}_k = -Gm_0 m_k \frac{\mathbf{Q}_k}{|\mathbf{Q}_k|^3}$$

que conduzem a

$$\ddot{\mathbf{Q}}_k = -Gm_0 \frac{\mathbf{Q}_k}{|\mathbf{Q}_k|^3} \quad (3.23)$$

Isto nos leva ao seguinte esquema de integração:

- As coordenadas permanecem fixas e cada corpo recebe uma aceleração devida à força gravitacional dos outros corpos (mas não do Sol) durante um intervalo de tempo $\tau/2$.
- Os momentos permanecem fixos, e cada corpo sofre um deslocamento em sua posição pela quantidade $\tau \sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i / (2m_0)$.
- Cada corpo evolui em uma órbita Kepleriana (em relação ao mesmo corpo e mesma massa central) durante um tempo τ .

iv) Repete o passo ii).

v) Repete o passo i).

Quando os corpos permanecem afastados entre si, $|H_{\text{Kep}}| \gg |H_{\text{int}}|$ e $|H_{\text{Kep}}| \gg |H_{\odot}|$. Isto significa que cada passo do integrador tem um erro da ordem $\mathcal{O}(\epsilon\tau^3)$, onde $\epsilon = \sum_{i=1}^N m_i/m_0$ é a razão da massa dos diferentes corpos à do Sol. Porém, quando dois corpos experimentam um encontro próximo (de modo que $|\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_j|$ seja pequeno), o termo correspondente a H_{int} torna-se dominante e o erro por cada passo se incrementa substancialmente. Por esse motivo, os integradores simpléticos tinham sido incapazes de tratar problemas relacionados com cruzamento de órbitas e discos de acreção.

3.2.1.2 Encontros Próximos

Os integradores convencionais costumam reduzir o tamanho de passo durante um encontro próximo para manter o mesmo nível de precisão. Porém, se o tamanho de passo de um integrador simplético muda, o Hamiltoniano da integração também, produzindo uma mudança na energia do sistema. Se muitos encontros próximos acontecem, o erro na energia se acumula e eventualmente destrói a propriedade simplética do integrador.

Durante um encontro entre os corpos α e β , sua separação mútua $|\mathbf{Q}_\alpha - \mathbf{Q}_\beta|$ torna-se pequena. Isto faz um dos termos em H_{int} comparável a H_{Kep} , e o erro por passo se incrementa de $\mathcal{O}(\epsilon\tau^3)$ à $\mathcal{O}(\tau^3)$. O integrador híbrido consiste em usar o método de coordenadas democráticas heliocêntricas de maneira que este problema possa ser remediado fazendo H_{int} tão pequeno comparado a H_{Kep} (o que requer a aplicação de um integrador convencional), transferindo o termo que envolve a distância mútua entre os corpos de H_{int} para H_{Kep} enquanto dura o encontro próximo:

$$H_{\text{Kep}} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{|\mathbf{P}_i|^2}{2m_i} - \frac{Gm_i m_0}{|\mathbf{Q}_i|} \right) - G \frac{m_\alpha m_\beta}{|\mathbf{Q}_\alpha - \mathbf{Q}_\beta|} \quad (3.24)$$

$$H_{\text{int}} = -G \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \alpha}}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{m_i m_j}{|\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_j|} - G \sum_{\substack{j=\alpha+1 \\ j \neq \beta}}^N \frac{m_\alpha m_j}{|\mathbf{Q}_\alpha - \mathbf{Q}_j|} \quad (3.25)$$

Durante o encontro próximo, H_{Kep} já não é integrável analiticamente por se tratar de um problema de três corpos: o Sol e os dois corpos envolvidos no encontro, α e β . No entanto, isto não é um problema na prática já que o mesmo pode ser integrado numericamente usando um integrador de N corpos convencional de maneira tão precisa quanto desejado.

Porém, transferir termos entre H_{Kep} e H_{int} em cada encontro próximo envolve ainda mudar o Hamiltoniano substituto \tilde{H} e destruir, portanto, a natureza simplética do integrador (embora isto não seja tão crítico quanto mudar o tamanho do passo de integração). Para manter \tilde{H} constante, e fazer com que o integrador híbrido seja realmente simplético, devemos assegurar-nos que nenhum termo seja transferido de fato entre as diferentes partes do Hamiltoniano. Uma

forma de fazer isto é dividindo cada termo de interação entre H_{Kep} e H_{int} de tal maneira que a parte correspondente a H_{int} permaneça sempre pequena, enquanto que a parte em H_{Kep} só seja avaliada durante os encontros:

$$H_{\text{Kep}} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{|\mathbf{P}_i|^2}{2m_i} - \frac{Gm_i m_0}{|\mathbf{Q}_i|} \right) - G \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{m_i m_j}{|\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_j|} [1 - K(|\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_j|)] \quad (3.26a)$$

$$H_{\text{int}} = -G \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{m_i m_j}{|\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_j|} K(|\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_j|) \quad (3.26b)$$

onde a *função de transição*, K , (vide figura 3.3) deve tender a 1 quando a separação $|\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_j|$ entre os corpos i e j for grande, enquanto que deve tender a 0 quando $|\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_j|$ for pequena. Isto garante que $H_{\text{int}} \ll H_{\text{Kep}}$, incluso durante um encontro próximo.

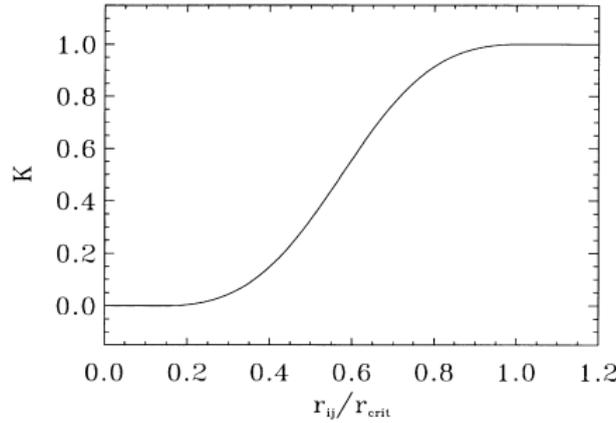


FIGURA 3.3: Uma forma adequada para a função de transição K em função da separação, $|\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_j|$, entre dois corpos. Crédito: [Chambers \(1999\)](#).

Na ausência de encontros, H_{Kep} e H_{int} podem ser integrados em forma exata como antes (equações 3.21 e 3.23). Vejamos o que acontece na ocorrência de um encontro entre dois corpos, α e β . Neste caso

$$\begin{aligned} K_{\alpha j} &= 1, \quad \forall j \neq \beta \\ K_{\beta j} &= 1, \quad \forall j \neq \alpha \end{aligned} \quad (3.27)$$

- A parte Kepleriana do Hamiltoniano conduz às seguintes equações de movimento para os corpos em consideração

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}}_\alpha &= \frac{\mathbf{P}_\alpha}{m_\alpha} \\ \dot{\mathbf{P}}_\alpha &= -Gm_0 m_\alpha \frac{\mathbf{Q}_\alpha}{|\mathbf{Q}_\alpha|^3} - Gm_\alpha m_\beta \frac{\mathbf{Q}_\alpha - \mathbf{Q}_\beta}{|\mathbf{Q}_\alpha - \mathbf{Q}_\beta|^3} (1 - K_{\alpha\beta}) \\ \dot{\mathbf{Q}}_\beta &= \frac{\mathbf{P}_\beta}{m_\beta} \\ \dot{\mathbf{P}}_\beta &= -Gm_0 m_\beta \frac{\mathbf{Q}_\beta}{|\mathbf{Q}_\beta|^3} + Gm_\alpha m_\beta \frac{\mathbf{Q}_\alpha - \mathbf{Q}_\beta}{|\mathbf{Q}_\alpha - \mathbf{Q}_\beta|^3} (1 - K_{\alpha\beta}) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Então, para cada par de encontros, as equações 3.28 são integradas numericamente em forma separada.

- Por outro lado, H_{int} origina as seguintes equações

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{Q}}_\alpha &= \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{P}}_\alpha &= -Gm_\alpha \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \alpha, \beta}}^N m_j \frac{\mathbf{Q}_\alpha - \mathbf{Q}_j}{|\mathbf{Q}_\alpha - \mathbf{Q}_j|^3} - Gm_\alpha m_\beta \frac{\mathbf{Q}_\alpha - \mathbf{Q}_\beta}{|\mathbf{Q}_\alpha - \mathbf{Q}_\beta|^3} K_{\alpha\beta}\end{aligned}\quad (3.29)$$

resultando em

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_\alpha &= \mathbf{Q}_\alpha(0) \\ \mathbf{P}_\alpha &= \mathbf{P}_\alpha(0) - \frac{\tau}{2} Gm_\alpha \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \alpha, \beta}}^N m_j \frac{\mathbf{Q}_\alpha(0) - \mathbf{Q}_j(0)}{|\mathbf{Q}_\alpha(0) - \mathbf{Q}_j(0)|^3} + m_\beta \frac{\mathbf{Q}_\alpha(0) - \mathbf{Q}_\beta(0)}{|\mathbf{Q}_\alpha(0) - \mathbf{Q}_\beta(0)|^3} K_{\alpha\beta} \right)\end{aligned}\quad (3.30)$$

Podemos descrever agora o esquema de integração para o integrador híbrido de segunda ordem como segue:

- i) As coordenadas permanecem fixas e cada corpo recebe uma aceleração proveniente dos outros corpos (mas não do Sol), pesada por um fator K nas situações de encontro, modificando os momentos durante um intervalo de tempo $\tau/2$.
- ii) Os momentos permanecem fixos, e cada corpo muda linearmente a sua posição em uma quantidade $\tau \sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i / (2m_0)$.
- iii) Os corpos que não sofrem um encontro se movem em uma órbita Kepleriana em torno do Sol durante um intervalo de tempo τ . Paralelamente, para os corpos que experimentam um encontro, os termos Keplerianos e os termos de interação pesados pelo fator $(1 - K)$, são integrados numericamente também durante um intervalo de tempo τ .
- iv) Repete o passo ii).
- v) Repete o passo i).

O algoritmo usado para integrar encontros próximos numericamente é o método de Bulirsch-Stoer (Stoer and Bulirsch, 1980), que é frequentemente usado para verificar resultados de outros algoritmos numéricos por ser robusto para tratar problemas de N corpos.

3.2.2 Arquivos de Entrada e Saída

Todos os métodos de integração do MERCURY utilizam os mesmos arquivos de entrada e produzem os mesmos arquivos de saída. Os arquivos necessários para realizar uma integração possuem extensão *.in. Os arquivos gerados tem extensão *.out e *.dmp. Os arquivos *.dmp são

atualizados periodicamente e podem ser utilizados para retomar uma integração, os restantes são descritos embaixo:

- **files.in:** Contém uma lista dos nomes de arquivos de entrada e saída.
- **message.in:** Contém o texto das mensagens de saída do MERCURY.
- **big.in:** Contém as posições e velocidades iniciais ou equivalentemente os elementos orbitais para os corpos, excetuando o corpo central, que perturbam e interagem com todos os outros objetos durante a integração. Para cada corpo, pode-se definir o nome, a massa, a distância máxima que constitui um encontro próximo, a densidade e as 3 componentes do momento angular de rotação.
- **small.in:** Este arquivo é análogo ao anterior mas contém corpos que só perturbam e interagem com os corpos *big* durante a integração (isto é, eles se ignoram entre si completamente). Se a massa de um desses corpos é colocada a 0, o objeto é tratado como partícula teste.
- **param.in:** Contém os parâmetros usados pelo integrador: o algoritmo, o tempo inicial, o tempo final, o intervalo de saída, o passo e a precisão. Entre outras opções, aqui deve se indicar também (com sim ou não) se será considerada alguma força adicional ao integrador fornecida pelo usuário. Estas forças adicionais devem ser escritas na subrotina `mfo_user` em `mercury6_1.for`. O *param.in* contém também parâmetros para o corpo central: a distância a partir dele em que os objetos são removidos, o raio, a massa e os momentos J_2 , J_4 e J_6 . Um outro parâmetro a ser considerado é a separação mínima entre objetos (em raios de Hill) na qual o integrador híbrido muda para o algoritmo Bulirsch-Stoer.
- **xv.out:** Contém as informações sobre as posições e velocidades dos objetos durante a integração.
- **ce.out:** Contém detalhes de encontros próximos ocorridos durante a integração.
- **info.out:** Contém um resumo dos parâmetros da integração e uma lista dos eventos ocorridos.

3.2.3 Inclusão de Maré Galáctica

Para deduzir a força de maré galáctica seguimos principalmente o desenvolvimento realizado por [Heisler and Tremaine \(1986\)](#) e [Souchay and Dvorak \(2010\)](#).

Nós assumimos que a Galáxia é axissimétrica e o Sol segue uma órbita circular de raio R_0 em torno do centro Galáctico e no plano médio galáctico. A velocidade angular do Sol ao redor do centro Galáctico é Ω_0 .

Definimos dois sistemas de referência (vide figura 3.4). Um sistema rotativo $(\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$, centrado no Sol com o eixo \hat{x}' em direção ao centro da galáxia, o eixo \hat{z}' normal ao plano

galáctico e em direção ao polo norte galáctico, e o eixo \hat{y}' completando um sistema destro. Um sistema não rotativo $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, heliocêntrico também, de tal forma que no tempo $t = 0$ coincide com o referencial rotativo. Já que o movimento do Sol em torno da galáxia é retrógrado, Ω_0 é negativo.

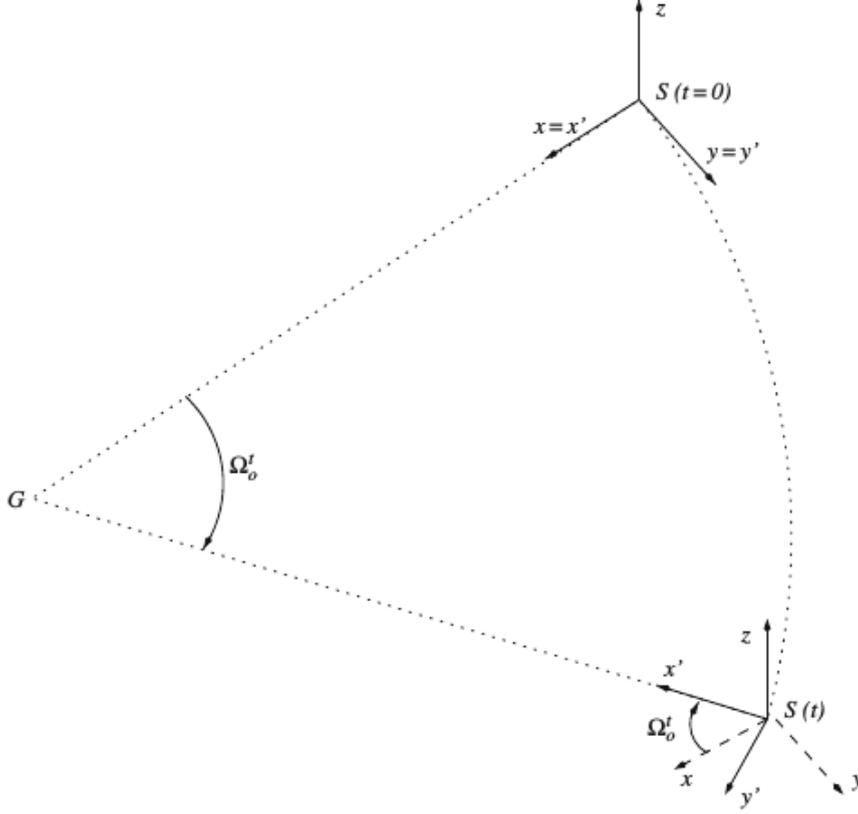


FIGURA 3.4: Os sistemas de referência não rotativo $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ e rotativo $(\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$. S denota o Sol, G o centro da galáxia, Ω_0 a velocidade angular do Sol em torno do centro galáctico. Crédito: [Souhay and Dvorak \(2010\)](#).

Como a galáxia é axissimétrica, o potencial Galáctico pode ser escrito como $U_g(R, z)$, sendo R a distância a partir do eixo de rotação galáctico e $z = 0$ o plano médio galáctico. O potencial Galáctico é desenvolvido até na ordem 2 na vizinhança do Sol, isto é, um desenvolvimento na ordem 1 na força que deriva do potencial U_g ([Heisler and Tremaine, 1986](#)).

A força por unidade de massa sobre uma partícula teste orbitando o Sol é dada por

$$\mathbf{F} = -\frac{GM_\odot}{r^3}\mathbf{r} - \nabla U_g(R, z) + \Omega_0^2\mathbf{R}_0 \quad (3.31)$$

onde \mathbf{r} é o vetor Sol-partícula de longitude r , M_\odot a massa do Sol, G a constante gravitacional, R a distância entre a partícula e o eixo de rotação Galáctico, z a terceira coordenada da partícula em qualquer referencial e \mathbf{R}_0 é o vetor centro galáctico-Sol.

Considerando que a velocidade angular do Sol é dada por

$$\Omega_0 = \left[\frac{1}{R} \frac{\partial U_g(R, 0)}{\partial R} \right]_{R_0}^{1/2}$$

a equação 3.31 se escreve como

$$\mathbf{F} = -\frac{GM_{\odot}}{r^3}\mathbf{r} - \left[\frac{\partial^2 U_g}{\partial R^2}\right]_{R_0} x'\hat{x}' - \left[\frac{1}{R}\frac{\partial U_g}{\partial R}\right]_{R_0} y'\hat{y}' - \left[\frac{\partial^2 U_g}{\partial z^2}\right]_{R_0} z\hat{z} + O(x^2, y^2, z^2) \quad (3.32)$$

onde (x, y, z) e (x', y', z') são as coordenadas da partícula nos marcos não-rotativo e rotativo, respectivamente $(x' = x \cos(\Omega_0 t) + y \sin(\Omega_0 t))$ e $y' = -x \sin(\Omega_0 t) + y \cos(\Omega_0 t)$.

Tendo em conta as constantes de Oort, as quais são definidas como:

$$A = -\left[\frac{R}{2}\frac{d\Omega}{dR}\right]_{R_0}$$

$$B = -\left[\Omega + \frac{R}{2}\frac{d\Omega}{dR}\right]_{R_0}$$

e a densidade do disco galáctico na vizinhança Solar ρ_0 , obtida através da equação de Poisson:

$$4\pi G\rho_0 = \left[\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{\partial U_g}{\partial R} + \frac{\partial^2 U_g}{\partial z^2}\right)\right]_{R_0} = 2(B^2 - A^2) + \left[\frac{\partial^2 U_g}{\partial z^2}\right]_{R_0}$$

a equação 3.32 torna-se

$$\mathbf{F} = -\frac{GM_{\odot}}{r^3}\mathbf{r} + (A - B)(3A + B)x'\hat{x}' - (A - B)^2 y'\hat{y}' - [4\pi G\rho_0 - 2(B^2 - A^2)]z\hat{z} \quad (3.33)$$

onde os termos de segunda ordem em x , y e z são negligenciados. É comum chamar à componente da maré no plano médio galáctico (dependente dos segundo e terceiro termos em 3.33) como a *componente radial*, e a componente normal ao plano médio galáctico como a *componente normal* (Souchay and Dvorak, 2010).

Considerando os seguintes valores comumente usados: $\rho_0 = 0.1 M_{\odot} \text{ pc}^{-3}$, $\Omega_0 = B - A = -26 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ e a aproximação $A = -B$, se tem que a componente radial da maré é quase 10 vezes menor do que a normal. Por essa razão muitos autores negligenciam a componente radial (Souchay and Dvorak, 2010).

A equação 3.33 pode ser escrito em função de $\delta = -(A + B)/(A - B)$ (Matese and Whitmire (1996), Levison et al. (2001)) como

$$\mathbf{F} = -\frac{GM_{\odot}}{r^3}\mathbf{r} + \Omega_0^2 \left[(1 - 2\delta)x'\hat{x}' - y'\hat{y}' - \left(\frac{4\pi G\rho_0}{\Omega_0^2} - 2\delta \right) z\hat{z} \right] \quad (3.34)$$

No caso de órbitas amplas do Planeta 9, nós adicionalmente consideraremos os efeitos da maré galáctica, dentro da subrotina `mfo_user`. Internamente, foram aplicadas rotações para mover entre o referencial $(\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$ e o referencial de nossas integrações, que tem o eixo Z apontando ao longo do vetor momento angular inicial dos planetas conhecidos. Numericamente, nós usamos $\rho_0 = 0.1 M_{\odot} \text{ pc}^{-3}$, $A = 14.82 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ e $B = -12.37 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$, dando $\delta = -0.09$. Diferente de outros autores que consideram apenas o termo em \hat{z} para a aceleração devido à maré, por ser bem maior que os termos nas outras duas componentes, nós mantemos

os três termos com a aproximação $\delta = 0$.

3.2.4 Migração Artificial

A variação temporal dos semieixos maiores dos planetas gigantes conhecidos é modelada pela seguinte expressão (Malhotra (1993), Malhotra (1995)):

$$a(t) = a_f - \Delta a e^{-t/\tau} \quad (3.35)$$

onde a_f é o semieixo maior na época atual, $a_i = a_f - \Delta a$ corresponderia ao semieixo maior inicial na simulação, onde o tempo $t = 0$ é consistente com as migrações residuais de Netuno e Urano, induzido pela troca de momento angular com alguns poucos planetesimais massivos de acordo com o *Modelo de Nice*. Nós escolhemos $\Delta a = 0, 0, 0.75$ e 1.7 au para Júpiter, Saturno, Urano e Netuno, respectivamente. τ é a escala de tempo de expansão das órbitas, nós consideramos $\tau = 100$ Myr.

A migração orbital foi implementada nas equações de movimento por meio de uma força de “arrasto” adicional sobre cada planeta ao longo da direção da sua velocidade orbital $\hat{\mathbf{v}}$,

$$\Delta \ddot{\mathbf{r}} = \frac{\hat{\mathbf{v}}}{\tau} \left(\sqrt{\frac{GM_\odot}{a_f}} - \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_i}} \right) e^{-t/\tau} \quad (3.36)$$

Esta força artificial foi colocada na subrotina `mfo_user`, em integrações que consideram a fase de migração residual de Netuno e Urano.

3.3 Modelos Testados

Para avaliar o confinamento de TNOs distantes, foram testados três conjuntos de modelos descritos a seguir. Todos eles consideram o Sol, os planetas gigantes conhecidos, o Planeta 9 e um conjunto de planetesimais tratados como partículas testes.

- **Modelos 1:** O primeiro conjunto de modelos considera inicialmente 10,000 planetesimais com: $200 \text{ au} < a < 1000 \text{ au}$, $30 \text{ au} < q < 40 \text{ au}$, $0.8 < e < 0.97$, $0^\circ < i < 10^\circ$ e os restantes elementos orbitais uniformemente distribuídos. O limite inferior para os semieixos maiores das partículas é devido ao fato que nós estamos interessados somente em TNOs de semieixo maior grande para caracterizar melhor seus confinamentos. Quanto às condições iniciais do Planeta 9, se analisam dois casos de semieixo maior, $a_9 = 700 \text{ au}$ e $a_9 = 1500 \text{ au}$; considerando diversos valores de distância ao periélio, inclinação e argumento do periélio para aqueles semieixos maiores. Nós consideramos uma massa para o Planeta 9 de $10 M_\oplus$ para grades com $a_9 = 700 \text{ au}$ e uma massa maior, $16.5 M_\oplus$, para os casos com $a_9 = 1500 \text{ au}$. Para este conjunto de modelos nós usamos como nomenclatura as condições iniciais

do Planeta 9: $a_9 - q_9 - i_9 - \omega_9 - \Omega_9 - m_9$, com as unidades correspondentes em au, graus e M_{\oplus} .

Devido à influência dos outros planetas, a_9 e q_9 podem variar dos valores iniciais que queremos testar dependendo do valor assumido da longitude média, λ_9 . O λ_9 que consideramos é aquele que dá valores mais próximos de semieixo maior médio e distância ao periélio média aos a_9 e q_9 que queremos testar, numa integração sem partículas testes durante um período orbital do Planeta 9.

- **Modelos 2:** O segundo conjunto de modelos considera 100,000 planetesimais inicializados com: $28 \text{ au} < a < 31 \text{ au}$, $25.8 \text{ au} < q < 31 \text{ au}$, $0 < e < 0.08$, $0^\circ < i < 5^\circ$ e os restantes elementos orbitais uniformemente distribuídos. Nesses modelos, as condições iniciais para as partículas são mais realísticas. Ao serem localizadas próximas de Netuno, se tem em conta o efeito da dispersão que esse planeta exerce sobre elas, o que no conjunto de corridas anterior se teria criado artificialmente. Estas condições iniciais nos permitem também analisar melhor as regiões mais internas, onde existiria uma escassez de partículas nas corridas do conjunto anterior devido às condições iniciais assumidas. Em relação ao Planeta 9, nós estudamos grades que consideram semieixos maiores altos ($a_9 > 1500 \text{ au}$), pelo que é tido em conta os efeitos da maré galáctica no integrador numérico (vide §3.2.3). A nomenclatura para esses modelos é similar à anterior mas inclui o prefixo GT: GT- $a_9 - q_9 - i_9 - \omega_9 - \Omega_9 - m_9$.

Um de nossos modelos para o Planeta 9 deste grupo é testado mais uma vez, porém, as C.I. das partículas são correspondentes às do conjunto de Modelos 1 (GT- $a3000 - q900 - i30 - \omega0 - \Omega150 - m16.5 - \text{II}$). Isto foi feito com a finalidade de estudar como afetam diferentes C.I. das partículas nas análises dos confinamentos.

A variação no momento angular do Planeta 9, devido ao torque de maré galáctica, produz uma mudança na sua distância ao periélio (Matese and Whitmire, 1996). Em consequência, as condições iniciais para o planeta foram escolhidas tal que a distância ao periélio, inicialmente alta, atinja um valor pequeno próximo ao final do tempo de integração. Esta consideração foi motivada pelos nossos resultados já publicados do primeiro conjunto de corridas (Modelos 1, Cáceres and Gomes (2018)) onde, como veremos, foi mostrado que um planeta com q_9 baixo fornece melhores confinamentos nos TNOs distantes do que um com q_9 alto.

Nos primeiro e segundo conjunto de modelos, os planetas gigantes conhecidos são colocados em suas configurações atuais, inicialmente.

- **Modelo 3:** Este modelo considera 100,000 planetesimais inicializados com: $27 \text{ au} < a < 29 \text{ au}$, $24.8 \text{ au} < q < 29 \text{ au}$, $0 < e < 0.08$, $0^\circ < i < 5^\circ$ e os restantes elementos orbitais uniformemente distribuídos. As condições iniciais para o Planeta 9 são idênticas às de um dos modelos do conjunto anterior. Aqui se tem em conta inicialmente a fase de migração residual de Urano e Netuno no *Modelo de Nice* (vide §3.2.4), pelo que os semieixos maiores assumidos para as partículas são menores inclusive do que o conjunto de modelos

anterior. Esse modelo não considera a maré galáctica. A nomenclatura para o modelo é: mig – a_9 – q_9 – i_9 – ω_9 – Ω_9 – m_9 .

As condições iniciais para o Planeta 9 e os planetesimais são representados na Tabela 3.2 para cada conjunto de modelos.

TABELA 3.2: Condições iniciais para o Planeta 9 e as partículas testes nos três conjuntos de modelos testados.

	Nomenclatura / C.I. para o Planeta 9	C.I. para as partículas
Modelos 1: $a_9 = 700$ au e $a_9 = 1500$ au	$a700 - q60 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m10$	10,000 partículas $200 \text{ au} < a < 1000 \text{ au}$ $30 \text{ au} < q < 40 \text{ au}$ $0.8 < e < 0.97$ $0^\circ < i < 10^\circ$
	$a700 - q100 - i10 - \omega0 - \Omega0 - m10$	
	$a700 - q100 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m10$	
	$a700 - q100 - i60 - \omega0 - \Omega0 - m10$	
	$a700 - q200 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m10$	
	$a700 - q300 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m10$	
	$a700 - q60 - i30 - \omega0 - \Omega90 - m10$	
	$a1500 - q60 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$	
	$a1500 - q100 - i10 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$	
	$a1500 - q100 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$	
	$a1500 - q100 - i60 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$	
	$a1500 - q200 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$	
	$a1500 - q300 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$	
$a1500 - q60 - i30 - \omega90 - \Omega150 - m16.5$		
Modelos 2: Maré Galáctica ($a_9 > 1500$ au)	GT- $a2000 - q400 - i30 - \omega100 - \Omega50 - m16.5$	100,000 partículas $28 \text{ au} < a < 31 \text{ au}$ $25.8 \text{ au} < q < 31 \text{ au}$ $0 < e < 0.08$ $0^\circ < i < 5^\circ$
	GT- $a2500 - q500 - i30 - \omega30 - \Omega140 - m16.5$	
	GT- $a3000 - q300 - i30 - \omega130 - \Omega190 - m16.5$	
	GT- $a3000 - q300 - i30 - \omega310 - \Omega20 - m16.5$	
	GT- $a3000 - q600 - i30 - \omega130 - \Omega20 - m16.5$	
	GT- $a3000 - q900 - i30 - \omega0 - \Omega150 - m16.5$	
	GT- $a3000 - q900 - i30 - \omega0 - \Omega150 - m16.5 - \text{II}^a$	
GT- $a3000 - q900 - i30 - \omega90 - \Omega300 - m16.5$		
Modelo 3: Migração Residual de Urano e Netuno	mig- $a3000 - q600 - i30 - \omega130 - \Omega20 - m16.5^b$	100,000 partículas $27 \text{ au} < a < 29 \text{ au}$ $24.8 \text{ au} < q < 29 \text{ au}$ $0 < e < 0.08$ $0^\circ < i < 5^\circ$

^a Esse modelo é uma exceção no grupo, no sentido dele inicializar as partículas com as C.I. do conjunto de Modelos 1. Note que este mesmo modelo do Planeta 9 é também testado com as C.I. para as partículas correspondentes à este grupo.

^b Não inclui maré galáctica.

Para cada modelo, uma primeira integração é realizada considerando só o corpo central, os planetas gigantes conhecidos e o Planeta 9, para salvar num arquivo os vetores de estado dos planetas a cada 10 anos. Posteriormente, o sistema completo (incluindo agora as partículas testes) é integrado usando paralelismo, tendo em conta a mesma evolução dos planetas em diferentes núcleos, ao ler o arquivo gerado previamente. Estas integrações com partículas tiveram um passo de 0.5 anos, mas em cada 10 anos, as coordenadas dos planetas foram corrigidas à aquelas produzidas pela integração original sem partículas. Os desvios dos planetas depois de 10 anos (20 passos) é bastante pequeno já que as partículas não tem massa e a diferença entre a integração com partículas e a original com só os planetas vem unicamente do fato que o integrador híbrido entra no modo de integração clássica (Bulirsch-Stoer) em encontros próximos

de partículas com planetas. O código para o integrador híbrido foi assim modificado para implementar este procedimento.

Em cada modelo, as condições iniciais são dadas em relação ao plano $iv4$. Devido ao torque exercido pelo Planeta 9 numa órbita inclinada sobre os planetas conhecidos, o plano $iv4$ inicial precessará com respeito ao plano invariável do sistema (Gomes et al., 2017), de modo que, as saídas são convertidas em relação ao plano $iv4$ momentâneo. As simulações tiveram um tempo de integração igual à idade do Sistema Solar (4.5 Gyr).

3.4 Análise do Confinamento de TNOs Distantes

Nós consideramos as saídas das partículas correspondentes a cada 10^7 anos. A análise consiste em determinar em cada tempo: 1) as frequências N_1 e N_2 nos histogramas de Ω , ω e ϖ das partículas, 2) os ângulos em Ω , ω e ϖ , medidos em relação aos do Planeta 9, correspondentes a N_1 e N_2 , 3) a medida de s e 4) os confinamentos nestes três elementos angulares das partículas. Estes procedimentos são realizados só para as partículas que no instante dado pertencem às faixas $250 \text{ au} \leq a \leq 1300 \text{ au}$, $40 \text{ au} \leq q \leq 90 \text{ au}$ e $i \leq 30^\circ$, isto é, aquelas com a , q e i similar à dos TNOs distantes da amostra observacional.

1. N_1 e N_2 : As frequências N_1 e N_2 são determinadas a partir de histogramas para Ω , ω e ϖ das partículas, sendo N_1 a frequência máxima correspondente ao pico principal de uma distribuição de frequências e N_2 a frequência máxima correspondente ao pico secundário, quando houver (vide figura 3.5).

Nós consideramos 12 “bins” nos histogramas, portanto, cada “bin” cobre 30° de largura. A eleição da largura do “bin” foi baseada em inspeção visual do confinamento de alguns ângulos durante a evolução das partículas simuladas. Nós vimos que este confinamento pode ser muito estreito e 30° foi escolhido para capturar esta característica. Em cada tempo, realizamos 30 histogramas que se diferenciam entre si no início do primeiro “bin”, variando de 0° até 29° , obtendo assim uma coleção de frequências N_1 e N_2 . Desta maneira, podemos obter uma melhor precisão na determinação do “bin” onde se tem o maior agrupamento de ângulos, que é aquele com o maior N_1 na coleção dos 30 histogramas. A frequência N_2 seria a relativa à frequência N_1 . A medida da frequência N_2 não é só motivada pelos dados observacionais, onde a distribuição de ϖ sugere a existência de dois confinamentos, senão também pela inspeção visual da evolução dos elementos angulares nas simulações.

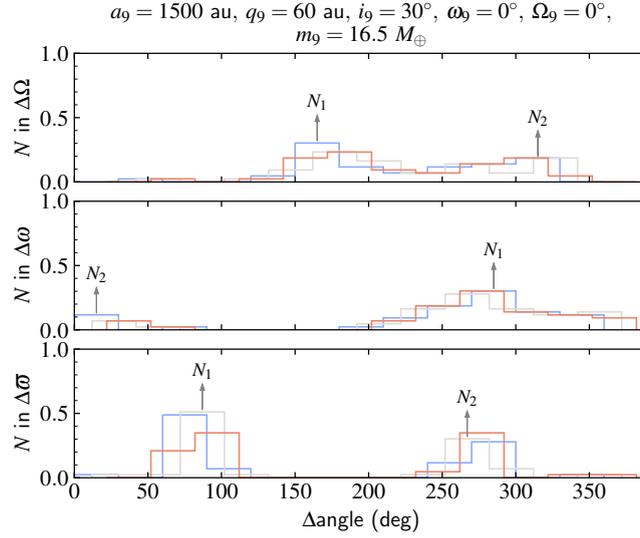


FIGURA 3.5: Distribuição de frequências, N , para Ω , ω e ϖ das partículas medidos em relação aos correspondentes ângulos do Planeta 9; no modelo $a1500 - q60 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$, no tempo $t = 2.18 \text{ Gyr}$. Se mostram três diferentes inícios do primeiro “bin”: em 0° , 12° e 22° em azul, cinza e vermelho, respectivamente, de um total de 30 considerados em cada tempo para calcular as frequências N_1 e N_2 . N_1 corresponde à frequência máxima no maior pico do histograma e N_2 à frequência máxima no segundo maior pico, relativo a N_1 .

Chamaremos a N_1 de frequência principal e a N_2 de frequência secundária. A ideia por trás dessa análise é que um “bin” com uma alta frequência equivale a um confinamento relevante no intervalo angular definido pelo “bin”.

2. $\Delta\Omega$, $\Delta\omega$ e $\Delta\varpi$ correspondentes à N_1 e N_2 : Nós registramos também os ângulos correspondentes ao meio dos “bins” que dão as frequências principal e secundária medidos em relação aos do Planeta 9, isto é: $\Delta\Omega$, $\Delta\omega$ e $\Delta\varpi$, para N_1 e N_2 .
3. Medida de s : s representa uma medida de quanto a frequência correspondente ao confinamento principal (N_1) difere da correspondente a uma distribuição randômica (vide figura 3.6). Seja N_r o valor médio da frequência máxima determinada para uma distribuição aleatória de ângulos entre 0° e 360° contendo um número de pontos n igual ao número de partículas consideradas para análise no tempo em consideração e σ_r o desvio padrão do valor médio; s mede em quantos sigmas o valor de N_1 difere de N_r : $s = (N_1 - N_r)/\sigma_r$. Se o valor de N_1 for menor do que N_r , consideramos $s = 0$. O parâmetro s é importante para dar uma medida de confinamento mais confiável quando se tem poucas partículas para um tempo dado, já que com poucos ângulos é possível obter um valor de N_r alto mesmo com uma distribuição randômica.

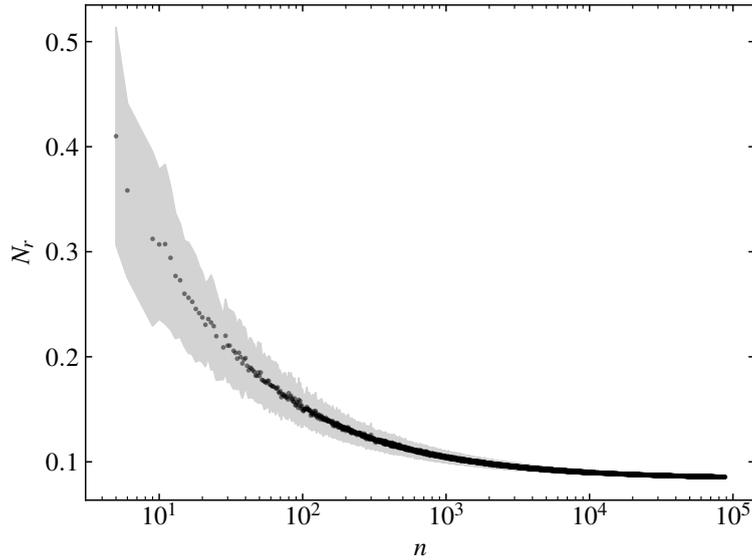


FIGURA 3.6: Frequência, N_r , em função do número de pontos, n , para uma distribuição aleatória. A região cinza mostra o desvio do valor médio, σ_r .

4. Confinamentos em Ω , ω e ϖ : Para determinar os confinamentos em Ω , ω e ϖ nós realizamos 100 iterações, onde em cada iteração nós pegamos aleatoriamente 11 objetos a partir do conjunto de partículas considerado para análise (já que este é o número de TNOs distantes reais); para Ω e ω , nós calculamos o confinamento para estes 11 objetos e para ϖ nós determinamos o menor confinamento possível para 9 desses 11 objetos (porque estamos assumindo que existem dois confinamentos nesse elemento orbital). Assim, em cada tempo nós obtemos uma média e desvio padrão dos confinamentos.

3.5 Distribuição de Magnitude Absoluta

No estudo da influência do Planeta 9 nos TNOs será necessário comparar os resultados de integrações numéricas com os objetos observados, para isso é preciso acrescentar viés aos objetos simulados. Nós aplicaremos o *Observational Bias Introducing Procedure* (OBIP, [Gomes et al. \(2015\)](#)), que faz uso de uma distribuição de tamanho ou, equivalentemente, de magnitude absoluta. Nesta seção se descreve como é obtida uma distribuição H .

A distribuição de tamanhos de TNOs possibilita a determinação da massa na região Trans-netuniana e é determinada pela competição entre acreção e erosão colisional. Para os corpos maiores, a distribuição de tamanhos é controlada pelo processo de acreção já que eles são imunes à ruptura colisional durante a idade do sistema solar considerando o entorno atual do Cinturão de Kuiper e até mesmo num entorno mais denso nos primórdios do sistema solar, onde a depleção da massa deve ter sido o resultado mais da erosão dinâmica do que erosão colisional. Pelo contrário, corpos menores do que 50-100 km de diâmetro seriam o resultado de forte moagem colisional pelo que a distribuição de tamanho atual é conectada à suas propriedades físicas e entorno colisional ([Petit et al., 2008](#)).

Devido a que os TNOs são demasiado pequenos, frios e distantes para permitir a medida direta de seus tamanhos, estes são aproximados a partir da determinação da função de luminosidade. A luminosidade é medida como uma magnitude aparente que, quando combinado com uma distância medida, pode ser convertida a uma magnitude absoluta H^4 . A magnitude H pode ser diretamente mapeada a diâmetro, sempre que um albedo seja medido ou assumido (Lawler et al., 2018).

Medições de distribuições de tamanhos no sistema solar mostram que estas podem ser aproximadas por leis de potencia única em faixas de diâmetros, D , (3.37). A correspondente distribuição H (3.38) parametrizada por uma “slope” logaritmica, α , fornece uma forma observável de explorar as distribuições de diâmetro

$$\frac{dN}{dD} \propto D^{-p} \quad (3.37)$$

$$\frac{dN}{dH} \propto 10^{\alpha H} \quad (3.38)$$

onde os expoentes de ambas distribuições estão relacionados por $p = 5\alpha + 1$.

De forma geral, uma distribuição H pode ser caracterizada por 4 parâmetros: uma “slope” brilhante (correspondente a tamanhos grandes), α_b , uma “slope” tênue (correspondente a tamanhos pequenos), α_f , uma magnitude absoluta de corte, H_b , e um contraste, c , que é a razão do número diferencial no lado brilhante de H_b ao lado tênue. Dependendo dos parâmetros, a distribuição H toma as seguintes formas: “single-slope” ($c = 1$, $\alpha_b = \alpha_f$), “knee” ($c = 1$) ou “divot” ($c > 1$); onde as distribuições de magnitude H “knee” ou “divot” seguem duas leis de potência única unidas na magnitude H_b .

Os TNOs dispersos, devido a suas distâncias ao periélio, fornecem medidas de tamanhos menores do que em qualquer outra população distante de corpos menores, tendo assim uma amostra de TNOs que cruzam a transição desde objetos maiores (“slope” empinada) à objetos menores (“slope” superficial).

A medida da distribuição H certa de TNOs dispersos consiste no seguinte. Se selecionam os TNOs dispersos no estado final (4.5 Gyr) de uma simulação dinâmica da evolução do sistema solar, as órbitas deles são aleatoriamente orientadas (aleatórios ω e Ω) assim como também suas localizações na órbita (aleatória M , o que define a distância). A distribuição orbital resultante é unida a uma distribuição H candidata num filtro específico, uma distribuição de cor e efeitos de curva de luz; calculando assim a magnitude aparente. O simulador de estudo determina se os objetos com uma certa magnitude, taxa de movimento e posição no céu foram detectados e rastreados nos estudos que detectaram a amostra observacional. Uma vez produzido um conjunto de objetos enviesados observacionalmente numa forma que se ajustam aos viés presentes na amostra observada pelos “surveys”, se realiza uma comparação estatística com a amostra observacional, testando se o modelo é uma boa representação das observações. Shankman et al. (2016) mostraram que a análise estatística não é fortemente dependente da

⁴A magnitude aparente que o objeto teria a uma distância heliocêntrica e geocêntrica de 1 au.

eleição da distribuição de cor nem do modelo orbital, portanto a rejeição de um dado modelo usado para gerar as detecções simuladas é a rejeição da distribuição H candidata, podendo conseqüentemente determinar a distribuição H dos TNOs dispersos. O teste do modelo consiste em comparar estatisticamente distribuições acumuladas das detecções simuladas com as correspondentes a amostra observada em três parâmetros orbitais (a , i e q) e três parâmetros observados (magnitude H , distância na detecção d e magnitude na detecção m), mediante o teste Anderson-Darling⁵ (AD). O modelo é testado somando as métricas AD para todas as distribuições. A soma será pequena se todas as distribuições estão em bom acordo, grande se uma está em mau acordo ou várias estão em moderadamente mau acordo, e maior ainda se todas estão em mau acordo.

Recentemente, Lawler et al. (2018) exploraram a distribuição H de TNOs dispersos considerando 17 Centauros⁶ e 51 objetos dispersos detectados por “surveys” bem caracterizados (*OSSOS*, *The Canada-France Ecliptic Plane Survey*, *the CFEPS high latitude component* e o estudo de Alexandersen et al. (2016)); onde as magnitudes limites, “pointings” e eficiências de rastreamento são conhecidos e publicados. As distribuições H foram testadas considerando uma grade em α_f de 0.1 a 0.9 e em c de 1 a 100, com duas diferentes magnitudes de corte, $H_b = 7.7$ e 8.3, sugeridos em trabalhos prévios por populações do Cinturão de Kuiper dinamicamente quente (Fraser et al. (2014) e Shankman et al. (2016), respectivamente); usando em todos os modelos $\alpha_b = 0.9$ (Gladman et al., 2012). Eles confirmaram que a distribuição H de TNOs dispersos e Centauros não é consistente com uma “slope” única, mas distribuições “divot” ou “knee” fornecem ajustes aceitáveis à amostra observacional (vide figura 3.7). A distribuição H “divot” preferida dos autores faz transição à $\alpha_f = 0.5$ com um contraste $c = 3.2$ em $H_b = 8.3$, enquanto que sua distribuição H “knee” preferida faz transição à $\alpha_f = 0.4$ para o corte em tamanhos maiores de TNOs, $H_b = 7.7$.

⁵A diferença do teste de Kolmogorov-Smirnov, mais sensível ao centro da distribuição, o teste Anderson-Darling é muito mais sensível às caudas da mesma.

⁶Já que os Centauros mostram uma evolução similar em a e representam valores de a menores da população dispersa, é esperado que os Centauros e os objetos dispersos compartilhem a mesma distribuição H (Lawler et al., 2018).

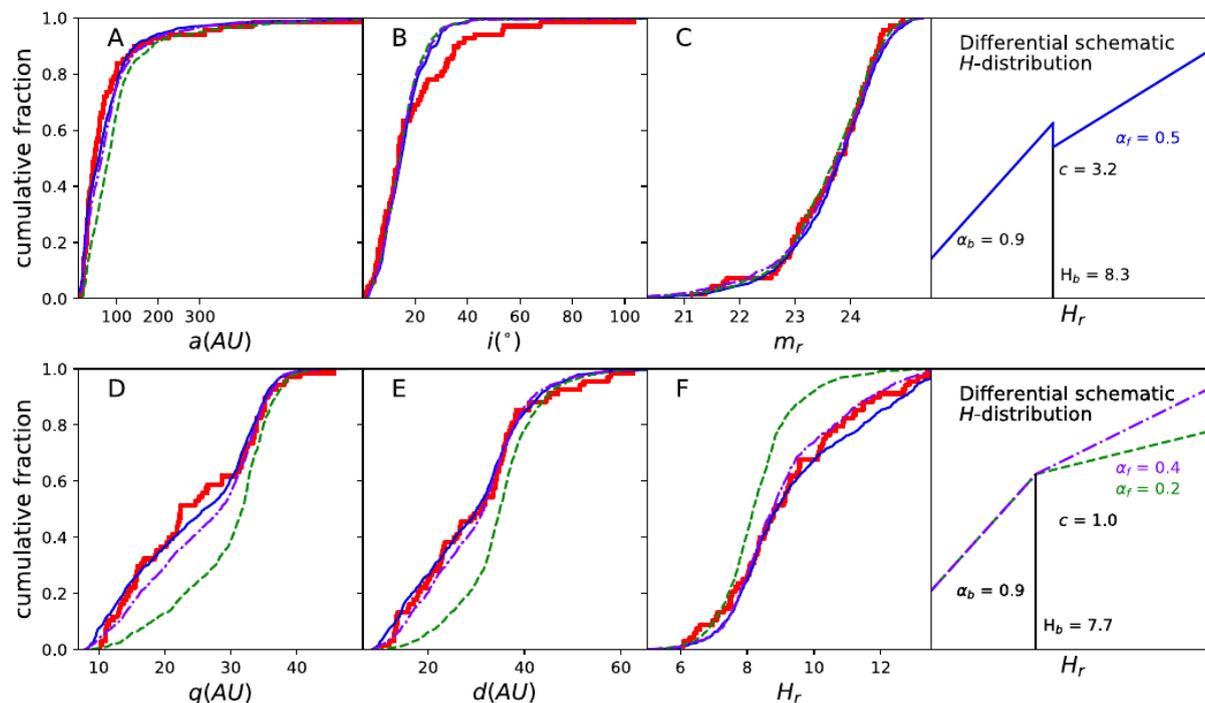


FIGURA 3.7: Distribuições acumuladas em 6 parâmetros correspondentes aos 68 TNOs dispersos e Centauros observados (em vermelho), os preferidos “divot” (em azul) e “knee” (em violeta) de Lawler et al. (2018) e a distribuição “knee” que fornece o melhor ajuste de Fraser et al. (2014) (em verde). Os painéis A – F correspondem ao semieixo maior (a), inclinação (i), magnitude na detecção na banda r (m_r), pericentro (q), distância na detecção (d) e magnitude absoluta na banda r (H_r). Os painéis mais à direita mostram os esquemas para as três distribuições H mencionadas. O modelo orbital considerado (Kaib et al., 2011) gera uma escassez de objetos com alta inclinação para ajustar às observações. Alguns mecanismos sugeridos na literatura para superar a dificuldade de gerar objetos com alta inclinação incluem difusão desde a Nuvem de Oort (Brasser et al., 2012), interação com um planeta massivo distante (Gomes et al., 2015) e interação com um “rouge planet” (Gladman and Chan, 2006). Ao não ser representativa da amostra observada é excluída da análise, assim como a distribuição em a que é fortemente sensível à distribuição mencionada anteriormente (vide figura 6 em Shankman et al. (2016)).

Capítulo 4

Resultados

Neste capítulo apresentamos os resultados das integrações numéricas para os 3 conjuntos de modelos descritos na Metodologia. A órbita do Planeta 9 é restringida comparando o grau de confinamento de nossas partículas simuladas com os confinamentos observados nos TNOs distantes. Nós levamos em conta também as restrições dadas por outras populações Trans-Netunianas.

4.1 Modelos 1

Estes modelos consideram órbitas do Planeta 9 com $a_9 = 700$ au e $a_9 = 1500$ au, partículas inicialmente já espalhadas e os planetas gigantes conhecidos inicializados nas suas configurações atuais.

4.1.1 Confinamento de TNOs Distantes

As evoluções temporais das frequências principal (N_1) e secundária (N_2) nos ângulos Ω , ω e ϖ obtidos a partir de histogramas mostram confinamentos angulares melhores definidos durante o primeiro bilhão de anos em quase todos nossos modelos. As figuras 4.1a e 4.1b apresentam os resultados para dois casos extremos de distâncias ao periélio do Planeta 9, $q_9 = 60$ au e $q_9 = 300$ au, para um semieixo maior de 1500 au. Estas figuras sugerem que frequências mais altas, portanto, confinamentos mais estreitos, são usualmente associados com distâncias ao periélio menores do Planeta 9. Esta tendência é também notada nos modelos com $a_9 = 700$ au.

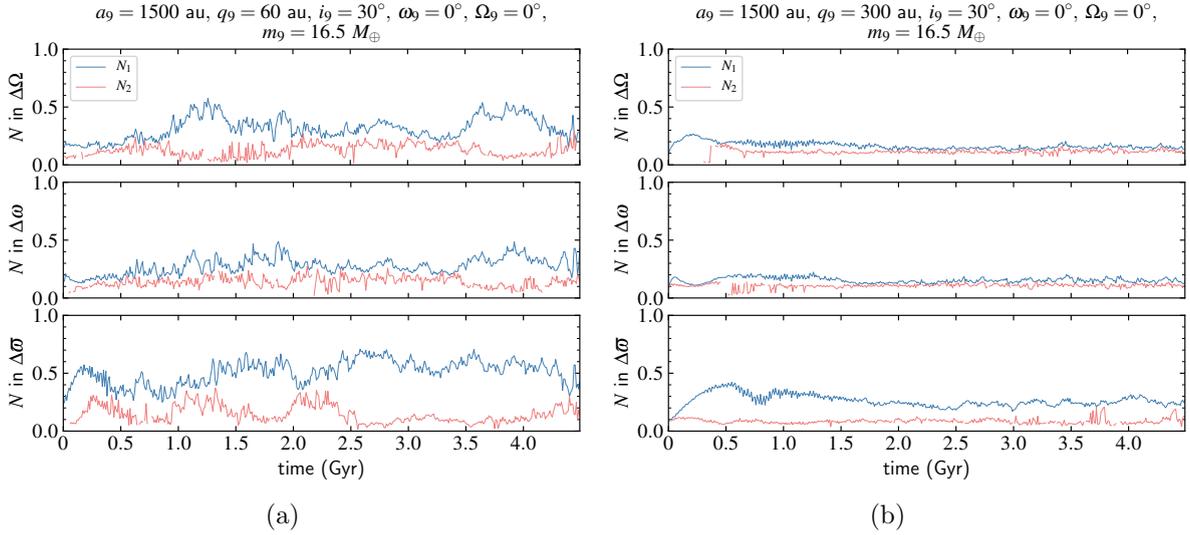


FIGURA 4.1: a) Frequências principal, N_1 , e secundária, N_2 , em Ω , ω e ϖ como função do tempo mostrados com cor azul e vermelho, respectivamente; para o modelo $a1500 - q60 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$. b) Mesmo que a figura anterior para o modelo $a1500 - q300 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$. Os valores das frequências N_1 e N_2 são bastantes baixos, principalmente em Ω e ω , onde as frequências principal e secundária tem similares baixos valores implicando que não existe um confinamento bem definido.

Os ângulos correspondentes às frequências principal e secundária são calculados em relação aos do Planeta 9 ($\Delta\Omega$, $\Delta\omega$ e $\Delta\varpi$). Na maioria de nossos modelos, o Planeta 9 conduz a um pastoreio na longitude do periélio do conjunto de partículas mais estreitamente confinado (aqueles dentro do intervalo angular correspondente à frequência mais alta), e em vários de nossos modelos isto é também verificado para as partículas que pertencem ao segundo confinamento.

A figura 4.2a mostra um claro exemplo deste comportamento, onde a distância angular entre ambos confinamentos em ϖ não se mantém constante e em 4.5 Gyr é de $\sim 100^\circ$. Nós notamos também que as frequências principal e secundária trocam de posições várias vezes. Comparando isto com a figura 4.1a, podemos notar que esta mudança acontece quando as frequências N_1 e N_2 têm similares valores. Para Ω e ω , a distância angular entre o centro de agrupamento angular das partículas e o ângulo correspondente do Planeta 9 não é tão bem definido no tempo, mas em alguns de nossos modelos, as distâncias relativas $\Delta\Omega$ e $\Delta\omega$ correspondentes às frequências mais altas também permanecem constantes por aproximadamente o último Gyr. Modelos com distâncias ao periélio grandes mostram uma grande dispersão nos ângulos relativos (vide figura 4.2b). Quanto maior o valor das frequências, mais bem definidas são as distâncias angulares.

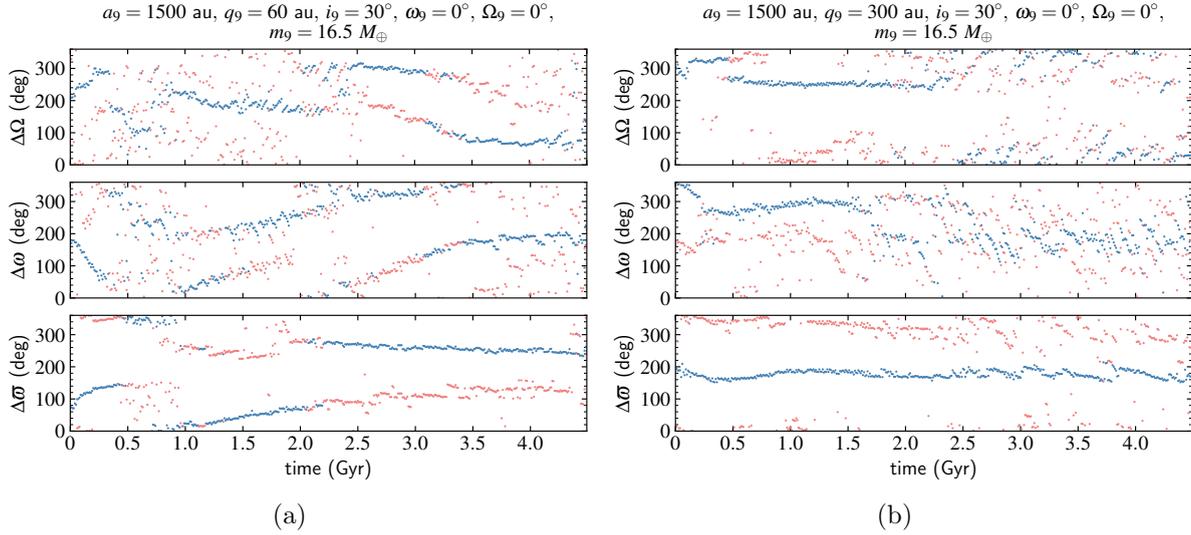


FIGURA 4.2: a) Ângulos das partículas em relação aos do Planeta 9, correspondentes as frequências principal e secundária mostrados em azul e vermelho, respectivamente; para o modelo $a_{1500} - q_{60} - i_{30} - \omega_0 - \Omega_0 - m_{16.5}$. Para ϖ , os confinamentos principal e secundário intercambiam posições várias vezes até ~ 2 Gyr, onde o confinamento principal é conservado aproximadamente inalterado. b) Mesmo que a figura anterior para o modelo $a_{1500} - q_{300} - i_{30} - \omega_0 - \Omega_0 - m_{16.5}$. As partículas não mantêm uma distância relativa aproximadamente constante nos últimos bilhões de anos em $\Delta\Omega$ nem $\Delta\omega$, como esperado para grandes distâncias ao periélio do Planeta 9.

A medida de s , de quanto a frequência principal N_1 difere da correspondente a uma distribuição aleatória contendo o mesmo número de pontos, mostra que os confinamentos nos três elementos angulares Ω , ω e ϖ do modelo com $q_9 = 60$ au (figura 4.3a) são muito diferentes ao de uma distribuição randômica. No caso do modelo com $q_9 = 300$ au (figura 4.3b), pode-se observar que a partir de ~ 1.5 Gyr não existem confinamentos em Ω nem ω , não obstante, existe um confinamento apreciável em ϖ .

Nossa análise do confinamento como função do tempo confirma nossos resultados prévios. Em todos os modelos, um melhor confinamento para as partículas é reproduzido para ϖ do que para Ω ou ω e planetas com distâncias ao periélio menores são associados com melhores confinamentos das partículas (compare figuras 4.4a e 4.4b). Para modelos com $q_9 \gtrsim 200$ au, os confinamentos, principalmente em Ω e ω , são próximos aos que seriam esperados no caso de uma distribuição uniforme produzida aleatoriamente nestes elementos angulares quando o procedimento para determinar o confinamento é aplicado.

Os resultados obtidos até aqui mostram, em geral, que distâncias ao periélio menores do Planeta 9 produzem confinamentos melhores definidos nos TNOs distantes. Estes resultados são quantificados na Tabela 4.2 para todos os modelos. Porém, algumas restrições que um planeta externo com uma distância ao periélio baixa deve satisfazer são: i) manter a proporção existente entre o número de objetos destacados e espalhados, já que um planeta distante tende a povoar a região dos objetos destacados, e ii) preservar o Cinturão de Kuiper Clássico. Estas restrições para q_9 baixo serão consideradas a seguir.

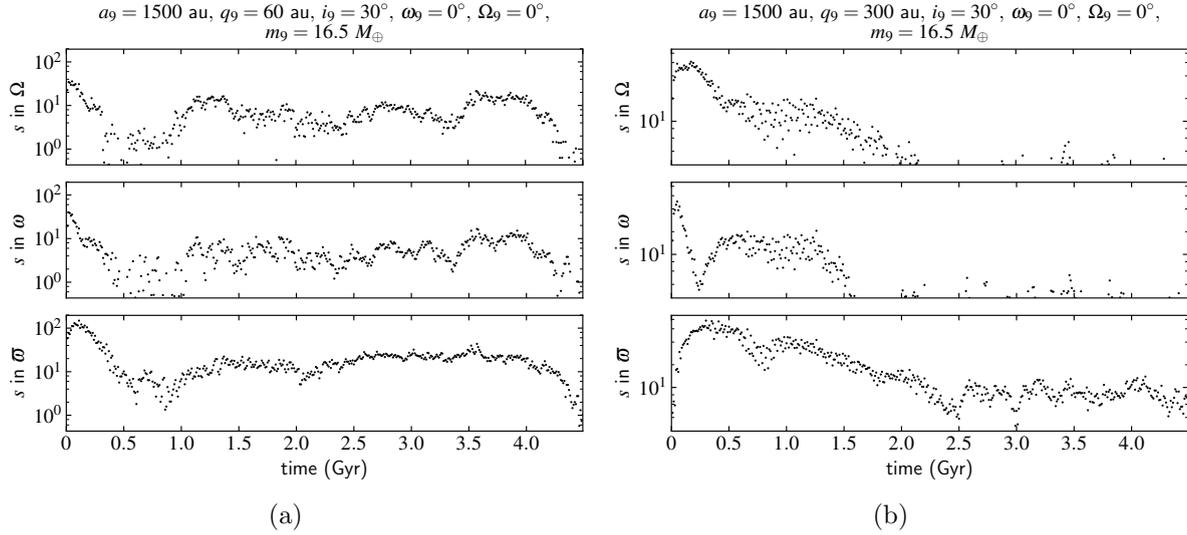


FIGURA 4.3: a) s em escala logarítmica como função do tempo em Ω , ω e π , para o modelo $a1500 - q60 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$. b) Mesmo que a figura anterior para o modelo $a1500 - q300 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$.

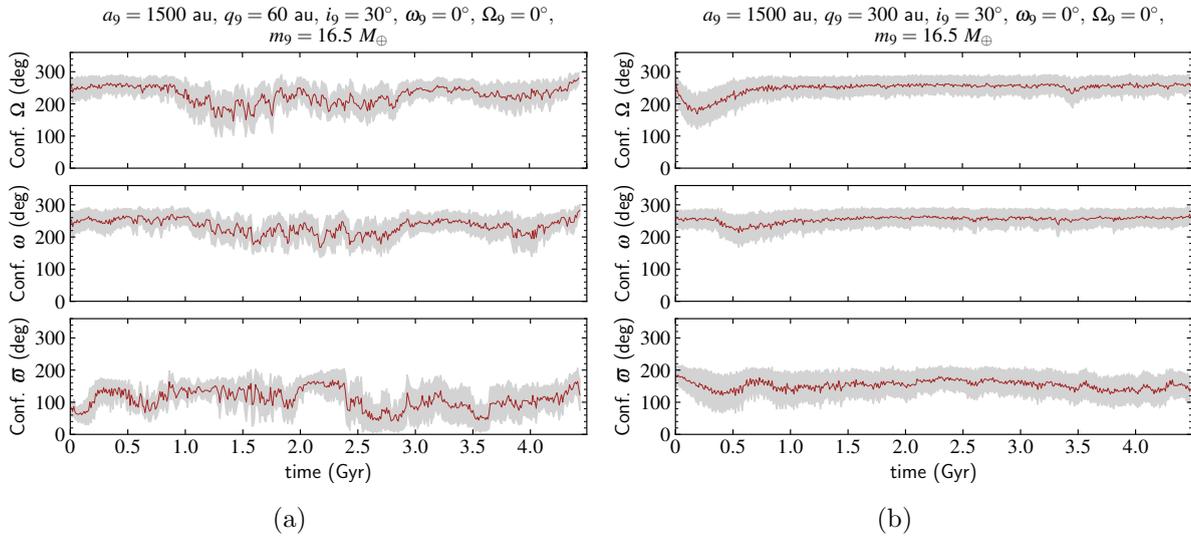


FIGURA 4.4: a) Média e desvio padrão dos confinamentos das partículas em Ω , ω e π como função do tempo mostrado em vermelho e cinza, respectivamente, para o modelo $a1500 - q60 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$. b) Mesmo que a figura anterior para o modelo $a1500 - q300 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$. Desde aproximadamente 1 Gyr, os resultados são muito similares aos que seriam esperados no caso de uma distribuição aleatória.

4.1.2 Razão entre Objetos Espalhados e Destacados

Brown and Batygin (2016) procuraram órbitas do Planeta 9 que produzissem confinamentos nos elementos orbitais angulares de TNOs distantes que melhor se comparassem aos confinamentos dos TNOs observados. Um de seus critérios foi descartar aqueles parâmetros orbitais do Planeta 9 que conduzem à geração de demasiadas partículas com distância ao periélio $q > 42 \text{ au}$ na faixa $100 \text{ au} < a < 200 \text{ au}$, devido à não existência de tais objetos observados; a saber, eles aparentemente atribuem uma probabilidade nula à planetas com a_9 baixo e e_9 alto (valores

baixos de q_9), já que estes são propensos a produzir objetos com distância ao periélio altas naquela região.

Nesta seção nós analisamos a influência de um Planeta 9 com distância ao periélio baixa sobre os objetos na região $100 \text{ au} < a < 200 \text{ au}$, ao considerar a razão entre o número de objetos do disco disperso e da população destacada.

Atualmente, existem 46 objetos observados em mais do que uma oposição com $q > 30$ au na faixa $100 \text{ au} < a < 200 \text{ au}$, segundo a base de dados do MPC¹. Desses, 5 apresentam $q > 40$ au, a saber: 2013 GP₁₃₆, 2013 UT₁₅, 2014 SS₃₄₉, 2015 KE₁₇₂, 2015 KH₁₆₃.

Para analisar a razão entre objetos destacados e espalhados naquela faixa de semieixo maior, nós aplicamos o OBIP (Gomes et al., 2015) às partículas simuladas para cada modelo que desde 4.4 Gyr pertencem à faixa $100 \text{ au} < a < 200 \text{ au}$ e $q > 30$ au (com as saídas referidas ao plano iv_4 momentâneo), pegamos uma amostra de 46 objetos que podem ser observados e determinamos o número deles que apresentam $q > 40$ au.

O OBIP é um procedimento que consiste em atribuir diferentes tamanhos e um certo albedo aos objetos simulados a fim de obter suas magnitudes visuais, determinando assim aqueles que seriam observáveis até uma certa magnitude visual. Os tamanhos são determinados por uma função de distribuição acumulativa de tamanhos que segue uma lei de potência:

$$N(r) = N_0 \left(\frac{R_0}{r} \right)^\gamma \quad (4.1)$$

onde N é o número de objetos com raio maior do que r , N_0 é um fator de escala, γ é um parâmetro empírico obtido a partir de observações e R_0 é o raio por acima do qual existe só um objeto, de modo que $N(R_0) = 1$. Nós consideramos uma distribuição de tamanho com três parâmetros γ (Fraser et al. (2010), Shankman et al. (2013), Fraser et al. (2014)): $\gamma = 3$, $\gamma = 5$ e $\gamma = 2$; para raios nos intervalos $r > 200 \text{ km}$, $50 \text{ km} < r < 200 \text{ km}$ e $r < 50 \text{ km}$, respectivamente. O maior r (R_0) é determinado associando-o com a magnitude visual de 20.1, que é aproximadamente a magnitude do TNO mais brilhante com $100 \text{ au} < a < 200 \text{ au}$ e $q > 30$ au.

A coleção de tamanhos é associada aleatoriamente às órbitas das partículas simuladas em consideração e suas longitudes médias são escolhidas aleatoriamente entre $0^\circ - 360^\circ$. Os albedos foram tomados como 0.25. O OBIP foi aplicado até uma magnitude visual de 25 e entre latitudes eclípticas de $\pm 30^\circ$.

A seguir, nós determinamos o número de objetos com $q > 40$ au dentre os 46 objetos mais brilhantes dados pelo OBIP com $100 \text{ au} < a < 200 \text{ au}$ e $q > 30$ au. Este processo é iterado 1000 vezes de forma a obter uma média e desvio padrão do número de objetos com $q > 40$ au. Os valores obtidos para todos os modelos são apresentados na Tabela 4.3 e são comparados com o correspondente aos objetos destacados observados em $100 \text{ au} < a < 200 \text{ au}$, cujo valor é de 5, na figura 4.5, para corridas com $i_9 = 30^\circ$ e $\omega_9 = 0^\circ$.

¹Até Julho de 2019.

Embora nós possamos apreciar alguma tendência para um número maior de objetos determinados pelo OBIP com $q > 40$ au para um Planeta 9 com q_9 menor, esta tendência não está bem definida como para estabelecer um Planeta 9 com baixo periélio como proibitivo ou ainda improvável (figura 4.5). Um exemplo típico é o Planeta 9 com $a_9 = 700$ au e $q_9 = 60$ au, o OBIP determina uma média de 6.79 objetos com $q > 40$ au e desvio padrão de 2.58, assim 5 objetos está dentro do intervalo de números estatisticamente aceitável. A maioria dos modelos do Planeta 9 dão resultados estatisticamente coerentes em relação à razão de objetos observáveis destacados à espalhados, o que sugere que parâmetros orbitais do Planeta 9 com q_9 baixo não deveriam ser descartados como sugerido em [Brown and Batygin \(2016\)](#).

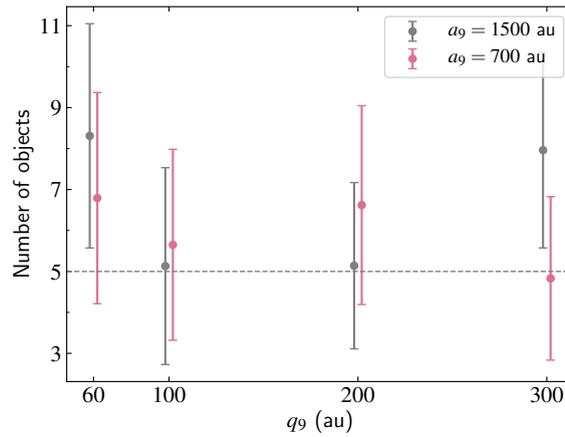


FIGURA 4.5: Média do número de objetos observáveis, após 1000 realizações do OBIP, com $q > 40$ au entre os 46 mais brilhantes com $100 \text{ au} < a < 200 \text{ au}$ e $q > 30$ au. Os resultados são mostrados para modelos com $i_9 = 30^\circ$ e $\omega_9 = 0^\circ$, como função da distância ao periélio do Planeta 9. As barras representam os desvios padrões dos valores médios. A linha tracejada representa o valor real do número de objetos destacados.

4.1.3 Preservação do Cinturão de Kuiper Clássico

A seguir analisamos a influência de um Planeta 9 com distância ao periélio baixa sobre os objetos do Cinturão de Kuiper Clássico, dinamicamente frios e dinamicamente quentes.

4.1.3.1 Cinturão de Kuiper Clássico Frio

Para analisar a influência do Planeta 9 sobre os objetos frios do Cinturão de Kuiper Clássico, nós realizamos duas novas integrações numéricas que consideram a menor distância ao periélio para o planeta dentre nossas grades: $a700-q60-i30-\omega0-\Omega0-m10$ e $a1500-q60-i30-\omega0-\Omega0-m16.5$. Ambas simulações foram realizadas com um tempo de integração de 4.5 Gyr e considerando inicialmente a configuração orbital atual dos quatro planetas gigantes, o respectivo perturbador externo e um disco composto de 2000 partículas testes com $42.5 \text{ au} < a < 46 \text{ au}$, $0 < e < 0.01$, $0^\circ < i < 0^\circ.6$ e restantes elementos orbitais aleatoriamente distribuídos entre 0° e 360° . Nós escolhemos um disco visivelmente frio para verificar não apenas a compatibilidade do Planeta 9

com o Cinturão de Kuiper Clássico Frio (CCKB, em inglês), mas também se o Planeta 9 poderia ser responsável por algumas das excitações que encontramos atualmente lá.

Ambos modelos testados apresentam resultados similares (vide figuras 4.6a e 4.6b). O Planeta 9 gera uma dispersão das partículas para dentro e para fora. Aquelas são, porém, desestabilizadas uma vez que entram na região de ressonância secular; portanto, o efeito principal é conduzir os semieixos maiores das partículas à valores mais altos. As excentricidades assim como as inclinações foram excitadas dentro dos valores da população fria observada.

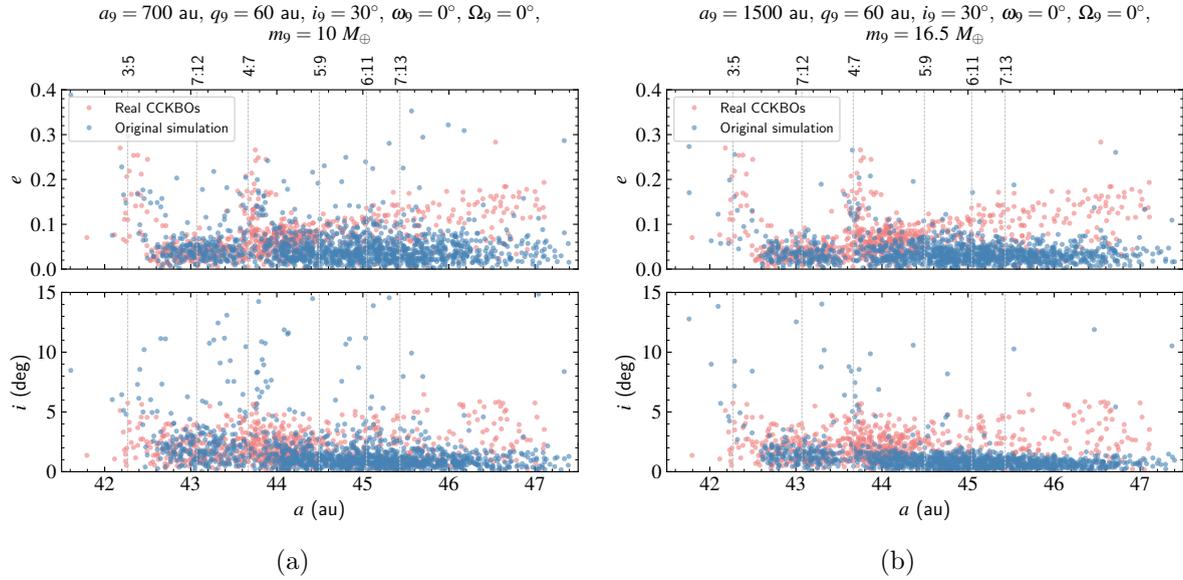


FIGURA 4.6: a) Excentricidade e inclinação como função do semieixo maior para os objetos reais do CCKB (CCKBOs) e partículas simuladas em 4.5 Gyr considerando o modelo $a700 - q60 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m10$, em vermelho e azul, respectivamente. As partículas simuladas tiveram inicialmente semieixos maiores entre 42.5 e 46 au em órbitas quase circulares e de baixa inclinação. b) Mesmo que a figura anterior para o modelo $a1500 - q60 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$.

Assumindo uma formação local, as bordas originais do disco frio são desconhecidas. Assim, a partir dos dados das simulações originais, nós podemos obter discos frios com diferentes bordas externas ao restringir os semieixos maiores iniciais das partículas; o melhor ajuste é então determinado segundo a distribuição final dos semieixos maiores das partículas no intervalo $42 \text{ au} < a < 46 \text{ au}$, quando comparado à da população fria real. As figuras 4.7a e 4.7b mostram, para cada modelo, os histogramas em semieixo maior em 4.5 Gyr para o disco original e o correspondente ao melhor ajuste. Estas figuras sugerem que a difusividade da borda externa observada do CCKB poderia ser uma assinatura da perturbação de um Planeta 9 de q_9 baixo.

Por outro lado, as excentricidades das partículas simuladas sempre têm valores baixos (vide figuras 4.8a e 4.8b), portanto, não se comparam muito bem com a distribuição de excentricidades real, principalmente para semieixos maiores mais altos ($a > 44.5 \text{ au}$). Assim, a distribuição peculiar de excentricidades do CCKB não seria explicado pelas perturbações de tal planeta com distância ao periélio baixa. Algum outro mecanismo deve ter agido para excitar as excentricidades destas partículas (por exemplo, um Netuno excitado temporariamente em um

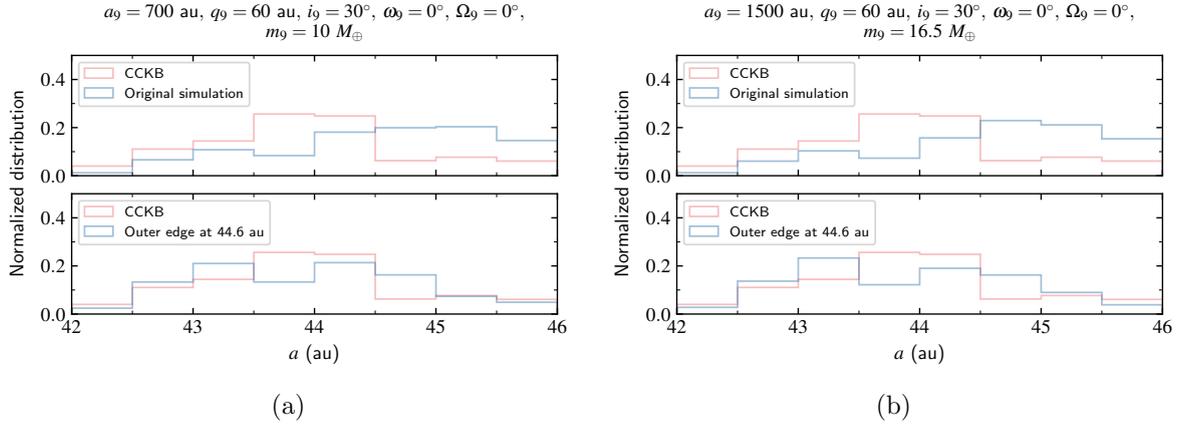


FIGURA 4.7: a) Distribuição de semieixos maiores para os objetos reais do CCKB e partículas simuladas em 4.5 Gyr para o modelo $a700 - q60 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m10$, em vermelho e azul, respectivamente. O painel superior mostra os resultados da integração original e o inferior para o melhor ajuste no truncamento da borda externa inicial do disco, em 44.6 au. b) Mesmo que a figura anterior para o modelo $a1500 - q60 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$.

modelo de migração de instabilidade planetária (Gomes et al., 2018)). As inclinações, por outro lado, se mantém dentro do intervalo das inclinações observadas no CCKB.

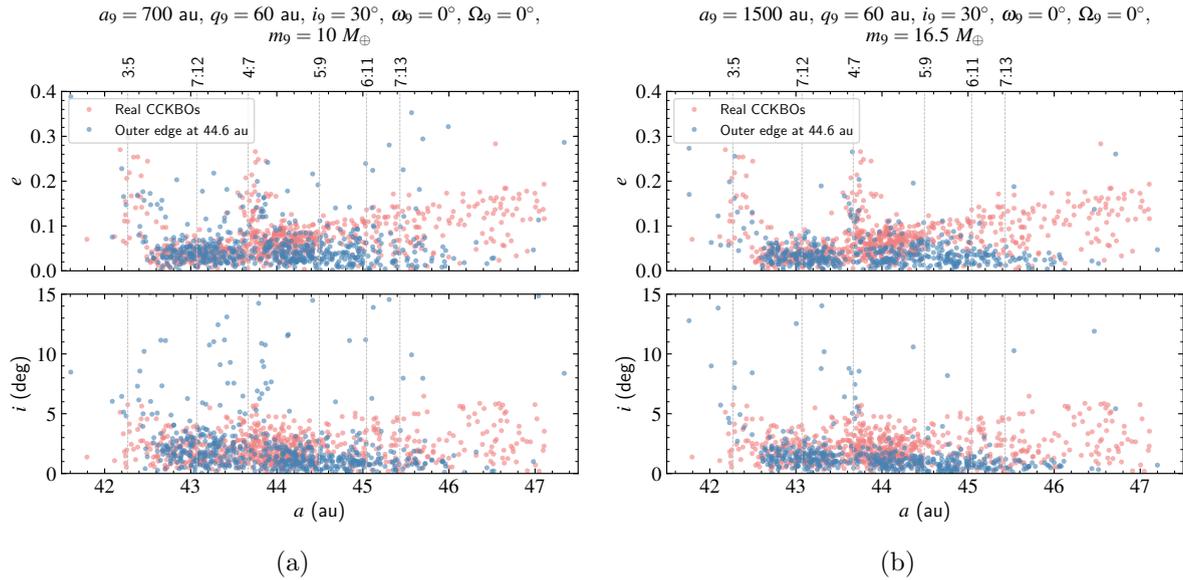


FIGURA 4.8: a) Excentricidade e inclinação como função do semieixo maior para os CCKBOs reais (vermelho) e partículas simuladas em 4.5 Gyr (azul), considerando o melhor ajuste em semieixo maior para as partículas ao truncar a borda externa inicial do disco. Resultados para o modelo $a700 - q60 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m10$. b) Mesmo que a figura anterior para o modelo $a1500 - q60 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$.

Possivelmente, a única inconsistência produzida por um Planeta 9 com q_9 baixo sobre o CCKB se refere à escassez de partículas simuladas apenas passada a ressonância 4:7. Isto é provavelmente produzido pela dispersão para fora de partículas pelo Planeta 9 e o efeito de barreira da ressonância 4:7, que deve capturar algumas das partículas migrando para fora da região interna.

4.1.3.2 Cinturão de Kuiper Clássico Quente

Para analisar a influência do Planeta 9 nos objetos quentes do Cinturão de Kuiper Clássico, nós realizamos simulações considerando a população Clássica real e objetos ressonantes do Cinturão de Kuiper para os mesmos modelos anteriores de Planeta 9: $a700 - q60 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m10$ e $a1500 - q60 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$ e, evoluímos os sistemas por 4.5 Gyr. Os elementos orbitais do Cinturão de Kuiper e dos quatro planetas gigantes conhecidos foram tomados para uma mesma data a partir do *JPL Small-Body Database*².

Os resultados mostram que um planeta com tal distância ao periélio baixa ($q_9 = 60$ au) limpa excessivamente objetos com excentricidades maiores no caso do modelo com $a_9 = 700$ au (vide figura 4.9a) e despoeva praticamente o Cinturão de Kuiper Clássico no modelo com $a_9 = 1500$ au (vide figura 4.9b). Estes resultados nos levaram a considerar distâncias ao periélio um pouco maiores para o Planeta 9.

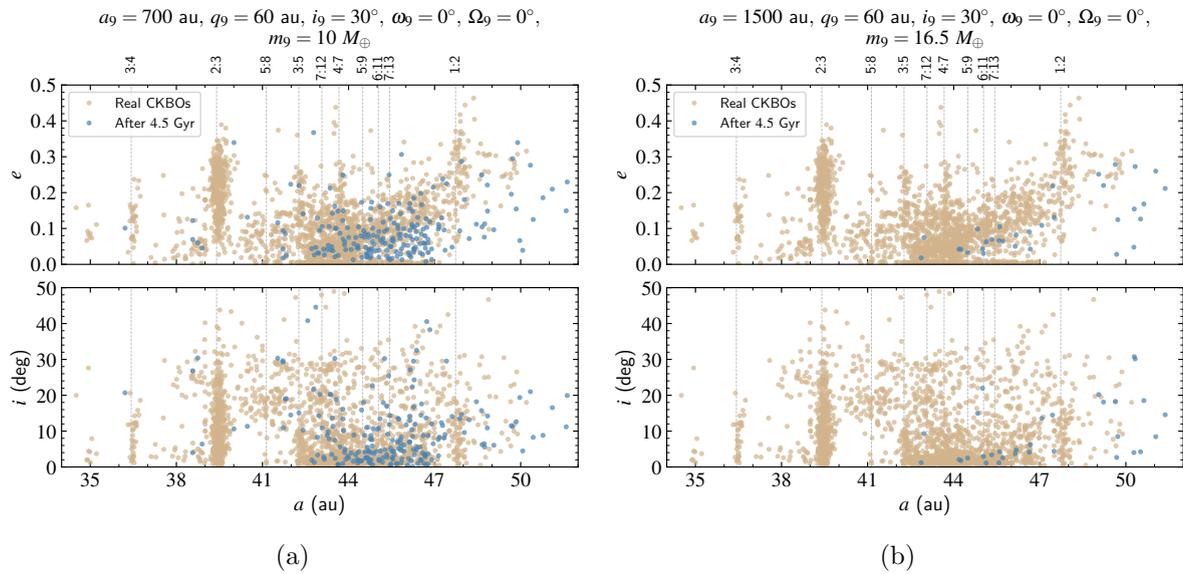


FIGURA 4.9: a) Excentricidade e inclinação como função do semieixo maior para os objetos reais do CKB (CKBOs), em marrom, e sua configuração depois de 4.5 Gyr sob a influência do Planeta 9 considerando o modelo $a700 - q60 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m10$, em azul. b) Mesmo que a figura anterior para o modelo $a1500 - q60 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$.

Nós assim realizamos integrações numéricas considerando uma distribuição teórica de partículas uniformemente e aleatoriamente distribuídas nos intervalos $38.5 \text{ au} < a < 46.5 \text{ au}$, $0 < e < 0.25$ e $0^\circ < i < 20^\circ$ sob a influência dos planetas gigantes conhecidos e comparamos os resultados com outros dois modelos que adicionalmente consideram um Planeta 9 com distância ao periélio baixa mas maior do que 60 au, a saber, $a_9 = 700$ au com $q_9 = 70$ au e $a_9 = 1500$ au com $q_9 = 90$ au. Os resultados em 4.5 Gyr são apresentados nas figuras 4.10 como a razão do número de objetos sobreviventes ao número de objetos iniciais no plano $a - e$, para objetos com qualquer inclinação e para objetos com $i < 5^\circ$.

²<https://ssd.jpl.nasa.gov/sbdb.cgi>

A figura 4.10a mostra que um modelo sem um planeta externo adicional tende a preservar mais objetos frios e quentes no extremo inferior direito do plano $a - e$. Isto é já bem conhecido porque os objetos nesta região estão longe de Netuno como para experimentar encontros próximos com ele. Ademais, a região entre aproximadamente 40 e 42 au é também depletada devido à ressonância secular ν_8 . Agora comparando as figuras 4.10a, 4.10b e 4.10c, nós notamos que o modelo com um perturbador externo com $a_9 = 1500$ au e $q_9 = 90$ au preserva as características do Cinturão de Kuiper teórico em 4.5 Gyr vistas no modelo que considera unicamente os planetas gigantes conhecidos. Os objetos quentes mostram uma boa aproximação e a maioria dos objetos nas RMM 3:5 e 4:7 (correspondentes a $a = 42.3$ au e $a = 43.7$ au, respectivamente) sobreviveram até o final do tempo de integração. O modelo que considera um planeta com $a_9 = 700$ au e $q_9 = 70$ au tem uma fração menor de objetos quentes comparados ao anterior e não conserva a maioria dos objetos em RMM.

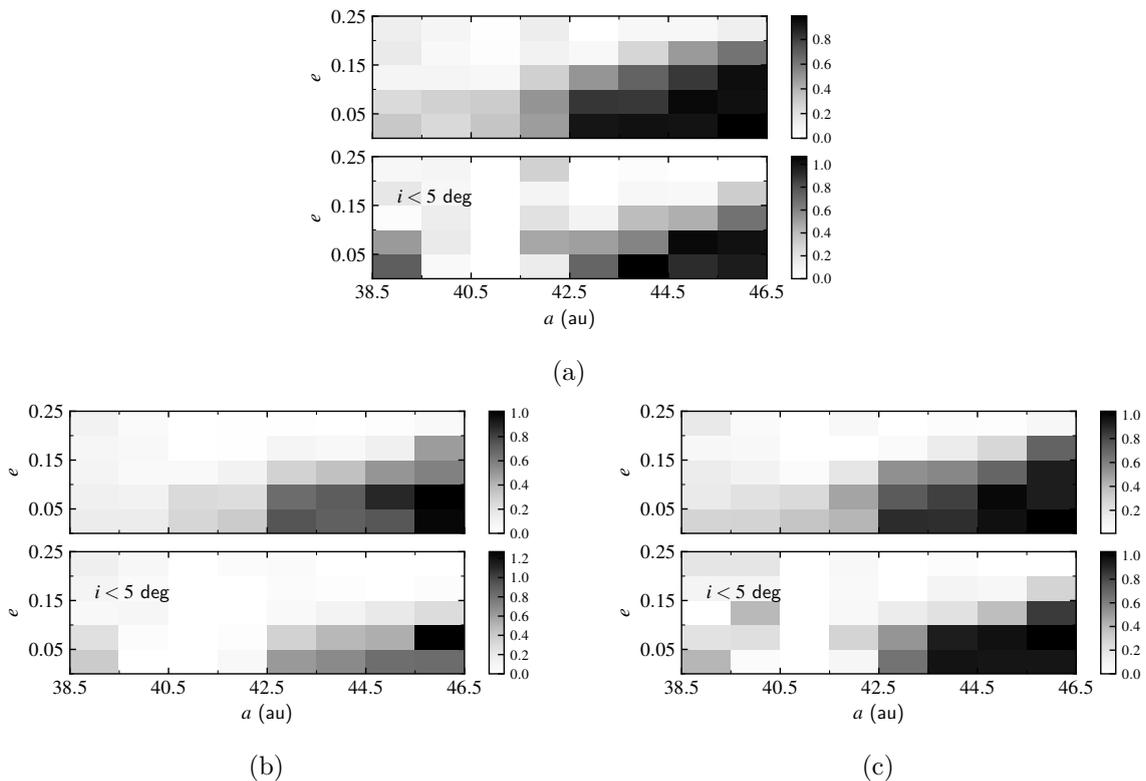


FIGURA 4.10: a) Razão do número de objetos sobreviventes ao final do tempo de integração ao número de objetos iniciais como função do semieixo maior e excentricidade a partir de uma distribuição inicialmente uniforme sob a influência dos planetas conhecidos. O painel superior considera todas as inclinações e o inferior só os objetos dinamicamente frios ($i < 5^\circ$). b) Mesmo que a figura superior mas adicionando um planeta com $a_9 = 700$ au e $q_9 = 70$ au. c) Mesmo que a figura superior mas incluindo um planeta com $a_9 = 1500$ au e $q_9 = 90$ au.

A correta comparação de distribuição de TNOs no Cinturão de Kuiper a partir de simulações com os observados faz sentido só se as corretas condições iniciais são consideradas. Por exemplo, a distribuição inicial de objetos depois da estabilização dos planetas gigantes³

³Em um cenário do Modelo de Nice, porém, um cenário de migração mais suave poderia também trabalhar neste caso.

poderia ter concentrado a maioria dos objetos em semieixos maiores menores. O Planeta 9 poderia assim deslocar os semieixos maiores para fora à uma distribuição semelhante à atual. Além desta especulação, esses últimos resultados mostram que um Planeta 9 com uma distância do periélio tão baixa quanto 90 au não afeta significativamente o Cinturão de Kuiper Clássico.

4.2 Modelos 2

Dos resultados obtidos no conjunto de modelos anterior pudemos mostrar que grades do Planeta 9 com q_9 baixas fornecem os melhores confinamentos, enquanto dão resultados estatisticamente razoáveis da razão entre objetos destacados e espalhados na faixa $100 \text{ au} < a < 200 \text{ au}$ e preservam o Cinturão de Kuiper Clássico. Estes resultados nos motivaram a procurar por novas grades, considerando dessa vez órbitas amplas para o Planeta 9 ($a_9 > 1500 \text{ au}$, de modo que estaria submetido à perturbação da maré galáctica), mas que próximo ao tempo final de integração o planeta atinja uma distância ao periélio baixa (vide figura 4.11). A distância ao periélio mínima atingida pelo Planeta 9 e o tempo em que isto acontece são registrados na Tabela 4.1 para estas simulações. As partículas foram inicializadas próximas a Netuno e os planetas gigantes conhecidos nas suas configurações atuais.

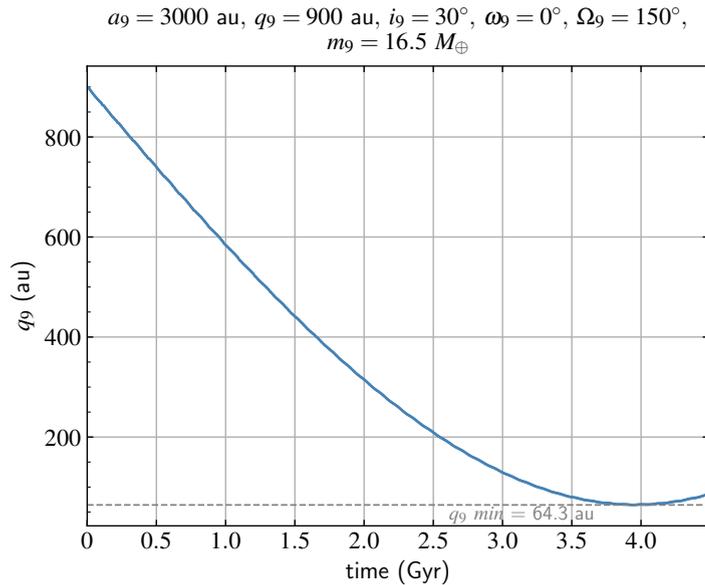


FIGURA 4.11: Distância ao periélio do Planeta 9 como função do tempo, para o modelo GT- $a3000 - q900 - i30 - \omega0 - \Omega150 - m16.5$. A variação no momento angular do Planeta 9, devido ao torque exercido pela maré galáctica, produz uma mudança na sua distância ao periélio. O q_9 inicialmente em 900 au atinge um valor mínimo de 64.3 au em ~ 4 Gyr.

Os resultados para nossas grades testadas que incluem perturbações de maré galáctica mostram genericamente que partículas inicializadas próximas a Netuno não são favorecidas em reproduzir o confinamento observado atualmente em TNOs distantes.

TABELA 4.1: Distância ao periélio mínima atingida pelo Planeta 9 durante a integração e o tempo em que atingiu esse valor, para as simulações que consideram maré galáctica.

Modelos 2	$q_9 \text{ min}$ (au)	Tempo (Gyr)
GT- $a2000 - q400 - i30 - \omega100 - \Omega50 - m16.5$	58.8	4.49
GT- $a2500 - q500 - i30 - \omega30 - \Omega140 - m16.5$	55.4	4.49
GT- $a3000 - q300 - i30 - \omega130 - \Omega190 - m16.5$	91.2	3.83
GT- $a3000 - q300 - i30 - \omega310 - \Omega20 - m16.5$	101.7	4.14
GT- $a3000 - q600 - i30 - \omega130 - \Omega20 - m16.5$	134.6	3.19
GT- $a3000 - q900 - i30 - \omega0 - \Omega150 - m16.5$	64.3	3.94
GT- $a3000 - q900 - i30 - \omega0 - \Omega150 - m16.5\text{-II}$	64.3	3.94
GT- $a3000 - q900 - i30 - \omega90 - \Omega300 - m16.5$	57.9	4.01

Os confinamentos são bem reproduzidos durante aproximadamente o primeiro Gyr em todos nossos modelos. Um exemplo disto é mostrado na figura 4.12, para o caso GT- $a3000 - q900 - i30 - \omega0 - \Omega150 - m16.5$, onde existem confinamentos relevantes em Ω , ω e ϖ no primeiro Gyr, posteriormente as frequências principais e secundárias apresentam similares valores baixos (figura 4.12a) tal que não existem concentrações preferenciais nos elementos angulares das partículas (figura 4.12b), as frequências N_1 divergem consideravelmente de uma distribuição aleatória em Ω , ω e ϖ nos primeiros $\sim 1 - 1.5$ Gyr (4.12c), os confinamentos após esse tempo são similares aos esperados para uma distribuição randômica (figura 4.12d).

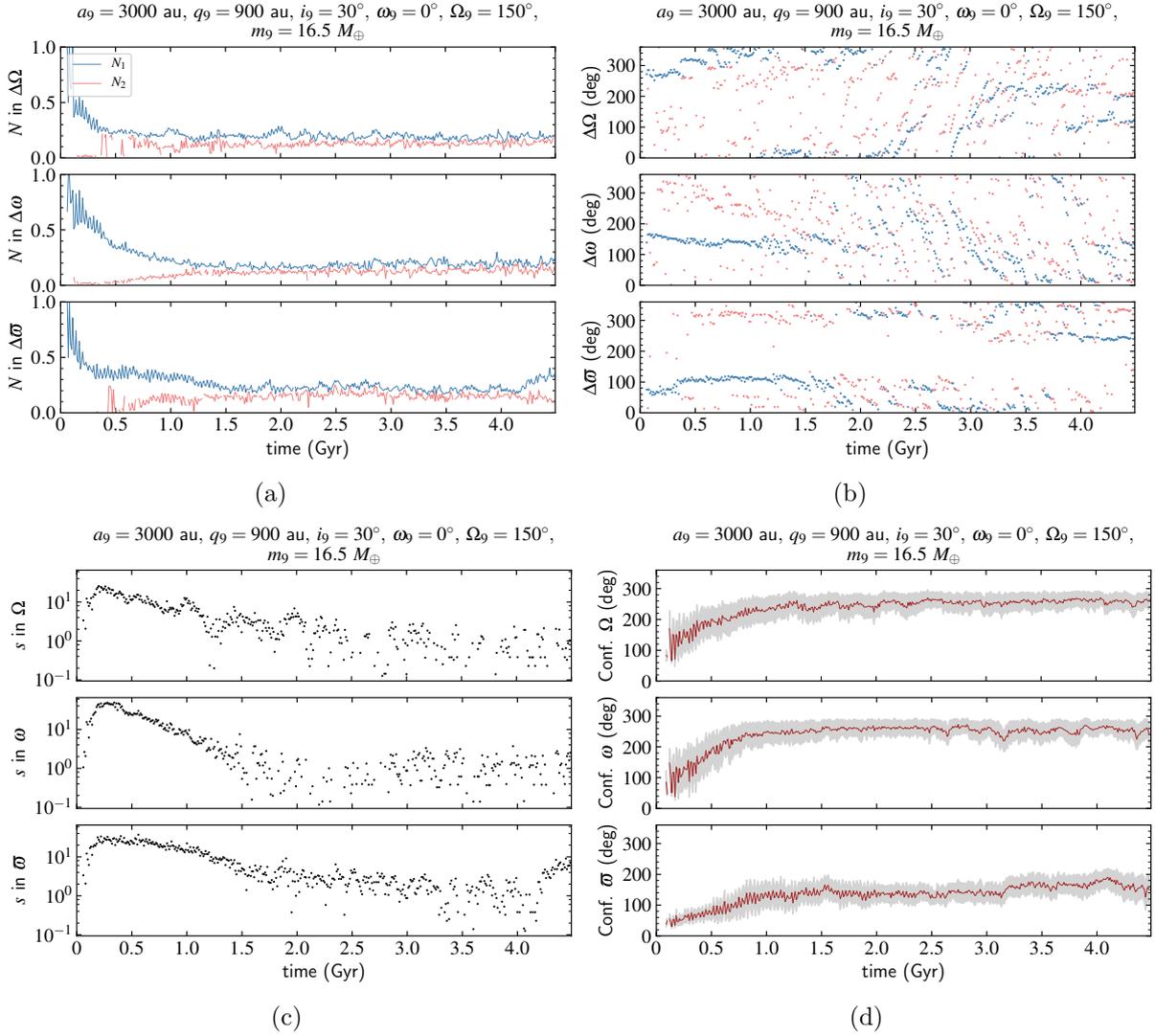


FIGURA 4.12: Os gráficos mostram os resultados para o modelo GT- $a3000 - q900 - i30 - \omega0 - \Omega150 - m16.5$. a) Frequências principal e secundária em Ω , ω e ϖ como função do tempo. b) Ângulos relativos correspondentes às frequências N_1 e N_2 como função do tempo. c) Evolução temporal de s em Ω , ω e ϖ . d) Evolução temporal dos confinamentos nos três elementos angulares.

No entanto, o mesmo modelo para o Planeta 9 mostrado na figura 4.12 foi testado considerando condições iniciais para as partículas idênticas às dos Modelos 1. Este modelo, GT- $a3000 - q900 - i30 - \omega0 - \Omega150 - m16.5 - \text{II}$, mostra que resultados diferentes são produzidos ao se considerar diferentes C.I. para as partículas (compare figuras 4.12 e 4.13). Neste caso, mesmo incluindo efeitos de maré galáctica, os confinamentos são bem reproduzidos, no início e também nos últimos Gyr de tempo de integração, sendo relevante em ϖ . Estes resultados sugerem que as condições iniciais podem ter uma influência considerável na indução dos confinamentos. Desta forma, os resultados aparentemente negativos para Planetas 9 de grande semieixo maior pode ter sido mais consequência das condições iniciais das partículas do que mesmo dos planetas. O confinamento para todos os modelos são quantificados na Tabela 4.2.

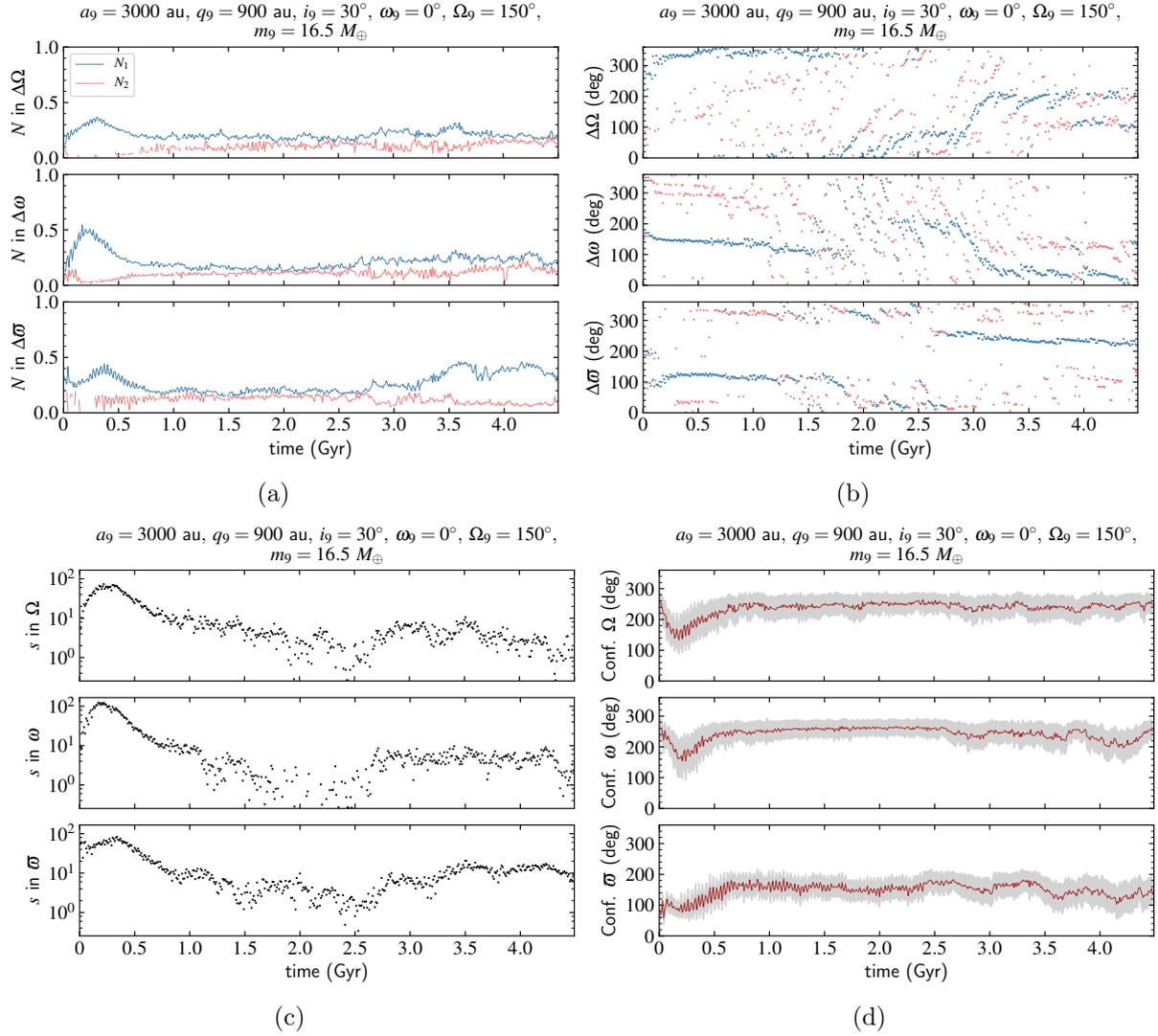


FIGURA 4.13: Os gráficos mostram os resultados para o modelo GT- $a3000 - q900 - i30 - \omega_0 - \Omega150 - m16.5 - \text{II}$. a) Frequências principal e secundária em Ω , ω e ϖ como função do tempo. b) Ângulos relativos correspondentes às frequências N_1 e N_2 como função do tempo. c) Evolução temporal de s em Ω , ω e ϖ . d) Evolução temporal dos confinamentos nos três elementos angulares.

A figura 4.14 apresenta os resultados da razão entre objetos destacados e espalhados na faixa $100 \text{ au} < a < 200 \text{ au}$, após a aplicação do OBIP, para grades do segundo conjunto de modelos que consideram um Planeta 9 com $a_9 = 3000 \text{ au}$. Pode-se observar que o 50% deles dão resultados estatisticamente razoáveis quando comparados ao valor real. Os resultados para todas as grades estão quantificados na Tabela 4.3.

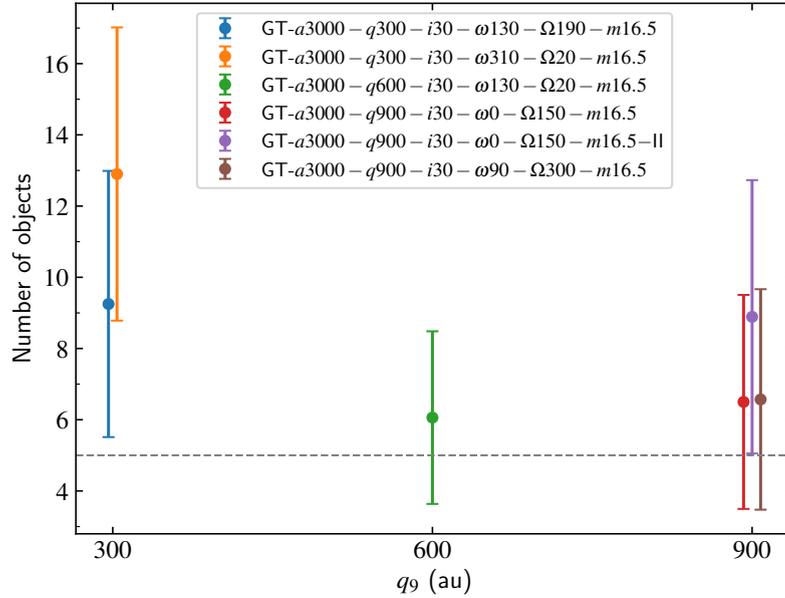


FIGURA 4.14: Média do número de objetos observáveis, após 1000 realizações do OBIP, com $q > 40$ au entre os 46 mais brilhantes com $100 \text{ au} < a < 200 \text{ au}$ e $q > 30 \text{ au}$, como função da distância ao periélio do Planeta 9. As barras representam os desvios padrões dos valores médios. A linha tracejada representa o valor real do número de objetos destacados.

4.3 Modelo 3

O modelo testado aqui considera inicialmente a migração residual de Netuno e Urano, Júpiter e Saturno em suas órbitas atuais, o Planeta 9 numa órbita ampla e partículas próximas de Netuno (como no conjunto anterior). As C.I. do Planeta 9 neste modelo foram também consideradas no conjunto de Modelos 2.

A análise dos confinamentos das partículas no Modelo 3 (vide figura 4.15 e Tabela 4.2) não apresenta bons resultados, estes são similares aos de sua contraparte sem migração. Em comparação ao modelo GT-a3000-q600-i30-ω130-Ω20-m16.5, o modelo com migração só apresenta frequências N_1 diferentes às esperadas para uma distribuição aleatória em Ω e ω até $\sim 1 \text{ Gyr}$. O fato do modelo com maré galáctica mostrar resultados um pouco melhores, pode ser devido a que um Planeta 9 submetido à maré da galáxia produz uma maior quantidade de objetos destacados do que o modelo com só migração, os quais pertenceriam ao intervalo para análise ($i < 30^\circ$). Depois desse tempo, os resultados não seriam muito diferentes porque provavelmente em ambos os modelos a inclinação média das partículas estaria mudando para uma faixa diferente do que a considerada nas análises.

Deve se notar, porém, que o Modelo 3 não inclui a perturbação da galáxia, pelo que uma comparação mais realística deveria ter em conta esse efeito.

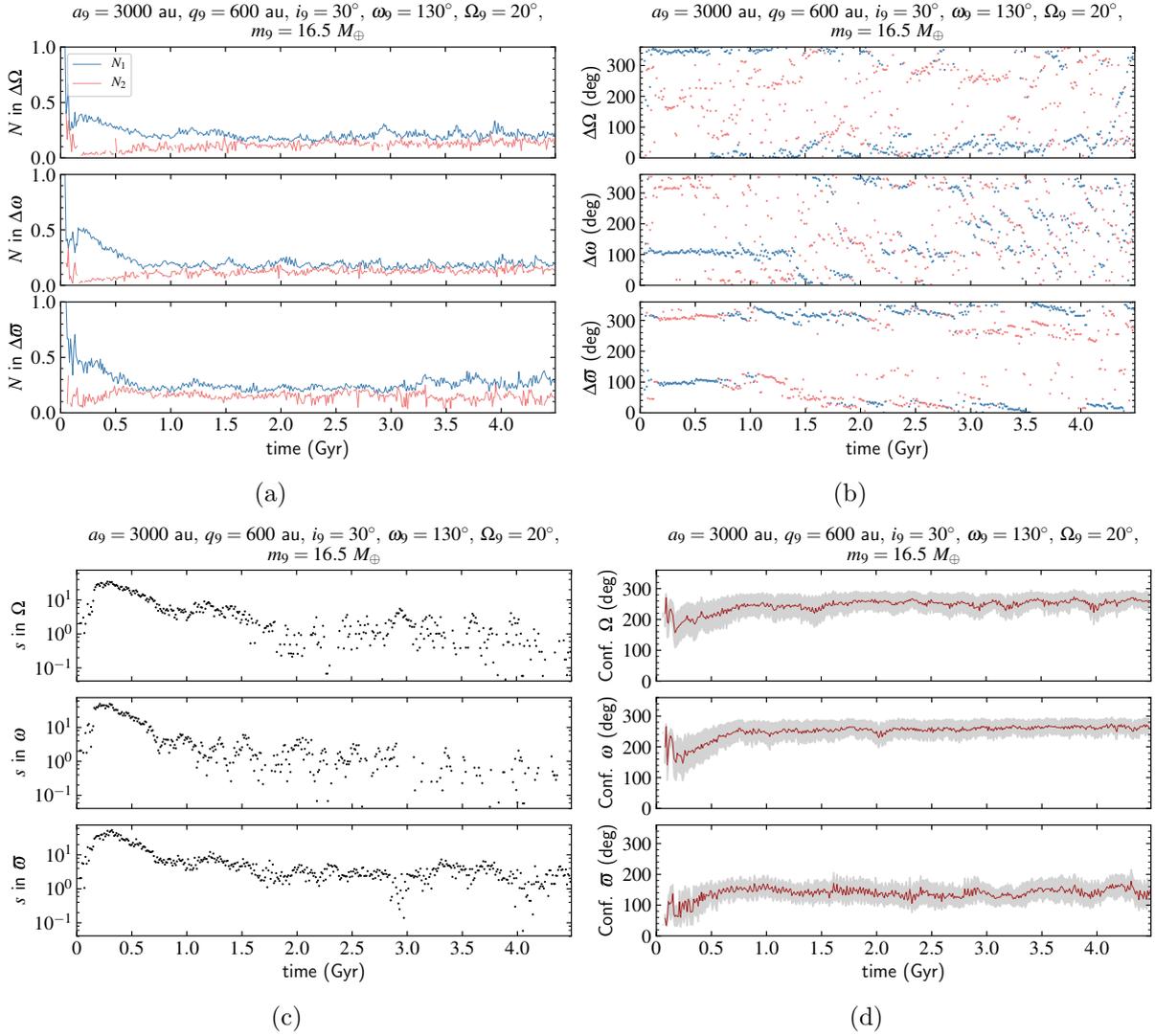


FIGURA 4.15: Os gráficos mostram os resultados para o modelo mig-a3000 - q600 - i30 - ω 130 - Ω 20 - m16.5. a) Frequências principal e secundária em Ω , ω e ϖ como função do tempo. b) Ângulos relativos correspondentes as frequências N_1 e N_2 como função do tempo. c) Evolução temporal de s em Ω , ω e ϖ . d) Evolução temporal dos confinamentos nos três elementos angulares.

Finalmente, uma corrida básica com migração residual de Netuno e Urano mas sem o Planeta 9 foi também realizada (figura 4.16) para inferir qual é o efeito de ter ou não o planeta sobre a distribuição de objetos Trans-Netunianos. Esta última corrida não é utilizada para testar o confinamento de TNOs *distantes*, já que para isso é preciso invocar algum mecanismo.

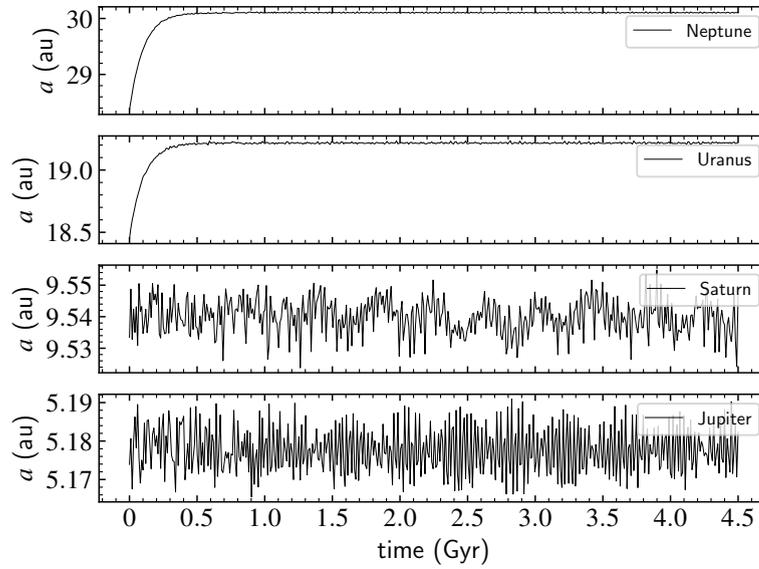


FIGURA 4.16: Evolução temporal dos semieixos maiores de Júpiter, Saturno, Urano e Netuno num modelo que considera a migração residual dos gigantes de gelo. A fase de migração residual dura ~ 0.5 Gyr.

Na figura 4.17, comparamos três modelos: com migração residual e sem Planeta 9, $GT-a3000-q600-i30-\omega130-\Omega20-m16.5$ e $mig-a3000-q600-i30-\omega130-\Omega20-m16.5$, na região $a \lesssim 250$ au. Os painéis superior e inferior mostram, quando comparadas com o painel do médio, que a migração de Netuno captura objetos em ressonâncias, explicando assim a população ressonante do Cinturão de Kuiper (dentro das ~ 50 au). Também, o efeito da migração residual dos gigantes de gelo, principalmente Netuno, é a de espalhar as partículas para fora, pelo que o modelo sem migração concentra uma maior quantidade de objetos na região entre 50 au até $\sim 100-150$ au. Este também pode ser o motivo pelo qual a razão entre objetos destacados e espalhados, logo da aplicação do OBIP na região $100 \text{ au} < a < 200 \text{ au}$, é menor (2.32 ± 2.00) no modelo com migração do que sua contraparte no Modelos 2 (de 6.06 ± 2.42). O efeito de ter um Planeta 9, como era de se esperar, é a de gerar uma maior quantidade de objetos destacados, este efeito é ainda intensificado ao não se considerar a migração residual.

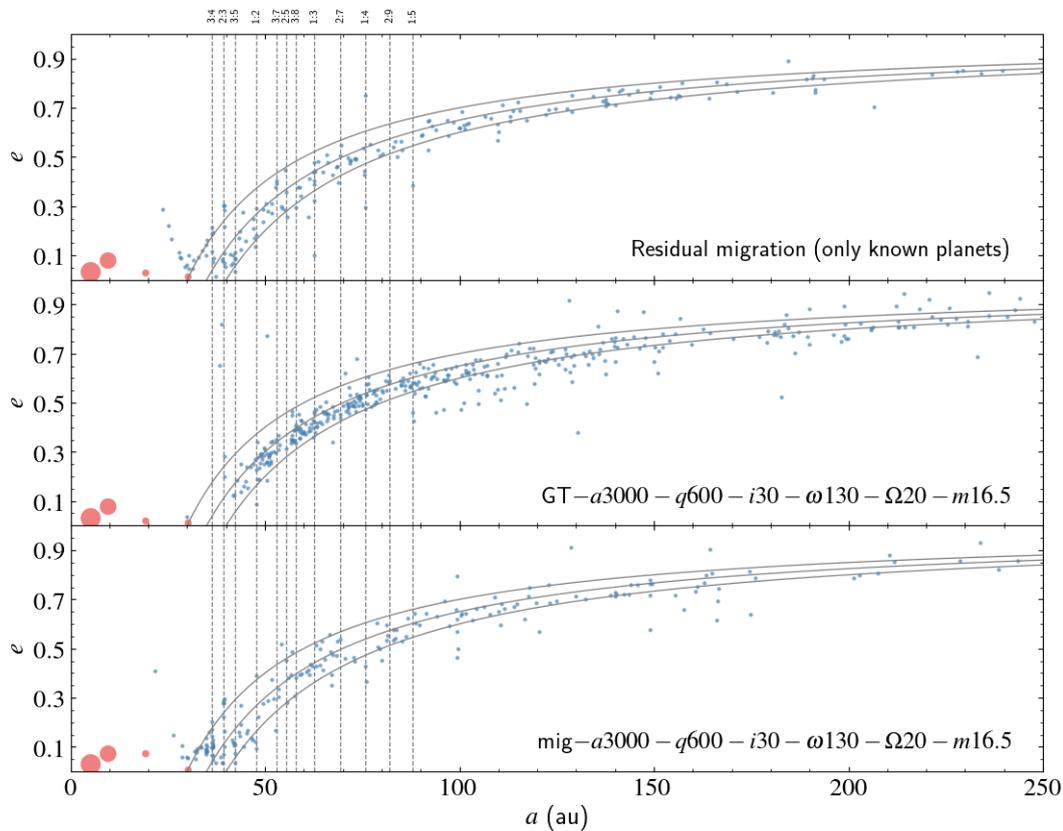


FIGURA 4.17: Excentricidade em função do semieixo maior no tempo 4.5 Gyr. Os planetas gigantes conhecidos são representados a escala em cor vermelho e as partículas, em azul. *Painel superior*: um modelo com migração residual dos gigantes de gelo, sem Planeta 9 e partículas inicializadas próximas de Netuno. *Painel médio*: modelo GT-a3000-q600-i30-omega130-Omega20-m16.5. *Painel inferior*: modelo mig-a3000-q600-i30-omega130-Omega20-m16.5. As curvas em cinza representam distâncias ao periélio de 30, 35 e 40 au.

TABELA 4.2: Valores máximos e médios de s em Ω , ω e ϖ das partículas; calculados nos 4.5 Gyr e nos últimos 500 Myr de tempo de integração.

Modelos	s em Ω						s em ω						s em ϖ					
	4.5 Gyr		últ. 500 Myr		4.5 Gyr		últ. 500 Myr		4.5 Gyr		últ. 500 Myr		4.5 Gyr		últ. 500 Myr			
	max	média	max	média	max	média	max	média	max	média	max	média	max	média	max	média		
Modelos 1																		
$a700 - q60 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m10$	80.817	40.409	6.614	3.307	90.144	45.072	2.083	1.042	98.966	49.483	2.326	1.163						
$a700 - q100 - i10 - \omega0 - \Omega0 - m10$	76.778	38.389	5.729	2.864	106.836	53.418	2.083	1.042	256.163	128.081	4.123	2.061						
$a700 - q100 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m10$	70.138	35.069	2.449	1.224	71.227	35.613	2.565	1.282	98.305	49.153	6.038	3.270						
$a700 - q100 - i60 - \omega0 - \Omega0 - m10$	62.049	31.025	1.807	0.904	51.304	25.652	3.098	1.549	165.584	82.792	3.098	1.549						
$a700 - q200 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m10$	62.050	31.025	7.859	3.929	69.479	34.740	6.569	3.284	163.970	81.985	15.417	10.868						
$a700 - q300 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m10$	82.882	41.441	1.797	0.899	95.830	47.915	1.797	0.899	152.644	76.322	3.945	1.972						
$a700 - q60 - i30 - \omega0 - \Omega90 - m10$	89.753	44.876	3.475	1.737	91.917	45.959	4.320	2.160	89.059	44.529	8.422	4.211						
$a1500 - q60 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$	35.795	17.898	16.684	8.342	40.078	20.039	13.024	6.512	148.654	74.613	20.344	10.459						
$a1500 - q100 - i10 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$	66.370	33.185	6.294	3.147	53.807	26.903	3.989	1.995	89.485	44.743	11.912	8.576						
$a1500 - q100 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$	48.039	24.019	3.854	2.042	56.956	28.478	7.899	4.139	127.226	63.613	17.270	12.950						
$a1500 - q100 - i60 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$	59.690	29.845	17.632	9.842	52.381	26.191	7.590	4.106	80.428	40.214	23.391	17.665						
$a1500 - q200 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$	50.976	25.488	2.198	1.099	40.802	20.401	4.037	2.018	86.123	43.061	6.694	4.384						
$a1500 - q300 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$	61.602	30.801	3.175	1.588	50.198	25.099	3.055	1.528	77.038	38.519	13.945	9.048						
$a1500 - q60 - i30 - \omega90 - \Omega150 - m16.5$	63.883	31.942	2.638	1.319	141.908	70.954	2.836	1.418	79.871	39.936	3.362	1.681						
Modelos 2																		
GT- $a2000 - q400 - i30 - \omega100 - \Omega50 - m16.5$	53.806	26.903	2.449	1.224	61.627	30.814	3.792	1.896	70.992	35.496	3.792	1.896						
GT- $a2500 - q500 - i30 - \omega30 - \Omega140 - m16.5$	33.866	16.933	2.592	1.296	45.871	22.936	2.638	1.319	73.383	36.691	2.600	1.300						
GT- $a3000 - q300 - i30 - \omega130 - \Omega190 - m16.5$	46.326	23.163	3.531	1.765	86.436	43.218	2.449	1.224	66.517	33.259	2.592	1.296						
GT- $a3000 - q300 - i30 - \omega310 - \Omega20 - m16.5$	41.332	20.666	4.523	2.261	73.982	36.991	2.238	1.119	54.901	27.450	3.913	1.957						
GT- $a3000 - q600 - i30 - \omega130 - \Omega20 - m16.5$	48.343	24.172	3.613	1.806	67.994	33.997	3.925	1.963	57.329	28.664	11.318	5.659						
GT- $a3000 - q900 - i30 - \omega0 - \Omega150 - m16.5$	73.230	36.615	3.865	1.966	123.437	61.719	8.944	4.734	83.513	41.927	16.997	11.589						
GT- $a3000 - q900 - i30 - \omega0 - \Omega150 - m16.5 - II$	25.648	12.824	2.119	1.059	48.749	24.375	2.748	1.374	37.097	18.549	9.065	4.532						
GT- $a3000 - q900 - i30 - \omega90 - \Omega300 - m16.5$	17.668	8.834	3.592	1.796	9.226	4.613	3.693	1.847	67.074	33.537	3.592	1.796						
Modelo 3																		
mig- $a3000 - q600 - i30 - \omega130 - \Omega20 - m16.5$	34.600	17.300	2.686	1.343	49.413	24.706	2.066	1.033	53.452	26.726	4.613	2.335						

TABELA 4.3: Média e desvio padrão (std) do número de objetos com $q > 40$ au entre os 46 mais brilhantes com $q > 30$ au, na faixa $100 \text{ au} < a < 200 \text{ au}$; após a aplicação de um viés observacional às partículas simuladas em cada modelo.

Modelos	Núm. de objetos com $q > 40$ au	
	Média	Std
Modelos 1		
$a700 - q60 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m10$	6.79	2.58
$a700 - q100 - i10 - \omega0 - \Omega0 - m10$	13.35	3.35
$a700 - q100 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m10$	5.65	2.33
$a700 - q100 - i60 - \omega0 - \Omega0 - m10$	14.12	3.24
$a700 - q200 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m10$	6.62	2.43
$a700 - q300 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m10$	4.83	2.00
$a700 - q60 - i30 - \omega0 - \Omega90 - m10$	5.72	2.33
$a1500 - q60 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$	8.31	2.74
$a1500 - q100 - i10 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$	10.21	2.77
$a1500 - q100 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$	5.13	2.40
$a1500 - q100 - i60 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$	11.92	2.87
$a1500 - q200 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$	5.14	2.03
$a1500 - q300 - i30 - \omega0 - \Omega0 - m16.5$	7.96	2.39
$a1500 - q60 - i30 - \omega90 - \Omega150 - m16.5$	9.14	2.60
Modelos 2		
$GT-a2000 - q400 - i30 - \omega100 - \Omega50 - m16.5$	9.66	3.67
$GT-a2500 - q500 - i30 - \omega30 - \Omega140 - m16.5$	6.22	3.10
$GT-a3000 - q300 - i30 - \omega130 - \Omega190 - m16.5$	9.25	3.74
$GT-a3000 - q300 - i30 - \omega310 - \Omega20 - m16.5$	12.90	4.12
$GT-a3000 - q600 - i30 - \omega130 - \Omega20 - m16.5$	6.06	2.42
$GT-a3000 - q900 - i30 - \omega0 - \Omega150 - m16.5$	8.89	3.84
$GT-a3000 - q900 - i30 - \omega0 - \Omega150 - m16.5 - II$	6.50	3.01
$GT-a3000 - q900 - i30 - \omega90 - \Omega300 - m16.5$	6.57	3.10
Modelo 3		
$mig-a3000 - q600 - i30 - \omega130 - \Omega20 - m16.5$	2.32	2.00

4.4 Subpopulações com $50 \text{ au} \leq a < 2000 \text{ au}$ e $q \geq 30 \text{ au}$

Nesta seção analisamos a região de $50 \text{ au} \leq a < 2000 \text{ au}$ e $q \geq 30 \text{ au}$ nos três conjuntos de modelos, a fim de comparar com a população observada na mesma região.

Nós aplicamos um viés observacional para determinar o número de objetos com magnitudes aparentes $V < 24$ que seriam detectados em 9 subpopulações dentre a coleção de objetos com $50 \text{ au} \leq a < 2000 \text{ au}$ e $q \geq 30 \text{ au}$. Os resultados são comparados com os valores correspondentes às das 9 subpopulações reais.

Nós consideramos só partículas desde 4.4 Gyr que pertencem à faixa $50 \text{ au} \leq a < 2000 \text{ au}$ e $q \geq 30 \text{ au}$, com as saídas referidas ao plano iv4 momentâneo. Nós usamos uma versão modificada do OBIP (Gomes et al., 2015), onde ao invés de aplicar uma distribuição de tamanhos aos objetos simulados, aplicamos uma distribuição de magnitudes absolutas; evitando assim as atribuições de albedos necessárias no caso anterior. O OBIP nos permitirá obter aqueles objetos que seriam observáveis até uma certa magnitude visual aparente limite dado pelo usuário, dentro de um intervalo de latitude eclíptica também fixado pelo usuário, nós consideramos aqui b entre $\pm 30^\circ$.

A distribuição H acumulativa que será adotada para nossas partículas é formada por três parâmetros (Fraser et al. (2010), Shankman et al. (2013), Fraser et al. (2014), Lawler et al. (2018)): $\mu_0 = 0.4$, $\mu_1 = 0.9$ e $\mu_2 = 0.4$ e magnitudes de corte em H_0 e $H_1 = 7.7$. A magnitude absoluta máxima considerada, H_2 , é calculada através da seguinte equação

$$V_{\max} = H_2 + 5 \log(d_{S,\min} d_E) \quad (4.2)$$

onde V_{\max} é a magnitude visual máxima, $d_{S,\min}$ é a mínima distância considerada do corpo ao Sol em au e d_E é a distância à Terra em au, é dizer: $V_{\max} = 24$ e $d_{S,\min} = 30$ au (devido a que consideramos objetos com $q \geq 30$ au). Nós usamos $d_E = d_{S,\min} - 1$, que corresponde a uma observação em oposição, uma boa aproximação para a observação de objetos distantes.

O valor de H_0 é calculado como uma forma de normalizar a distribuição. Nós testamos diferentes valores de H_0 gerando várias distribuições. Para um dado H_0 , nós realizamos 100 iterações, em cada uma delas geramos uma distribuição que é associada aleatoriamente aos objetos simulados, nós podemos então obter o número de objetos com $V < 21$ ⁴ para dita distribuição. Para um dado H_0 , nós obtemos assim uma média do número de objetos com $V < 21$. O valor de H_0 a ser considerado é aquele que fornece o valor mais próximo ao número de objetos observados reais com $V < 21$, que é igual a 20 de acordo com a base de dados do MPC⁵.

Uma vez determinado o H_0 , temos a distribuição de magnitude absoluta que será utilizada para o modelo em questão. Aplicamos novamente esta distribuição aleatoriamente às partículas com $50 \text{ au} \leq a < 2000 \text{ au}$ e $q \geq 30 \text{ au}$, 100 vezes; em cada uma delas se pegam todos os objetos com $V < 24$ ⁶. Desta forma, escolhem-se aleatoriamente um número de objetos igual aos reais nas faixas de magnitudes aparentes $V < 21$, $21 < V < 22$, $22 < V < 23$ e $23 < V < 24$ (vide Tabela 4.4). Para essa coleção de objetos anterior se determinam os números de corpos existentes nas seguintes 9 subpopulações:

$$\begin{aligned} &30 \text{ au} \leq q < 35 \text{ au}, 35 \text{ au} \leq q < 40 \text{ au}, q \geq 40 \text{ au} \\ &50 \text{ au} \leq a < 100 \text{ au}, 100 \text{ au} \leq a < 400 \text{ au}, 400 \text{ au} \leq a < 2000 \text{ au} \end{aligned}$$

TABELA 4.4: Número de objetos reais com $50 \text{ au} \leq a < 2000 \text{ au}$ e $q \geq 30 \text{ au}$ em quatro diferentes faixas de magnitudes visuais aparentes.

	$V < 21$	$21 \leq V < 22$	$22 \leq V < 23$	$23 \leq V < 24$
$50 \text{ au} \leq a < 2000 \text{ au}, q \geq 30 \text{ au}$	20	73	162	110

Após as 100 iterações se obtém uma média e desvio padrão dos números de objetos presentes em cada subpopulação, os quais são comparados com os números reais. Estes últimos

⁴Nós assumimos que existe uma completeza observacional até essa magnitude aparente para objetos reais com $50 \text{ au} \leq a < 2000 \text{ au}$ e $q \geq 30 \text{ au}$.

⁵Até Julho de 2019.

⁶É natural que o OBIP determine mais objetos nas faixas de magnitude a partir de $V > 21$ do que o número real de objetos observados, já que espera-se que os objetos para $V > 21$ não estejam todos ainda observados. Para $V < 21$, deve-se obter um número de objetos próximo de 20, para o que o OBIP foi normalizado.

são mostrados na Tabela 4.5, onde cada um deles é chamado de N_i , com $i = 1, 2, \dots, 9$; para facilitar posteriormente sua comparação com os modelos testados.

TABELA 4.5: Número de objetos reais em 9 subpopulações da coleção de objetos com $50 \text{ au} \leq a < 2000 \text{ au}$ e $q \geq 30 \text{ au}$, com $V < 24$.

	$30 \text{ au} \leq q < 35 \text{ au}$	$35 \text{ au} \leq q < 40 \text{ au}$	$q \geq 40 \text{ au}$
$50 \text{ au} \leq a < 100 \text{ au}$	$N_1 = 102$	$N_2 = 179$	$N_3 = 25$
$100 \text{ au} \leq a < 400 \text{ au}$	$N_4 = 10$	$N_5 = 33$	$N_6 = 8$
$400 \text{ au} \leq a < 2000 \text{ au}$	$N_7 = 0$	$N_8 = 3$	$N_9 = 5$

Os resultados obtidos para todos nossos modelos testados são mostrados na Tabela 4.6. No geral, nenhuma das corridas de nenhum conjunto de modelos mostra um acordo com as 9 subpopulações simultaneamente. Porém, as simulações do conjunto de Modelos 2 e o modelo 3 dão valores mais adequados às subpopulações reais, ao existir uma maior quantidade de objetos na faixa $50 \text{ au} < a < 100 \text{ au}$ e posteriormente na faixa $100 \text{ au} < a < 400 \text{ au}$. As corridas do conjunto de Modelos 1, que consideram tanto um Planeta 9 mais interno quanto partículas espalhadas, tendem a acumular mais objetos na região $100 \text{ au} < a < 400 \text{ au}$.

TABELA 4.6: Número de objetos em 9 subpopulações da coleção de objetos com $50 \text{ au} \leq a < 2000 \text{ au}$ e $q \geq 30$ au (N_i , $i = 1, 2, \dots, 9$), com magnitudes visuais aparentes menor do que 24; após a aplicação do OBIP em todos os modelos. Para comparação, a primeira linha mostra os dados correspondentes ao Minor Planet Center.

Modelo	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	N_8	N_9
Reais (MPC)	102	179	25	10	33	8	0	3	5
Modelos 1									
$\alpha 700 - q600 - i30 - \omega 0 - \Omega 0 - m 10$	104.22 ± 7.85	12.00 ± 3.46	15.61 ± 3.99	110.19 ± 9.58	41.97 ± 6.53	42.94 ± 5.97	15.81 ± 3.74	8.49 ± 3.03	8.65 ± 3.03
$\alpha 700 - q100 - i10 - \omega 0 - \Omega 0 - m 10$	0.00 ± 0.00	7.76 ± 3.02	25.57 ± 4.43	133.70 ± 10.89	62.37 ± 7.72	73.76 ± 7.63	34.93 ± 6.94	14.26 ± 4.56	11.22 ± 3.30
$\alpha 700 - q100 - i30 - \omega 0 - \Omega 0 - m 10$	32.31 ± 6.01	13.86 ± 3.89	7.17 ± 2.72	143.44 ± 10.03	52.31 ± 7.06	50.79 ± 6.16	31.30 ± 6.46	14.61 ± 3.21	14.55 ± 4.05
$\alpha 700 - q100 - i60 - \omega 0 - \Omega 0 - m 10$	57.89 ± 7.34	16.80 ± 4.20	30.81 ± 6.26	104.41 ± 9.34	54.89 ± 6.95	66.89 ± 7.60	16.23 ± 4.62	8.00 ± 3.35	6.99 ± 2.87
$\alpha 700 - q200 - i30 - \omega 0 - \Omega 0 - m 10$	29.73 ± 6.19	76.20 ± 9.30	5.32 ± 2.27	81.62 ± 8.38	53.82 ± 7.27	48.80 ± 6.40	38.11 ± 7.13	15.89 ± 3.95	12.80 ± 3.83
$\alpha 700 - q300 - i30 - \omega 0 - \Omega 0 - m 10$	73.26 ± 8.85	94.88 ± 8.20	3.19 ± 1.86	77.81 ± 8.35	65.92 ± 7.97	27.96 ± 5.00	10.87 ± 3.49	4.79 ± 2.41	4.95 ± 2.15
$\alpha 700 - q60 - i30 - \omega 0 - \Omega 90 - m 10$	68.41 ± 7.87	35.26 ± 5.86	18.99 ± 3.75	89.63 ± 7.94	51.23 ± 6.90	53.33 ± 6.47	24.32 ± 5.45	10.69 ± 3.53	9.66 ± 2.96
$\alpha 1500 - q60 - i30 - \omega 0 - \Omega 0 - m 16.5$	19.95 ± 4.64	60.08 ± 7.13	79.70 ± 7.89	78.95 ± 8.87	36.43 ± 5.34	33.85 ± 5.32	29.44 ± 5.55	14.23 ± 3.78	10.27 ± 3.01
$\alpha 1500 - q100 - i10 - \omega 0 - \Omega 0 - m 16.5$	25.49 ± 6.01	24.52 ± 5.26	19.71 ± 4.52	127.36 ± 11.75	68.67 ± 9.15	54.81 ± 7.80	20.17 ± 6.16	10.46 ± 3.56	11.97 ± 3.38
$\alpha 1500 - q100 - i30 - \omega 0 - \Omega 0 - m 16.5$	71.49 ± 8.10	32.24 ± 5.61	59.32 ± 6.05	91.21 ± 8.82	36.89 ± 5.68	28.06 ± 4.53	22.42 ± 5.37	11.21 ± 3.25	10.16 ± 3.53
$\alpha 1500 - q100 - i60 - \omega 0 - \Omega 0 - m 16.5$	65.50 ± 7.24	26.45 ± 4.93	18.99 ± 4.69	73.25 ± 7.97	70.38 ± 7.84	68.82 ± 7.38	16.22 ± 4.26	10.03 ± 3.20	13.07 ± 3.92
Modelos 2									
GT-a2000 - q400 - i30 - ω 100 - Ω 250 - m 16.5	91.64 ± 14.14	200.31 ± 14.43	32.99 ± 6.55	11.20 ± 6.05	15.36 ± 6.16	10.37 ± 3.70	0.69 ± 1.49	0.24 ± 0.80	0.39 ± 0.77
GT-a2500 - q500 - i30 - ω 30 - Ω 140 - m 16.5	105.11 ± 14.80	153.07 ± 14.58	51.40 ± 8.37	23.83 ± 9.15	17.46 ± 5.55	10.71 ± 3.62	0.68 ± 1.80	0.28 ± 0.65	0.34 ± 0.62
GT-a3000 - q300 - i30 - ω 130 - Ω 190 - m 16.5	90.42 ± 11.59	185.45 ± 12.82	32.98 ± 6.15	16.47 ± 7.33	20.06 ± 5.91	15.21 ± 4.43	1.30 ± 2.08	0.40 ± 0.82	0.33 ± 0.58
GT-a3000 - q300 - i30 - ω 310 - Ω 20 - m 16.5	92.52 ± 11.80	215.74 ± 12.10	19.50 ± 4.67	9.29 ± 5.47	12.20 ± 4.53	13.15 ± 4.66	0.61 ± 1.32	0.35 ± 0.83	0.17 ± 0.47
GT-a3000 - q600 - i30 - ω 130 - Ω 20 - m 16.5	102.71 ± 13.26	207.95 ± 15.17	6.51 ± 3.16	17.07 ± 6.95	19.35 ± 5.55	8.79 ± 3.20	1.04 ± 1.50	0.54 ± 0.98	0.30 ± 0.64
GT-a3000 - q900 - i30 - ω 0 - Ω 150 - m 16.5	74.18 ± 10.75	199.97 ± 12.52	46.40 ± 7.61	18.10 ± 8.12	14.77 ± 5.00	7.98 ± 3.08	0.90 ± 1.79	0.50 ± 1.14	0.39 ± 0.63
GT-a3000 - q900 - i30 - ω 0 - Ω 150 - m 16.5-II	37.29 ± 21.96	122.24 ± 24.81	27.13 ± 9.16	54.02 ± 26.90	68.41 ± 20.17	41.12 ± 9.85	5.67 ± 9.89	3.43 ± 4.47	3.79 ± 3.41
GT-a3000 - q900 - i30 - ω 90 - Ω 300 - m 16.5	82.96 ± 11.71	210.35 ± 11.20	32.57 ± 6.16	13.21 ± 5.23	16.79 ± 4.60	6.80 ± 2.91	0.50 ± 1.30	0.20 ± 0.47	0.32 ± 0.75
Modelo 3									
mig-a3000 - q600 - i30 - ω 130 - Ω 20 - m 16.5	136.98 ± 22.06	149.79 ± 20.55	13.88 ± 5.10	26.12 ± 12.01	28.20 ± 9.41	4.59 ± 2.63	1.99 ± 3.75	0.37 ± 0.95	0.48 ± 1.08

Os modelos $\alpha 1500 - q60 - i30 - \omega 90 - \Omega 150 - m 16.5$, $\alpha 1500 - q200 - i30 - \omega 0 - \Omega 0 - m 16.5$ e $\alpha 1500 - q300 - i30 - \omega 0 - \Omega 0 - m 16.5$ foram excluídos desta análise já que existem muito poucos objetos com $V < 21$ na faixa $50 \text{ au} \leq a < 2000 \text{ au}$ e $q \geq 30 \text{ au}$ (0, 2.55 e 1.38; respectivamente).

Capítulo 5

Conclusões

Neste projeto tentamos determinar possíveis parâmetros orbitais e massa do Planeta 9 que conduzem à geração e sustento dos confinamentos orbitais observados em TNOs com $a \geq 250$ au e $q \geq 40$ au, já que estes objetos não seriam grandemente influenciados por Netuno (vide, por exemplo, [Batygin and Brown \(2016a\)](#)). Nas grades testadas para o planeta nós não negligenciamos $q_9 < 200$ au, como sugerido por [Brown and Batygin \(2016\)](#). De fato, nossa motivação para incluir tais distâncias ao periélio vieram do trabalho de [Gomes et al. \(2017\)](#), que mostrou que um planeta com parâmetros similares aos encontrados por [Batygin and Brown \(2016a\)](#) e [Brown and Batygin \(2016\)](#) mas com excentricidades maiores consegue explicar a inclinação do equador solar em relação ao plano invariável dos planetas conhecidos. Nós testamos também o efeito do Planeta 9 sobre a distribuição orbital dos objetos do Cinturão de Kuiper Clássico, bem como dos TNOs espalhados e destacados a fim de verificar se essas distribuições simuladas são compatíveis com a distribuição dos objetos observados das mesmas populações.

Nós testamos três conjuntos de Modelos, onde as simulações dos Modelos 2 e 3 foram baseadas em resultados obtidos das corridas do conjunto de Modelos 1. As conclusões para cada um deles são mencionadas a seguir.

5.1 Modelos 1

O primeiro conjunto de modelos considerou a influência de um Planeta 9 com $a_9 = 700$ au ou $a_9 = 1500$ au e q_9 variando de 60 – 300 au, os planetas conhecidos foram colocados em suas configurações atuais e as partículas testes em órbitas já espalhadas.

Os resultados mostraram que distâncias ao periélio menores ($q_9 = 60$ au ou $q_9 = 100$ au) produzem confinamentos mais estreitos. Tais confinamentos são geralmente melhor reproduzidos em ϖ e, interessante, em vários de nossos modelos, existem dois confinamentos neste elemento angular, como assumido nos dados observacionais, sendo pastoreados pelo Planeta 9. Modelos com q_9 alto são geralmente associados com distribuições randômicas em Ω e ω .

Um planeta adicional tende a gerar objetos destacados. Nós mostramos que vários de nossos modelos de Planeta 9, incluindo aqueles com distância ao periélio baixa, são compatíveis estatisticamente com a razão observada entre o número de objetos destacados e espalhados no intervalo $100 \text{ au} < a < 200 \text{ au}$, após da aplicação de um viés observacional às partículas simuladas. Mostrando que planetas com $q_9 < 200 \text{ au}$ não deveriam ser descartados como indicado por [Brown and Batygin \(2016\)](#).

Igualmente, verificamos se um Planeta 9 com distância ao periélio baixa destruiria o Cinturão de Kuiper Clássico. Integrações considerando os casos mais extremos de distância ao periélio deste conjunto de modelos ($a_9 = 700 \text{ au}$ com $q_9 = 60 \text{ au}$ e $a_9 = 1500 \text{ au}$ com $q_9 = 60 \text{ au}$) mostraram que o efeito do planeta sobre um disco inicialmente frio é a de conduzir os semieixos maiores dos objetos à valores maiores e a escassez de partículas imediatamente passada a RMM 4:7. Porém, quando analisamos os objetos quentes e ressonantes, um Planeta 9 com $q_9 = 60 \text{ au}$ depleta consideravelmente ambas populações, sendo particularmente importante a depleção para os objetos ressonantes.

Consequentemente, nós realizamos outras simulações numéricas com distâncias ao periélio baixas para o Planeta 9, porém, maior do que 60 au . Para isto, consideramos um Cinturão de Kuiper Clássico teórico e mostramos que um Planeta 9 com $q_9 = 90 \text{ au}$ não produz mudanças significativas nesta população, já que as características orbitais resultantes dos objetos são similares aos que se obtém quando um planeta externo adicional não é considerado.

Assim, nós concluimos que planetas com distâncias ao periélio tão pequenas quanto 90 au não deveriam ser descartados em princípio, estas grades produzem melhores confinamentos em TNOs distantes enquanto preservam a razão entre o número de objetos destacados e espalhados na região $100 \text{ au} < a < 200 \text{ au}$ assim como o Cinturão de Kuiper Clássico.

Note que embora uma distância ao periélio muito baixa para o Planeta 9 ($q_9 \sim 60\text{--}70 \text{ au}$) parece esvaziar excessivamente a região do Cinturão de Kuiper, isto poderia não ser desfavorável, dependendo das condições iniciais das partículas logo após a estabilização dos planetas. Se estes objetos foram muito mais concentrados em semieixos maiores menores, um Planeta 9 com q_9 baixo poderia conduzir estes objetos para fora de modo a povoar o Cinturão de Kuiper convenientemente. Este problema poderia ser o assunto de um futuro trabalho.

Um planeta similar a Netuno com $a_9 = 1500 \text{ au}$ e $q_9 = 100 \text{ au}$ terá durante $\sim 50\%$ de seu período orbital uma magnitude visual $V > 26.8$, sendo difícil sua detecção com os telescópios atuais ([Gomes and Cáceres, 2018](#)).

5.2 Modelos 2

Devido a que distâncias ao periélio baixas do Planeta 9 conseguem reproduzir melhor os confinamentos orbitais observados de TNOs distantes, nós testamos novas grades para o planeta, considerando órbitas amplas e q_9 baixo perto do último Gyr de tempo de integração. Os planetas

gigantes conhecidos foram inicializados em suas órbitas atuais e as partículas foram localizadas próximas a Netuno, a fim de representar melhor a origem das partículas espalhadas, mas uma das grades foi replicada considerando condições iniciais para as partículas idênticas às do conjunto de Modelos 1 (já espalhadas).

Nos gráficos da evolução temporal dos confinamentos, observa-se sempre um melhor confinamento em todos os ângulos no começo das evoluções (primeiro ~ 1 Gyr). Não achamos uma explicação para este fato, mas entendemos que uma vez encontrada esta explicação isso poderá contribuir para o entendimento de que parâmetros do Planeta 9 e/ou condições iniciais das partículas favoreceriam um melhor confinamento.

Os resultados obtidos mostraram que mesmo os planetas testados atinjam uma distância ao periélio baixa perto do final da integração, eles não reproduzem bons confinamentos orbitais nos objetos. Isto pode ter sido devido às condições iniciais assumidas para as partículas. A comparação entre dois modelos que consideram os mesmos parâmetros do Planeta 9 mas diferentes condições iniciais para as partículas, a saber, inicialmente próximas a Netuno e inicialmente já espalhadas artificialmente; mostra que os confinamentos são bem reproduzidos no último caso.

Portanto, as condições iniciais podem jogar um papel crucial na indução dos confinamentos de TNOs extremos. Assim, a não reprodução de agrupamentos orbitais neste conjunto de Modelos, seria bem mais uma consequência das condições iniciais assumidas para as partículas do que das órbitas amplas testadas para o Planeta 9. Um futuro trabalho deveria dirigir esta questão para constatar esta premissa, podendo ampliar as possíveis órbitas permitidas para o nono planeta. A preferência por algum dado conjunto de condições iniciais para as partículas também poderia fornecer um vínculo para o entorno no qual o Planeta 9 atingiu sua órbita.

O 50% das grades testadas dão razões do número de objetos destacados e espalhados na faixa $100 \text{ au} < a < 200 \text{ au}$ razoáveis quando comparadas com dados observacionais.

5.3 Modelo 3

Este modelo considerou uma das órbitas do Planeta 9 e condições iniciais para as partículas idênticas a do segundo conjunto, mas não se levou em conta os efeitos de maré galáctica e os planetas gigantes conhecidos começaram na fase final da evolução dinâmica do *Modelo de Nice*.

As análises mostraram resultados similares às da corrida correspondente ao segundo conjunto de modelos, indicando que a não reprodução dos confinamentos orbitais das partículas distantes pode ter sido devida a que, tanto nos Modelos 2 e Modelo 3, após ~ 1 Gyr de tempo de integração a inclinação média das partículas mudou à valores altos.

Porém, diferente à corrida do segundo conjunto de modelos, o modelo 3 dá um razão de objetos destacados e espalhados em $100 \text{ au} < a < 200 \text{ au}$ baixa devido ao espalhamento das partículas originado pela migração residual de Netuno.

Um próximo passo é realizar integrações numéricas que considerem um modelo mais realista, isto é: migração residual de Netuno, efeitos de maré galáctica (para casos de órbitas amplas do planeta proposto) e condições iniciais para as partículas em órbitas estendidas, ou seja, após serem perturbadas pelo mesmo aglomerado primordial que pode ter colocado ao Planeta 9 em sua órbita.

5.4 Subpopulações com $50 \text{ au} \leq a \leq 2000 \text{ au}$ e $q \geq 30 \text{ au}$

Nós também analisamos como afetam todas as grades testadas à diferentes populações Trans-Netunianas, considerando 9 regiões em semieixo maior e distância ao periélio:

$$30 \text{ au} \leq q < 35 \text{ au}, 35 \text{ au} \leq q < 40 \text{ au}, q \geq 40 \text{ au} \\ 50 \text{ au} \leq a < 100 \text{ au}, 100 \text{ au} \leq a < 400 \text{ au}, 400 \text{ au} \leq a < 2000 \text{ au}$$

Os modelos que consideram maré galáctica e migração residual de Netuno (Modelos 2 e modelo 3) dão melhores resultados do que os Modelos 1; embora não sejam compatíveis com os dados observacionais nestas regiões específicas.

Apesar de os cenários propostos para explicar a órbita do Planeta 9 na literatura sejam improváveis, eles são ainda favoráveis em comparação com o alinhamento devido ao acaso de TNOs extremos. Diferentes mecanismos de formação para o planeta afetam de diferentes formas as distribuições de elementos orbitais de TNOs distantes. Uma futura detecção direta do perturbador externo permitiria restringir estes modelos e ajudar a desvendar a história evolutiva do sistema solar.

Como mencionado, o monitoramento de TNOs distantes assim como dos objetos altamente inclinados do sistema solar permite testar a hipótese do Planeta 9, refutando-a ou, pelo contrário, contribuindo a restringir os parâmetros orbitais e a massa dele. Devido à degenerescência existente entre a massa e os parâmetros orbitais, várias outras grades podem ainda ser propostas. Uma futura abordagem a ser investigada é a de confrontar as órbitas aceitáveis do Planeta 9 com a preservação de outras populações que poderiam estar relacionadas ou ser afetadas pela sua influência.

Para finalizar, planetas com q_9 relativamente baixos (até 90 au) e a_9 relativamente altos (até 1500 au) são compatíveis com os confinamentos de TNOs extremos, distribuição orbital dos objetos clássicos e o número relativo entre objetos destacados e espalhados. Para a_9 ainda maiores, não obtivemos bons resultados para os confinamentos mas isso pode ter sido mais devido às condições iniciais. Outras simulações ainda seriam necessárias para eventualmente definir estas órbitas como proibitivas ou permitidas.

Apêndice A

Variação do Momento Angular de um Planeta Conhecido

Aqui se apresenta uma aproximação analítica à variação do momento angular experimentada por um planeta conhecido devido à perturbação do Planeta 9 (Gomes et al., 2017).

A equação de movimento de um planeta em torno de uma estrela perturbado por um segundo planeta num marco de referência centrado na estrela é dada por

$$\ddot{\mathbf{r}} = -G(m_9 + M) \frac{\mathbf{r}}{r^3} + Gm_9 \left\{ \frac{\mathbf{r}_{19}}{r_{19}^3} - \frac{\mathbf{r}_9}{r_9^3} \right\} \quad (\text{A.1})$$

onde o subscrito 9 se refere ao planeta perturbador e as variáveis sem subscrito se referem ao planeta perturbado. Aqui, \mathbf{r} é o radio vetor do planeta perturbado, r é sua magnitude, r_{19} é a distância entre planetas, m_9 é a massa do planeta perturbador, M é a massa da estrela e G é a constante gravitacional.

O momento angular do planeta perturbado por unidade de massa se define como

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \quad (\text{A.2})$$

A derivada temporal de \mathbf{h} é

$$\dot{\mathbf{h}} = \left\{ Gm_9 \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{r}_{19}}{r_{19}^3} - Gm_9 \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{r}_9}{r_9^3} \right\} \quad (\text{A.3})$$

Procedemos a promediar o lado direito da equação A.3 nas variáveis rápidas de ambos planetas. Para isto, definimos dois marcos de referência em cada das órbitas dos planetas rotados, num ângulo I tal que os vetores unitários sejam $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ e $(\mathbf{i}_9, \mathbf{j}, \mathbf{k}_9)$, onde a componente \mathbf{j} é comum em ambos referenciais. Então, \mathbf{j} é a interseção entre planos orbitais e reside no plano invariante definido pelos planetas, \mathbf{i} e \mathbf{i}_9 são ortogonais à \mathbf{j} e os vetores unitários \mathbf{k} e \mathbf{k}_9 completam os sistemas destros. Estes marcos são definidos para calcular a derivada de \mathbf{h} nessas componentes instantaneamente.

Assumindo que o planeta perturbado tem uma órbita circular e o planeta perturbador uma órbita excêntrica, os radio vetores de cada um deles são

$$\mathbf{r} = (a \cos l)\mathbf{i} + (a \sin l)\mathbf{j} \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{r}_9 = (r_9 \cos \theta_9)\mathbf{i}_9 + (r_9 \sin \theta_9)\mathbf{j} \quad (\text{A.5})$$

onde a é o semieixo maior do planeta perturbado, l sua longitude média e θ_9 é o ângulo da interseção dos planos à posição do planeta perturbador, que é a soma de sua anomalia verdadeira f_9 e longitude de nodo ascendente em relação ao plano invariável.

Desenvolvemos a equação A.3 levando em conta que $\mathbf{i} \times \mathbf{i}_9 = -\sin I\mathbf{j}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{i}_9 = -\mathbf{k}_9 = -\sin I\mathbf{k} + \cos I\mathbf{i}$ e $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0$. Desenvolvendo as componentes em \mathbf{i} e \mathbf{k} , se tem sempre uma função trigonométrica em pelo menos um dos ângulos rápidos à um potencia impar, que resulta num promédio nulo para estas componentes.

Para a componente \mathbf{j} , apos desenvolver o produto vetorial na primeira ordem em a/r_9 , obtemos

$$\frac{\mathbf{r} \times \mathbf{r}_9}{r_{19}^3} = -\frac{aTr_9 \cos l \cos \theta_9 \sin I}{r_9^3} \quad (\text{A.6})$$

sendo

$$T = 1 - \frac{3a^2}{2r_9^2} + 3\frac{a}{r_9} (\sin l \sin \theta_9 + \cos l \cos \theta_9 \cos I) \quad (\text{A.7})$$

A aproximação de primeira ordem pode ser precisa o bastante quando a/r_9 é pequena, que corresponde ao caso de uma planeta distante perturbando um muito mais interno. Promediando nos ângulos rápidos l e f_9 , que aparecem em θ_9 e r_9 , por um período orbital, se tem

$$\frac{1}{PP_9} \int_0^P \int_0^{P_9} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{r}_9}{r_{19}^3} dt^2 = \frac{3a^2}{8b_9^3} \sin 2I \quad (\text{A.8})$$

onde P e P_9 são os períodos orbitais dos planetas e $b_9 = a_9\sqrt{1-e_9^2}$ é o semieixo menor da órbita do planeta perturbador. O termo $(\mathbf{r} \times \mathbf{r}_9)/r_9^3$ promédia à zero em todas as componentes. A derivada temporal de \mathbf{h} torna-se

$$\dot{\mathbf{h}} = \frac{3}{8}Gm_9 \frac{a^2}{b_9^3} \sin 2I\mathbf{j} \quad (\text{A.9})$$

Assim, \mathbf{h} tem uma derivada temporal diferente de zero na direção das interseções dos planos orbitais. Como a escolha dos marcos de referência pode ser para qualquer tempo, em qualquer tempo a componente diferente de zero da derivada temporal de \mathbf{h} é ortogonal à \mathbf{h} na interseção dos planos orbitais. Isto é satisfeito só se a projeção de \mathbf{h} sobre o plano invariante é um círculo em torno à origem. O radio do círculo α (onde $\sin \alpha = H_9/H_t \sin I$) é o ângulo entre \mathbf{h} e \mathbf{H}_t onde $\mathbf{H}_t = m\mathbf{h} + \mathbf{H}_9$ é o momento angular total e $\mathbf{H}_9 = m_9\mathbf{r}_9 \times \dot{\mathbf{r}}_9$ é o momento angular do Planeta 9. A frequência de precessão é o coeficiente que multiplica à \mathbf{j} na equação

A.9 dividido por $2\pi\alpha h$, onde $h = \sqrt{GMa}$ é o valor absoluto de \mathbf{h} .

Esta aproximação permite calcular a variação da inclinação e nodo de um planeta perturbado por outro e pode ser extrapolado para o caso de vários planetas internos.

Apêndice B

Manuscrito



The Influence of Planet Nine on the Orbits of Distant TNOs: The Case for a Low-perihelion Planet

Jessica Cáceres and Rodney Gomes

Observatório Nacional, Rua General José Cristino 77, CEP 20921-400 Rio de Janeiro, RJ, Brazil; jessica@on.br

Received 2018 June 16; revised 2018 July 29; accepted 2018 July 30; published 2018 September 14

Abstract

The hypothesis of an additional planet in the outer solar system has gained new support as a result of the confinement noted in the angular orbital elements of distant trans-Neptunian objects. Orbital parameters proposed for the external perturber suggest semimajor axes between 500 and 1000 au, perihelion distances between 200 and 400 au for masses between 10 and $20 M_{\oplus}$. In this paper, we study the possibility that lower perihelion distances for the additional planet can lead to angular confinements as observed in the population of objects with semimajor axes greater than 250 au and perihelion distances higher than 40 au. We performed numerical integrations of a set of particles subjected to the influence of the Sun, the known giant planets, and the putative perturber during the age of the solar system and compared our outputs with the observed population through a statistical analysis. Our investigations showed that lower perihelion distances from the outer planet usually lead to more substantial confinements than higher ones, while retaining the Classical Kuiper Belt as well as the ratio of the number of detached with perihelion distances higher than 42 au to scattering objects in the range of semimajor axes from 100 to 200 au.

Key words: Kuiper belt; general – planets and satellites; dynamical evolution and stability

1. Introduction

The existence of trans-Neptunian objects (TNOs) with high-perihelion distance ($q \gtrsim 40$ au) and semimajor axis ($a \gtrsim 200$ au) cannot be explained by the sole influence of the known planets. Thus, several mechanisms have been proposed to explain the existence of these objects, whose best known member is Sedna ($a = 482$ au and $q = 76$ au; Brown et al. 2004). Some of these mechanisms are: the interaction of the Sun with other stars when it was still in its birth cluster and stellar flybys were common (Brasser et al. 2012; Dukes & Krumholz 2012), the capture of planetesimals from the external disk of another star (Kenyon & Bromley 2004; Morbidelli & Levison 2004), a planet that could have existed temporarily in the scattered disk (Gladman & Chan 2006), or an existing yet undiscovered planet (Gomes et al. 2006).

From a few years ago, several patterns have been noticed in distant TNOs supporting the hypotheses of an outer planet in the solar system. After announcing the discovery of an object with perihelion distance similar to that of Sedna, 2012 VP₁₁₃ ($a = 256$ au and $q = 80$ au), Trujillo & Sheppard (2014) noted that objects with $a > 150$ au and $q > 30$ au exhibit a confinement in their argument of perihelion (ω). They argued that under the influence of the known planets, the argument of perihelion of these objects would circulate in a fairly short and varying timescale. On the other hand, they showed that a super-Earth mass planet in a circular and low-inclination orbit with semimajor axis between 200 and 300 au could lead to long-period ω -libration around 0° for Sedna-like objects, but not for objects with lower perihelia. This opened the interesting possibility that other configurations of an outer planet might give the suitable tuning.

Later, Batygin & Brown (2016a) noted that TNOs with $a > 250$ au and $q > 30$ au are confined not only in ω , but also in longitude of the ascending node (Ω). They showed that the presence of a distant, eccentric, and massive planet could reproduce such confinements as well as perihelion detachment of distant TNOs as a consequence of secular and resonant

interactions (see also Batygin & Morbidelli 2017 and references therein). This planet (hereafter named Planet 9, whose orbital parameters will be denoted with the subscript 9) would roughly share the same orbital plane as those of the confined objects and would be apsidally anti-aligned with them. Planet 9 would also predict the existence of apsidally aligned and high-perihelion objects, if a wide distribution of perihelion is initially assumed (see also Khain et al. 2018), and objects that would be compatible with the Centaurs of high semimajor axis and high inclination. Likewise, it offers an explanation for the origin of highly inclined TNOs ($i > 60^\circ$) with $a < 100$ au (Batygin & Brown 2016b) and the high inclination of the recently discovered long-period TNO, 2015 BP₅₁₉ ($q = 36$ au; Batygin & Morbidelli 2017; Becker et al. 2018).

Brown & Batygin (2016) showed that confined TNOs orbits can be produced by Planet 9 with the following orbital parameters¹: $200 \text{ au} < q_9 < 400 \text{ au}$, $500 \text{ au} < a_9 < 1000 \text{ au}$, $i_9 \sim 30^\circ$, and mass $10 M_{\oplus} < m_9 < 20 M_{\oplus}$. By comparing the allowed orbital paths and estimated brightness of the planet to previous and ongoing surveys, they indicate that Planet 9 would be near aphelion with an apparent visual magnitude between 22 and 25.

Subsequent works focused on restricting the location of Planet 9 on its orbit from the reduction of the residuals in Saturn's orbital motion based on Cassini data (Fienga et al. 2016; Holman & Payne 2016a), or in Pluto's orbit (Holman & Payne 2016b), or assuming that several of the distant TNOs are in mean motion resonance (MMR) with the planet (Malhotra et al. 2016; Millholland & Laughlin 2017).

An outer planet also provides a better explanation for the fact of there being an excess of bright large semimajor axis Centaurs with respect to classical ones than a scenario without an additional planet (Gomes et al. 2015). Moreover, Gomes et al. (2017; see also Bailey et al. 2016 and Lai 2016) provide

¹ These numbers are taken from that paper's Figures 2 and 3 and their empirical expressions of e_9 as a function of a_9 .

an explanation for the current inclination of the planetary system invariable plane with respect to the Sun's equator of $\sim 6^\circ$. They arrived at parameters for the distant planet compatible with those found by Brown & Batygin (2016) although with possible larger eccentricities corresponding to a given semimajor axis.

As for the proposed mechanisms for its origin, Planet 9 could have been originally dispersed from the giant planets region. In order to avoid that repeated close encounters with a giant planet could end in the ejection of the scattered planet, the perihelion distance of its orbit would have to be lifted by some mechanism. These might include its gravitational interaction with the Sun's birth cluster (Brasser et al. 2006, 2012) or dynamical friction with a planetesimals disk located beyond 100 au (Eriksson et al. 2018) or with an either massive and short-lived or low-mass and long-lived gas disk (Bromley & Kenyon 2016). Other proposed scenarios suggest the capture of a planet from another star system or the capture of a free-floating planet in the solar birth cluster (Li & Adams 2016; Mustill et al. 2016; see, however, Parker et al. 2017).

Brown & Batygin (2016) present tables with probabilities for a Planet 9 with a given semimajor axis and eccentricity to induce a favorable orbital confinement of large semimajor axis TNOs. One of their criteria to choose the best orbit for Planet 9 is to rule out those that produce too many high-perihelion and low-semimajor axis TNOs. Here we analyze the evidence of a distant planet, without neglecting the case of planets with low perihelion that were naturally neglected in Brown & Batygin (2016), since they would assumedly produce an excess of high-perihelion TNOs for relatively small semimajor axes. We particularly analyze these low-perihelion planets' influence on the Kuiper Belt and on the relation between scattered and detached objects. In Section 2, we describe the methods used to test the influence of Planet 9 on large semimajor axis TNOs. We present our results in Section 3. In Section 4, we emphasize the case of low-perihelion planets. In Section 5, we present our conclusions.

2. Methods

The origin of the detached objects (defined as minor bodies with $a > 50$ au and $q > 40$ au) with $a \lesssim 200$ au can be explained as a result of the increase of the perihelion distance of scattered disk objects (bodies with $a > 50$ au and $30 \text{ au} < q < 40$ au) via resonant capture with Neptune associated with the Kozai mechanism. These objects may still be experiencing those resonances or they may have been released from the resonant coupling MMR-Kozai during the migration of Neptune after the instability phase of the solar system (Gomes et al. 2005a; Morbidelli et al. 2005; Tsiganis et al. 2005), when their orbital eccentricities were low enough (Gomes et al. 2005b; Gomes 2011; Brasil et al. 2014).

Our analysis is motivated by the TNOs with $q \geq 40$ au and $a \geq 250$ au, whose existence cannot be explained by the current orbital configuration of the giant planets. Currently, there are nine² objects within this category observed in more than one opposition in the Minor Planet Center (MPC) database.³ As shown in Figure 1 they have $\Omega < 220^\circ$, a confinement of $131^\circ.7$ in ω (between $\omega = 293^\circ.6$ and $\omega = 65^\circ.3$), and two likely confinements in longitude of perihelion (ϖ), where the main confinement, of $102^\circ.6$, is composed of seven objects and located around $\varpi = 60^\circ.5$, and

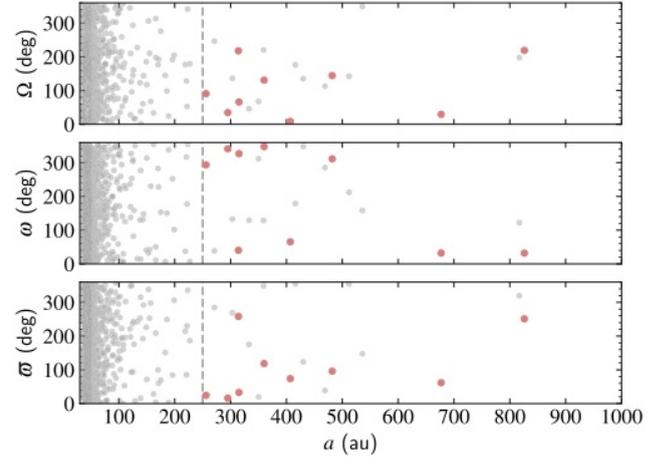


Figure 1. Longitude of the ascending node, argument of perihelion and longitude of perihelion as a function of the semimajor axis for all trans-Neptunian objects observed in more than one opposition and up to $a = 1000$ au, those with $a \geq 250$ au and $q \geq 40$ au are highlighted in red.

the secondary one, represented by the two remaining objects, around $\varpi = 254^\circ.6$. These objects have $q < 81$ au and $i < 26^\circ$. We decided to neglect objects with smaller semimajor axis and perihelion distance than those above mentioned unlike other works (e.g., Batygin & Brown 2016a) concerning Planet 9 since the largest a and q are, the likeliest are that these objects have not experienced an important close encounter with Neptune in a fairly recent past. Thus these objects are prone to keep the angular alignment induced by Planet 9. We note that considering distant TNOs with these higher lower boundaries in semimajor axis and perihelion distance, and also the existence of a secondary clustering, the angular confinement is more remarkable for ϖ and ω than for Ω . Surveys carried out near the ecliptic plane would favor the detection of objects with $\omega = 0^\circ$ or $\omega = 180^\circ$. The fact that there is no confinement around $\omega = 180^\circ$ and that several of these objects were discovered in off-ecliptic surveys argue that the confinement around $\omega = 0^\circ$ is not an effect due to observational bias (Trujillo & Sheppard 2014). It should be noted, however, that even though the clustering in ω observed near 0° is not an artifact of observational bias, a real clustering of ω near 0° will be observationally intensified due to the bias above mentioned.

We performed numerical integrations for the age of the solar system considering different combinations of perihelion distance, inclination and argument of perihelion for two semimajor axes of Planet 9, $a_9 = 700$ au and $a_9 = 1500$ au, where for the models with the small semimajor axis we consider a mass of $3 \times 10^{-5} M_\odot$, and a mass of $5 \times 10^{-5} M_\odot$ for the other case. The tested grids are shown in the first column of Table 1. The nomenclature for each model means $a_9-i_9-\omega_9-q_9-m_9$, where the semimajor axis and perihelion distance are in au, the inclination and argument of perihelion in degree, and the mass in $10^{-5} M_\odot$ ($\sim 3.3 M_\oplus$).

The initial conditions are given in relation to the plane perpendicular to the resultant angular momentum vector of the four known giant planets (hereinafter referred to as iv4) in their current configuration, which defines the initial orbital elements for the known giant planets. Besides these, the system is made up also of an external perturber and 10000 test particles⁴ with

² As of 2018 May.

³ <https://minorplanetcenter.net/iau/lists/Centaurs.html>

⁴ For one of the cases (planet with $a_9 = 700$ au and orbital inclination at 10°), we considered 20000 particles since there were too few particles in the end of the integration to perform a reliable statistics.

Table 1

Mean and Standard Deviation (STD) of the Angular Distance between the Particles' Primary Center of Clustering and the Same Angle for Planet 9, Computed for the Last 500 Myr

Model	$\Delta\Omega$ (deg)		$\Delta\omega$ (deg)		$\Delta\varpi$ (deg)	
	Mean	Std	Mean	Std	Mean	Std
<i>a</i> 1500-10-0-100-5	107.0	7.0	73.9	21.7	180.2	18.7
<i>a</i> 1500-30-0-60-5	78.4	18.5	181.8	17.7	248.9	4.4
<i>a</i> 1500-30-0-100-5	127.4	15.8	252.5	13.2	232.2	2.4
<i>a</i> 1500-30-0-200-5	307.0	93.5	265.6	75.8	174.6	19.3
<i>a</i> 1500-30-0-300-5	351.2	55.1	185.1	28.2	172.4	10.8
<i>a</i> 1500-30-90-60-5	211.4	75.7	216.2	82.5	184.8	85.4
<i>a</i> 1500-60-0-100-5	265.5	12.8	305.6	17.9	201.8	5.4
<i>a</i> 700-10-0-100-3	193.5	68.4	58.7	98.8	233.8	9.2
<i>a</i> 700-30-0-60-3	112.9	77.5	182.5	71.0	182.1	62.0
<i>a</i> 700-30-0-100-3	125.9	71.0	255.6	66.5	191.4	13.8
<i>a</i> 700-30-0-200-3	316.0	7.1	266.7	7.0	223.1	4.1
<i>a</i> 700-30-0-300-3	148.5	100.1	227.2	81.2	239.6	27.1
<i>a</i> 700-30-90-60-3	244.3	68.9	333.5	84.3	229.1	19.6
<i>a</i> 700-60-0-100-3	100.9	82.2	142.1	75.3	198.1	21.5

orbital elements similar to those that would be expected some time after the instability phase of the giant planets under the Nice Model (Gomes et al. 2005a; Morbidelli et al. 2005; Tsiganis et al. 2005): $200 \text{ au} < a < 1000 \text{ au}$, $30 \text{ au} < q < 40 \text{ au}$, $0^\circ < i < 10^\circ$ and the remaining orbital elements uniformly distributed. The lower limit for the particles' semimajor axes stands for the fact that we are only interested in large semimajor axis TNOs to better characterize their confinement. Due to the torque exerted by the ninth planet in an inclined orbit on known planets the initial reference plane will precess with respect to the invariable plane of the system, so that our outputs are converted relative to the instantaneous *iv4* plane.

The integrations were done with the MERCURY package hybrid integrator (Chambers 1999). To profit from a multi-core supercomputer, for each model we first ran an integration with just the planets, saving their coordinates at each 10 years for later use. After that we performed 100 numerical integrations, each in a different core, reading the coordinates from a file produced by the run with just the planets. These integrations with particles were done normally with the same timestep of 0.5 year, but at every 10 years, we corrected back the planets coordinates to those produced by the original integration with no particles. This is quite an easy and reliable procedure. The deviation of the planets after 10 years (20 timesteps) is always quite small since the particles are massless and the difference between the integration with particles and the original one with just the planets comes solely from the fact that the (hybrid) integrator can enter into the classic integration mode (Bulirsch-Stoer) at close encounters of particles with planets. We thus modified the code for the hybrid integrator to implement this procedure. For each time considered in the analyses, and for each particle, we associate that time and ten other neighboring ones, five subsequent ones and five previous ones, entailing a total $\Delta t = 10^6$ year, in order to improve the statistics. In 10^6 years, the circulation of the angles Ω , ω , and ϖ for the distant TNOs and Planet 9 is quite small so that this procedure does not spoil the investigation of confinements.

For the simulated particles belonging to a range in *a*, *q*, and *i* similar to that of the observed objects, our analysis consists of determining the time evolution of (i) the highest and

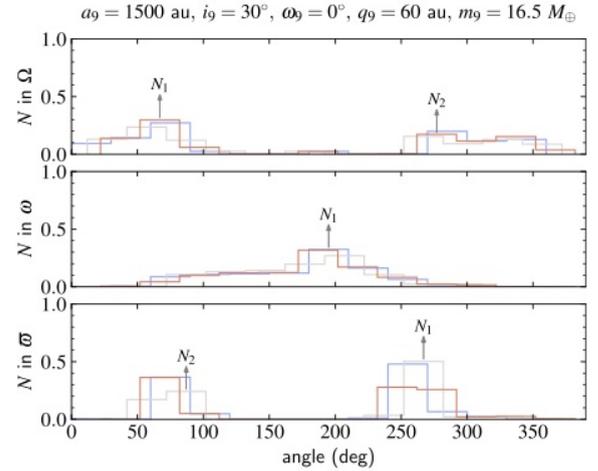


Figure 2. Frequencies in Ω , ω , and ϖ for the model *a*1500-30-0-60-5 at a time $t = 2.18$ Gyr showing three different beginnings of the first bin at 0° , 12° , and 22° in blue, gray, and red, respectively; out of a total of 30 considered in each time to calculate the highest and secondary frequencies in these orbital elements. For Ω and ϖ , we can distinguish a principal and a secondary confinement, which are distant from one another of $\sim 180^\circ$. There is no secondary frequency in ω .

second-highest peaks in Ω , ω , and ϖ as determined by histograms of the distribution of those angles, (ii) the angles corresponding to the middle of the bins that yielded the highest and second-highest peaks, and (iii) the confinements in Ω , ω , and ϖ . These are described in detail below.

The highest and second-highest peaks are determined for each time by performing histograms of the number of particles that have their Ω , ω , and ϖ inside the histograms' bins. These particles are a subset of the simulated particles whose semimajor axes, perihelion distances, and inclinations belong to the interval $250 \text{ au} \leq a \leq 1000 \text{ au}$, $38 \text{ au} \leq q \leq 90 \text{ au}$ and $0^\circ \leq i \leq 30^\circ$. The absolute number of particles in each bin is transformed into frequencies, N , given by the number of particles associated to that bin divided by the total number of particles in all bins. The bins are 30° wide so there is a total of 12 bins. Thus, a flat distribution yields a frequency of $1/12$ for each bin. The idea of choosing a bin 30° wide is based on visual inspection of the clustering of some angles during the evolution of the simulated TNOs. We saw that this clustering can be quite narrow and 30° was chosen so as to capture this peculiar feature. For each time we make 30 histograms, which differ from each other in the initial angle, varying from 0° to 29° , so that we can more accurately determine the bin where there is the greatest clustering of angles, which is the one with highest N in all 30 histograms for the same time. Figure 2 depicts the construction of the histograms for Ω , ω , and ϖ for three different initial positions of the bins. In both Ω and ϖ , we see the appearance of two peaks in the angular frequencies. Unless the distribution is totally flat, which is very unlikely, there is always a bin with a highest frequency. The secondary frequency is defined whenever there is a secondary peak in the histogram. It is not the second-highest frequency in the histogram, which would often be associated just to a bin next to the highest frequency. Note that we are thus obtaining the values corresponding to two confinements with a minimum angular distance from each other of 60° . In this way, we obtain the highest (N_1) frequency and the respective secondary one (N_2) for each time and their respective associated angles.

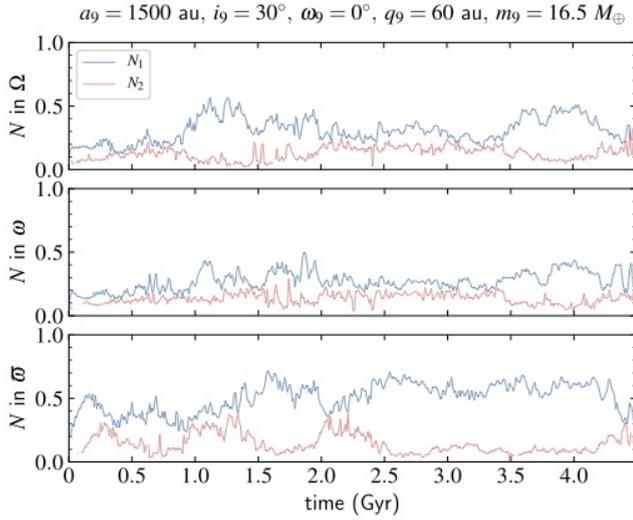


Figure 3. First and secondary peaks in the angular frequencies as a function of time shown with blue and red, respectively, for the model $a1500-30-0-60-5$.

The idea behind this analysis is that a bin with a high frequency corresponds to a relevant confinement in the angular interval defined by the bin. The measurement of the secondary frequency is motivated not only from the observational data shown in Figure 1 where the distribution of ϖ suggests the existence of two confinements, but also on visual inspection of the evolution of the angular confinements produced by the simulations.

We also perform a confinement test similar to that in Brown & Batygin (2016). For each time, we also consider the particles that belong to the interval $250 \text{ au} \leq a \leq 1000 \text{ au}$, $38 \text{ au} \leq q \leq 90 \text{ au}$ and $0^\circ \leq i \leq 30^\circ$ and we complete 100 iterations, where in each iteration, we randomly select nine objects from the set of particles (because we are considering nine observed distant TNOs); for Ω and ω , we calculate the confinement for the nine objects and for ϖ , we determine the smallest possible confinement for seven of those nine objects (since, as mentioned above, we are assuming that there are two confinements in ϖ). Thereby, we obtain for each time the average and standard deviation of the confinements.

3. Results

The time evolutions of the highest and secondary frequencies in the angles Ω , ω , and ϖ obtained from histograms show better defined angular confinements during the first billion years in almost all our models. Figures 3 and 4 present the results for two extreme cases of perihelion distances, $q_9 = 60 \text{ au}$ and $q_9 = 300 \text{ au}$, both for semimajor axis of Planet 9 of 1500 au . These figures suggest that higher frequencies, therefore, narrower confinements, are usually associated with smaller perihelion distances of Planet 9. This trend is also true for models with $a_9 = 700 \text{ au}$.

The angles corresponding to the highest and second-highest peaks in the frequencies are calculated in relation to that of Planet 9 ($\Delta\Omega$, $\Delta\omega$, and $\Delta\varpi$). In most of our models, Planet 9 leads to a shepherding in ϖ of the set of more tightly confined particles (those within the angular range corresponding to the highest frequency), and in several of our models, this is also true for the particles belonging to the second confinement. Figure 5 shows an example of this behavior, where the angular distance between both confinements in ϖ is not constant and at

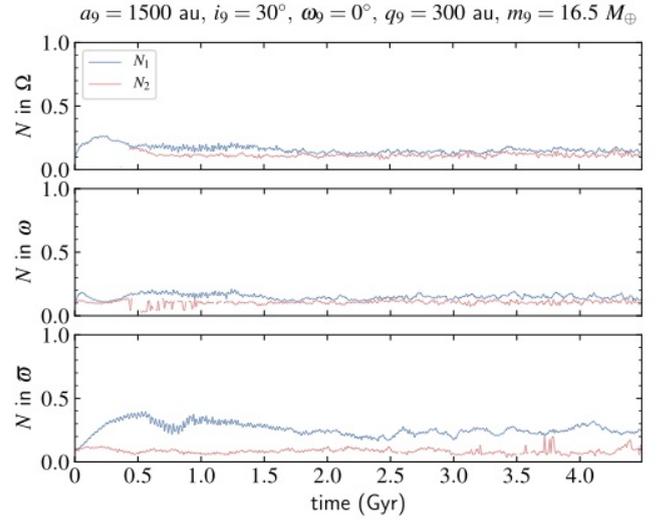


Figure 4. Same as Figure 3 for the model $a1500-30-0-300-5$. The values of the highest and secondary frequencies are quite low, mainly in Ω and ω where both primary and secondary frequencies have similar low values implying that there is no well defined confinement.

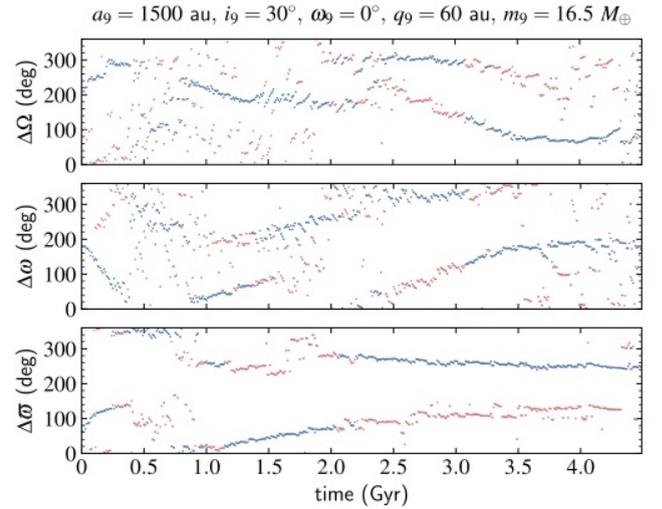


Figure 5. Evolution of the angular elements of the particles' orbits in relation to those of the Planet 9 corresponding to the highest and secondary frequencies shown with blue and red colors respectively, for the model $a1500-30-0-60-5$. For ϖ , the main and secondary confinements exchange positions several times until $\sim 2 \text{ Gyr}$, when the main confinement is kept roughly unchanged.

4.5 Gyr it is $\sim 100^\circ$. We also notice that the highest and secondary frequencies switch positions several times. When we compare this with Figure 3, we see that this switching happens when the highest and secondary frequencies have similar values. For Ω and ω , the angular distance between the particles' center of angular clustering and the corresponding angle of Planet 9 is not so well defined in time, but in some of our models, the relative distances $\Delta\Omega$ and $\Delta\omega$ corresponding to the highest frequency also remain constant for about the last Gyr. Models with large perihelion distances show a large dispersion in the relative angles (Figure 6).

Table 1 shows the average and standard deviation taken for the last 0.5 Gyr of simulation time, of the angular distance between the center of angular clustering and the corresponding planetary angle. We see that for ϖ , this distance varies inside

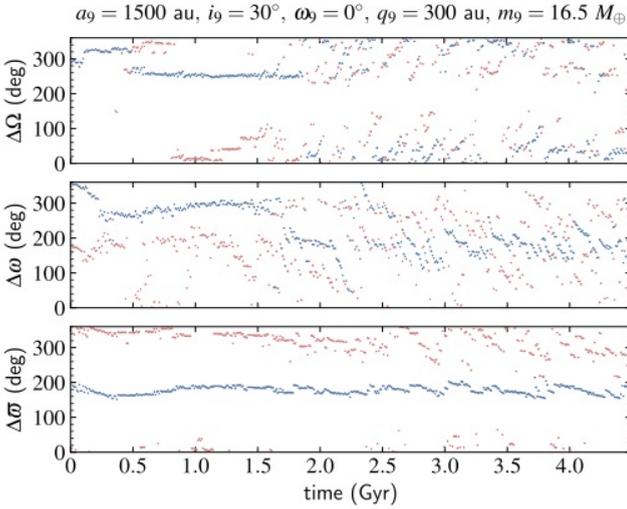


Figure 6. Same as Figure 5 for the model $a_{1500-30-0-300-5}$. The particles do not maintain an approximately constant relative distance for the last billion years in neither $\Delta\Omega$ nor $\Delta\omega$, as expected for great perihelion distances of Planet 9.

the range $172^{\circ}.4\text{--}248^{\circ}.9$, thus giving a dispersion of $76^{\circ}.5$. The average of this angular distance is $206^{\circ}.6$, which suggests the likely position of Planet 9' longitude of perihelion at $\sim 267^{\circ}$. For Ω and ω , the relative angular distances are not well defined but vary roughly uniformly around all 360° range. This is true even if we just consider the cases of smaller standard deviations where the clustering position is better defined.

Our analysis of confinement as a function of time confirms our previous results. In all models, a better confinement for the particles is reproduced for ϖ than for Ω or ω and planets with smaller perihelion distances are associated with better confinements (compare Figures 7 and 8). For models with $q_9 \sim 300$ au, the confinements, mainly in Ω and ω , are near to what would be expected in the case of a randomly produced uniform distribution in these angular elements when the procedure indicated in the Section 2 is applied.

In Table 2, we depict the maximum and mean values of the collection of highest frequencies (main confinements) in Ω , ω , and ϖ of the particles considering the full integration time (see also Figure 9) and the last 500 Myr, for all our models. The reliability of the numbers presented in Table 2 and plotted in several figures depend on the number of points used to build the statistics for each time. Since particles are continually ejected by the planets during the simulation, the worst cases are always near the end of the integrations. Moreover, planets with lower perihelion distances eject more particles through the whole evolution than those with higher perihelion distances. In most of the cases, and for any time, we always have more than 50 points to build the statistics, anyways. For one specific case, as commented in Section 2, we doubled the number of points. For that case, there were several times with less than 20 points and we assessed that there were not enough points to produce reliable numbers for the end of the simulation (the last 0.5 Gyr). As for the other cases that were not doubled, the worst one is for Planet 9 with $a_9 = 700$ au, $i_9 = 30^{\circ}$, $\omega_9 = 0^{\circ}$, and $q_9 = 60$ au, for which we have 24 times with less than 50 points, but just two times with less than 20 (17 and 16 points). Also, as a portion of the results shown in Table 2 are given in averages for at least the last 0.5 Gyr, even a small randomization due to small numbers can be averaged out. For planets

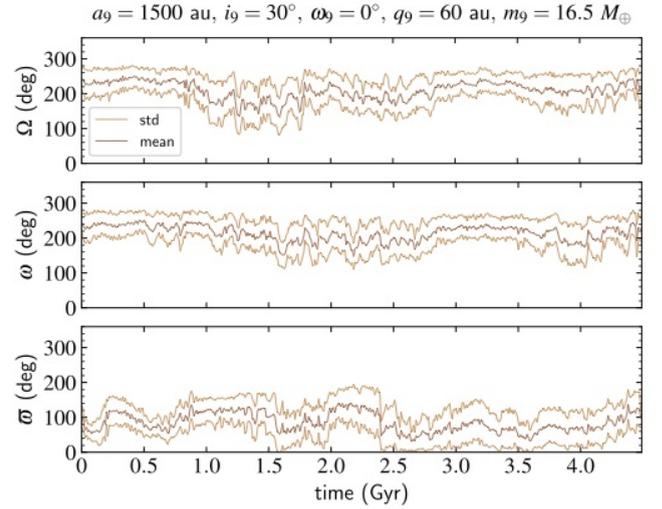


Figure 7. Confinement mean and its standard deviation in Ω , ω , and ϖ as a function of time shown with dark and light brown, respectively, for the model $a_{1500-30-0-60-5}$.

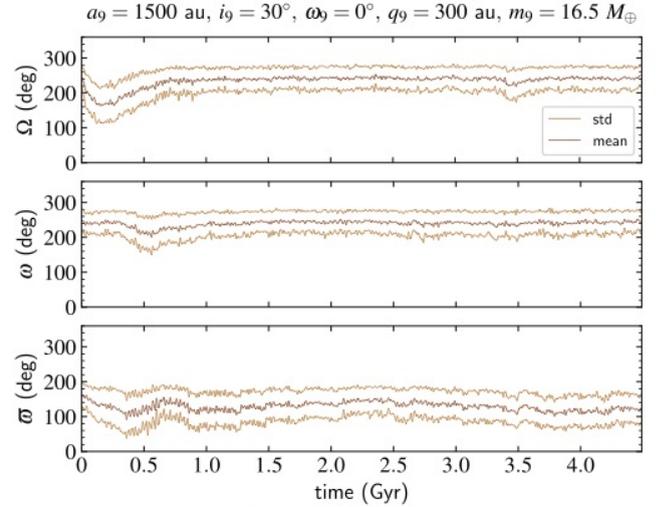


Figure 8. Same as Figure 7 for the model $a_{1500-30-0-300-5}$. From about 1 Gyr, results are very similar to those that would be expected in the case of a random distribution.

with the lowest perihelion distances (60 and 100 au), however, one must consider with caution the results described by the maxima.

In general, lower perihelion distances of Planet 9 produce better defined confinements in the distant TNOs. However, a constraint that an outer planet with a low-perihelion distance should satisfy is the preservation of the Classical Kuiper Belt. Another important constraint refers to the right ratio of observed detached to scattering objects, since a distant planet tends to overpopulate the region of the detached objects. These will be the subjects of the next section.

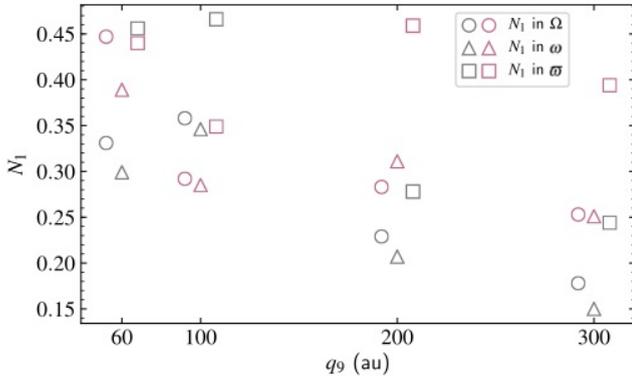
4. Other Tests for Planet 9 with Low-perihelion Distance

In this section, we show the results of the influence of Planet 9 with low-perihelion distance on the relation between the scattered disk and detached populations within the range

Table 2

Maximum and Mean Values of the Angular Frequencies Corresponding to the Narrowest Confinements Calculated Considering both the 4.5 Gyr and the Last 500 Myr of Integration Time

Model	N_1 in Ω				N_1 in ω				N_1 in ϖ			
	4.5 Gyr		last 500 Myr		4.5 Gyr		last 500 Myr		4.5 Gyr		last 500 Myr	
	max	mean	max	mean	max	mean	max	mean	max	mean	max	mean
<i>a</i> 1500-10-0-100-5	0.362	0.226	0.219	0.183	0.313	0.202	0.194	0.164	0.472	0.283	0.376	0.319
<i>a</i> 1500-30-0-60-5	0.567	0.331	0.515	0.359	0.499	0.299	0.436	0.308	0.714	0.456	0.665	0.483
<i>a</i> 1500-30-0-100-5	0.621	0.358	0.304	0.236	0.595	0.346	0.337	0.266	0.749	0.466	0.651	0.545
<i>a</i> 1500-30-0-200-5	0.367	0.229	0.196	0.163	0.323	0.207	0.219	0.175	0.464	0.278	0.269	0.241
<i>a</i> 1500-30-0-300-5	0.265	0.178	0.175	0.152	0.210	0.150	0.182	0.151	0.395	0.244	0.321	0.266
<i>a</i> 1500-30-90-60-5	0.397	0.244	0.354	0.259	0.405	0.251	0.344	0.262	0.493	0.293	0.318	0.248
<i>a</i> 1500-60-0-100-5	0.394	0.242	0.332	0.255	0.326	0.209	0.220	0.176	0.425	0.259	0.383	0.348
<i>a</i> 700-10-0-100-3	0.848	0.473	0.848	0.530	0.681	0.386	0.494	0.336	0.768	0.486	0.651	0.456
<i>a</i> 700-30-0-60-3	0.803	0.447	0.803	0.520	0.688	0.389	0.688	0.439	0.786	0.440	0.786	0.518
<i>a</i> 700-30-0-100-3	0.494	0.292	0.276	0.214	0.479	0.285	0.373	0.257	0.603	0.349	0.479	0.372
<i>a</i> 700-30-0-200-3	0.470	0.283	0.470	0.324	0.525	0.311	0.458	0.313	0.744	0.459	0.707	0.577
<i>a</i> 700-30-0-300-3	0.402	0.253	0.343	0.263	0.409	0.251	0.395	0.283	0.620	0.394	0.443	0.325
<i>a</i> 700-30-90-60-3	0.582	0.336	0.582	0.394	0.459	0.275	0.415	0.308	0.603	0.349	0.587	0.410
<i>a</i> 700-60-0-100-3	0.832	0.465	0.553	0.372	0.766	0.429	0.653	0.422	0.882	0.534	0.632	0.458

**Figure 9.** Mean values of N_1 in Ω , ω , and ϖ (represented by circles, triangles, and squares, respectively) calculated for the complete integration time for models with $i_9 = 30^\circ$ and $\omega_9 = 0^\circ$. The gray color represents models with $a_9 = 1500$ au and the violet one those with $a_9 = 700$ au.

100 au $< a < 200$ au and on the Classical Kuiper Belt Objects (KBOs).

4.1. The Influence of Planet 9 on the Relation between Scattered and Detached Objects

Brown & Batygin (2016) searched for the best Planet 9 orbits that entail confinements in TNOs angular orbital elements that compares to the confinement encountered in the angular orbital elements of observed TNOs. One of their criteria is to discard those orbital parameters of Planet 9 that lead to the generation of too many particles with perihelion distance $q > 42$ au in the range of 100 au $< a < 200$ au, due to the non-existence of such observed objects; namely, they apparently assign a null probability to planets with low a_9 and high e_9 (low values of q_9) since these are prone to produce high-perihelion distance objects in that region.

Currently⁵ there are three objects (2013 UT₁₅, 2014 SS₃₄₉, and 2015 KE₁₇₂, according to the MPC database) observed in more than one opposition with $q > 42$ au and 34 with $q > 30$ au, in that range of semimajor axis. We apply an

⁵ As of 2018 May.

Observational Bias Introducing Procedure (OBIP; Gomes et al. 2015) to our simulated particles in each model that belong to the range 100 au $< a < 200$ au and $q > 30$ au from 4.4 Gyr and determine the number of objects with $q > 42$ au among a sample of 34 objects that can be observed.

OBIP is a procedure that consists of assigning different sizes to the simulated objects and a certain albedo to obtain their visual magnitudes, thus determining observable objects up to a certain visual magnitude. Sizes are determined by a cumulative size distribution function that follows a power law:

$$N(r) = N_0 \left(\frac{R_0}{r} \right)^\gamma, \quad (1)$$

where N is the number of objects with radius greater than r , N_0 is a scaling factor, R_0 is the radius above which there is just one object, and γ is an empirical parameter obtained from observations. We consider a size distribution with three slopes⁶ ($\gamma = 3$, $\gamma = 5$ and $\gamma = 2$, respectively for radii in the range $r > 200$ km, $50 \text{ km} < r < 200 \text{ km}$ and $r < 50 \text{ km}$). The largest $r(R_0)$ is determined by associating it with the visual magnitude of 20.5, which is approximately the magnitude of the brightest TNO with 100 au $< a < 200$ au and $q > 30$ au. Albedos are taken as 0.25.

This collection of sizes is randomly associated to the simulated particles' orbits which for the last 10^8 year belong to the range 100 au $< a < 200$ au and $q > 30$ au. The mean longitudes are chosen randomly in the range 0° – 360° . Since there are 34 real objects within the limits above, we determine the 34 brightest objects by OBIP and the number of them with $q > 42$ au. Another parameter that is considered by OBIP is the range of ecliptic latitude in which it will be applied, we consider a reasonable range of $\pm 30^\circ$.

The mean and standard deviation of the number of objects with $q > 42$ au and 100 au $< a < 200$ au among the 34 brightest ones determined by 1000 realizations of OBIP are depicted for each model in Table 3. Although we can see some

⁶ In fact, OBIP never reaches the slope associated to the smallest sizes since only brighter objects are needed to be considered.

Table 3
Mean and Standard Deviation of the Number of Objects with $q > 42$ au
Among the 34 Brightest Ones with $q > 30$ au, in the Range
 $100 \text{ au} < a < 200 \text{ au}$

Model	Number of Objects With $q > 42$ au	
	Mean	Std
<i>a</i> 1500-10-0-100-5	5.69	2.25
<i>a</i> 1500-30-0-60-5	3.56	1.80
<i>a</i> 1500-30-0-100-5	2.14	1.43
<i>a</i> 1500-30-0-200-5	2.75	1.57
<i>a</i> 1500-30-0-300-5	2.76	1.62
<i>a</i> 1500-30-90-60-5	5.30	2.13
<i>a</i> 1500-60-0-100-5	5.79	2.18
<i>a</i> 700-10-0-100-3	9.69	2.93
<i>a</i> 700-30-0-60-3	5.23	2.31
<i>a</i> 700-30-0-100-3	3.67	1.89
<i>a</i> 700-30-0-200-3	4.31	2.05
<i>a</i> 700-30-0-300-3	1.82	1.32
<i>a</i> 700-30-90-60-3	3.35	1.77
<i>a</i> 700-60-0-100-3	8.04	2.59

trend for a larger number of OBIP-determined objects with $q > 42$ au for Planet 9 with a smaller q_9 , this trend is not well defined as to place a low-perihelion Planet 9 as prohibitive or even unlikely (see also Figure 10). A typical example is Planet 9 with $a_9 = 1500$ au and $q_9 = 60$ au. OBIP determines an average of 3.56 objects with $q > 42$ au and standard deviation at 1.80, thus three objects is well within the range of statistically acceptable numbers. Most Planet 9 models yield statistically coherent results with respect to the ratio of observable detached to scattering objects, which suggests that orbital parameters of Planet 9 with low q_9 should not be discarded as suggested in Brown & Batygin (2016).

4.2. The Influence of Planet 9 on the Classical Kuiper Belt

4.2.1. Cold Classical Kuiper Belt

In order to analyze the influence of Planet 9 on the Cold Classical Kuiper Belt Objects (CCKBOs), we performed new numerical integrations for the models *a*700-30-0-60-3 and *a*1500-30-0-60-5. Both simulations were done with an integration time of 4.5 Gyr and initially considering the current orbital configuration of the four giant planets, the respective external perturber and a disk composed of 2000 test particles with $42.5 \text{ au} < a < 46 \text{ au}$, $0 < e < 0.01$, $0^\circ < i < 0.6^\circ$ and remaining orbital elements randomly distributed between 0° and 360° . We chose a conspicuously cold disk in order to check not only the compatibility of Planet 9 with the Cold Classical Kuiper Belt (CCKB) but also whether Planet 9 could be responsible for some of the excitation we currently find there.

Both tested models present similar results (see, e.g., Figure 11). Planet 9 leads to the scattering of particles both inwards and outwards, although mostly outwards. They are however destabilized once they enter the secular resonance region; therefore, the main effect is to drive the semimajor axes of the particles to higher values. The eccentricities as well as the inclinations were excited within the values of the observed cold population. Assuming a local formation, the original external borders of the cold disk are unknown. Thus, from the data of the original simulations, we can obtain cold disks with

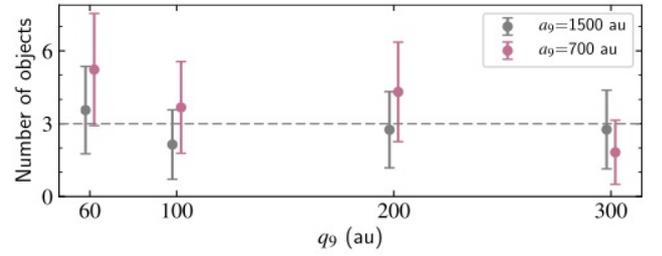


Figure 10. Average of the number of observable objects by 1000 realizations of OBIP, with $q > 42$ au among the 34 brightest ones with $q > 30$ au and $100 \text{ au} < a < 200 \text{ au}$, for models with $i_9 = 30^\circ$ and $\omega_9 = 0^\circ$ as a function of the perihelion distance of Planet 9. The bars represent standard deviations of the mean values.

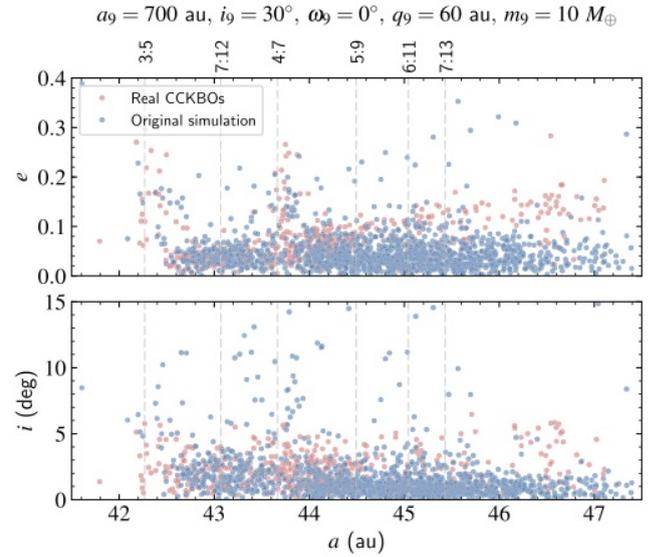


Figure 11. Eccentricity and inclination as a function of the semimajor axis for real CCKBOs and simulated particles at 4.5 Gyr considering the model *a*700-30-0-60-3, in red and blue, respectively. The simulated particles had initially semimajor axes between 42.5 and 46 au in almost circular and low-inclination orbits.

different external edges by restricting the initial semimajor axes of the particles; the best fit is then determined according to the final distribution of the semimajor axes of the particles in the interval $42 \text{ au} < a < 46 \text{ au}$, when compared to that of the actual cold population. Figures 12 and 13 show, for each model, the histograms in semimajor axis at 4.5 Gyr for the original disk and that corresponding to the best fit. These figures suggest that the fuzziness of the observed outer border of the CCKB could be a signature of the perturbation of a low-perihelion Planet 9.

The eccentricities of the simulated particles always have low values, so they do not compare very nicely with the real eccentricity distribution mainly for higher semimajor axes ($a > 44.5 \text{ au}$). Thus, the peculiar distribution of the eccentricities of the CCKB would not be explained by the perturbations of such a planet with low perihelion. Some other mechanism must have acted to excite the eccentricities of these particles (e.g., a temporary excited Neptune in a planetary instability migration model (Gomes et al. 2018)). The inclinations, on the other hand, are kept within the range of the observed inclinations in the CCKB.

Possibly the only inconsistency produced by a low-perihelion Planet 9 on the CCKB refers to a dearth of

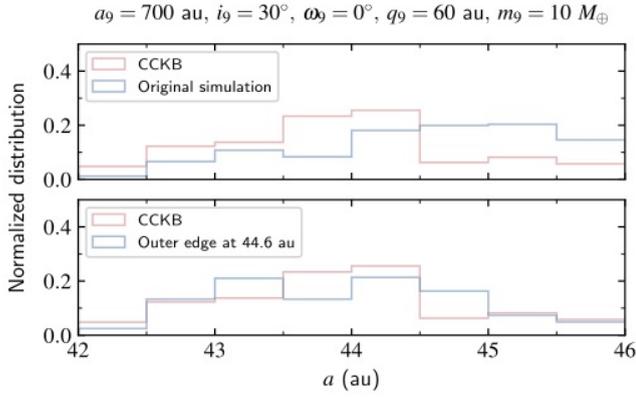


Figure 12. Distribution of semimajor axes for actual CCKBOs and simulated particles at 4.5 Gyr for model $a700-30-0-60-3$, in red and blue, respectively. The top panel shows the results for the full set of particles and the bottom one for the best fit in the truncation of the initial outer edge of the disk, at 44.6 au.

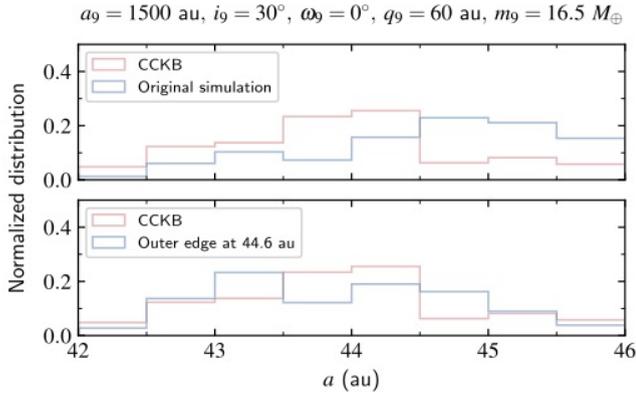


Figure 13. Same as Figure 12 for the model $a1500-30-0-60-5$, where the best fit of the outer edge of the disk is at 44.6 au.

simulated particles just past the 4:7 resonance. This is likely produced by the outward scattering of particles by Planet 9 and the barrier effect of the 4:7 resonance that must capture some outward migrating particles.

4.2.2. Hot Classical Kuiper Belt

We also analyze the influence of Planet 9 on the Hot Classical Kuiper Belt objects. For this, we performed simulations considering the actual Classical population (and resonant objects) of the Kuiper Belt for the model $a700-30-0-60-3$ and evolve the system by 4.5 Gyr. The orbital elements of the Kuiper Belt and the four known giant planets were taken for the same date from the JPL Small-Body Database.⁷ The results show that a planet with such low-perihelion would excessively clean objects with higher eccentricities (Figure 14). These results led us to consider perihelion distances a little higher for Planet 9.

We thus performed numerical integrations considering a theoretical distribution of particles uniformly and randomly distributed in the ranges $38.5 \text{ au} < a < 46.5 \text{ au}$, $0 < e < 0.25$ and $0^\circ < i < 20^\circ$ under the influence of the known giant planets and compared the results with two other models that additionally consider a Planet 9 with a low-perihelion but larger than 60 au, namely, $a_9 = 700 \text{ au}$ and $q_9 = 70 \text{ au}$ and,

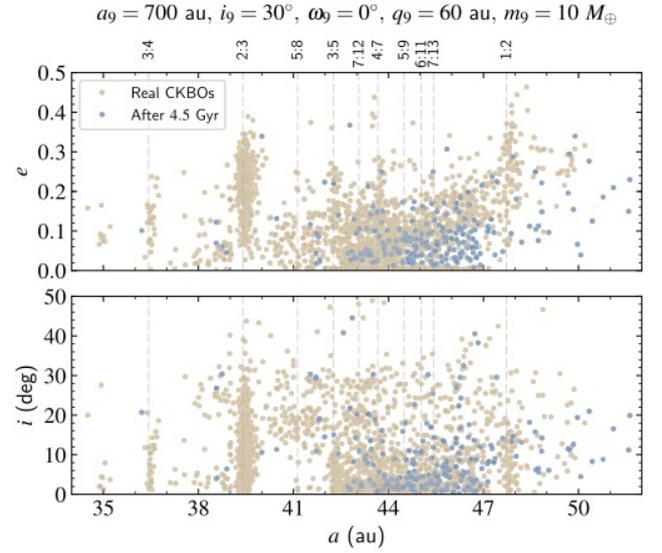


Figure 14. Eccentricity and inclination as a function of the semimajor axis for actual CKBOs (in brown) and their configuration after 4.5 Gyr under the influence of Planet 9 under the model $a700-30-0-60-3$ (in blue).

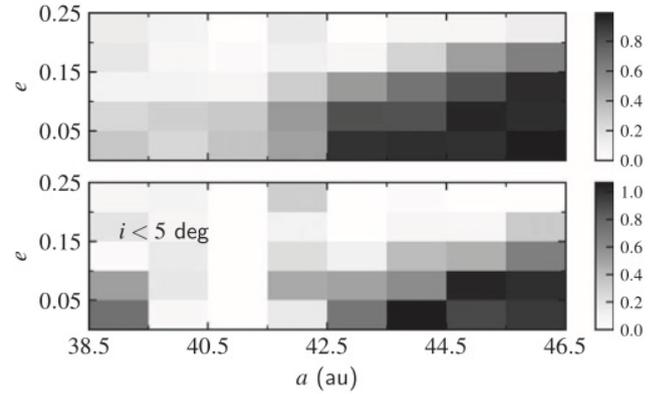


Figure 15. Ratio of the number of surviving objects at the end of the integration time to the number of initial objects as function of the semimajor axis and eccentricity from an initially uniform distribution under the influence of the known planets. The upper panel considers all inclinations and the lower panel considers only cold objects ($i < 5^\circ$).

$a_9 = 1500 \text{ au}$ and $q_9 = 90 \text{ au}$. The results at 4.5 Gyr are presented in Figures 15–17 as the ratio of the number of surviving objects to the number of initial objects in the grid of the plane $a - e$ for objects with any inclination and for objects with $i < 5^\circ$.

Figure 15 shows that a model without an additional external planet tends to preserve more hot and cold objects at the lower right end of the plane $a - e$. This is already well known since this is the region that keeps objects far from close encounters with Neptune. Moreover, the region between roughly 40 and 42 au is also depleted due to the ν_8 secular resonance.

Now comparing Figures 15–17, we notice that the model with an external perturber with $a_9 = 1500 \text{ au}$ and $q_9 = 90 \text{ au}$ preserves the characteristics of the theoretical Kuiper Belt at 4.5 Gyr seen in the model considering only the known giant planets. The hot objects show a good approximation and most objects in the 3:5 and 4:7 MMRs (corresponding to $a = 42.3 \text{ au}$ and $a = 43.7 \text{ au}$) survived until the end of the

⁷ <https://ssd.jpl.nasa.gov/sbdb.cgi>

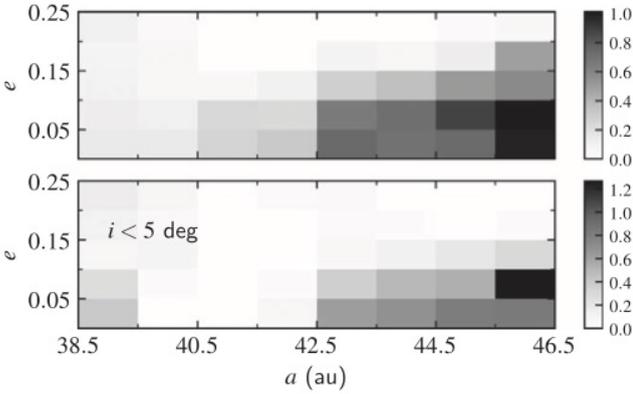


Figure 16. Same as Figure 15 adding a planet with $a_9 = 700$ au and $q_9 = 70$ au.

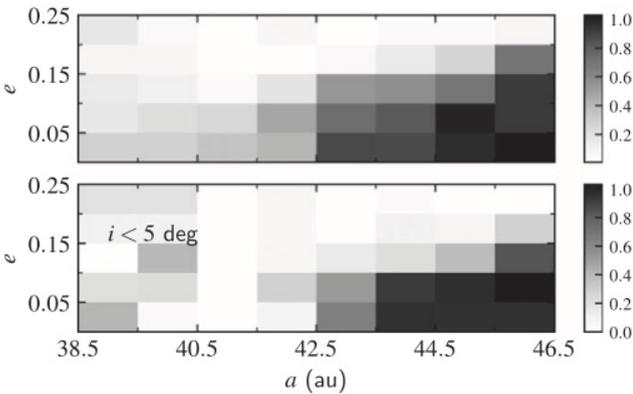


Figure 17. Same as Figure 15 adding a planet with $a_9 = 1500$ au and $q_9 = 90$ au.

integration. The model that considers a planet with $a_9 = 700$ au and $q_9 = 70$ au has a smaller fraction of hot objects compared to the previous one and does not keep most objects in MMR. The right comparison of the distribution of TNOs in the Kuiper Belt from simulations with the observed ones makes sense only if the right initial conditions are considered. For instance, the initial distribution of objects after the stabilization of the giant planets⁸ might have concentrated most objects in smaller semimajor axes. Planet 9 could thus shift the semimajor axes outwards toward a distribution similar to our present one. Apart from this speculation, these last results show that a Planet 9 with a perihelion distance as low as 90 au does not significantly affect the Classical Kuiper Belt.

5. Conclusions

An external perturber was proposed to explain the confinements in the orbital elements Ω , ω , and ϖ of TNOs with $q > 30$ au and $a > 250$ au. Brown & Batygin (2016) claimed that good orbits for Planet 9 should have $q_9 > 200$ au, to explain such confinements, where lower perihelia than that above were assigned a null probability arguing that these parameters produce objects with $q > 42$ au in the region $100 \text{ au} < a < 200 \text{ au}$, where no object with such perihelion distance had been observed previously. On the other hand,

⁸ In a Nice model scenario; however, a smoother migration scenario could also work in this case.

Gomes et al. (2017) explain the inclination of the solar equator in relation to the invariable plane of known planets showing that parameters of the Planet 9 similar to those found by Batygin & Brown (2016a) and Brown & Batygin (2016) are compatible although with slightly higher eccentricities.

In this way, we considered perihelion distances for Planet 9 lower than those indicated by Brown & Batygin (2016) and we tested their influence on the TNOs with $a \geq 250$ au and $q \geq 40$ au, since these objects would not be greatly influenced by Neptune. In this region, there are currently nine objects whose Ω exhibit a large confinement ($210^\circ 5$), while the confinement in ω is $131^\circ 7$, and we assume two confinements in the observational sample of ϖ .

Through statistical analysis, we tested the influence of a Planet 9 with $a_9 = 700$ au and $a_9 = 1500$ au and perihelion distances ranging from 60 to 300 au. Our results show that smaller perihelion distances ($q_9 = 60$ au or $q_9 = 100$ au) produce narrower confinements. Such confinements are generally best reproduced in ϖ , and interestingly, in several models, there are two confinements in this angular element, as assumed in the observational data, being shepherded by Planet 9. Models with high q_9 are generally associated with random distributions in Ω and ω .

We also verified that a planet with low-perihelion roughly yielded the current observed ratio between the number of scattered and detached with $q > 42$ au objects in the interval $100 \text{ au} < a < 200 \text{ au}$ by applying an observational bias to the particles of our models. We saw that several of our models are compatible with this ratio. Likewise, we verified whether the existence of a Planet 9 with such low-perihelion would destroy the Classical Kuiper Belt. Integrations considering the most extreme cases of perihelion distance of Planet 9 from our models on an initially cold disk show that the signature due to the external perturber would be that of moving the semimajor axes of the objects to larger values and the sparseness of particles immediately past the 4:7 MMR. However, when we considered also the hot objects, a Planet 9 with a perihelion at 60 au would considerably deplete the region with a particularly important depletion for the resonant objects.

This motivated us to perform other runs with low-perihelion distances but larger than 60 au. For this, we considered a theoretical Classical Kuiper Belt and showed that a Planet 9 with $q_9 = 90$ au produces signatures similar to those produced without an additional external planet. Thus, we concluded that planets with perihelion distances as small as 90 au should not be discarded in principle. They produce better confinements while preserving the Classical Kuiper Belt and the ratio between the number of detached to scattering objects in the region $100 \text{ au} < a < 200 \text{ au}$.

A last remark is that although a very low-perihelion distance for Planet 9 (~ 60 – 70 au) seems to excessively empty the Kuiper Belt region, it may not, depending on the initial conditions of the particles just after the stabilization of the planets. If these objects were much more concentrated on smaller semimajor axes, a low-perihelion Planet 9 could drift these objects outward so as to populate the Kuiper Belt conveniently. This problem is the subject of a following work by the authors.

The numerical simulations were done by the Lobo Carneiro supercomputer in the High Performance Computing Center of NACAD/COPPE/UFRJ. J.C. thanks support from the

Coordination for the Improvement of Higher Education Personnel (CAPES), and R.G. acknowledges the Brazilian CNPq grant through process 307009/2014-9.

ORCID iDs

Rodney Gomes  <https://orcid.org/0000-0001-5712-3042>

References

- Bailey, E., Batygin, K., & Brown, M. E. 2016, *AJ*, 152, 126
- Batygin, K., & Brown, M. E. 2016a, *AJ*, 151, 22
- Batygin, K., & Brown, M. E. 2016b, *ApJL*, 833, L3
- Batygin, K., & Morbidelli, A. 2017, *AJ*, 154, 229
- Becker, J. C., Khain, T., Hamilton, S. J., et al. 2018, arXiv:1805.05355
- Brasil, P. I. O., Gomes, R. S., & Soares, J. S. 2014, *A&A*, 564, A44
- Brasser, R., Duncan, M. J., & Levison, H. F. 2006, *Icar*, 184, 59
- Brasser, R., Duncan, M. J., Levison, H. F., Schwamb, M. E., & Brown, M. E. 2012, *Icar*, 217, 1
- Bromley, B. C., & Kenyon, S. J. 2016, *ApJ*, 826, 64
- Brown, M. E., & Batygin, K. 2016, *ApJL*, 824, L23
- Brown, M. E., Trujillo, C., & Rabinowitz, D. 2004, *ApJ*, 617, 645
- Chambers, J. E. 1999, *MNRAS*, 304, 793
- Dukes, D., & Krumholz, M. R. 2012, *ApJ*, 754, 56
- Eriksson, L. E. J., Mustill, A. J., & Johansen, A. 2018, *MNRAS*, 475, 4609
- Fienga, A., Laskar, J., Manche, H., & Gastineau, M. 2016, *A&A*, 587, L8
- Fraser, W. C., Brown, M. E., Morbidelli, A., Parker, A., & Batygin, K. 2014, *ApJ*, 782, 100
- Fraser, W. C., Brown, M. E., & Schwamb, M. E. 2010, *Icar*, 210, 944
- Gladman, B., & Chan, C. 2006, *ApJL*, 643, L135
- Gomes, R., Deienno, R., & Morbidelli, A. 2017, *AJ*, 153, 27
- Gomes, R., Levison, H. F., Tsiganis, K., & Morbidelli, A. 2005a, *Natur*, 435, 466
- Gomes, R., Nesvorný, D., Morbidelli, A., Deienno, R., & Nogueira, E. 2018, *Icar*, 306, 319
- Gomes, R. S. 2011, *Icar*, 215, 661
- Gomes, R. S., Gallardo, T., Fernández, J. A., & Brunini, A. 2005b, *CeMDA*, 91, 109
- Gomes, R. S., Matese, J. J., & Lissauer, J. J. 2006, *Icar*, 184, 589
- Gomes, R. S., Soares, J. S., & Brasser, R. 2015, *Icar*, 258, 37
- Holman, M. J., & Payne, M. J. 2016a, *AJ*, 152, 94
- Holman, M. J., & Payne, M. J. 2016b, *AJ*, 152, 80
- Kenyon, S. J., & Bromley, B. C. 2004, *Natur*, 432, 598
- Khain, T., Batygin, K., & Brown, M. E. 2018, *AJ*, 155, 250
- Lai, D. 2016, *AJ*, 152, 215
- Li, G., & Adams, F. C. 2016, *ApJL*, 823, L3
- Malhotra, R., Volk, K., & Wang, X. 2016, *ApJL*, 824, L22
- Millholland, S., & Laughlin, G. 2017, *AJ*, 153, 91
- Morbidelli, A., & Levison, H. F. 2004, *AJ*, 128, 2564
- Morbidelli, A., Levison, H. F., Tsiganis, K., & Gomes, R. 2005, *Natur*, 435, 462
- Mustill, A. J., Raymond, S. N., & Davies, M. B. 2016, *MNRAS*, 460, L109
- Parker, R. J., Lichtenberg, T., & Quanz, S. P. 2017, *MNRAS*, 472, L75
- Shankman, C., Gladman, B. J., Kaib, N., Kavelaars, J. J., & Petit, J. M. 2013, *ApJL*, 764, L2
- Trujillo, C. A., & Sheppard, S. S. 2014, *Natur*, 507, 471
- Tsiganis, K., Gomes, R., Morbidelli, A., & Levison, H. F. 2005, *Natur*, 435, 459

Referências Bibliográficas

- Adams, F. C. (2010). The Birth Environment of the Solar System. *ARA&A*, 48:47–85.
- Adams, F. C. and Laughlin, G. (2001). Constraints on the Birth Aggregate of the Solar System. *Icarus*, 150(1):151–162.
- Agnor, C. B. and Lin, D. N. C. (2012). On the Migration of Jupiter and Saturn: Constraints from Linear Models of Secular Resonant Coupling with the Terrestrial Planets. *ApJ*, 745(2):143.
- Alexandersen, M., Gladman, B., Kavelaars, J. J., Petit, J.-M., Gwyn, S. D. J., Shankman, C. J., and Pike, R. E. (2016). A Carefully Characterized and Tracked Trans-Neptunian Survey: The Size distribution of the Plutinos and the Number of Neptunian Trojans. *AJ*, 152(5):111.
- Bailey, E., Batygin, K., and Brown, M. E. (2016). Solar Obliquity Induced by Planet Nine. *AJ*, 152(5):126.
- Bailey, E., Brown, M. E., and Batygin, K. (2018). Feasibility of a Resonance-based Planet Nine Search. *AJ*, 156(2):74.
- Bannister, M. T., Shankman, C., Volk, K., Chen, Y.-T., Kaib, N., Gladman, B. J., Jakubik, M., Kavelaars, J. J., Fraser, W. C., Schwamb, M. E., Petit, J.-M., Wang, S.-Y., Gwyn, S. D. J., Alexandersen, M., and Pike, R. E. (2017). OSSOS. V. Diffusion in the Orbit of a High-perihelion Distant Solar System Object. *AJ*, 153(6):262.
- Barr, A. C. and Canup, R. M. (2010). Origin of the Ganymede-Callisto dichotomy by impacts during the late heavy bombardment. *Nature Geoscience*, 3(3):164–167.
- Bate, M. R., Lodato, G., and Pringle, J. E. (2010). Chaotic star formation and the alignment of stellar rotation with disc and planetary orbital axes. *MNRAS*, 401(3):1505–1513.
- Batygin, K. (2012). A primordial origin for misalignments between stellar spin axes and planetary orbits. *Nature*, 491(7424):418–420.
- Batygin, K., Adams, F. C., Brown, M. E., and Becker, J. C. (2019). The planet nine hypothesis. *Phys. Rep.*, 805:1–53.
- Batygin, K. and Brown, M. E. (2016a). Evidence for a Distant Giant Planet in the Solar System. *AJ*, 151(2):22.

- Batygin, K. and Brown, M. E. (2016b). Generation of Highly Inclined Trans-Neptunian Objects by Planet Nine. *ApJ*, 833(1):L3.
- Batygin, K. and Morbidelli, A. (2017). Dynamical Evolution Induced by Planet Nine. *AJ*, 154(6):229.
- Becker, A. C., Arraki, K., Kaib, N. A., Wood-Vasey, W. M., Aguilera, C., Blackman, J. W., Blondin, S., Challis, P., Clocchiatti, A., Covarrubias, R., Damke, G., Davis, T. M., Filippenko, A. V., Foley, R. J., Garg, A., Garnavich, P. M., Hicken, M., Jha, S., Kirshner, R. P., Krisciunas, K., Leibundgut, B., Li, W., Matheson, T., Miceli, A., Miknaitis, G., Narayan, G., Pignata, G., Prieto, J. L., Rest, A., Riess, A. G., Salvo, M. E., Schmidt, B. P., Smith, R. C., Sollerman, J., Spyromilio, J., Stubbs, C. W., Suntzeff, N. B., Tonry, J. L., and Zenteno, A. (2008). Exploring the Outer Solar System with the ESSENCE Supernova Survey. *ApJ*, 682(1):L53.
- Becker, J. C., Adams, F. C., Khain, T., Hamilton, S. J., and Gerdes, D. (2017). Evaluating the Dynamical Stability of Outer Solar System Objects in the Presence of Planet Nine. *AJ*, 154(2):61.
- Becker, J. C., Khain, T., Hamilton, S. J., Adams, F. C., Gerdes, D. W., Zullo, L., Franson, K., Millholland, S., Bernstein, G. M., Sako, M., Bernardinelli, P., Napier, K., Markwardt, L., Lin, H. W., Wester, W., Abdalla, F. B., Allam, S., Annis, J., Avila, S., Bertin, E., Brooks, D., Carnero Rosell, A., Carrasco Kind, M., Carretero, J., Cunha, C. E., D'Andrea, C. B., da Costa, L. N., Davis, C., De Vicente, J., Diehl, H. T., Doel, P., Eifler, T. F., Flaughner, B., Fosalba, P., Frieman, J., García-Bellido, J., Gaztanaga, E., Gruen, D., Gruendl, R. A., Gschwend, J., Gutierrez, G., Hartley, W. G., Hollowood, D. L., Honscheid, K., James, D. J., Kuehn, K., Kuropatkin, N., Maia, M. A. G., March, M., Marshall, J. L., Menanteau, F., Miquel, R., Ogando, R. L. C., Plazas, A. A., Sanchez, E., Scarpine, V., Schindler, R., Sevilla-Noarbe, I., Smith, M., Smith, R. C., Soares-Santos, M., Sobreira, F., Suchyta, E., Swanson, M. E. C., Walker, A. R., and DES Collaboration (2018). Discovery and Dynamical Analysis of an Extreme Trans-Neptunian Object with a High Orbital Inclination. *AJ*, 156(2):81.
- Beichman, C. A. (1987). The IRAS view of the galaxy and the solar system. *ARA&A*, 25:521–563.
- Beust, H. (2016). Orbital clustering of distant Kuiper belt objects by hypothetical Planet 9. Secular or resonant? *A&A*, 590:L2.
- Brasil, P. I. O., Gomes, R. S., and Soares, J. S. (2014a). Dynamical formation of detached trans-Neptunian objects close to the 2:5 and 1:3 mean motion resonances with Neptune. *A&A*, 564:A44.
- Brasil, P. I. O., Nesvorný, D., and Gomes, R. S. (2014b). Dynamical Implantation of Objects in the Kuiper Belt. *AJ*, 148(3):56.

- Brasil, P. I. O., Roig, F., Nesvorný, D., Carruba, V., Aljbaae, S., and Huaman, M. E. (2016). Dynamical dispersal of primordial asteroid families. *Icarus*, 266:142–151.
- Brasser, R., Duncan, M. J., and Levison, H. F. (2006). Embedded star clusters and the formation of the Oort Cloud. *Icarus*, 184(1):59–82.
- Brasser, R., Duncan, M. J., Levison, H. F., Schwamb, M. E., and Brown, M. E. (2012). Reassessing the formation of the inner Oort cloud in an embedded star cluster. *Icarus*, 217(1):1–19.
- Brasser, R., Morbidelli, A., Gomes, R., Tsiganis, K., and Levison, H. F. (2009). Constructing the secular architecture of the solar system II: the terrestrial planets. *A&A*, 507(2):1053–1065.
- Brasser, R., Walsh, K. J., and Nesvorný, D. (2013). Constraining the primordial orbits of the terrestrial planets. *MNRAS*, 433(4):3417–3427.
- Bromley, B. C. and Kenyon, S. J. (2016). Making Planet Nine: A Scattered Giant in the Outer Solar System. *ApJ*, 826(1):64.
- Brown, M. E. (2001). The Inclination Distribution of the Kuiper Belt. *AJ*, 121(5):2804–2814.
- Brown, M. E. and Batygin, K. (2016). Observational Constraints on the Orbit and Location of Planet Nine in the Outer Solar System. *ApJ*, 824(2):L23.
- Brown, M. E. and Batygin, K. (2019). Orbital Clustering in the Distant Solar System. *AJ*, 157(2):62.
- Brown, M. E., Trujillo, C., and Rabinowitz, D. (2004). Discovery of a Candidate Inner Oort Cloud Planetoid. *ApJ*, 617(1):645–649.
- Brunini, A. and Melita, M. D. (2002). The Existence of a Planet beyond 50 AU and the Orbital Distribution of the Classical Edgeworth-Kuiper-Belt Objects. *Icarus*, 160(1):32–43.
- Buie, M. W. and Folkner, W. M. (2015). Astrometry of Pluto from 1930-1951 Observations: the Lampland Plate Collection. *AJ*, 149(1):22.
- Cáceres, J. and Gomes, R. (2018). The Influence of Planet Nine on the Orbits of Distant TNOs: The Case for a Low-perihelion Planet. *AJ*, 156(4):157.
- Carrera, D., Gorti, U., Johansen, A., and Davies, M. B. (2017). Planetesimal Formation by the Streaming Instability in a Photoevaporating Disk. *ApJ*, 839(1):16.
- Chambers, J. E. (1999). A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies. *MNRAS*, 304(4):793–799.
- Chen, Y.-T., Kavelaars, J. J., Gwyn, S., Ferrarese, L., Côté, P., Jordán, A., Suc, V., Cuillandre, J.-C., and Ip, W.-H. (2013). Discovery of a New Member of the Inner Oort Cloud from the Next Generation Virgo Cluster Survey. *ApJ*, 775(1):L8.

- Chen, Y.-T., Lin, H. W., Holman, M. J., Payne, M. J., Fraser, W. C., Lacerda, P., Ip, W.-H., Chen, W.-P., Kudritzki, R.-P., Jedicke, R., Wainscoat, R. J., Tonry, J. L., Magnier, E. A., Waters, C., Kaiser, N., Wang, S.-Y., and Lehner, M. (2016). Discovery of a New Retrograde Trans-Neptunian Object: Hint of a Common Orbital Plane for Low Semimajor Axis, High-inclination TNOs and Centaurs. *ApJ*, 827(2):L24.
- Clement, M. S., Kaib, N. A., Raymond, S. N., and Walsh, K. J. (2018). Mars' growth stunted by an early giant planet instability. *Icarus*, 311:340–356.
- Clement, M. S., Raymond, S. N., and Kaib, N. A. (2019). Excitation and Depletion of the Asteroid Belt in the Early Instability Scenario. *AJ*, 157(1):38.
- Davis, M., Hut, P., and Muller, R. A. (1984). Extinction of species by periodic comet showers. *Nature*, 308(5961):715–717.
- de La Fuente Marcos, C. and de La Fuente Marcos, R. (2014). Extreme trans-Neptunian objects and the Kozai mechanism: signalling the presence of trans-Plutonian planets. *MNRAS*, 443:L59–L63.
- Deienno, R., Nesvorný, D., Vokrouhlický, D., and Yokoyama, T. (2014). Orbital Perturbations of the Galilean Satellites during Planetary Encounters. *AJ*, 148(2):25.
- Dukes, D. and Krumholz, M. R. (2012). Was the Sun Born in a Massive Cluster? *ApJ*, 754(1):56.
- Eriksson, L. E. J., Mustill, A. J., and Johansen, A. (2018). Circularizing Planet Nine through dynamical friction with an extended, cold planetesimal belt. *MNRAS*, 475(4):4609–4616.
- Fan, S. and Batygin, K. (2017). Simulations of the Solar System's Early Dynamical Evolution with a Self-gravitating Planetesimal Disk. *ApJ*, 851(2):L37.
- Fassett, C. I., Head, J. W., Kadish, S. J., Mazarico, E., Neumann, G. A., Smith, D. E., and Zuber, M. T. (2012). Lunar impact basins: Stratigraphy, sequence and ages from superposed impact crater populations measured from Lunar Orbiter Laser Altimeter (LOLA) data. *Journal of Geophysical Research (Planets)*, 117:E00H06.
- Fielding, D. B., McKee, C. F., Socrates, A., Cunningham, A. J., and Klein, R. I. (2015). The turbulent origin of spin-orbit misalignment in planetary systems. *MNRAS*, 450(3):3306–3318.
- Fienga, A., Laskar, J., Manche, H., and Gastineau, M. (2016). Constraints on the location of a possible 9th planet derived from the Cassini data. *A&A*, 587:L8.
- Francis, P. J. (2005). The Demographics of Long-Period Comets. *ApJ*, 635(2):1348–1361.
- Fraser, W. C., Brown, M. E., Morbidelli, A. r., Parker, A., and Batygin, K. (2014). The Absolute Magnitude Distribution of Kuiper Belt Objects. *ApJ*, 782(2):100.
- Fraser, W. C., Brown, M. E., and Schwamb, M. E. (2010). The luminosity function of the hot and cold Kuiper belt populations. *Icarus*, 210(2):944–955.

- Gallardo, T., Hugo, G., and Pais, P. (2012). Survey of Kozai dynamics beyond Neptune. *Icarus*, 220(2):392–403.
- Gladman, B. and Chan, C. (2006). Production of the Extended Scattered Disk by Rogue Planets. *ApJ*, 643(2):L135–L138.
- Gladman, B., Kavelaars, J., Petit, J. M., Ashby, M. L. N., Parker, J., Coffey, J., Jones, R. L., Rousselot, P., and Mousis, O. (2009). Discovery of the First Retrograde Transneptunian Object. *ApJ*, 697(2):L91–L94.
- Gladman, B., Lawler, S. M., Petit, J. M., Kavelaars, J., Jones, R. L., Parker, J. W., Van Laerhoven, C., Nicholson, P., Rousselot, P., Bieryla, A., and Ashby, M. L. N. (2012). The Resonant Trans-Neptunian Populations. *AJ*, 144(1):23.
- Gladman, B., Marsden, B. G., and Vanlaerhoven, C. (2008). *Nomenclature in the Outer Solar System*, page 43.
- Gomes, R. and Cáceres, J. (2018). Signatures of a low perihelion Planet 9 on the classical Kuiper belt and distant TNOs. In *AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts*, page 315.04.
- Gomes, R., Deienno, R., and Morbidelli, A. (2017). The Inclination of the Planetary System Relative to the Solar Equator May Be Explained by the Presence of Planet 9. *AJ*, 153(1):27.
- Gomes, R., Levison, H. F., Tsiganis, K., and Morbidelli, A. (2005a). Origin of the cataclysmic Late Heavy Bombardment period of the terrestrial planets. *Nature*, 435(7041):466–469.
- Gomes, R. and Nesvorný, D. (2016). Neptune trojan formation during planetary instability and migration. *A&A*, 592:A146.
- Gomes, R., Nesvorný, D., Morbidelli, A., Deienno, R., and Nogueira, E. (2018). Checking the compatibility of the cold Kuiper belt with a planetary instability migration model. *Icarus*, 306:319–327.
- Gomes, R. S. (2011). The origin of TNO 2004 XR₁₉₀ as a primordial scattered object. *Icarus*, 215(2):661–668.
- Gomes, R. S., Gallardo, T., Fernández, J. A., and Brunini, A. (2005b). On The Origin of The High-Perihelion Scattered Disk: The Role of The Kozai Mechanism And Mean Motion Resonances. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 91(1-2):109–129.
- Gomes, R. S., Matese, J. J., and Lissauer, J. J. (2006). A distant planetary-mass solar companion may have produced distant detached objects. *Icarus*, 184(2):589–601.
- Gomes, R. S., Morbidelli, A., and Levison, H. F. (2004). Planetary migration in a planetesimal disk: why did Neptune stop at 30 AU? *Icarus*, 170(2):492–507.
- Gomes, R. S., Soares, J. S., and Brasser, R. (2015). The observation of large semi-major axis Centaurs: Testing for the signature of a planetary-mass solar companion. *Icarus*, 258:37–49.

- Hadden, S., Li, G., Payne, M. J., and Holman, M. J. (2018). Chaotic Dynamics of Trans-Neptunian Objects Perturbed by Planet Nine. *AJ*, 155(6):249.
- Heisler, J. and Tremaine, S. (1986). The influence of the Galactic tidal field on the Oort comet cloud. *Icarus*, 65(1):13–26.
- Heller, C. H. (1993). Encounters with Protostellar Disks. I. Disk Tilt and the Nonzero Solar Obliquity. *ApJ*, 408:337.
- Holman, M. J. and Payne, M. J. (2016a). Observational Constraints on Planet Nine: Astrometry of Pluto and Other Trans-Neptunian Objects. *AJ*, 152(4):80.
- Holman, M. J. and Payne, M. J. (2016b). Observational Constraints on Planet Nine: Cassini Range Observations. *AJ*, 152(4):94.
- Horner, J., Evans, N. W., and Bailey, M. E. (2004). Simulations of the population of Centaurs - I. The bulk statistics. *MNRAS*, 354(3):798–810.
- Iorio, L. (2012). Constraints on the location of a putative distant massive body in the Solar System from recent planetary data. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 112(2):117–130.
- Iorio, L. (2014). Planet X revamped after the discovery of the Sedna-like object 2012 VP113? *MNRAS*, 444:L78–L79.
- Iorio, L. (2017). Preliminary constraints on the location of the recently hypothesized new planet of the Solar System from planetary orbital dynamics. *Ap&SS*, 362(1):11.
- Izidoro, A., Morbidelli, A., Raymond, S. N., Hersant, F., and Pierens, A. (2015). Accretion of Uranus and Neptune from inward-migrating planetary embryos blocked by Jupiter and Saturn. *A&A*, 582:A99.
- Jewitt, D. and Luu, J. (1993). Discovery of the candidate Kuiper belt object 1992 QB₁. *Nature*, 362(6422):730–732.
- Jílková, L., Portegies Zwart, S., Pijloo, T., and Hammer, M. (2015). How Sedna and family were captured in a close encounter with a solar sibling. *MNRAS*, 453(3):3157–3162.
- Kaib, N. A. and Chambers, J. E. (2016). The fragility of the terrestrial planets during a giant-planet instability. *MNRAS*, 455(4):3561–3569.
- Kaib, N. A., Roškar, R., and Quinn, T. (2011). Sedna and the Oort Cloud around a migrating Sun. *Icarus*, 215(2):491–507.
- Kenyon, S. J. and Bromley, B. C. (2004). Stellar encounters as the origin of distant Solar System objects in highly eccentric orbits. *Nature*, 432(7017):598–602.
- Kenyon, S. J. and Bromley, B. C. (2016). Making Planet Nine: Pebble Accretion at 250-750 AU in a Gravitationally Unstable Ring. *ApJ*, 825(1):33.

- Khain, T., Batygin, K., and Brown, M. E. (2018). The Generation of the Distant Kuiper Belt by Planet Nine from an Initially Broad Perihelion Distribution. *AJ*, 155(6):250.
- Kozai, Y. (1962). Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity. *AJ*, 67:591–598.
- Lai, D. (2014). Star-disc-binary interactions in protoplanetary disc systems and primordial spin-orbit misalignments. *MNRAS*, 440(4):3532–3544.
- Lai, D. (2016). Solar Obliquity Induced by Planet Nine: Simple Calculation. *AJ*, 152(6):215.
- Lai, D., Foucart, F., and Lin, D. N. C. (2011). Evolution of spin direction of accreting magnetic protostars and spin-orbit misalignment in exoplanetary systems. *MNRAS*, 412(4):2790–2798.
- Laskar, J. (1997). Large scale chaos and the spacing of the inner planets. *A&A*, 317:L75–L78.
- Lawler, S. M., Shankman, C., Kaib, N., Bannister, M. T., Gladman, B., and Kavelaars, J. J. (2017). Observational Signatures of a Massive Distant Planet on the Scattering Disk. *AJ*, 153(1):33.
- Lawler, S. M., Shankman, C., Kavelaars, J. J., Alexandersen, M., Bannister, M. T., Chen, Y.-T., Gladman, B., Fraser, W. C., Gwyn, S., and Kaib, N. (2018). OSSOS. VIII. The Transition between Two Size Distribution Slopes in the Scattering Disk. *AJ*, 155(5):197.
- Levison, H. F., Dones, L., and Duncan, M. J. (2001). The Origin of Halley-Type Comets: Probing the Inner Oort Cloud. *AJ*, 121(4):2253–2267.
- Levison, H. F., Morbidelli, A., Tsiganis, K., Nesvorný, D., and Gomes, R. (2011). Late Orbital Instabilities in the Outer Planets Induced by Interaction with a Self-gravitating Planetesimal Disk. *AJ*, 142(5):152.
- Levison, H. F., Morbidelli, A., Van Laerhoven, C., Gomes, R., and Tsiganis, K. (2008). Origin of the structure of the Kuiper belt during a dynamical instability in the orbits of Uranus and Neptune. *Icarus*, 196(1):258–273.
- Li, G. and Adams, F. C. (2016). Interaction Cross Sections and Survival Rates for Proposed Solar System Member Planet Nine. *ApJ*, 823(1):L3.
- Li, G., Hadden, S., Payne, M., and Holman, M. J. (2018). The Secular Dynamics of TNOs and Planet Nine Interactions. *AJ*, 156(6):263.
- Lidov, M. L. (1962). The evolution of orbits of artificial satellites of planets under the action of gravitational perturbations of external bodies. *Planet. Space Sci.*, 9(10):719–759.
- Luhman, K. L. (2014). A Search for a Distant Companion to the Sun with the Wide-field Infrared Survey Explorer. *ApJ*, 781(1):4.
- Lykawka, P. S. and Mukai, T. (2008). An Outer Planet Beyond Pluto and the Origin of the Trans-Neptunian Belt Architecture. *AJ*, 135(4):1161–1200.

- Madigan, A.-M. and McCourt, M. (2016). A new inclination instability reshapes Keplerian discs into cones: application to the outer Solar system. *MNRAS*, 457(1):L89–L93.
- Malhotra, R. (1993). The origin of Pluto’s peculiar orbit. *Nature*, 365(6449):819–821.
- Malhotra, R. (1995). The Origin of Pluto’s Orbit: Implications for the Solar System Beyond Neptune. *AJ*, 110:420.
- Malhotra, R., Volk, K., and Wang, X. (2016). Corraling a Distant Planet with Extreme Resonant Kuiper Belt Objects. *ApJ*, 824(2):L22.
- Mardling, R. A. (2010). The determination of planetary structure in tidally relaxed inclined systems. *MNRAS*, 407(2):1048–1069.
- Margot, J.-L. (2015). A Quantitative Criterion for Defining Planets. *AJ*, 150(6):185.
- Masset, F. and Snellgrove, M. (2001). Reversing type II migration: resonance trapping of a lighter giant protoplanet. *MNRAS*, 320(4):L55–L59.
- Matese, J. and Whitmire, D. (1996). Tidal Imprint of Distant Galactic Matter on the Oort Comet Cloud. *ApJ*, 472:L41.
- Matese, J. J., Whitman, P. G., and Whitmire, D. P. (1999). Cometary Evidence of a Massive Body in the Outer Oort Clouds. *Icarus*, 141(2):354–366.
- Matese, J. J. and Whitmire, D. P. (2011). Persistent evidence of a jovian mass solar companion in the Oort cloud. *Icarus*, 211(2):926–938.
- Melita, M. D., Williams, I. P., Collander-Brown, S. J., and Fitzsimmons, A. (2004). The edge of the Kuiper belt: the Planet X scenario. *Icarus*, 171(2):516–524.
- Millholland, S. and Laughlin, G. (2017). Constraints on Planet Nine’s Orbit and Sky Position within a Framework of Mean-motion Resonances. *AJ*, 153(3):91.
- Morbidelli, A., Brasser, R., Gomes, R., Levison, H. F., and Tsiganis, K. (2010). Evidence from the Asteroid Belt for a Violent Past Evolution of Jupiter’s Orbit. *AJ*, 140(5):1391–1401.
- Morbidelli, A., Brasser, R., Tsiganis, K., Gomes, R., and Levison, H. F. (2009). Constructing the secular architecture of the solar system. I. The giant planets. *A&A*, 507(2):1041–1052.
- Morbidelli, A. and Crida, A. (2007). The dynamics of Jupiter and Saturn in the gaseous protoplanetary disk. *Icarus*, 191(1):158–171.
- Morbidelli, A. and Levison, H. F. (2004). Scenarios for the Origin of the Orbits of the Trans-Neptunian Objects 2000 CR₁₀₅ and 2003 VB₁₂ (Sedna). *AJ*, 128(5):2564–2576.
- Morbidelli, A., Levison, H. F., Tsiganis, K., and Gomes, R. (2005). Chaotic capture of Jupiter’s Trojan asteroids in the early Solar System. *Nature*, 435(7041):462–465.

- Morbidelli, A., Tsiganis, K., Crida, A., Levison, H. F., and Gomes, R. (2007). Dynamics of the Giant Planets of the Solar System in the Gaseous Protoplanetary Disk and Their Relationship to the Current Orbital Architecture. *AJ*, 134(5):1790–1798.
- Murray, C. D. and Dermott, S. F. (1999). *Solar system dynamics*.
- Mustill, A. J., Raymond, S. N., and Davies, M. B. (2016). Is there an exoplanet in the Solar system? *MNRAS*, 460(1):L109–L113.
- Nesvorný, D. (2011). Young Solar System’s Fifth Giant Planet? *ApJ*, 742(2):L22.
- Nesvorný, D. (2015a). Evidence for Slow Migration of Neptune from the Inclination Distribution of Kuiper Belt Objects. *AJ*, 150(3):73.
- Nesvorný, D. (2015b). Jumping Neptune Can Explain the Kuiper Belt Kernel. *AJ*, 150(3):68.
- Nesvorný, D. and Vokrouhlický, D. (2009). Chaotic Capture of Neptune Trojans. *AJ*, 137(6):5003–5011.
- Nesvorný, D. and Vokrouhlický, D. (2016). Neptune’s Orbital Migration Was Grainy, Not Smooth. *ApJ*, 825(2):94.
- Nesvorný, D., Vokrouhlický, D., Bottke, W. F., and Levison, H. F. (2018). Evidence for very early migration of the Solar System planets from the Patroclus-Menoetius binary Jupiter Trojan. *Nature Astronomy*, 2:878–882.
- Nesvorný, D., Vokrouhlický, D., and Deienno, R. (2014a). Capture of Irregular Satellites at Jupiter. *ApJ*, 784(1):22.
- Nesvorný, D., Vokrouhlický, D., Deienno, R., and Walsh, K. J. (2014b). Excitation of the Orbital Inclination of Iapetus during Planetary Encounters. *AJ*, 148(3):52.
- Nesvorný, D., Vokrouhlický, D., Dones, L., Levison, H. F., Kaib, N., and Morbidelli, A. (2017). Origin and Evolution of Short-period Comets. *ApJ*, 845(1):27.
- Nesvorný, D., Vokrouhlický, D., and Morbidelli, A. (2007). Capture of Irregular Satellites during Planetary Encounters. *AJ*, 133(5):1962–1976.
- Nesvorný, D., Vokrouhlický, D., and Morbidelli, A. (2013). Capture of Trojans by Jumping Jupiter. *ApJ*, 768(1):45.
- Parker, R. J., Lichtenberg, T., and Quanz, S. P. (2017). Was Planet 9 captured in the Sun’s natal star-forming region? *MNRAS*, 472(1):L75–L79.
- Petit, J. M., Kavelaars, J. J., Gladman, B., and Loredó, T. (2008). *Size Distribution of Multi-kilometer Transneptunian Objects*, page 71.
- Pitjeva, E. V. and Pitjev, N. P. (2018). Masses of the Main Asteroid Belt and the Kuiper Belt from the Motions of Planets and Spacecraft. *Astronomy Letters*, 44(8-9):554–566.

- Portegies Zwart, S. F. and Jílková, L. (2015). The fragility of planetary systems. *MNRAS*, 451(1):144–148.
- Raup, D. M. and Sepkoski, J. J. (1984). Periodicity of Extinctions in the Geologic Past. *Proceedings of the National Academy of Science*, 81(3):801–805.
- Raymond, S. N. and Izidoro, A. (2017). The empty primordial asteroid belt. *Science Advances*, 3(9):e1701138.
- Roig, F. and Nesvorný, D. (2015). The Evolution of Asteroids in the Jumping-Jupiter Migration Model. *AJ*, 150(6):186.
- Scholtz, J. and Unwin, J. (2019). What if Planet 9 is a Primordial Black Hole? *arXiv e-prints*, page arXiv:1909.11090.
- Shankman, C., Gladman, B. J., Kaib, N., Kavelaars, J. J., and Petit, J. M. (2013). A Possible Divot in the Size Distribution of the Kuiper Belt’s Scattering Objects. *ApJ*, 764(1):L2.
- Shankman, C., Kavelaars, J., Gladman, B. J., Alexandersen, M., Kaib, N., Petit, J. M., Bannister, M. T., Chen, Y. T., Gwyn, S., and Jakubik, M. (2016). OSSOS. II. A Sharp Transition in the Absolute Magnitude Distribution of the Kuiper Belt’s Scattering Population. *AJ*, 151(2):31.
- Shankman, C., Kavelaars, J. J., Bannister, M. T., Gladman, B. J., Lawler, S. M., Chen, Y.-T., Jakubik, M., Kaib, N., Alexandersen, M., Gwyn, S. D. J., Petit, J.-M., and Volk, K. (2017). OSSOS. VI. Striking Biases in the Detection of Large Semimajor Axis Trans-Neptunian Objects. *AJ*, 154(2):50.
- Sheppard, S. S. and Trujillo, C. (2016). New Extreme Trans-Neptunian Objects: Toward a Super-Earth in the Outer Solar System. *AJ*, 152(6):221.
- Sheppard, S. S., Trujillo, C. A., Tholen, D. J., and Kaib, N. (2019). A New High Perihelion Trans-Plutonian Inner Oort Cloud Object: 2015 TG387. *AJ*, 157(4):139.
- Souami, D. and Souchay, J. (2012). The solar system’s invariable plane. *A&A*, 543:A133.
- Souchay, J. and Dvorak, R. (2010). *Dynamics of Small Solar System Bodies and Exoplanets*, volume 790.
- Spalding, C. and Batygin, K. (2014). Early Excitation of Spin-Orbit Misalignments in Close-in Planetary Systems. *ApJ*, 790(1):42.
- Spalding, C. and Batygin, K. (2016). Spin-Orbit Misalignment as a Driver of the Kepler Dichotomy. *ApJ*, 830(1):5.
- Spudis, P. D., Wilhelms, D. E., and Robinson, M. S. (2011). The Sculptured Hills of the Taurus Highlands: Implications for the relative age of Serenitatis, basin chronologies and the cratering history of the Moon. *Journal of Geophysical Research (Planets)*, 116:E00H03.

- Stebbins, A., Li, T., Davis, C., Soergel, B., March, M. C., Cawthon, R., Gangkofner, D., Bernstein, G., Kim, A., Capozzi, D., Medford, M., Buckley-Geer, E., D'Andrea, C., Zhang, Y., Goldstein, D., Krawiec, C., Park, Y., Conselice, C., Tucker, D., Nord, B., Grabowski, K., Pujol, A., Elliott, A., Spinka, H., Smith, A., Allam, S., Birrer, S., Old, L., Das, R., Reil, K., Sheppard, S., Trujillo, C., Bhatawdekar, R., Hamilton, S., Ferte, A., Melchior, P., Gill, M., Hollowood, D., Sheldon, E., Krause, E., Marshall, J., Bechtol, K., Khullar, G., Clerkin, L., Annis, J., Marshal, J., Thomas, B., Fernandez, M. G., Weaverdyck, N., Story, K., Kuropatkin, N., Kron, R., Wang, M.-Y., Kent, S., Sobreira, F., Carnero, A., Plazas, A., Noarbe, N. S., Zenteno, A., Luque, E., Wethers, C., Santiago, B., Elliot, A., Balbinot, E., Secco, L., Vivas, K., Gerdes, D., Abbott, T., Johnson, M., Schubnell, M., Ogando, R., Gelman, M., Sako, M., Tarsitano, F., Kremin, A., Manera, M., Wester, W., Romer, K., Shipp, N., Bhargava, S., Beaufore, L., Valdes, F., and Williams, G. V. (2019). Eleven New Distant Objects. *Minor Planet Electronic Circulars*, 2019.
- Stoer, J. and Bulirsch, R. (1980). *Introduction to Numerical Analysis*.
- Sykes, M. V., Cutri, R. M., Fowler, J. M., Nelson, B., Tholen, D. J., Skrutskie, M. F., and Price, S. (2002). 2MASS observations of the solar system. In Warmbein, B., editor, *Asteroids, Comets, and Meteors: ACM 2002*, volume 500 of *ESA Special Publication*, pages 481–484.
- Szebehely, V. (1967). *Theory of orbits. The restricted problem of three bodies*.
- Tera, F., Papanastassiou, D. A., and Wasserburg, G. J. (1974). Isotopic evidence for a terminal lunar cataclysm. *Earth and Planetary Science Letters*, 22(1):1–21.
- Thommes, E. W., Duncan, M. J., and Levison, H. F. (1999). The formation of Uranus and Neptune in the Jupiter-Saturn region of the Solar System. *Nature*, 402(6762):635–638.
- Tiscareno, M. S. and Malhotra, R. (2003). The Dynamics of Known Centaurs. *AJ*, 126(6):3122–3131.
- Trujillo, C. A. and Sheppard, S. S. (2014). A Sedna-like body with a perihelion of 80 astronomical units. *Nature*, 507(7493):471–474.
- Tsiganis, K., Gomes, R., Morbidelli, A., and Levison, H. F. (2005). Origin of the orbital architecture of the giant planets of the Solar System. *Nature*, 435(7041):459–461.
- Volk, K. and Malhotra, R. (2017). The Curiously Warped Mean Plane of the Kuiper Belt. *AJ*, 154(2):62.
- Walsh, K. J., Morbidelli, A., Raymond, S. N., O'Brien, D. P., and Mandell, A. M. (2011). A low mass for Mars from Jupiter's early gas-driven migration. *Nature*, 475(7355):206–209.
- Wisdom, J. and Holman, M. (1991). Symplectic maps for the N-body problem. *AJ*, 102:1528–1538.
- Zellner, N. E. B. (2017). Cataclysm No More: New Views on the Timing and Delivery of Lunar Impactors. *Origins of Life and Evolution of the Biosphere*, 47(3):261–280.