

EFEITO SACHS-WOLFE INTEGRADO NAS COSMOLOGIAS Λ CDM E $F(R)$

Pedro Henrique Bessa Rodrigues Dutra

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Astronomia do Observatório Nacional/MCTIC, como parte dos requisitos necessários à obtenção do Grau de Mestre em Astronomia.

Orientador: Armando Bartolome Bernui
Leo

Co-orientadora: Marcela Campista Borges de
Carvalho

Rio de Janeiro
Agosto de 2020

EFEITO SACHS-WOLFE INTEGRADO NAS COSMOLOGIAS Λ CDM E F(R)

Pedro Henrique Bessa Rodrigues Dutra

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ASTRONOMIA DO OBSERVATÓRIO NACIONAL/MCTIC COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ASTRONOMIA.

Examinada por:

Prof. Nome da Primeira Examinadora Sobrenome, D.Sc.

Prof. Nome do Segundo Examinador Sobrenome, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

AGOSTO DE 2020

Bessa Rodrigues Dutra, Pedro Henrique

Efeito Sachs-Wolfe Integrado nas Cosmologias Λ CDM e $f(R)$ /Pedro Henrique Bessa Rodrigues Dutra. – Rio de Janeiro: ON/MCTIC, 2020.

XI, 78 p.: il.; 29,7cm.

Orientador: Armando Bartolome Bernui Leo

Co-orientadora: Marcela Campista Borges de Carvalho
Dissertação (mestrado) – ON/MCTIC/Programa de Pós-graduação em Astronomia, 2020.

Referências Bibliográficas: p. 73 – 78.

I. Campista Borges de Carvalho, Marcela. II. Observatório Nacional/MCTIC, Programa de Pós-graduação em Astronomia. III. Título.

*“You know, people think
mathematics is complicated.
Mathematics is the simple bit.
It’s the stuff we can understand.
It’s cats that are complicated. I
mean, what is it in those little
molecules and stuff that make
one cat behave differently than
another, or that make a cat?
And how do you define a cat? I
have no idea.”
- John Conway*

Agradecimentos

Esta dissertação não se fez sozinha, mas mais do que isso, certamente não foi feita por apenas uma pessoa. No decorrer do mestrado e da minha carreira aprendi que quase nada nessa vida se faz só, mesmo algo que tenha de vir de você. Por essas e outras, só tenho a agradecer a quem me acompanhou e me deu suporte nesta jornada. Em especial, agradeço

- Aos meus orientadores, Armando Bernui e Marcela Campista, não só pelas funções de me orientar e muitas vezes suportar minha cabeça durice, mas por me ensinar o caminho das pedras da ciência e me dar exemplos de cientistas não apenas de sabedoria maior, como de integridade e humanidade.
- A minha avó Cecília, por ser meu alfa e ômega nessa vida, pela criação e estímulo pelo saber, e pela qual eu não seria nada nessa vida sem. Se eu alcanço o Cosmos é porque você me lançou.
- À minha família em geral, por me dar suporte, criação e estimular nessa jornada dura que é a ciência. Em especial às mulheres que me criaram com a melhor educação: Daniela, Fernanda, Julia, Marise e Helena. Vocês são as mulheres da minha vida.
- À Cibelle. Obrigado por me dar suporte e me ensinar como quase ninguém nessa vida. Meu amor por você não tem igual.
- Aos meus amigos que conheci na vida acadêmica mas que saíram do escritório para os bares e felizmente para a vida. Em especial a Thais, que chorou e trocou comigo as experiências de ser um jovem cosmólogo em tempo real. Paulo, Eric, Nicolas, Simony... Muitos nomes para listar, mas todos importantes! Obrigado pelo aprendizado.
- À sala 111 e agregados: Pedrito, Priscilla, Ana e Natasha, muito obrigado. Seria literalmente impossível terminar esse mestrado sem vocês. Em especial ao Rodrigo, que pegou esse foguete comigo desde os primeiros meses da faculdade e não largou mais.

- Aos Matemáticos: Ana, Felipe, Fidelis, Karol, Renata e Rodrigo (de novo). Eu saí da matemática mas a matemática não saiu de mim. E felizmente vocês também não. Essa amizade vai até o final.
- A todos da cosmologia do Observatório: Muito obrigado pela troca de ideias e o aprendizado. Vocês são profissionais excepcionais. Em especial aos meus colegas de orientação: Edilson e Felipe, que me ajudaram imensamente a aprender cálculo numérico no Python, e me acudiram inúmeras vezes.
- A todos os meus amigos que provam que amizade não é qualquer coisa. Primeiramente: Jorge, João e Higor. Vocês me fizeram e fazem crescer há mais de 10 anos. E pessoas que conheci depois dessa jornada no Rio, principalmente: Luca, Anselmo, Paulinha, Leo, Lolla, Vitinho e Arthur. É incrível o laço que criamos em tão pouco tempo.
- A todos os meus professores. Muito obrigado, mesmo. Eu me espelho em cada um de vocês.
- Aos funcionários do Observatório Nacional, por me proporcionarem um ambiente agradável, limpo e de primeira qualidade. Vocês constroem conhecimento conosco.
- À minha gata, Utena. Me impressiona tanto o amor de uma criatura tão pequena quanto a imensidão inteira do cosmo.

Resumo da Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Astronomia do Observatório Nacional/MCTIC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Astronomia (M.Sc.)

EFEITO SACHS-WOLFE INTEGRADO NAS COSMOLOGIAS Λ CDM E $f(R)$

Pedro Henrique Bessa Rodrigues Dutra

Agosto/2020

Orientador: Armando Bartolome Bernui Leo

Co-orientadora: Marcela Campista Borges de Carvalho

Programa: Astronomia

O efeito Sachs-Wolfe Integrado é um observável das flutuações de temperatura da Radiação Cósmica de Fundo, particularmente sensível às mudanças de eras dominadas por diferentes componentes cosmológicos. O espectro de potência de sua autocorrelação de temperatura é uma forte evidência da expansão acelerada do Universo independente de medidas locais. Paralelamente, modelos de Gravidade Modificada buscam explicar o fenômeno da expansão acelerada do Universo sem recorrer à existência de uma constante cosmológica ou de uma equação de estado exótica para os componentes materiais do Universo. Dentro deste contexto, o presente trabalho estuda como o efeito ISW pode auxiliar na distinção entre o modelo de concordância Λ CDM e modelos de gravidade modificada, em particular teorias $f(R)$ como a de Starobinsky. Analisamos como observáveis cosmológicos ligados à evolução de perturbações e a formação de estruturas no Universo são influenciados pela mudança de modelos cosmológicos em diferentes teorias, e estudamos como o espectro do efeito ISW é alterado pela teoria $f(R)$ em relação ao modelo Λ CDM.

Abstract of Dissertation presented to Observatório Nacional/MCTIC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Astronomy (M.Sc.)

INTEGRATED SACHS-WOLFE EFFECT IN Λ CDM AND $f(R)$
COSMOLOGIES

Pedro Henrique Bessa Rodrigues Dutra

August/2020

Advisor: Armando Bartolome Bernui Leo

Co-advisor: Marcela Campista Borges de Carvalho

Department: Astronomy

The Integrated Sachs-Wolfe effect is a Cold Microwave Background observable particularly sensitive to the change in cosmological eras dominated by different matter components. Its temperature power spectrum is a strong evidence of the late accelerated expansion of the Universe which is independent of local measurements. Concomitantly, Modified Gravity theories try to explain the accelerated expansion of the Universe without resorting to the existence of a cosmological constant or exotic equations of state for the material components of the Universe. In this background, the present work looks at how the ISW effect can help in distinguishing the concordance model Λ CDM and Modified Gravity models, particularly $f(R)$ theories like the one of Starobinsky. We analyse how cosmological observables linked to the growth of perturbations and structure formation are affected by the change in cosmological models in different theories, and we observe how the ISW power spectrum is changed by the modification of $f(R)$ theory in relation to the Λ CDM model.

Lista de Figuras

2.1	Postulado de Weyl	7
2.2	Geometrias do Universo	10
2.3	Radiação C3smica de Fundo	15
3.1	$H(z)$ em $f(R)$	31
4.1	Calibre	36
5.1	Efeito Sachs-Wolfe	51
5.2	Efeito Sachs-Wolfe Integrado	52
5.3	Espectro de Pot4ncia da RCF	54
5.4	Espectro de Pot4ncia Planck2018	56
6.1	$H(z)$ com diferentes par4metros	60
6.2	$H(z)$ para diferentes modelos	61
6.3	δ para diferentes modelos	63
6.4	$f(z)$	65
6.5	$f\sigma_8$	66
6.6	Espectro de Pot4ncia do Efeito ISW	68
6.7	Raz4o do Espectro de Pot4ncia entre Modelos	69

Sumário

Lista de Figuras	ix
1 Introdução	1
2 Relatividade, Cosmologia Padrão e Modelo ΛCDM	4
2.1 Ação de Einstein-Hilbert e Equações de Campo	4
2.2 Métrica de Robertson-Walker e Equações de Friedmann	6
2.3 O Universo Observado	12
2.3.1 Lei de Hubble-Lemaître	13
2.3.2 Energia Escura	13
2.3.3 Radiação Cósmica de Fundo	14
2.4 Questões do Modelo Λ CDM	16
3 Gravidade Modificada em Cosmologia	18
3.1 Modificando a ação de Einstein-Hilbert	19
3.2 Exemplos de Teorias de Gravidade Modificada	20
3.2.1 <i>Kaluza-Klein</i>	20
3.2.2 <i>Brans-Dicke</i>	22
3.3 Teorias $f(R)$	24
3.4 Cosmologia em $f(R)$	26
3.4.1 Modelo de Hu-Sawicki	28
3.4.2 Modelo Exponencial	28
3.4.3 Modelo de Starobinsky	29
4 Teoria de Perturbações Cosmológicas	32
4.1 Perturbações FRelativísticas	32
4.2 Calibre Conforme e Perturbações Invariantes	35
4.3 Limite Newtoniano das Perturbações	38
4.4 Perturbações Cosmológicas em $f(R)$	42
5 O Efeito Sachs-Wolfe Integrado	45
5.1 Energia de um fóton da RCF	45

5.2	Anisotropias da RCF	48
5.3	O espectro de potência do efeito ISW	54
6	Análise e Resultados	57
6.1	Evolução do contraste de densidade δ	58
6.2	Função de crescimento $f(z)$ e $f\sigma_8(z)$	63
6.3	Efeito ISW nas cosmologias $f(R)$ e Λ CDM	67
7	Conclusões	71
	Referências Bibliográficas	73

Capítulo 1

Introdução

A Cosmologia moderna se ampara como ciência em três paradigmas observacionais, alcançados no decorrer do século XX: a observação da expansão do Universo, codificada na **Lei de Hubble-Lemaître** [Hub29]; a determinação da distribuição cósmica dos elementos leves, em acordo com a teoria da nucleossíntese primordial [Gam46]; e a detecção da **Radiação Cósmica de Fundo**, consequência do *Big Bang quente* e da expansão do Universo [PW65, DPRW65]. Da década de 60, quando observou-se a Radiação Cósmica de Fundo (**RCF**), até hoje, as previsões da Relatividade Geral e do Modelo Padrão de partículas sobre a origem e evolução do Universo mostraram-se bem sucedidas e bastante de acordo com as observações. As exceções são duas que hoje, junto com as supracitadas, formam os pilares fundamentais da Cosmologia padrão: a expansão *acelerada* do Universo e a curva de rotação de galáxias diferente da calculada pela teoria Newtoniana, duas observações hoje explicadas pela constante cosmológica Λ e a *matéria escura fria*.

Todas essas observações culminam hoje no modelo de concordância da Cosmologia, o modelo Λ CDM. Com a descoberta primeiro por Riess *et al.* e Perlmutter *et al.* da atual fase de expansão acelerada do Universo [RFC⁺98, PAG⁺99], e a consolidação da existência de matéria escura fria no lugar de uma correção da gravidade em escalas galáticas e de aglomerados [Fre09], o modelo de concordância consolidou-se nas últimas duas décadas. Satélites e telescópios ajudaram também a tornar a Cosmologia uma ciência de precisão e com abundância de dados, agora com a teoria trabalhando em função dos dados, ao contrário do século passado.

O modelo Λ CDM, apesar do sucesso, vem se mostrando cada vez mais incompleto [BAA⁺16]. A Constante Cosmológica Λ diverge do valor esperado pela Teoria Quântica de Campos em ordem de magnitude de 10^{120} . Além do mais, os valores da constante de Hubble H_0 previstos pelo modelo a partir da RCF pelo satélite Planck divergem dos valores obtidos localmente [Cea18a, BVR16]. Uma proposta de solução para essas questões é a modificação da gravidade, com **Teorias de Gravidade Modificada**. Teorias que modificam a dinâmica entre matéria e espaço-tempo

em relação à Relatividade Geral têm sido uma alternativa a modelos de cosmologia em que a constante cosmológica é originada por algum tipo de componente do tensor de energia-momento com uma equação de estado exótica [CFPS12]. Esta também é uma das vantagens de se modificar as próprias equações que descrevem a interação gravitacional: abandonar a necessidade da existência de algum tipo exótico de matéria/energia.

Com o presente *status* da Cosmologia Observacional, modificações da Relatividade Geral em grandes escalas se tornaram passíveis de serem testadas por observáveis cosmológicos [AAB⁺13]. A RCF possui uma rica gama de propriedades e efeitos físicos que acusam diferentes tipos de características de um modelo cosmológico. A existência de flutuações de temperatura na distribuição de temperatura da RCF está relacionada fundamentalmente às perturbações do *background* cosmológico [Dur08], inclusive à evolução de uma componente de Energia Escura. Uma destas anisotropias é o **Efeito Sachs-Wolfe Integrado** (de aqui em diante **ISW**, da sigla em inglês *Integrated Sachs-Wolfe effect*). O efeito ISW é particularmente sensível à mudança de eras cosmológicas dominadas por diferentes componentes, como a mudança de uma era dominada por matéria para uma era dominada por uma constante cosmológica em redshifts baixos ($z \lesssim 1$). A detecção do sinal do efeito ISW na RCF em baixos redshifts com uma confiança de 4.5σ [GSC⁺08] é uma forte evidência da expansão acelerada independente de medidas locais. A essa detecção em baixos redshifts do efeito ISW dá-se o nome de **efeito ISW tardio**, em contrapartida com o sinal do **efeito ISW primordial**, relacionado ao descoplamento entre radiação e matéria.

Modelos de Gravidade Modificada predizem espectros de potência da distribuição de matéria no Universo distintos de Λ CDM [PS07], levando a espectros do efeito ISW distintos. Entretanto, o efeito ISW sozinho é detectado em grandes escalas $l \lesssim 10$, onde incertezas devido à variância cósmica impedem que seja feita uma detecção com significância alta o suficiente para usar o efeito para distinguir modelos cosmológicos. Uma possibilidade para remediar isso é usar a correlação cruzada com o espectro de potência da distribuição de matéria [GSC⁺08]. Isso faz com que a detecção com significância do efeito ISW seja um teste para o modelo Λ CDM, isto é, se detectarmos um bom sinal do efeito ISW no futuro, com os próximos surveys [GCNR12, AAB⁺13], teríamos um sinal de que alguma extensão da Relatividade Geral pode estar em ação.

É a partir deste ponto que o trabalho aqui escrito pretende investigar em detalhe como o efeito ISW funciona dentro do modelo Λ CDM e em cosmologias do tipo $f(R)$ e reciprocamente, como sua detecção pode ser usada para acusar divergências do modelo de concordância. Para isso é fundamental passarmos pela teoria de perturbações cosmológicas e o formalismo básico de como modificar as equações

de campo da Relatividade Geral (de aqui em diante **RG**), e por fim obtendo as anisotropias responsáveis pelo efeito ISW.

O trabalho estrutura-se da seguinte forma: o capítulo 2 sumariza as propriedades gerais da RG e do modelo Λ CDM, o capítulo 3 trata das extensões e modificações da RGF, e mais especificamente de teorias $f(R)$, o capítulo 4 trata das perturbações cosmológicas e anisotropias resultantes na RCF, o capítulo 5 contem a teoria por trás do efeito ISW nos diferentes modelos, o capítulo 6 mostra as análises e resultados do trabalho e, por fim, no capítulo 7 as conclusões são apresentadas.

Capítulo 2

Relatividade, Cosmologia Padrão e Modelo Λ CDM

A construção da Cosmologia Física como ciência começa na formulação da RG e do melhor entendimento da dinâmica do espaço-tempo em grande escala. De fato, uma das primeiras aplicações das equações da RG, pelo próprio Einstein, foi no contexto do Universo como um todo [Ein52]. É possível obter resultados cosmológicos interessantes a partir apenas da gravitação Newtoniana [Vis05], mas qualquer construção deste tipo é limitada pela unificação entre espaço e tempo necessária para um entendimento completo da interação gravitacional em grandes escalas.

A necessidade de um novo entendimento matemático dos conceitos de espaço e medição, fundamentados por Riemann [Rie73] e utilizados por Einstein na construção da RG são indispensáveis à Cosmologia. Por isso, é necessário o maquinário teórico da RG para entender a física da Cosmologia e, depois, para avaliar como a RG pode ser modificada para se adequar a essa física. Uma visão histórica detalhada, desde os primórdios de como a Cosmologia Física e a RG se desenvolveram e firmaram como teorias científicas pode ser encontrada em [Kra14] e [Fer17]. A teoria desenvolvida neste capítulo seguirá as referências [Wei08], [Isl92] e [LL75].

2.1 Ação de Einstein-Hilbert e Equações de Campo

As equações de campo de Einstein (da sigla em inglês *Einstein Field Equations* EFE) possuem uma gama de propriedades que mostram a devida sutileza de sua construção geométrica que fogem ao escopo de um trabalho como este; entretanto, ao invés de simplesmente postulá-las, vamos partir da ação de Einstein-Hilbert, uma vez que este também é o caminho mais comumente usado para analisarmos suas modificações da mesma teoria. É conveniente primeiro definirmos alguns tensores

e quantidades geométricas, dando uma breve explicação sobre suas propriedades. Aqui utilizamos sempre a notação de Einstein, denotamos a derivada covariante de um tensor em relação a um índice por $;$ μ . Partindo de um espaço-tempo (\mathcal{M}, g_{ab}) , definido por uma variedade pseudo-Riemanniana \mathcal{M} e uma métrica g_{ab} com assinatura $(-, +, +, +)$, definimos

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \equiv \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(g_{\sigma\mu,\nu} + g_{\sigma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}) \quad \text{Conexão,} \quad (2.1)$$

$$R_{\mu\nu\lambda}^{\sigma} \equiv \Gamma_{\mu\lambda,\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu,\lambda}^{\sigma} - \Gamma_{\alpha\nu}^{\sigma}\Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha} + \Gamma_{\alpha\lambda}^{\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \quad \text{Tensor de Riemann,} \quad (2.2)$$

$$R_{\mu\nu} \equiv g^{\lambda\sigma}R_{\lambda\mu\sigma\nu} = R_{\mu\sigma\nu}^{\sigma} \quad \text{Tensor de Ricci,} \quad (2.3)$$

$$R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad \text{Escalar de Ricci.} \quad (2.4)$$

As duas primeiras quantidades medem como as derivadas covariantes divergem do caso Euclideano na variedade, o tensor de Riemann em particular é uma medida direta da não-euclideanidade da variedade. Os dois últimos tensores são formas contraídas do tensor de Riemann, e são os tensores que mais serão trabalhados nas equações de Einstein, usados para construir o Tensor de Einstein, que obteremos a seguir. Uma elaboração sobre as propriedades geométricas dos tensores acima pode ser encontrada em [Mis17].

Podemos postular então a *ação de Einstein-Hilbert* \mathcal{S}_{EH} definida por

$$\mathcal{S}_{EH} \equiv \int_{\Omega} R\sqrt{-g}d^4x,$$

onde Ω denota uma integração sobre todo o espaço-tempo. O princípio da mínima ação nos diz que para encontrarmos a lei física associada à Lagrangiana da ação, é necessário minimizar a integral definida acima. Antes, introduziremos um termo associado à matéria, de tal maneira que haja interação entre o campo gravitacional e um conteúdo material dado por uma densidade Lagrangiana de matéria \mathcal{L}_M . Por fim, colocaremos uma constante κ , que media a intensidade da força gravitacional. Em grande parte utilizaremos unidades geometrizadas, mas por vezes será instrutivo resgatar a constante. Nossa ação é finalmente dada por

$$\boxed{\mathcal{S}_g = \int_{\Omega} \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\kappa} R + \mathcal{L}_M \right) d^4x.} \quad (2.5)$$

O subíndice $_g$ indica a ação relacionada à interação gravitacional. Note-se que um possível termo de constante cosmológica pode ser introduzido dentro da densidade Lagrangiana de matéria \mathcal{L}_M , por isso não o escreveremos explicitamente aqui.

Pelo princípio da mínima ação, queremos que $\delta\mathcal{S}_g = 0$. A variável dinâmica, neste caso, é a métrica $g_{\mu\nu}$ que, no caso da RG, coincide com realizar a variação

em relação a outras quantidades geométricas, como a conexão $\Gamma^{\mu\nu}$. O processo de variação da métrica completo pode ser encontrado, por exemplo, em [LL75]. Aqui, notemos apenas que definindo o tensor energia momento por

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M)}{\delta g_{\mu\nu}},$$

e chegamos finalmente às EFE

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}}. \quad (2.6)$$

O lado esquerdo de (2.6) é definido como o **Tensor de Einstein**, denotado por $G_{\mu\nu}$. Este tensor satisfaz às equações de Bianchi contraídas, isto é

$$G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \implies T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0,$$

onde vemos que o tensor energia-momento é conservado. Vemos que nossa teoria gravitacional é construída de tal modo que a interação matéria-espaço obedeça à conservação de energia. Vamos partir agora para as especificidades dos modelos cosmológicos.

2.2 Métrica de Robertson-Walker e Equações de Friedmann

Para construirmos um modelo cosmológico precisamos antes postular algumas propriedades do nosso universo. Partimos a princípio da hipótese mais simplificadora, uma extensão do princípio copernicano clássico, o **Princípio Cosmológico**. O princípio cosmológico foi levantado primeiramente como uma idealização do Universo, mas hoje sabemos que ele se baseia em um sólido alicerce observacional [Wei08, ANB⁺19]. O princípio cosmológico postula que o Universo, em escalas suficientemente grandes (da ordem de $150Mpc$) é homogêneo e isotrópico, o que matematicamente se expressa em um espaço-tempo com a propriedade de que a métrica $g_{\mu\nu}$ é invariante por rotações e translações espaciais.

Entretanto, o princípio cosmológico não é suficiente para construir um modelo de Universo em evolução. De fato, se quisermos avaliar a evolução do Universo em grande escala no tempo, precisamos adotar algum tipo de referencial temporal, algo não-trivial na RG, em contrapartida com a mecânica clássica. Uma solução que possui uma série de formulações equivalentes, vem a partir do chamado **Postulado de Weyl**. O postulado de Weyl assume que as linhas do tempo das galáxias (que podem ser consideradas pontos, já que tratamos da estrutura em grande escala no

espaço-tempo) formam hipersuperfícies ortogonais à coordenada temporal da nossa Variedade. Assumimos que, dado um instante de tempo t_0 , não há interseção de coordenadas espaciais entre dois pontos. Isto nos diz que a coordenada temporal dt pode ser separada das outras coordenadas.

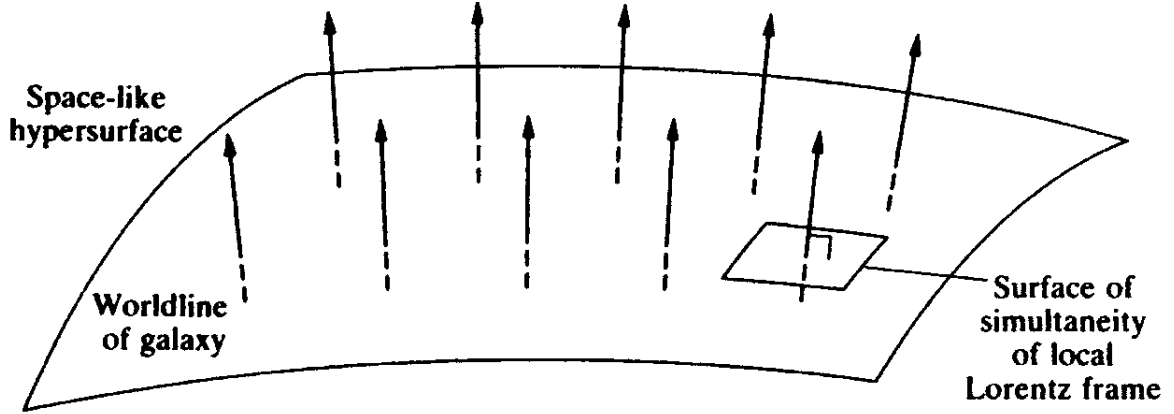


Figura 2.1: Cada hipersuperfície define um referencial local, onde a coordenada temporal é a mesma para todas as galáxias.[Isl92]

O referencial temporal é então definido a partir do referencial que acompanha essas hipersuperfícies. Dada uma dessas hipersuperfícies, fica bem definido o momento de tempo t e o vetor ortogonal a estas. Este é o referencial que adotaremos. Matematicamente, nosso espaço-tempo (\mathcal{M}, g_{ab}) é homeomorfo a um 3-espaço Σ que evolui no tempo. Isso nos diz que $\mathcal{M} \simeq (0, \infty) \times \Sigma$. A métrica de um espaço-tempo que satisfaz a estes dois princípios pode ser escrita por

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \gamma_{ij} dx^i dx^j,$$

onde γ_{ij} é a métrica associada ao 3-espaço e $a(t)$ é o **fator de escala**, uma função diferenciável do tempo cósmico que evolui com o tempo.

Pode ser demonstrado que a métrica de um 3-espaço que satisfaz o princípio cosmológico é definida apenas por um escalar de curvatura K [Isl92, Car88], e o tensor de Riemann do 3-espaço pode ser escrito em termos apenas da métrica γ_{ij} , da seguinte forma geral

$${}^{(3)}R_{ijkl} = K(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}),$$

onde o superíndice ${}^{(3)}$ denota que estamos tratando do tensor no 3-espaço. Estes postulados nos dão então, finalmente, a **métrica de Robertson-Walker** ou **FLRW** em coordenadas esféricas

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - K \frac{r^2}{R^2}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (2.7)$$

onde R é uma quantidade relacionada à geometria do Universo (também chamado de **raio de curvatura**) e tem unidade de distância, e onde usamos $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ e

$$\begin{aligned} x &= r' \sin \theta \cos \phi, & y &= r' \sin \theta \sin \phi, \\ z &= r' \cos \theta, & r &= \frac{r'}{\left(1 + \frac{1}{4} K \frac{r'^2}{R^2}\right)}. \end{aligned}$$

Com a métrica de um Universo homogêneo e isotrópico estabelecida, podemos passar à dinâmica deste Universo. A parte esquerda de (2.6) representa a dinâmica da geometria do espaço-tempo, enquanto a parte direita está associada ao conteúdo material. Precisamos ainda então postular um conteúdo material para o Universo, dado pelo tensor $T_{\mu\nu}$ propício. Modelaremos o Universo como um fluido perfeito, contendo ou não diferentes tipos de matéria. O tensor de energia-momento de um tal fluido é dado por

$$T^{\mu\nu} = -(\rho + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

onde u^μ é definido por $u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{dt}$.

Antes de partirmos para a questão da dinâmica do Universo, é interessante explorar os resultados que obtivemos até agora. Utilizamos aqui um sistema de coordenadas que acompanha a evolução da 3-superfície definida acima pelo postulado de Weyl; um fluxo de galáxias. Neste sistema, o tempo próprio e a coordenada temporal se confundem. Com isso, já podemos calcular a distância entre objetos no nosso modelo de Universo; em um dado instante de tempo t_0 , calculamos a distância própria entre dois pontos a partir do intervalo ds . Notemos que, dada a isotropia e homogeneidade da métrica, podemos escolher qualquer ponto como sendo a origem, e a distância entre dois pontos se transforma numa integral puramente radial

$$d(t_0, r) = a(t_0) \int_{x_1}^{x_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - K \frac{r^2}{R^2}}}. \quad (2.9)$$

Esta integral possui diferentes valores dependendo do escalar de curvatura K do 3-espaço, e o valor de K define a **geometria** do Universo

$$d_p(t, r) = a(t) \times \begin{cases} \sin^{-1} r & K = 1, & (\text{Esférica}) \\ \sinh^{-1} r & K = -1, & (\text{Hiperbólica}) \\ r & K = 0. & (\text{Plana}) \end{cases} \quad (2.10)$$

Nota-se que, dependendo da evolução do fator $a(t)$, a distância entre os objetos muda. De fato, este fator é que está associado à expansão (ou contração) das distâncias no nosso Universo modelo. Definimos esta função por **fator de escala**. Se derivarmos a equação (2.9) em relação ao tempo, obtemos que

$$\dot{d} = \frac{\dot{a}}{a} d, \quad (2.11)$$

dado que a distância é proporcional a a . Em seguida veremos que $\dot{D}a/a$ é uma das quantidades fundamentais da cosmologia e, mais importante, que seu valor é positivo.

Utilizando a métrica (2.7) e o tensor (2.8) em (2.6), obtemos as equações fundamentais da dinâmica do Universo, as **Equações de Friedmann**

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{Kc^2}{a^2}, \quad (2.12)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G\left(\rho + 3\frac{p}{c^2}\right), \quad (2.13)$$

$$\dot{\rho} = -\frac{\dot{a}}{a}3\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right), \quad (2.14)$$

onde a última equação é redundante, pois vem da conservação de $T_{\mu\nu}$, e pode ser resgatada das duas primeiras.

Estas são as equações básicas para estudarmos a dinâmica do Universo. Podemos explorar uma gama de modelos a partir dos diferentes tipos de conteúdo no tensor energia-momento, dados pelos diferentes tipos de densidade de matéria ρ_i . Cada tipo de matéria (escura, relativística, energia escura) possui um fator p/ρ distinto, uma **equação de estado** distinta. O fator w é definido pela equação de estado

$$p = w\rho c^2.$$

Utilizando essa definição e escrevendo as diferentes componentes de densidade como ρ_i , podemos reescrever as equações (2.12) e (2.13) como

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{c^2} \sum \rho_i, \quad (2.15)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G\rho(1 + 3w), \quad (2.16)$$

onde a soma passa por todos os componentes de densidade: matéria não-relativística, matéria relativística, energia escura e densidade de curvatura, onde esta última é definida por

$$\rho_K \equiv -\frac{3c^2}{8\pi G} \frac{K}{a^2}.$$

Pelas equações (2.15) e (2.16) torna-se evidente que para determinarmos a evolução do Universo e de sua geometria no tempo basta determinarmos seus componentes materiais. É possível obter uma série de soluções analíticas para casos com uma ou duas componentes de densidade ρ_i , mas o Universo observado possui diferentes densidades de cada um dos componentes, e uma solução analítica para as equações não é possível nesse caso.

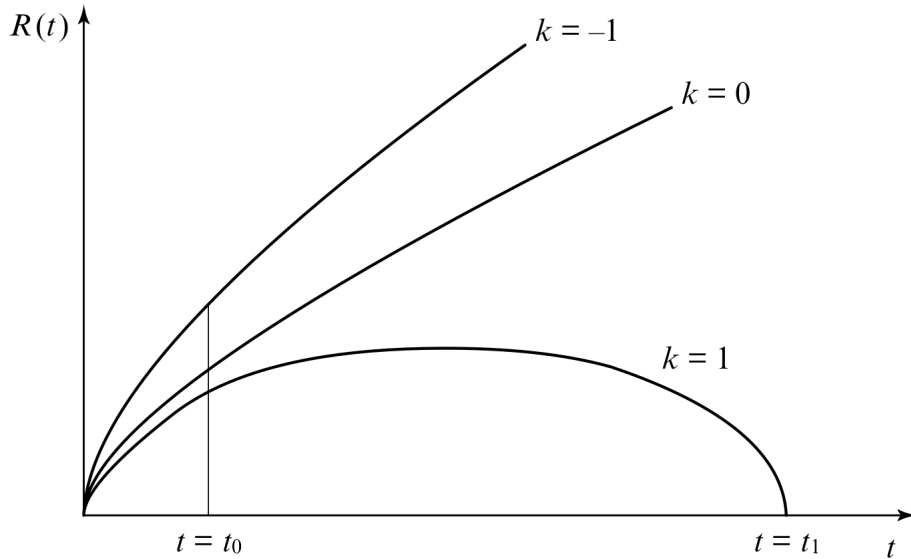


Figura 2.2: Evolução da escala do Universo $R(t)$ de acordo com as possíveis geometrias. [Isl92]

É útil agora listarmos como o fator de escala $a(t)$ e a densidade ρ estão relacionados para cada tipo diferente de componente material. O fator de escala é, em último caso, o que define a escala do Universo

$$\rho_m = \rho_{m0}a^{-3}, \quad a(t) = a_0t^{2/3} \quad \text{Matéria não-relativística} \quad (2.17)$$

$$\rho_r = \rho_{r0}a^{-4}, \quad a(t) = a_0t^{1/2} \quad \text{Matéria Relativística} \quad (2.18)$$

$$\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda0}, \quad a(t) = a_0 \exp Ht \quad \text{Energia Escura} \quad (2.19)$$

$$\rho_K = \rho_{K0}a^{-2}, \quad \text{Curvatura} \quad (2.20)$$

onde a_0 é uma constante de normalização, que usualmente é tomada de tal maneira que $a(t_0) = 1$, onde t_0 é o momento presente, e H é o **parâmetro de Hubble**, definido por $H(t) \equiv \dot{a}(t)/a(t)$.

Definimos também a **Densidade Crítica**, que é o valor da densidade do Universo hoje para o qual o Universo seria plano ($K = 0$). Pela equação (2.12), a curvatura K fica determinada por

$$\rho_{crit} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G}, \quad (2.21)$$

onde H_0 é o valor do parâmetro de Hubble no presente momento. Se $\sum \rho_{i0} = \rho_{crit}$ temos um Universo plano (ou euclidiano), se $\sum \rho_{i0} > \rho_{crit}$, temos um Universo esférico (ou fechado), e se $\sum \rho_{i0} < \rho_{crit}$ temos um Universo hiperbólico (ou aberto).

Podemos definir então uma nova forma de expressar os componentes materiais do nosso Universo em relação à densidade crítica (2.21). Definimos os **parâmetros de densidade** por

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_{crit}}. \quad (2.22)$$

Segue da definição acima e da equação (2.12) que os parâmetros de densidade satisfazem a condição

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_K = 1. \quad (2.23)$$

Agora escrevemos (2.15) da forma que melhor explicita os parâmetros cosmológicos

$$\boxed{H = H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_{K0}a^{-2} + \Omega_{m0}a^{-3} + \Omega_{r0}a^{-4}}}, \quad (2.24)$$

onde, como de costume, o subíndice $_0$ indica que os valores são tomados no momento presente.

Antes de tratarmos do universo como ele é observado, calculemos como o fator de escala $a(t)$ influencia na distância percorrida por um fóton entre dois instantes de tempo. O fóton realiza o caminho de uma geodésica nula, de tal modo que

$$\int_{t_2}^{t_1} \frac{dt}{a(t)} = \int_{r(t_1)}^{r(t_2)} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} \implies \frac{\delta t_1}{\delta t_2} = \frac{a(t_1)}{a(t_2)}, \quad (2.25)$$

pois a integral (2.9) é independente do tempo, e realizamos uma diferencial em relação ao tempo em ambos os lados. O fóton, quando emitido em t_1 por uma fonte coerente (não há defasagem entre os sinais), possui uma frequência dada por $\nu_1 = 1/\delta t_1$, e a frequência recebida é dada por $\nu_2 = 1/\delta t_2$. Temos então a relação

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{a(t_1)}{a(t_2)}. \quad (2.26)$$

Se $\dot{a}(t) > 0$ (como de fato é), a frequência recebida é menor que a emitida por um fator $a(t_1)/a(t_2)$. No espectro eletromagnético isso significa um desvio para o vermelho do comprimento de onda λ do fóton, e podemos definir então o **redshift** z de um objeto observado pela relação

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t)}. \quad (2.27)$$

Se tomarmos como usual que $a(t_0) = 1$, obtemos a relação Fator de Escala-Redshift

$$\boxed{a = (1 + z)^{-1}}. \quad (2.28)$$

Em termos do redshift, a equação (2.24) se escreve como

$$H = H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_{K0}(1 + z)^2 + \Omega_{m0}(1 + z)^3 + \Omega_{r0}(1 + z)^4}. \quad (2.29)$$

Com todas as ferramentas necessárias em mãos, podemos agora descrever o Universo observado.

2.3 O Universo Observado

O atual modelo de concordância da Cosmologia, o modelo Λ CDM, é fundamentado na detecção de uma expansão acelerada do Universo, causada por algum mecanismo ainda não entendido completamente, e a existência de um tipo de matéria que não interage com a força eletromagnética: a chamada **matéria escura**. A matéria escura observada também possui a propriedade de ser fria (sua equação de estado é a de um componente material não-relativístico), e a teoria de perturbações e formação de estruturas do modelo está em concordância com as observações.

2.3.1 Lei de Hubble-Lemaître

A lei de Hubble-Lemaître é a verificação observacional da relação (2.11), isto é, o fator de escala a está aumentando com o tempo ($\dot{a} > 0$), e o nosso Universo está em expansão. A quantidade que dita a rapidez com que o Universo está expandindo hoje é a **constante de Hubble** H_0 , definida anteriormente. Observacionalmente, vemos que objetos mais distantes afastam-se mais rapidamente do nosso referencial na Terra, e assim vemos de fato um desvio para o vermelho. O satélite Planck [Cea18a] determinou um valor de

$$H_0 = 67.66 \pm 0.42 \quad [kms^{-1}Mpc^{-1}].$$

A medida de H_0 determina não apenas a velocidade de afastamento dos objetos mas a idade do Universo. Uma medida semelhante, mas não igual, é o chamado **tempo de Hubble**, definido por

$$t_{Hubble} \equiv H_0^{-1} \approx 14.5[Gyr],$$

que é o valor da idade do Universo dada a constante de Hubble se a evolução do Universo fosse aproximada de maneira linear. Se sabemos os parâmetros de densidade do nosso Universo, podemos calcular a sua idade integrando o caminho do fóton como em (2.9) desde o momento inicial do Universo, e obtemos

$$\begin{aligned} t_{idade} &= \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \\ &= \frac{1}{H_0} \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_{K0}(1+z)^2 + \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4}}, \end{aligned}$$

fazendo uma mudança de variáveis utilizando (2.28), (2.29) e (2.15). Observamos $t_{idade} = 13.787 \pm 0.020Gyr$ utilizando o valor dos parâmetros medidos pelo Planck $\Omega_{m0} = 0.306$, $\Omega_{r0} = 7.88 \cdot 10^{-5}$, $\Omega_{K0} = 0$ e $\Omega_{\Lambda0} = 0.694$ [Cea18a].

Hoje há uma discordância no valor de H_0 entre medidas locais e as calculadas pela observação da RCF[BVR16][Cea18a]. Ainda não é claro se isso é um indício de uma nova física por trás da cosmologia ou se precisamos recalibrar nossas medidas locais.

2.3.2 Energia Escura

Até a década de 90 do século passado acreditava-se que a evolução do cosmo era governada apenas pelos componentes de poeira e matéria relativística, no que se assemelhava ao modelo de Einstein-de Sitter, onde não haviam os termos Ω_Λ e Ω_K em

(2.29). Com medidas de supernovas locais, Riess [RFC⁺98] e Perlmutter [PAG⁺99] estabeleceram a existência de um componente de energia escura nas equações de Friedmann, alterando o paradigma cosmológico. O fato de que o Universo está em expansão acelerada não necessariamente implica na existência de um tipo exótico de energia [CFPS12], mas sim que é necessária uma modificação nas Equações de Einstein (2.6), seja na forma de uma **constante cosmológica** Λ , ou em uma modificação da dinâmica do espaço-tempo, a parte esquerda das equações de Einstein. Uma vez que a adição de uma constante cosmológica representa apenas mais um parâmetro na teoria, o atual modelo se fundamenta apenas na existência de Λ , sem uma fenomenologia completa.

As equações de Einstein, reescritas com Λ tornam-se

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}, \quad (2.30)$$

onde Λ possui a equação de estado $p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2$.

Se assumirmos que não há densidade negativa de energia (uma hipótese razoável pelas condições de Energia da RG), a pressão p_Λ é negativa. Teorias de Gravidade Modificada são uma tentativa de explicar a existência de um termo responsável pela aceleração da expansão do Universo sem recorrer à necessidade da existência de um conteúdo energético que requer uma pressão negativa do vácuo. Há também o problema de que, caso o termo Λ esteja de fato vinculado à energia do vácuo, o valor previsto pela Teoria Quântica de Campos diverge em mais de 60 ordens de magnitude do valor observado [CFPS12]. O valor de Ω_Λ observado hoje é de 0.6889 ± 0.0056 [Cea18a].

2.3.3 Radiação Cósmica de Fundo

O fato de o Universo estar se expandindo implica que, em algum momento, todo o espaço-tempo e a matéria nele contida estavam em um volume infinitesimalmente pequeno. Esta é a premissa básica da teoria do **Big Bang**, que hoje possui elaborações mais complexas como a necessidade da existência de um período inflacionário no Universo primordial. Uma das previsões fundamentais de um Big Bang quente é a existência de uma radiação primordial devido ao desacoplamento da matéria e radiação. Esta é a chamada Radiação Cósmica de Fundo, a primeira grande evidência da teoria do Big Bang quente.

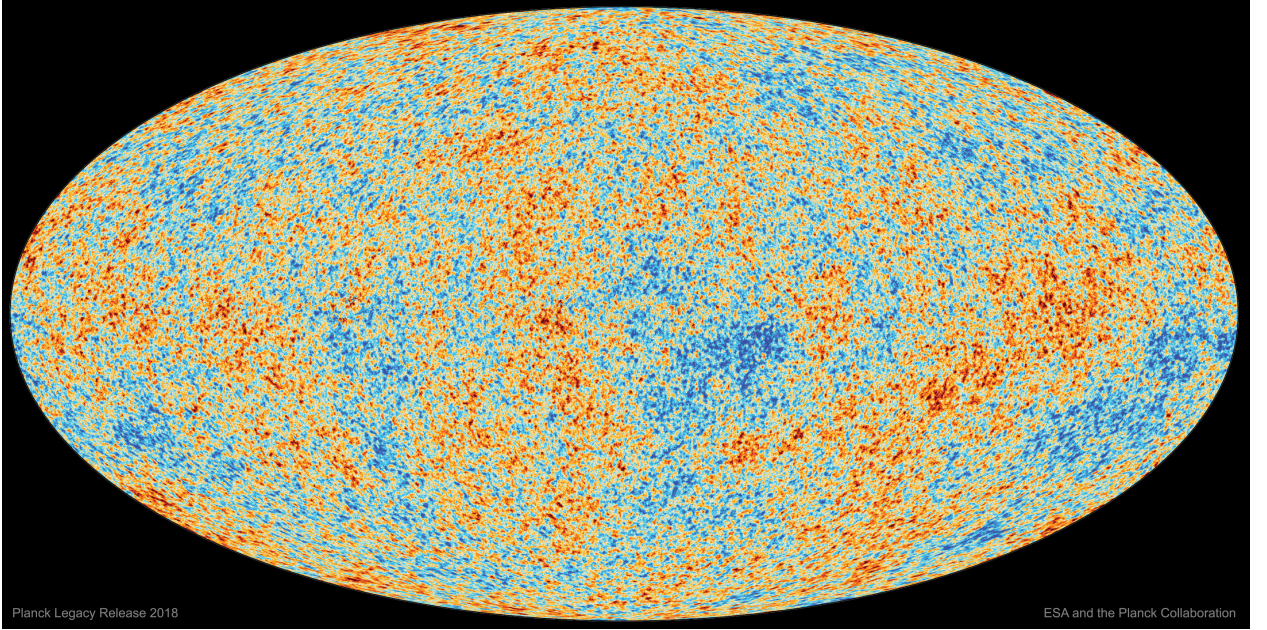


Figura 2.3: O mapa da RCF na esfera celeste observado pelo satélite Planck. Créditos: [Cea18b]

A observação tanto dessa radiação de fundo como da existência de flutuações de temperatura é a mais forte evidência do Big Bang e da teoria de formação de estruturas. A teoria da nucleossíntese primordial a partir do big bang nos dá uma estimativa de qual deve ser a temperatura média no desacoplamento z_{dec} [Isl92], e a teoria concorda com as observações. A RCF, devido ao redshift, hoje é observada como um sinal na banda das microondas, com um espectro de corpo negro que mostra a isotropia e homogeneidade médias do sinal, e com uma temperatura média de $T_{CMB} \simeq 2.728K$ [Dur08].

Talvez tão importante quanto a detecção da radiação em si, é a detecção das flutuações de temperatura. Como a observação do espectro se dá na esfera celeste, podemos definir um campo $\Delta T/T_{CMB}(\theta, \phi)$ de flutuações de temperatura na esfera e expandí-lo em modos esféricos, traduzidos nos **harmônicos esféricos**

$$\frac{\Delta T}{T}(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (2.31)$$

O que é observado de fato é o chamado **Espectro de Potência**, que é definido a partir da função de correlação de dois pontos (**FC2P**) de (2.31) [Dur08]. A (FC2P) de um campo $X(\theta, \phi)$ é definida como

$$\langle X(\theta_i, \phi_i) X(\theta_j, \phi_j) \rangle.$$

É possível mostrar que, dada a isotropia do campo X , a F2CP depende apenas do ângulo entre os dois pontos $(\theta_i, \phi_i), (\theta_j, \phi_j)$, de tal modo que podemos escrever o

Espectro de Potência da RCF em função dos coeficientes da expansão em harmônicos esféricos ([Dur08] Appendix A7.2)

$$C_l \equiv \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l |a_{lm}|^2, \quad (2.32)$$

onde l é uma medida de escala na esfera celeste, definida como em [Dur08]. Adiante veremos como efeitos físicos detectados a partir das flutuações de temperatura da RCF podem ser escritos em função das variáveis perturbativas e de coeficientes de uma métrica perturbada. O efeito fundamental que analisaremos é o efeito Sachs-Wolfe e, mais especificamente o Efeito Sachs-Wolfe Integrado, relacionados com a existência e evolução de potenciais gravitacionais na última superfície de espalhamento (*Last Scattering Surface LSS*) e na evolução do Universo após a LSS, sendo a última superfície de espalhamento a superfície formada no último instante em que os fótons formam um plasma com a matéria bariônica, estando acoplados. Antes dessa era o Universo ainda é opaco, enquanto que depois o Universo torna-se transparente.

2.4 Questões do Modelo Λ CDM

Apesar do sucesso do modelo de concordância, a evolução da cosmologia observacional e a abundância de novos dados abalou algumas certezas do modelo. Para além da questão observacional, a fenomenologia do modelo encontra um problema na necessidade de existência de uma constante cosmológica Λ . Como uma constante do tipo não possui propriedades naturais (e.g. pressão negativa), nem surge naturalmente das equações de Einstein, a necessidade da adição de um parâmetro na teoria é um tipo de ajuste fino [BAA⁺16].

A discrepância entre o valor da energia do vácuo previsto pela TQC e o valor necessário para que Λ seja relacionado a um tipo de energia do vácuo com as propriedades descritas é gigantesca, da ordem de 10^{60} menor que o valor esperado pela TQC [CFPS12]. Se desejamos uma teoria final que dê conta dos fenômenos em grandes escalas de energia e grandes escalas de distância, uma possível unificação da força gravitacional, a constante cosmológica é um problema sério a ser enfrentado. A existência de campos adicionais na Lagrangiana (2.5) e sua identificação com a constante cosmológica também é uma questão não-trivial.

Para além de Λ , há também o problema das medidas da constante de Hubble H_0 . Os resultados obtidos a partir dos dados da RCF [Cea18a] estão em desacordo com outras medidas que partem de observáveis locais, em incertezas maiores que 5σ [VTR19]. Ainda não há uma resposta definitiva ou consenso.

Com estas motivações, no capítulo seguinte, levantaremos algumas hipóteses sobre como podemos modificar as equações fundamentais da interação gravitacional

(2.6) e da ação (2.1) de modo a buscar alternativas para o modelo de concordância.

Capítulo 3

Gravidade Modificada em Cosmologia

O modelo Λ CDM, apesar de consistente com as observações, possui a limitação imposta pela hipótese *ad hoc* de uma constante cosmológica. As teorias e modelos que se propõem a superar essas limitações são diversos e partem de diferentes tipos de hipóteses, de tal modo que uma revisão completa seria extensa, e é deixada para a literatura mais aprofundada [CFPS12, Pet20].

As modificações e extensões do modelo cosmológico podem ser a grosso modo separadas em (ver, por exemplo [CFPS12])

1. Modificações do conteúdo material do Universo e de suas interações;
2. Modificações da dinâmica do espaço-tempo e da geometria;
3. Extensão das dimensões do espaço-tempo.

As cosmologias $f(R)$ estudadas neste trabalho se encaixam na 2ª possibilidade, e aqui apresentaremos apenas as possibilidades 2 e 3, de tal modo que a única possível extensão no conteúdo material seja na adição de campos nas componentes da densidade Lagrangiana. Chamaremos então de **Gravidade Modificada** as teorias que se encaixam nas categorias 2 e 3; isto é, teorias que não alteram o conteúdo material do Universo ou do tensor de energia-momento derivado de (2.5) a não ser pela dependência de novos campos. A referência [BKLY15] oferece uma revisão de modelos em que a interação entre os componentes materiais e a existência de outros componentes não-triviais pode alterar a evolução cosmológica.

As modificações podem ser separadas em componentes no setor da geometria, que seria a parte esquerda das equações de Einstein, e no setor da matéria, a parte direita das equações:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}} = \boxed{\kappa T_{\mu\nu}}$$

Apresentaremos aqui alguns exemplos de como modificar a parte esquerda das equações por diferentes métodos, e obteremos os modelos cosmológicos pertinentes ao trabalho.

3.1 Modificando a ação de Einstein-Hilbert

Na obtenção de (2.6) a partir da ação (2.5), algumas hipóteses foram feitas explícita e implicitamente, de tal maneira que as equações de movimento obtidas fossem as equações de Einstein. A primeira hipótese é de que a integral de ação é definida sobre uma variedade de 4 dimensões. De fato, a RG é formulada em $3 + 1$ dimensões (3 de espaço e 1 de tempo), e essa hipótese por si mesma restringe as possibilidades da dinâmica de uma variedade onde a variável dinâmica é uma função do tensor métrico. O **Teorema de Lovelock** impõe restrições nas possíveis equações da dinâmica em 4 dimensões [CFPS12]. A primeira generalização que vamos colocar à ação (2.5) é de que não estamos mais restritos a $3 + 1$ dimensões, mas a $n + 1$ (a possibilidade de dimensões temporais extras não será explorada). Com essa possibilidade, a dinâmica pode incluir termos que surgem naturalmente de um campo definido em n dimensões.

A segunda generalização será em relação à função $f(R)$ da parte geométrica da ação (2.5). Na RG a dinâmica é resgatada quando $f(R) = R$, e resgatamos as EFE, de tal modo que temos apenas termos de 2ª ordem na métrica nas equações. O Teorema de Lovelock nos diz que, se quisermos equações de dinâmica que envolvam até no máximo termos de 2ª ordem na métrica, a densidade lagrangiana \mathcal{L} está restrita. A forma geral de tal lagrangiana pode ser encontrada em [CFPS12]. Aqui, alguns modelos da função $f(R)$ produzem equações de 2ª ordem e outros não, mas o procedimento será partir de uma função arbitrária f para, depois das equações da dinâmica obtidas, especificarmos qual a função. Note-se que é possível incluir outras variáveis geométricas na densidade \mathcal{L} como o termo de Gauss-Bonnet, utilizado em algumas teorias, mas aqui utilizaremos uma função apenas do escalar de Ricci.

A terceira, e última generalização, é que nossas equações de dinâmica poderão incluir campos escalares ϕ definidos na nossa variedade. Isso nos diz que a variação da ação (2.5) agora possui mais uma variável dinâmica; no caso, o campo ϕ . A dinâmica resultante de se adicionar outros campos na ação é às vezes a mesma de teorias que fazem modificações apenas no setor geométrico, como por exemplo o mapeamento de teorias $f(R)$ em teorias escalar-tensoriais. É possível também entender a adição de novos campos como uma modificação na componente material da densidade lagrangiana, de tal modo que a lagrangiana da matéria \mathcal{L}_m inclua a dependência no campo ϕ .

A ação mais geral, de acordo com as hipóteses feitas acima, é então dada por

$$\mathcal{S}_g = \int_{\Omega} d^D X \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\kappa} f(R, \phi) + \mathcal{L}_M(\Psi, g_{\mu\nu}) \right) \quad (3.1)$$

onde $D = n + 1$ é uma dimensão de n componentes espaciais e uma dimensão temporal.

O procedimento agora é analisar teorias que utilizam uma das hipóteses particulares acima, uma vez que obter uma dinâmica geral a partir da ação acima não é apenas complexo sem impor restrições, como não muito didático, já que não evidencia a importância particular que cada uma das componentes da ação tem na dinâmica.

Uma última nota é importante: aqui usaremos apenas a métrica $g_{\mu\nu}$ e os possíveis campos extra ϕ , Ψ como variáveis dinâmicas. As variações em termos da conexão $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$, no chamado formalismo de Palatini, e de variáveis generalizadas da variedade \mathcal{M} , chamado formalismo métrico-afim, não serão analisados aqui, mas estes formalismos, diferentemente da RG, não necessariamente coincidem para teorias de Gravidade Modificada, resultando em dinâmicas diferentes para a mesma teoria [CFPS12].

3.2 Exemplos de Teorias de Gravidade Modificada

Existem diversas teorias que incluem campos extras, dimensões $n > 4$ e modificações do setor gravitacional; aqui daremos um exemplo clássico para cada uma dessas modificações, e por fim chegaremos à teoria que estudaremos mais a fundo e seus possíveis modelos cosmológicos.

3.2.1 *Kaluza-Klein*

A Teoria de Kaluza-Klein foi proposta originalmente por Theodor Kaluza na década de 1920 com a intenção de unificar o eletromagnetismo e a RG [CFPS12], e posteriormente reinterpretada por Oskar Klein no contexto da Teoria Quântica de Campos. A teoria assume que existe uma dimensão espacial a mais, isto é, trabalhamos num espaço $4 + 1$ dimensional com um campo ϕ , e que esta dimensão extra é pequena em relação às outras dimensões espaciais (da ordem de $10^{-19}m$, enquanto as outras dimensões espaciais são da ordem de megaparsecs) [CFPS12]. Além da escala ser menor, a dimensão extra é *compactificada*¹, isto é, sua extensão não se estende infinitamente como as outras, e isto permite que sua influência nas

¹A compactificação é um artefato matemático que permite que uma dimensão seja deformada de tal maneira que as equações que envolvem esta dimensão possuam condições de contorno e escalas que tornam sua existência possível dentro do Universo $4D$ observado

equações seja integrada de tal maneira que apenas a dinâmica associada às outras $3 + 1$ dimensões seja de importância.

Partimos então de uma 5-métrica γ_{AB} e coordenadas $X^\mu = (x^\mu, z)$ onde z é a dimensão extra e x^μ são as coordenadas usuais de uma 4-variedade. Os índices em maiúsculo AB correm por todas as dimensões. Denotando por \mathcal{R}_{AB} o tensor de Ricci da 5-variedade, temos que o escalar de Ricci é dado por $\mathcal{R} = \gamma^{AB}\mathcal{R}_{AB}$. A parte geométrica da ação (3.1) é dada então por

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\kappa} \int d^D X \sqrt{-\gamma} \mathcal{R}. \quad (3.2)$$

Podemos expandir a métrica $\gamma_{AB}(x, z)$ em uma série de Fourier em relação à dimensão extra z , cuja topologia é de um círculo S^1 de comprimento L . A métrica é expandida então como

$$\gamma_{AB}(x, z) = \sum_n \gamma_{AB}^{(n)} e^{inz/L}, \quad (3.3)$$

e fazemos uso das condições impostas sobre a dimensão z : se L é de uma escala muito pequena em relação às outras dimensões, os modos da expansão de Fourier convergem, e podemos tomar apenas o primeiro modo $\gamma_{AB}^{(n)}$ na expansão. De fato, a escala de L normalmente é da ordem da escala de Planck, dadas as restrições observacionais - $L \approx l_{planck} < 10^{-19}m$ [CFPS12]. Consideremos então que apenas o modo 0 de (3.3) é levado em conta na ação, e separaremos as componentes da métrica definindo novos campos $g_{\mu\nu} \equiv \gamma_{\mu\nu}^{(0)}$, $A_\mu \equiv \gamma_{\mu z}^{(0)}$ e $\phi \equiv \gamma_{zz}^{(0)}$ (z fixo), onde A_μ e $g_{\mu\nu}$ são agora o potencial vetor e a métrica clássicos. A ação se torna então, com as devidas transformações de coordenadas,

$$S[g, A, \phi] = \frac{L}{2\kappa} \int d^5 x \sqrt{-g} \left(R - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{4}e^{-2(d-1)\alpha\phi} F^2 \right), \quad (3.4)$$

onde $\alpha \equiv 1/\sqrt{2(D-1)(D-2)}$, $F^2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu}$ o tensor de Faraday [Mis17] definido por

$$F_{\mu\nu} \equiv \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu. \quad (3.5)$$

Desta ação vemos surgir naturalmente o campo eletromagnético com a identificação de um campo vetorial com uma componente da métrica 5-dimensional. Entretanto, também obtemos um campo extra ϕ nas equações, o que mostra que temos mais um grau de liberdade quando tentamos unificar o campo gravitacional e eletromagnético a partir da extensão das dimensões do espaço-tempo. Este campo ϕ é também chamado de **dilaton** e, neste tipo de teoria a ação acima, que gera uma dinâmica apenas nas 4 dimensões do espaço-tempo com a adição de um campo

extra, é chamada de **efetiva**. A Teoria de Kaluza-Klein possui 3 variáveis dinâmicas como vimos acima: A , $g_{\mu\nu}$ e ϕ (em contraste com a RG que possui apenas uma), gerando então as seguintes equações de campo

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + e^{-2(d-1)\alpha\phi} \left(F_{\mu\rho} F_\nu^\rho - \frac{1}{4} F^2 g_{\mu\nu} \right) \right] \quad (3.6)$$

$$\nabla^\mu \left(e^{-2(d-1)\alpha\phi} F_{\mu\nu} \right) = 0 \quad (3.7)$$

$$\square\phi = -\frac{1}{2}(d-1)\alpha e^{-2(d-1)\alpha\phi} F^2 \quad (3.8)$$

As equações de campo incluem uma forma das equações de Maxwell e das EFE, assim como uma equação de fonte para ϕ .

A teoria de Kaluza-Klein possui uma série de technicalidades, particularmente em relação ao termo ϕ , uma vez que as equações acima precisam ser coerentes com a escala das dimensões. Como uma teoria cosmológica, Kaluza-Klein sofre de uma série de problemas, particularmente a necessidade de se explicar como uma dimensão foi compactificada nos primórdios da era cósmica, visto que não observamos uma escala do tipo antes da última superfície de espalhamento, mas na era planckiana todas as dimensões possuíam escalas da mesma ordem. Uma fonte de discussão seria considerar cosmologias anisotrópicas em maiores dimensões, como cosmologias de Bianchi. Uma maior elaboração sobre estas hipóteses pode ser encontrada na referência [CFPS12].

É importante notar que esta teoria não gera naturalmente uma aceleração em tempos tardios numa cosmologia FLRW, e serve aqui apenas de exemplo de uma teoria gravitacional formulada em dimensões extras.

3.2.2 *Brans-Dicke*

Na teoria de Kaluza-Klein, o campo escalar ϕ surgiu como uma necessidade de parametrizar os componentes de uma métrica 5-dimensional. Por outro lado, podemos incluir campos extras na nossa ação sem que eles surjam como uma necessidade matemática de uma teoria. Teorias que incluem campos escalares extras em geral são chamadas **Teorias escalar-tensoriais**. Modelos de teorias escalar-tensoriais podem também ser entendidas como modelos efetivos de teorias com dimensões extra, como no exemplo de Kaluza-Klein. Outras teorias que fazem uso de modificações no setor geométrico da ação também podem ser entendidas como teorias com dinâmica igual à de uma teoria escalar-tensorial, como é o caso de $f(R)$.

Uma teoria escalar-tensorial possui uma densidade lagrangiana que pode ser escrita, em geral, como [CFPS12]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\kappa} \sqrt{-g} \left[\phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - 2\Lambda(\phi) \right] + \mathcal{L}_m(\Psi, g_{\mu\nu}), \quad (3.9)$$

Um caso particular de teoria escalar-tensorial é o caso da teoria de Brans-Dicke, onde o funcional $\omega(\phi)$ acima se torna um parâmetro tratado como constante e a função $\Lambda(\phi)$ se anula. O parâmetro ω é chamado neste caso de **parâmetro de Brans-Dicke**. A ação da teoria é então

$$\mathcal{S}_{BD} = \frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{-g} \left[\phi R - \frac{\omega}{\phi} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi + \mathcal{L}_m(\phi, g_{\mu\nu}) \right]. \quad (3.10)$$

Podemos resgatar a dinâmica da RG se definirmos ϕ como uma constante adimensional e incluir o termo $1/2\kappa$ contendo a constante gravitacional da mesma forma que na RG, de tal modo que resgatamos identicamente a ação de Einstein-Hilbert (2.5). Podemos obter a dinâmica da $RG + \Lambda$ a partir de (3.9) se realizarmos o mesmo procedimento mas mantendo $\Lambda(\phi)$ constante e impondo a condição $\omega'/\omega^2 \rightarrow 0$ [CFPS12]. As equações de campo obtidas a partir da variação da ação (3.10) em relação ao campo ϕ e à métrica são, respectivamente [Pet20]

$$R + \frac{\omega}{\phi^2} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi - \frac{2\omega}{\phi} \square \phi = 0, \quad (3.11)$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2} \left(\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\nabla \phi)^2 \right) - \frac{1}{\phi} [\nabla_\nu \nabla_\mu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi] = - \left(\frac{\kappa}{\phi} \right) T_{\mu\nu}, \quad (3.12)$$

contraíndo a segunda equação com $g_{\mu\nu}$ e substituindo R obtemos

$$\square \phi = \frac{\kappa T}{(2\omega + 3)}, \quad (3.13)$$

onde T é o tensor energia-momento contraído. Pela equação (3.13) podemos ver que o parâmetro de Brans-Dicke ω media a intensidade do quanto o campo ϕ serve de fonte para o conteúdo material das equações de campo. Com efeito, podemos incluir o termo $(2\omega + 3)$ dentro da constante κ , que inclui a constante gravitacional Newtoniana G_N e definir uma chamada **constante gravitacional efetiva** G_{eff} , que em determinadas teorias Tensorial-Escalares pode variar com o tempo e o campo ϕ , mediando de fato como a interação gravitacional pode ser modificada através da intensidade da constante G [Pet20]. Se definirmos G_{eff} por

$$G_{\text{eff}} \equiv \frac{G_N}{(2\omega + 3)},$$

a equação (3.13) se reduz a

$$\square\phi = 8\pi G_{\text{eff}}T, \quad (3.14)$$

e, no caso de um fluido perfeito, teríamos a equação familiar

$$\square\phi = 8\pi G_{\text{eff}}(\rho + 3p). \quad (3.15)$$

A teoria de Brans-Dicke permite que usemos o campo ϕ como um grau de liberdade a mais na interação gravitacional. De fato, a ideia é definirmos $G_{\text{eff}} \equiv 1/\phi$ e reobtermos a constante Newtoniana no limite assintótico de ϕ [Pet20]. A ideia de utilizar a constante gravitacional G como um mediador da intensidade da interação gravitacional será resgatada posteriormente no regime perturbativo da Gravidade Modificada.

3.3 Teorias $f(R)$

Se quisermos modificar puramente a parte geométrica da ação de Einstein-Hilbert, a forma mais geral que a ação (3.1) pode tomar é onde o escalar de Ricci R é substituído por uma função geral $f(R)$, resultando na ação

$$\mathcal{S} = \int d^4x \frac{1}{2\kappa} \sqrt{-g} (f(R) + \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu})). \quad (3.16)$$

A função $f(R)$, sendo arbitrária *a priori*, carrega todas as possíveis alterações à dinâmica das equações de Einstein. A teoria obtida da ação (3.16) possui então, a princípio, a mesma quantidade de parâmetros que a RG *sem* uma constante cosmológica. Entretanto, o que de fato acontece é que a função $f(R)$ não pode ser arbitrária se desejamos reproduzir a evolução cosmológica a partir de uma teoria $f(R)$. Precisamos estudar algumas das restrições impostas a esse tipo de teoria no âmbito cosmológico, vindas tanto de necessidades observacionais como de necessidades puramente teóricas, como questões de estabilidade da teoria e de soluções das equações de campo resultantes [SF10].

Notamos aqui que as teorias $f(R)$, como citado anteriormente, podem gerar diferentes dinâmicas dependendo do tipo de variação da ação (3.16). Aqui derivaremos as equações de campo a partir do **formalismo métrico**, e nos referiremos às teorias $f(R)$ neste formalismo apenas como teorias $f(R)$ [CFPS12]. Para uma derivação e análise das teorias $f(R)$ nos outros formalismos, recomenda-se a referência [SF10].

Primeiramente, obtemos as equações de campo pelo mesmo procedimento que obtemos (2.6) para a RG: variamos (3.16) em relação à métrica $g_{\mu\nu}$ e definimos o tensor energia-momento por

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g_{\mu\nu}},$$

obtendo as equações de campo

$$\boxed{f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - [\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square]f'(R) = \kappa T_{\mu\nu}}, \quad (3.17)$$

onde $'$ denota derivação em relação ao escalar de Ricci R . Denotaremos a derivada de f , $f'(R)$, pela função $F(R) \equiv f'(R)$, de tal modo que podemos escrever a equação do traço de (3.17) como

$$F(R)R - 2f(R) + 3\square F(R) = \kappa T. \quad (3.18)$$

É interessante notar que podemos resgatar a equação (3.17) a partir de uma ação (3.10) se entendermos $F(R)$ como um campo escalar ϕ , o que mostra que a dinâmica de uma teoria $f(R)$ coincide com um tipo particular da dinâmica de uma teoria de Brans-Dicke. As technicalidades da identificação do campo ϕ e das **transformações conformes** da métrica e de coordenadas para a obtenção da mesma dinâmica a partir de uma teoria BD podem ser encontradas em [SF10].

Antes de analisarmos a dinâmica e evolução cosmológica em teorias $f(R)$, podemos impor restrições na possível forma da função $f(R)$, que surgem como necessidades tanto analíticas como observacionais. Em geral, teorias $f(R)$ e a dinâmica das equações (3.17) devem satisfazer os seguintes critérios para serem teorias factíveis, compilados em [SF10]:

- possuir o correto limite de campo fraco no nível Newtoniano e Pós-Newtoniano, isto é, satisfazer as observações do sistema solar;
- ser estável nos limites clássico e semi-clássico, isto é, não possuir instabilidades em espaço-tempos de de Sitter e perturbações de matéria, por exemplo;
- não possuir campos de Faddeev-Popov, também chamados **campos fantasma**, que surgem nas equações de campo influenciando a dinâmica da teoria e não podem ser removidos por uma escolha de coordenadas ou calibre;
- possuir um problema de Cauchy bem-posto: as equações de campo possuem soluções bem definidas, únicas e cujas condições dadas na hipersuperfície inicial geram soluções bem comportadas.

Um estudo aprofundado destas condições e das propriedades analíticas retiradas delas pode ser encontrado em [SF10].

Uma vez que temos as equações de campo (3.17) em mãos, podemos partir das mesmas hipóteses que assumimos em 2.2 para construir um modelo cosmológico.

3.4 Cosmologia em $f(R)$

A princípio, não há motivo para se acreditar que as hipóteses de homogeneidade e isotropia impostas sobre nosso modelo cosmológico na RG levem aos mesmos resultados na construção de uma cosmologia em teorias mais gerais. Entretanto, o chamado **Teorema de Ehlers-Geren-Sachs** (EGS), que afirma que, se todos os observadores inerciais observam a RCF possuindo as mesmas propriedades (ou seja, a isotropia da RCF), vivemos em um Universo FLRW, é verdadeiro em teorias $f(R)$. Na verdade, uma afirmação mais geral segue: *O Teorema EGS é válido em teorias escalar-tensoriais* [SF10].

Esta afirmação nos permite assumir, assim como na $RG + \Lambda$, que as observações da RCF nos apontam para um Universo FLRW: homogêneo, isotrópico, composto por um fluido perfeito, satisfazendo as mesmas hipóteses que utilizamos na seção 2.2.

Com a segurança de estender nossas hipóteses à nova teoria, podemos usar a métrica (2.7) e o tensor de energia-momento (2.8) para obtermos as **Equações de Friedmann Modificadas**:

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3F} \left[\rho + \frac{RF - f}{2} - 3H\dot{R}F' \right], \quad (3.19)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\frac{\kappa^2}{F} \left[p + \dot{R}F'' + 2H\dot{R}F' + \ddot{R}F' + \frac{1}{2}(f - RF) \right], \quad (3.20)$$

onde denotamos $\dot{} \equiv \partial/\partial t$ e $' \equiv \partial/\partial R$. Aqui fazemos uma hipótese adicional: o parâmetro de densidade de curvatura se anula, de tal maneira que (3.19) não possui componente de densidade de curvatura. Como veremos, a integração das equações acima é mais complexa que a das equações de Friedmann (2.12) mesmo sem curvatura. Além disso, é a hipótese que se adequa às observações, da mesma forma que temos $\Omega_K = 0$ no modelo Λ CDM.

Podemos analisar como a função $f(R)$ vem a gerar um fator de aceleração na evolução de H a partir de (3.19) e (3.20), definindo uma **equação de estado efetiva**, a partir das quantidades

$$\rho_{\text{eff}} \equiv \frac{RF - f}{2F} - \frac{3H\dot{R}F'}{F}, \quad (3.21)$$

$$p_{\text{eff}} \equiv \frac{\dot{R}F'' + 2H\dot{R}F' + \ddot{R}F' + \frac{1}{2}(f - RF)}{F}. \quad (3.22)$$

No caso em que $f(R) = R$ as quantidades acima se anulariam, e teríamos apenas os componentes ρ, p usuais, dados pelas equações de estado dos componentes ρ_m e

ρ_r de matéria e radiação, respectivamente. Já no caso em que $\rho \rightarrow 0$ em (3.19) vemos que é necessário que $\rho_{\text{eff}} > 0$ dado que estamos em um Universo FLRW, e as equações de Friedmann modificadas no vácuo são

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3} \rho_{\text{eff}}, \quad (3.23)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa^2}{6} (\rho_{\text{eff}} + 3p_{\text{eff}}), \quad (3.24)$$

o que nos mostra que a partir das quantidades definidas em função de $f(R)$, as soluções no vácuo geram um crescimento de $a(t)$. Se o parâmetro da equação de estado efetiva w_{eff} for negativo, isto é, se $w_{\text{eff}} = p_{\text{eff}}/\rho_{\text{eff}} < 0$, o lado direito da segunda equação é estritamente positivo, o que gera uma aceleração sem qualquer outro campo ou componente material. Dependendo do modelo $f(R)$, é possível reproduzir a equação de estado da energia escura $w_{\text{eff}} = -1$, que no vácuo é o **modelo de de Sitter**. Uma análise das condições necessárias para que uma $f(R)$ reproduza a equação de estado de de Sitter pode ser encontrada em [SF10].

As condições sobre a função $f(R)$ listadas acima, uma vez que já temos as equações de campo e uma métrica estabelecidas, levam a algumas restrições analíticas sobre a forma possível da função $f(R)$. Um desenvolvimento completo destas condições pode ser encontrado na já citada referência [SF10]; aqui apenas listamos as condições e uma breve definição quando necessário.

Uma teoria $f(R)$ para satisfazer às mesmas condições que o modelo ΛCDM e reproduzir uma fase de aceleração tardia precisa satisfazer, como listado em [SF10]:

- $f'(R) > 0$,
- $f''(R) > 0$,
- $\lim_{z \gg 0} f(R) = R + 2\Lambda$,
- O limite de de Sitter da teoria deve ser estável,
- Um mecanismo camaleônico [CFPS12] que torne a teoria compatível com testes do sistema solar. Este mecanismo consiste em criar uma dependência da interação gravitacional na densidade de matéria, de tal modo que para regiões de alta densidade, as equações voltem às equações da RG.

Modelos de $f(R)$ que satisfazem a essas condições são chamados **viáveis**, ou seja, se desejamos construir modelos viáveis, que satisfazem às observações e são tão poderosos quanto o modelo de concordância, esses modelos precisam satisfazer a todos os critérios acima. O modelo que usaremos pelo resto deste trabalho é o

modelo $f(R)$ de Starobinsky [Sta07]; este modelo satisfaz a todas as condições postuladas acima.

Antes de prosseguirmos com nosso modelo, é interessante analisarmos de forma geral modelos de $f(R)$ viáveis. Analisamos aqui 3 tipos de modelo populares e robustos na literatura [CGLY19, CLF10, CFPS12]: o modelo Hu-Sawicki, o modelo exponencial e o já citado modelo de Starobinsky.

3.4.1 Modelo de Hu-Sawicki

Introduzido em [HS07], o modelo de Hu-Sawicki é um modelo viável de gravidade $f(R)$, construído de tal maneira a reproduzir a aceleração tardia e concordar com Λ CDM em redshifts altos, com uma função da forma

$$f(R) = R - m^2 \frac{c_1(R/m^2)^n}{c_2(R/m^2)^n + 1}, \quad (3.25)$$

onde m é uma escala de massa que é função da constante gravitacional Newtoniana e da densidade média medida hoje:

$$m^2 \equiv \frac{\kappa^2 \bar{\rho}_0}{3},$$

onde $\bar{\rho}_0$ é a densidade média do Universo medida hoje. Os parâmetros c_1 e c_2 são parâmetros adimensionais da teoria. As restrições sobre os parâmetros, de tal maneira que Λ CDM seja reobtido e as restrições sejam cumpridas, são que $n > 0$ e

$$\frac{c_1}{c_2} \approx 6 \frac{\tilde{\Omega}_\Lambda}{\tilde{\Omega}_m},$$

onde $\tilde{\Omega}_\Lambda$ e $\tilde{\Omega}_m$ são definidos em função da densidade crítica e o parâmetro de Hubble obtidos *a partir da $f(R)$* , uma vez que a equação (2.29) não é a mesma para um modelo diferente, e os parâmetros de densidade não possuem a mesma definição. O modelo possui dois parâmetros livres: a razão c_1/c_2^2 , que ajusta a proximidade com Λ CDM, e n , que ajusta o limite dessa proximidade [HS07].

O modelo de Hu-Sawicki ainda é favorecido pelas observações e é considerado um modelo realístico de $f(R)$ [HAF19, CFPS12].

3.4.2 Modelo Exponencial

Existem diferentes modelos de gravidade $f(R)$ onde a principal função em R é uma combinação ou razão de funções da forma $\exp(-\alpha R)$, onde α é uma constante. Um modelo viável e ainda estudado [CGLY19, JSP12, CSSA11] é o modelo em que $f(R)$ é da forma

$$f(R) = R - \lambda R_{ch} (1 - e^{-\frac{R}{R_{ch}}}), \quad (3.26)$$

onde, do limite em que $f(R)$ deve resgatar a ação da RG + Λ , obtemos que o parâmetro R_{ch} , chamado de **R característico**, é da ordem da constante cosmológica observada

$$R_{ch} \sim \Lambda_{obs}/\lambda. \quad (3.27)$$

Com essa restrição, este modelo de $f(R)$ possui apenas um parâmetro para ajuste: λ , que está relacionado à constante cosmológica observada pela relação (3.27). Isso não quer dizer que a teoria possui menos parâmetros livres que ΛCDM , uma vez que precisamos de Λ_{obs} para vincular λ na equação (3.27).

3.4.3 Modelo de Starobinsky

O modelo de Starobinsky foi introduzido em [Sta07] como um modelo viável que reproduz a aceleração tardia do Universo. Starobinsky já havia proposto modelos $f(R)$, mas no contexto inflacionário [CFPS12], como uma lei de potência $f(R) = R + \alpha R^2$. A função f proposta em [Sta07] é da forma

$$f(R) = R + \lambda R_{ch} \left(\left(1 + \frac{R^2}{R_{ch}^2} \right)^{-n} - 1 \right). \quad (3.28)$$

Os parâmetros desta $f(R)$ possuem uma função e interpretação semelhante aos parâmetros de (3.26), mas como vamos nos aprofundar neste modelo, é interessante analisarmos mais minuciosamente como vincular cada um dos parâmetros com o que é observado e o que é obtido a partir de ΛCDM .

No limite de altos redshifts, precisamos resgatar a concordância com ΛCDM , que é consolidado neste regime. Num universo FLRW, o valor de R cresce em função do redshift, como podemos ver pela relação

$$R = 6(H^2 + 6H\dot{H}), \quad (3.29)$$

visto que H cresce em função do redshift (pela Lei de Hubble), e \dot{H} é positivo se a derivada for em relação ao redshift. Temos então que se consideramos R_0 da ordem do valor do escalar de Ricci hoje, para redshifts altos, da ordem da última superfície de espalhamento, $R \gg R_0$. Neste limite, temos

$$\lim_{R \gg R_0} f(R) = R + 2\Lambda \implies \Lambda = -\lambda R_{ch}/2,$$

como vemos da forma de $f(R)$ definida em (3.28). Logo, temos que os parâmetros,

assim como no modelo exponencial, se ajustam conforme uma constante cosmológica efetiva observada, a partir de Λ CDM.

O fato de que em $R = 0$ obtemos $f(0) = 0$ mostra que em um espaço-tempo com a ausência total da curvatura R (que é diferente da curvatura K e não-nula mesmo em Λ CDM) a constante cosmológica ou, mais precisamente, seu efeito, desaparece. Entretanto, uma derivada simples mostra que $F'(0) < 0$, e o espaço-tempo puramente plano, isto é, $R = 0$, *não é estável* nesta teoria. Isso não é um problema: basta que a teoria tenha como um limite futuro um espaço-tempo de Sitter em um tempo finito, atingindo esta solução para um valor não-nulo R_1 do escalar de Ricci. A referência [Sta07] mostra então que, para que todas as condições de estabilidade serem satisfeitas

$$F(R) > 0, \quad F'(R) > 0, \quad R \geq R_1, \quad (3.30)$$

o parâmetro λ deve satisfazer $\lambda > 8\sqrt{3}/3$, se assumirmos $n = 1$. Uma análise das propriedades analíticas de $f(R)$ e λ que levam a essas conclusões pode ser encontrada na mesma referência.

Tendo agora um modelo particular escolhido, podemos analisar melhor como se dá a evolução cosmológica a partir das equações de campo (3.17). Diferente de (2.12), H não pode ser escrito como uma função algébrica de R , e agora o que temos é um sistema de equações diferenciais acopladas. Partindo da relação (3.29) e da equação de Friedmann modificada (3.17), temos um sistema de equações diferenciais acopladas:

$$R = 6(H^2 + 6H\dot{H}), \quad (3.31)$$

$$H^2 = F(H\dot{H} + H^2) - \frac{1}{6}f - H^2F'\dot{R} + H^2\Sigma_i\bar{\Omega}_i, \quad (3.32)$$

onde $\Sigma_i\bar{\Omega}_i$ denota a soma sobre os parâmetros de densidade. Onde antes tínhamos apenas uma função a integrar no tempo (H ou a), temos agora duas. Um procedimento introduzido em [HS07] para resolver este par de equações para H e R consiste em definir um novo par de variáveis auxiliares

$$y_H \equiv \frac{H^2}{m^2} - (1+z)^3 - \chi_r(1+z)^4, \quad (3.33)$$

$$y_R \equiv \frac{R}{m^2} - 3(1+z)^3, \quad (3.34)$$

onde $m^2 \equiv \Omega_{m0}H_0^2$, $\chi_r \equiv \Omega_{r0}/\Omega_{m0}$; e reescrever (3.31) e (3.32) como uma equação diferencial de segunda ordem

$$y_H'' + J_1 y_H' + J_2 y_H + J_3 = 0, \quad (3.35)$$

onde os coeficientes J_1 , J_2 e J_3 são dados como em [CGLY19] e $' \equiv a\partial/\partial a$. Notamos que a e z são intercambiáveis como variáveis dinâmicas, a partir da relação (2.28).

A equação (3.35) não possui solução analítica, e para obter a evolução de $H(z)$ (ou de $R(z)$) é necessário realizar uma integração numérica. A figura 3.1 mostra um exemplo desta integração para o modelo de Starobinsky, com os parâmetro $n = 1$ e $\lambda^{-1} = 0.28$ [CGLY19].

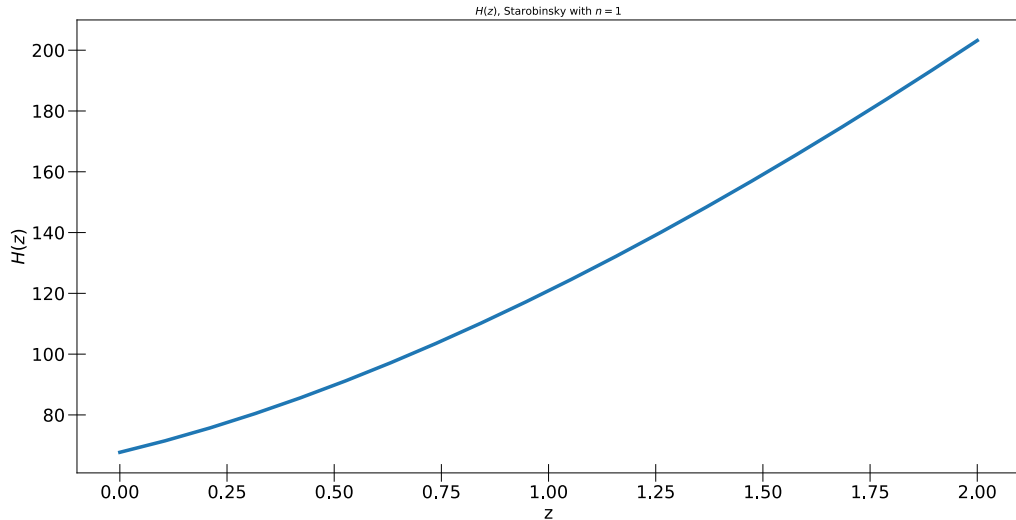


Figura 3.1: Plot da integração numérica de $H(z)$ a partir da equação (3.35). Se a linha para Λ CDM fosse incluída, as curvas acabariam se sobrepondo. Aqui utilizamos $\Omega_m = 0.306$, $\Omega_\Lambda = 0.694$ e $H_0 = 67.8 \text{ km/s/Mpc}$

No regime do *background*, isto é, quando não introduzimos perturbações à métrica ou calculamos ordens superiores de perturbação, os modelos de $f(R)$ não se distinguem de Λ CDM. A curva na figura 3.1 se sobreposta à mesma curva para Λ CDM praticamente não apresentaria diferenças e, frente às observações de $H(z)$ que temos hoje, o modelo $f(R)$ seria capaz apenas de reproduzir o modelo de concordância [HKB⁺15]. Como veremos, para investigar as possíveis divergências entre os modelos, é necessário estudá-los no *regime perturbativo*. Neste regime, diferente de Λ CDM, as escalas influenciam a magnitude com que o potencial gravitacional Φ media a interação gravitacional, e isso pode ser associado a um observável cosmológico como a *função de crescimento*, e observado no efeito ISW.

Com esta motivação e para realizarmos esta análise, primeiro precisamos desenvolver a teoria de perturbações cosmológicas.

Capítulo 4

Teoria de Perturbações Cosmológicas

Para que possam haver estruturas como galáxias e aglomerados, não é possível tratar da estrutura do Universo apenas com a métrica FLRW. É necessário também, para que o modelo descreva as observações, o desenvolvimento de uma **Teoria de Perturbações** para a Cosmologia. A existência de anisotropias na estrutura em larga escala e das flutuações de temperatura na RCF está diretamente ligada à perturbação do *background* cosmológico, como veremos a seguir.

Para obter o espectro de potência do Efeito ISW, e sua evolução no tempo, primeiro precisamos desenvolver o formalismo da Teoria de Perturbações Cosmológicas. O primeiro passo é postular uma métrica e um tensor de energia-momento para o *background* do Universo, que neste caso é descrito pela métrica FLRW e um fluido perfeito (homogêneo, isotrópico, sem condução de calor ou viscosidade e sem vorticidade). Depois, perturbamos a métrica e parametrizamos essa perturbação por quantidades invariantes por **calibre**, obtendo potenciais escalares que descrevem como essas perturbações evoluem. Essas quantidades, conhecidas como **Potenciais de Bardeen** denotados Ψ e Φ , foram primeiro introduzidas por Bardeen [Bar80] e são uma maneira conveniente de estudar perturbações em calibres distintos, simplificando substancialmente os cálculos.

Aqui será seguido em grande parte a metodologia de Durrer ([Dur08]) e [Pug17], com algumas elaborações em relação ao Efeito ISW e abreviações quando necessário.

4.1 Perturbações FRelativísticas

Partimos da métrica FLRW (2.7), com a assinatura $(-, +, +, +)$

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t)[\gamma_{ij}dx^i dx^j],$$

onde γ_{ij} é a métrica de curvatura constante da 3-variedade espacial. Se realizarmos uma mudança de coordenadas para tempo conforme, definida por $d\eta \equiv a(t)^{-1}dt$, e mantivermos a forma compacta da 3-métrica, obtemos a métrica FLRW do *background* em tempo conforme

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = a(\eta)^2[-d\eta^2 + \gamma_{ij}dx^i dx^j], \quad (4.1)$$

Esta será a métrica do *background* que perturbaremos para obter nossas equações de perturbação.

O componente material do nosso Universo será, seguindo o modelo FLRW, um fluido perfeito, resultando no mesmo tensor de energia-momento que (2.8), mas agora considerando a densidade e pressão médias

$$T_{\mu\nu} = -(\bar{\rho} + \bar{p})u_\mu u_\nu + \bar{p}g_{\mu\nu},$$

onde a barra denota que estamos tratando da densidade e pressão médias do Universo, $\bar{\rho}$, \bar{p} , respectivamente.

O próximo procedimento é introduzir perturbações na métrica e no tensor de energia-momento em **primeira ordem**, isto é, perturbações que envolvem até a primeira derivada das quantidades perturbadas, e assumiremos a partir daqui que todas as perturbações são desenvolvidas também até primeira ordem. A métrica total é então

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad \frac{|h_{\mu\nu}|}{|g_{\mu\nu}|} \ll 1, \quad (4.2a)$$

$$T_{\mu\nu} = \bar{T}_{\mu\nu} + \theta_{\mu\nu}, \quad \frac{|\theta_{\mu\nu}|}{\bar{\rho}} \ll 1, \quad (4.2b)$$

onde $\bar{g}_{\mu\nu}$ e $\bar{T}_{\mu\nu}$ são os tensores do *background* descritos acima. Semelhantemente a como campos vetoriais limitados e suaves podem ser decompostos pelo Teorema da Decomposição de Helmholtz [Kob86], um 2-campo tensorial $A_{\mu\nu}$ suave e limitado ou, equivalentemente, obedecendo à condição acima $|\theta_{\mu\nu}| \ll \bar{\rho}$ pode ser decomposto pelo Teorema da Decomposição Escalar-Tensor-Vetor (EVT), que generaliza o Teorema de Helmholtz. O primeiro tratamento de tal decomposição é devido a Lifshitz [Lif46], e uma demonstração rigorosa desse Teorema para espaço-tempos suaves pode ser encontrada em [Str97].

Passando ao Espaço de Fourier, pois na sequência será mais prático tratarmos de modos \mathbf{k} no lugar de amplitudes \vec{x} , usamos a Decomposição EVT para parametrizar os tensores $g_{\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu}$ em componentes escalar, tensorial e vetorial. Aqui trabalharemos apenas com perturbações escalares, que dão origem ao efeito ISW,

mas é necessário escrever o tensor métrico em relação a todos os modos de perturbação. As perturbações podem ser escritas em termos de elementos do espaço de autofunções Q do operador Laplaciano Δ , soluções da Equação de Helmholtz

$$\Delta Q^{(s,v,t)} = -k^2 Q,$$

onde o superíndice (s, v, t) denota perturbações escalares, vetoriais e tensoriais, respectivamente. Uma autofunção dessa equação satisfaz, como no caso escalar, uma decomposição em tensores mais simples, simétricos. No caso vetorial, em componentes irrotacionais e de divergência nula. Aqui, como dito, faremos uso apenas dos componentes escalares, e os termos da métrica perturbada que se transformam como vetor e tensor podem ser obtidos a partir da decomposição dos componentes escalares pelas seguintes equações que definem quantidades covariantes

$$Q_i^{(0)} \equiv -\frac{1}{k} Q_{|i}^{(0)}, \quad (4.3)$$

$$Q_{ij}^{(0)} \equiv \frac{1}{k^2} Q_{|ij}^{(0)} + \frac{1}{3} \gamma_{ij} Q^{(0)}, \quad (4.4)$$

onde $Q^{(0)}$ é a parametrização da perturbação escalar, e a barra $|$ denota uma derivada covariante no subespaço de curvatura constante. Agora podemos finalmente escrever a métrica em termos dessas quantidades

$$g_{00} = -a^2(\eta)[1 + A(\eta)Q^{(0)}], \quad (4.5a)$$

$$g_{i0} = -a^2(\eta)B(\eta)Q_i^{(0)}, \quad (4.5b)$$

$$g_{ij} = a^2[1 + 2H_L(\eta)Q^{(0)}]\gamma_{ij} + 2H_T(\eta)Q_{ij}^{(0)}. \quad (4.5c)$$

Os termos $A(\eta)$, $B(\eta)$, $H_L(\eta)$ and $H_T(\eta)$ podem ser interpretados fisicamente, mas como faremos a escolha de um calibre, deixamos a questão da interpretação após a construção das quantidades invariantes por calibre (neste caso, os potenciais de Bardeen). A decomposição das perturbações vetoriais e tensoriais pode ser obtida de maneira semelhante e uma melhor explicação dessas decomposições podem ser encontrada em [Dur08] e [Pug17].

Vamos definir agora o 4-vetor de velocidade u^μ como a velocidade no referencial em repouso, ortogonal às 3-hipersuperfícies formadas pela evolução temporal. A velocidade satisfaz então à identidade $T_\nu^\mu u^\nu = -\rho u^\mu$ e a condição de normalização $u^\mu u_\mu = -1$, o que nos leva aos componentes do vetor dados por

$$u^0 = \frac{1}{a}(1 - A(\eta)Q^{(0)}), \quad u^i \equiv \frac{1}{a}vQ^{(0)i}, \quad (4.6)$$

em primeira ordem em $A(\eta)$ na componente temporal. A 3-velocidade é definida como um escalar v vezes o vetor da base em relação aos componentes $Q^{(0)i}$.

O tensor energia-momento é então escrito como

$$T_0^0 = -\bar{\rho}[1 + \delta(\eta)Q^{(0)}], \quad (4.7a)$$

$$T_j^i = \bar{p}[(1 + \pi_L(\eta)Q^{(0)})\delta_j^i + \pi_T(\eta)Q_j^{(0)}], \quad (4.7b)$$

$$T_i^0 = (\bar{\rho} + \bar{p})(v - B)Q_i^{(0)}, \quad (4.7c)$$

$$T_0^i = -(\bar{\rho} + \bar{p})vQ^{i(0)}. \quad (4.7d)$$

Os parâmetros π_L e π_T são melhor explicados fisicamente: eles são a amplitude das perturbações anisotrópicas e isotrópicas, respectivamente. Isso é facilmente visualizado no caso em que $\pi_L = \pi_T = 0$, onde o tensor se reduz ao tensor energia-momento do *background*, com a amplitude da perturbação de densidade dada por $\delta\rho(\eta)$. Os dois últimos componentes do tensor energia-momento perturbado, que se transformam como vetor e co-vetor respectivamente, são obtidos passando-se do referencial de repouso da velocidade v_i para o referencial de coordenadas.

4.2 Calibre Conforme e Perturbações Invariantes

A RG é uma teoria covariante, e qualquer modelo cosmológico derivado das suas equações também deve ser covariante. Isso significa que existe liberdade em escolher um sistema de coordenadas, e um sistema de coordenadas adequado pode simplificar o cálculo e auxiliar na melhor compreensão de quantidades com significado físico de um dado modelo, principalmente em teoria da perturbação. Quando se parametriza uma métrica, como há liberdade de escolha de coordenadas, graus de liberdade ficam livres. A restrição desses graus de liberdade significa a escolha de um calibre. Matematicamente, um calibre é um difeomorfismo que induz uma mudança de coordenadas entre variedades espaço-temporais. No caso em que estamos tratando, temos uma mudança de coordenadas entre o Universo do *background* e o Universo perturbado. Uma explicação e formalização da escolha de calibres é encontrada nas referências [Dur08, Pug17].

Nosso interesse principal agora é em encontrar quantidades invariantes por calibre, com significado físico, que simplifiquem o estudo das perturbações. Essas quantidades foram desenvolvidas e calculadas por James Bardeen na referência [Bar80]. Uma elaboração do significado dessas quantidades, sua obtenção e uma demonstração de sua invariância por calibre podem ser encontradas na mesma referência. Aqui vamos assumir todo esse trabalho e partir da definição dessas quantidades, os potenciais que no calibre **Newtoniano** ou **Conforme**, se comportam como poten-

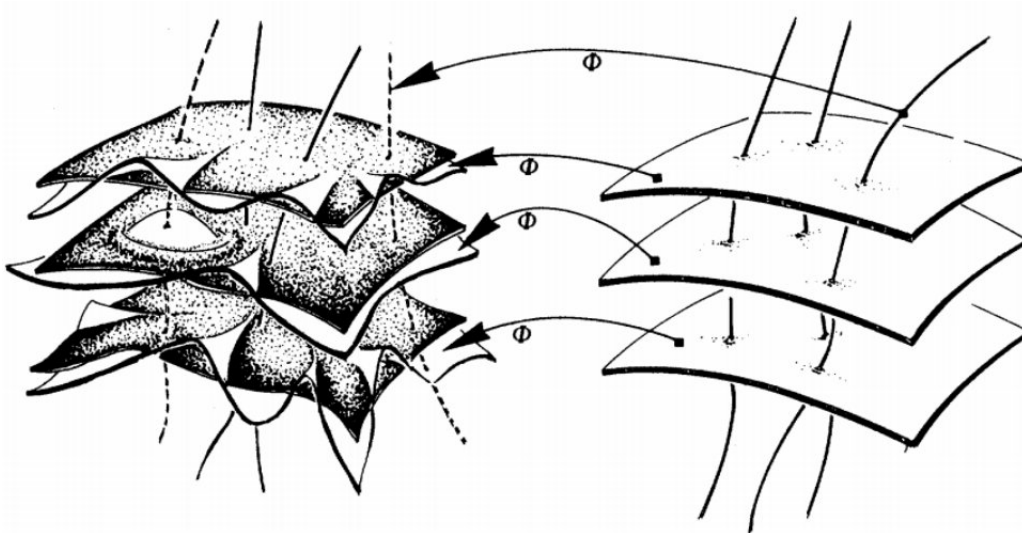


Figura 4.1: A imposição de um calibre vem da escolha de um morfismo Φ que define uma mudança de coordenadas. Obtido de [Pug17]

ciais Newtonianos no limite de campo fraco

$$\Psi \equiv A + \frac{1}{k}\dot{B} + \frac{1}{k}\mathcal{H}B - \frac{1}{k^2}(\ddot{H}_T + \mathcal{H}\dot{H}_T), \quad (4.8)$$

$$\Phi \equiv H_L + \frac{1}{3}H_T + \frac{1}{k}\mathcal{H}B - \frac{1}{k^2}\mathcal{H}\dot{H}_T. \quad (4.9)$$

Ψ e Φ são os chamados **Potenciais de Bardeen**. Como reiterado, esses potenciais têm a propriedade de serem invariantes por calibre, e dependerem apenas das amplitudes das perturbações e suas derivadas. Sendo escritos em função apenas dos parâmetros escalares das perturbações, os potenciais são grandezas escalares. O ponto representa uma derivada em relação ao tempo conforme η , e \mathcal{H} é o parâmetro de Hubble conforme.

Podemos também definir quantidades do tensor energia-momento perturbado que podem ser interpretados como velocidade e perturbação de densidade invariantes por calibre. Essas quantidades serão úteis nas equações de movimento perturbadas. Elas são definidas da seguinte maneira

$$V \equiv v - \frac{1}{k}\dot{H}_T, \quad (4.10a)$$

$$D_g \equiv \delta - 3(1+w)\Phi, \quad (4.10b)$$

onde w é o parâmetro da equação de estado do fluido.

Tendo em mãos os potenciais, quantidades invariantes por calibre, podemos agora impor um calibre que simplificará as equações. Utilizaremos o calibre Newtoniano

(também conhecido como conforme ou **longitudinal**). Neste calibre, restringimos dois graus de liberdade, o que resulta em $B|_{newt} = H_T|_{newt} = 0$, e a métrica tem a propriedade de ser diagonal. A métrica perturbada então se escreve como

$$g_{\mu\nu} = a^2(\eta)[-(1 + 2\Psi)d\eta^2 + (1 - 2\Phi)\gamma_{ij}dx^i dx^j], \quad (4.11)$$

e a perturbação da 3-velocidade acaba por ser apenas v .

Agora podemos obter algumas relações e equações entre as variáveis perturbadas, de tal modo a melhor entender como as perturbações evoluem. O objetivo fundamental é entender como a perturbação de densidade de matéria está relacionada com os potenciais de Bardeen, que agora chamaremos de potenciais Newtonianos. Como veremos, a evolução temporal dos potenciais Newtonianos é responsável pela existência do efeito ISW. Das equações de Einstein perturbadas podemos obter uma relação semelhante à equação de Poisson perturbada para um fluido perfeito, que coincide com a própria equação de Poisson no limite não-relativístico.

As equações de Einstein perturbadas $\delta G_{\mu\nu} = 8\pi G\delta T_{\mu\nu}$ relacionadas às quantidades escalares levam às equações que relacionam as quantidades perturbadas, já no espaço de frequências

$$4\pi G a^2 \rho \left(D_g + 3(1 + w)\left[\Phi + \frac{\mathcal{H}V}{k}\right] \right) = -(k^2 - 3K)\Phi, \quad (4.12a)$$

$$4\pi G a^2 (\rho + p)V = k(\mathcal{H}\Psi + \dot{\Phi}), \quad (4.12b)$$

$$k^2(\Phi - \Psi) = 8\pi G a^2 P\Pi^{(s)}, \quad (4.12c)$$

enquanto as equações de conservação de energia-momento $T_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$ levam às equações

$$\dot{D}_g + (3c_s^2 - w)\mathcal{H}D_g + (1 + w)kV + 3w\mathcal{H}\Gamma = 0, \quad (4.13a)$$

$$\dot{V} + \mathcal{H}(1 - 3c_s^2)V = k(\Psi + c_s^2\Phi) + \frac{c_s^2 k}{1 + w}D_g + \frac{wk}{1 + w} \left[\Gamma - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{3K}{k^2}\right)\Pi^{(s)} \right], \quad (4.13b)$$

onde as variáveis $\Pi^{(s)}$, K e Γ representam a parte anisotrópica do tensor energia-momento perturbado (componente escalar de δT_j^i), a curvatura escalar do 3-espaco, e $\Gamma = \pi_L - \frac{c_s^2}{w}\delta$, onde π_L é o componente anisotrópico do tensor de energia-momento projetado nas 3-hipersuperfícies definidas pela direção do 3-vetor de velocidade u^i (definido como parâmetro nas perturbações do tensor energia-momento), e $c_s = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ é a velocidade do som no meio.

Assumindo um Universo plano, em concordância com o modelo Λ CDM, tomamos $K = 0$, e a equação (4.12a) pode ser reescrita da forma familiar

$$\Phi = 4\pi G \frac{a^2}{k^2} \rho \left(\delta + \frac{\mathcal{H}V}{k} \right), \quad (4.14)$$

que, no limite de sub-horizonte ($a\mathcal{H}/k \ll 1$), resgata a **Equação de Poisson** para uma perturbação δ da densidade de matéria, no regime Newtoniano

$$\boxed{\Phi = \frac{4\pi G \rho a^2 \delta}{k^2}}. \quad (4.15)$$

Em eras recentes e em pequenas escalas a aproximação de sub-horizonte é válida e, como veremos, este é o caso em que vale a influência dos potenciais para a integral da linha de visada que resulta na existência do efeito ISW tardio.

4.3 Limite Newtoniano das Perturbações

Nos atentemos agora na evolução da perturbação de densidade $\delta(\eta)$. Semelhantemente a como obtemos um análogo para a equação de Poisson, aqui obteremos um análogo da evolução das perturbações num campo gravitacional Newtoniano clássico; mas resgataremos também o tratamento Newtoniano para um *background* em expansão, fazendo um paralelo entre os dois casos. Nas escalas em que estamos tratando (aproximação sub-horizonte) o tratamento puramente Newtoniano para um *background* em expansão é uma excelente aproximação. Partindo das equações de conservação (4.13a) e (4.13b), e utilizando a equação (4.12b), obtemos as equações de evolução para o par de variáveis (D, V)

$$\dot{D} - 3w\mathcal{H}D = - \left(1 - \frac{3K}{k^2} \right) [(1+w)kV + 2\mathcal{H}w\Pi], \quad (4.16a)$$

$$\dot{V} + \mathcal{H}V = k \left[\Psi + \frac{c_s^2}{1+w}D + \frac{w}{1+w}\Gamma - \frac{2}{3} \left(1 - \frac{3K}{k^2} \right) \frac{w}{1+w}\Pi \right], \quad (4.16b)$$

onde a variável D é uma quantidade associada à perturbação de densidade, invariante por calibre e definida por $D = D_g + 3(1+w)[\Phi + \frac{\mathcal{H}V}{k}]$. Todas essas equações, após substituições algébricas levam à equação de evolução da perturbação de densidade

$$\begin{aligned} \ddot{D} + (1+3c_s^2-6w)\mathcal{H}\dot{D} + \left[\left(\frac{9}{2}w^2 - 12w + 9c_s^2 - \frac{3}{2} \right) \mathcal{H}^2 + \frac{3}{2}(3w^2-1)K + (k^2-3K)c_s^2 \right] D \\ = -(k^2-3K)w\Gamma - 2 \left(1 - \frac{3K}{k^2} \right) \mathcal{H}w\Pi \\ + 2 \left[(3w^2+3c_s^2-2w)\mathcal{H}^2 + w(3w+2)K + \frac{k^2-3K}{3}w \right] \left(1 - \frac{3K}{k^2} \right) \Pi. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Por ora guardemos esta equação e demonstremos como o desenvolvimento de perturbações no regime Newtoniano é uma aproximação para este regime. Vamos partir das equações de hidrodinâmica básicas para um fluido incompressível (em um *background* em expansão). O procedimento que vamos seguir para este tratamento é em grande parte baseado na referência [CL95]. Vamos assumir que o fluido cosmológico não possui viscosidade, termos dissipativos de origem termal (ou de qualquer origem) e que as perturbações são adiabáticas. Como no regime relativístico, estas propriedades são satisfeitas por matéria bariônica e escura. Qualquer tratamento relativístico para um tensor energia-momento de um fluido com essas propriedades, como o que foi feito até agora, pode ser aproximado pelo tratamento Newtoniano. As equações para tal fluido no regime estático são as seguintes

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0, \quad (4.18a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla \mathbf{p} + \nabla \phi = 0, \quad (4.18b)$$

$$\nabla^2 \phi - 4\pi G \rho = 0, \quad (4.18c)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s = 0, \quad (4.18d)$$

que são as equações de **continuidade**, **Euler**, **Poisson** e **conservação de entropia**. Introduzindo um fluido do *background* homogêneo, isotrópico e em expansão, nossas variáveis não perturbadas são dadas por

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^3,$$

$$\mathbf{v} = \frac{\dot{a}}{a} \mathbf{r},$$

$$\phi = \frac{2}{3} \pi G \rho r^2,$$

$$p = p(\rho, S),$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = 0.$$

A lei de Hubble está implícita na definição da velocidade \mathbf{v} do fluido, e a homogeneidade e isotropia nas definições de densidade e potencial.

Vamos agora introduzir perturbações δ e expandir as variáveis em primeira ordem. Após um processo simples de substituição, obtemos finalmente as equações

para as quantidades perturbadas

$$\dot{\delta\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\delta\rho + \frac{\dot{a}}{a}(\mathbf{r} \cdot \nabla)\delta\rho + \rho(\nabla \cdot \delta\mathbf{v}) = 0, \quad (4.19a)$$

$$\dot{\delta\mathbf{v}} + \frac{\dot{a}}{a}\delta\mathbf{v} + \frac{\dot{a}}{a}(\mathbf{r} \cdot \nabla)\delta\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla\delta p - \nabla\delta\phi, \quad (4.19b)$$

$$\nabla^2\delta\phi - 4\pi G\delta\rho = 0, \quad (4.19c)$$

$$\dot{\delta s} + \frac{\dot{a}}{a}(\mathbf{r} \cdot \nabla)\delta s = 0, \quad (4.19d)$$

onde o ponto denota derivada parcial em relação ao tempo (neste caso o tempo não é conforme, o que sequer faria sentido num tratamento não-relativístico). Passando ao espaço de frequências \mathbf{k} por uma transformada de Fourier, definindo $D \equiv \rho(a)\delta(t)$ e denotando Σ , Φ e \mathbf{V} a amplitude das perturbações de entropia, potencial e velocidade neste espaço, obtemos finalmente o análogo Newtoniano das expressões para as quantidades perturbadas

$$\dot{D} + 3\frac{\dot{a}}{a}D + i\rho\mathbf{k} \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (4.20a)$$

$$\dot{\mathbf{V}} + \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{V} + iv_s^2\mathbf{k}\frac{D}{\rho} + i\frac{\mathbf{k}}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho \Sigma + i\mathbf{k}\Phi = 0, \quad (4.20b)$$

$$k^2\Phi + 4\pi GD = 0, \quad (4.20c)$$

$$\dot{\Sigma} = 0. \quad (4.20d)$$

Os casos em que $\Sigma = 0$ e $\mathbf{V} = V\mathbf{k}$ são de maior interesse, pois são os casos em que as perturbações são adiabáticas e a perturbação de velocidade \mathbf{V} é paralela ao vetor de onda \mathbf{k} (o que significa que a propagação das perturbações se dá como a de uma onda longitudinal), que é o comportamento que mais se assemelha ao encontrado nas observações da RCF [Dur08, Bra04]. De fato, este é o comportamento das perturbações para um fluido constituído puramente de matéria não-relativística. Neste caso, nossas equações (4.20a) e (4.20b) se reduzem a

$$\dot{D} + 3\frac{\dot{a}}{a}D + i\rho kV = 0, \quad (4.21a)$$

$$\dot{V} + \frac{\dot{a}}{a}V + ik\left(v_s^2k - \frac{4\pi G\rho}{k^2}\right)\frac{D}{\rho} = 0, \quad (4.21b)$$

utilizando que $D = \rho\delta$ e a definição de ρ , temos

$$\rho\dot{\delta} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho\delta + i\rho\delta kV = \dot{\delta} + ikV = 0, \quad (4.22)$$

derivando $\dot{\delta} + ikV$ e utilizando que $k = k_0 \frac{a_0}{a}$

$$\ddot{\delta} + ik \left(\dot{V} - \frac{\dot{a}}{a} V \right) = 0,$$

e substituindo \dot{V} e V usando (4.21b), podemos escrever

$$\boxed{\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} + (v_s^2 k^2 - 4\pi G\rho)\delta = 0,} \quad (4.23)$$

que é a equação que nos dá a evolução do contraste de densidade δ para um Universo em expansão e com componentes de matéria bariônica.

Resgatemos agora a equação (4.17). Temos que, para um Universo como o desenvolvido até agora no regime Newtoniano, os parâmetros perturbativos no regime relativístico são tais que $w = K = \Gamma = \Pi = 0$. Com essas condições em mãos, obtemos, que a equação (4.17) vira

$$\ddot{D} + (1 + 3c_s^2)\mathcal{H}\dot{D} + \left[(9c_s^2 - \frac{3}{2})\mathcal{H}^2 + k^2 c_s^2 \right] D = 0. \quad (4.24)$$

Usando que $c_s = v_s$ e a identidade $4\pi G a^2 \rho(1 + w) = \mathcal{H}^2 - \dot{\mathcal{H}} + K$ na equação (4.24), obtida das equações de Friedmann para as perturbações, e no limite de sub-horizonte, podemos escrever, dado que $D = \delta(\eta) + \frac{3\mathcal{H}V}{k}$

$$\boxed{\ddot{\delta} + (1 + 3v_s^2)\mathcal{H}\dot{\delta} + \left[v_s^2 k^2 + (9v_s^2 - \frac{3}{2})4\pi G a^2 \rho \right] \delta = 0,} \quad (4.25)$$

que se assemelha à equação (4.23). No caso relativístico temos termos extras nos coeficientes da equação diferencial o que, no caso de pequenas escalas $k \gg 1$, se reduzem a constantes multiplicativas.

Soluções da equação (4.23) (ou da equação (4.25)) podem ser separadas em modos crescente e decrescente δ_+ e δ_- . As soluções crescentes determinam como a matéria se aglomera e forma no Universo. Disso podemos definir uma função importante para determinar e associar vários observáveis cosmológicos à evolução da matéria no Universo. Definimos a chamada **Função de Crescimento** ou **Fator de Crescimento**, denotada por $f(z)$ da seguinte maneira

$$f(z) \equiv \frac{d \log \delta_+}{d \log a}, \quad a = (z + 1)^{-1}. \quad (4.26)$$

Esta função é importante na distinção de diferentes modelos de gravidade em escalas cosmológicas, dado que, diferente da RG e de Λ CDM, ela depende da escala k em que se está lidando com as perturbações, como veremos adiante.

4.4 Perturbações Cosmológicas em $f(R)$

Na intenção de utilizar os observáveis cosmológicos derivados a partir da teoria de perturbações para a comparação de diferentes modelos cosmológicos, precisamos entender como as quantidades perturbadas diferem do obtido até agora a partir da RG, em relação ao modelo $f(R)$ que utilizamos. Como dito na seção 3.4.3, certos observáveis que dependem apenas do *background* cosmológico, i.e., quantidades obtidas puramente a partir da métrica FLRW, são praticamente indistinguíveis entre a RG e a teoria $f(R)$.

O efeito ISW, que é objetivo final da nossa análise da teoria perturbativa, está diretamente ligado ao potencial gravitacional dado pela equação (4.15). A equação de Poisson relaciona a constante fundamental G ao potencial Φ e a perturbação de densidade $\delta\rho$. Como comentado na seção 3.2.2, podemos incluir na constante gravitacional G a influência da existência de termos que surgem devido às alterações nas equações de campo da RG. Esta nova constante gravitacional não será constante, mas considerada como uma *constante gravitacional efetiva*, que evolui com o tempo. Na seção 3.4.3 realizamos um pequeno raciocínio heurístico para entender como isso poderia acontecer, agora obteremos de fato a constante efetiva G_{eff} utilizando a teoria da perturbação para a teoria $f(R)$.

Em grande parte o tratamento perturbativo para as teorias alternativas segue o mesmo roteiro que o feito para a RG, desde a métrica perturbada (4.2b) até a utilização do calibre Newtoniano e a métrica diagonal (4.11). De fato, como perturbamos. Com a semelhança entre o desenvolvimento das equações, aqui postularemos apenas as equações de campo modificadas perturbadas dadas em [Tsu07], e seguiremos a mesma referência para os equivalentes das equações (4.15), (4.23) e (4.25).

Partimos das equações de campo perturbadas para $f(R)$

$$3H(\dot{\Psi} + H\Phi) + \frac{k^2}{a^2}\Psi + \frac{1}{2F}[-3H\delta\dot{F} + (3H^2 + 3\dot{H} - \frac{k^2}{a^2})\delta F + 3\dot{F}(\dot{\Psi} + H\Phi) + 3H\dot{F}\Phi + \delta\rho] = 0, \quad (4.27)$$

$$\Psi = \Phi + \frac{\delta F}{F}, \quad (4.28)$$

$$\delta\dot{\rho}_m + 3H\delta\rho = \rho(3\dot{\Psi} - \frac{k^2}{a}v), \quad (4.29)$$

$$\dot{v} + Hv = \frac{1}{a}\Phi, \quad (4.30)$$

e, definindo a perturbação $\delta \equiv \frac{\delta\rho}{\rho} + 3Hav_m$ invariante por calibre, que coincide com (4.10b), as equações se escrevem como

$$\dot{\delta} = -\frac{k^2}{a^2}v + 3(\Psi + 3Hav), \quad (4.31)$$

$$(\dot{av}_m) = \Phi, \quad (4.32)$$

que são análogas às equações (4.21a) e (4.21b). Pela mesma manipulação utilizada para obter (4.23), podemos escrever então

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} + \frac{k^2}{a^2}\Phi = 3\ddot{B} + 6H\dot{B}, \quad (4.33)$$

onde $B \equiv \Psi + Hav$. Na aproximação de sub-horizonte, que utilizamos extensamente até agora, os termos com os fatores k^2 e δ são dominantes, e podemos negligenciar os termos em B [Tsu07]. A equação (4.23) se torna, por essa aproximação

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} + \frac{k^2}{a^2}\Phi = 0, \quad (4.34)$$

que é o análogo da equação (4.23). De fato, se utilizarmos que o potencial Φ é dado pela equação de Poisson para a RG (4.15), as equações são idênticas com exceção do termo v . Não sendo este o caso, precisamos reobter Φ a partir das equações de perturbação modificadas (4.30).

Das equações (4.27) e (4.28), utilizando a chamada **aproximação quase-estática**, onde $\dot{F} \approx 0$ e $\dot{H} \approx 0$ podemos escrever

$$\frac{k^2}{a^2}\Phi = -\frac{k^2}{2a^2}\frac{\delta F}{F} - \frac{1}{2F}\delta\rho_m \quad (4.35)$$

Abrindo as perturbações δF e δR ($\delta F = F_{,R}\delta R$) em (4.35), elaboradas em [Tsu07] no limite de sub-horizonte, obtemos

$$\Phi = -\frac{a^2}{k^2}\frac{\rho}{2F}\frac{1 + 4\frac{k^2}{a^2}\frac{F'}{F}}{1 + 3\frac{k^2}{a^2}\frac{F'}{F}}. \quad (4.36)$$

Inserindo o resultado na equação (4.34), obtemos a equação de evolução para as perturbações no modelo $f(R)$

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - 4\pi G_{\text{eff}}\rho\delta = 0, \quad (4.37)$$

onde finalmente vemos a evolução do potencial diferente da RG dada pelos termos adicionais em F incluídos em G_{eff}

$$G_{\text{eff}} \equiv \frac{G_N}{8\pi F} \frac{1 + 4\frac{k^2}{a^2}\frac{F'}{F}}{1 + 3\frac{k^2}{a^2}\frac{F'}{F}}, \quad (4.38)$$

onde G_N é a constante gravitacional Newtoniana usual, como usada até aqui e

derivada do fator $2\kappa^2$ na ação. Se definirmos o parâmetro

$$m \equiv \frac{RF_{,R}}{F}, \quad (4.39)$$

ele pode ser usado para caracterizar o desvio da teoria em relação a Λ CDM, visto que no caso $m = 0$ resgatamos o limite perturbativo para Λ CDM e $G_{\text{eff}} = G_N$. Com este novo parâmetro, podemos reescrever (4.38) como

$$G_{\text{eff}} = \frac{G_N}{8\pi F} \frac{1 + 4\frac{k^2}{a^2 R} m}{1 + 3\frac{k^2}{a^2 R} m} \quad (4.40)$$

que nos auxilia na investigação dos limites da divergência entre nossa teoria e Λ CDM.

A existência de um termo dependente de k em G_{eff} mostra uma das diferenças fundamentais entre modelos que possuem funções não triviais do escalar R : a escala k da perturbação de densidade δ altera a sua evolução. De fato, a função de crescimento (4.26) pode ser aproximada por uma bem conhecida [CL95] fórmula no modelo Λ CDM

$$f(\Omega_m) \approx \Omega_m^{0.6} + \frac{\Omega_\Lambda}{70} \left(1 + \frac{1}{2}\Omega_m\right), \quad (4.41)$$

o que não acontece no caso em que δ , e conseqüentemente f , depende da escala das perturbações. Nas tentativas de se construir um ajuste, é necessário que haja a dependência em k ou não é possível realizar uma boa aproximação [MP19, GMP09].

Com as ferramentas da teoria de perturbações para os modelos diferentes em mãos, podemos agora derivar o efeito ISW e os observáveis relacionados às perturbações de tal maneira a compararmos os diferentes cenários cosmológicos. Para isso precisamos resgatar a física da RCF (seção 2.3.3) e calcular como o caminho de um fóton desde a **última superfície de espalhamento** até sua observação hoje é influenciado pelas perturbações derivadas neste capítulo.

Capítulo 5

O Efeito Sachs-Wolfe Integrado

Quando o Universo tornou-se transparente, isto é, quando a radiação desacoplou-se da matéria, os fótons passaram a mover-se no espaço-tempo perturbado dado pela métrica (4.11). O caminho percorrido desde a época do desacoplamento $z \approx 1100$ até o momento presente $z = 0$ quando os fótons são detectados, obedecendo a equação da geodésica desta métrica, é afetado pelas perturbações contidas no espaço-tempo FLRW perturbado. Essas influências, causadas pelas perturbações, podem ser observadas hoje como efeitos na Radiação Cósmica de Fundo, chamados de **anisotropias**. As anisotropias da RCF permitem que a física da evolução do Universo seja investigada relacionando os observáveis às perturbações obtidas no capítulo passado.

O efeito ISW é uma destas anisotropias, que são flutuações de temperatura observadas hoje na RCF. Para obtermos os observáveis da RCF (fundamentalmente o espectro de potência) primeiramente precisamos obter as quantidades perturbadas na geodésica percorrida pelo fóton, que chamamos de **integral da linha de visada**, que é a integral do caminho que se observa o fóton percorrer.

5.1 Energia de um fóton da RCF

Um fóton segue a geodésica nula de um espaço tempo, dada pela condição métrica

$$ds^2 = 0, \quad (5.1)$$

onde ds é o já definido elemento de linha da métrica. Junto a esta condição métrica, o fóton deve obedecer à **equação da geodésica**

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} = -\Gamma_{\nu\alpha}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\alpha}{d\lambda}, \quad (5.2)$$

onde λ é um parâmetro afim do elemento de linha s cuja curva $x^\mu(s)$ é a **linha de mundo** que o fóton segue. Logo, se o caminho que o fóton percorre no 4-espaço é

dado pela curva parametrizada $x^\mu(s)$, então esta curva deve obedecer (5.2) e $\lambda = \alpha s$, onde α é um fator constante, o que não altera as equações (5.1) e (5.2).

Partindo de uma base geodésica ortonormal formada pelos vetores ortonormais que definem as hipersuperfícies 2.1, definimos o vetor tangente à trajetória do fóton x^μ

$$k^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda},$$

que é acompanhado por uma 4-velocidade u^μ . Introduzimos agora o vetor tangente perturbado, até primeira ordem

$$\tilde{k}^\mu \equiv k^\mu + \delta k^\mu. \quad (5.3)$$

Podemos então calcular a equação geodésica perturbada do fóton na métrica perturbada, dada por

$$\frac{d\tilde{k}^\alpha}{d\lambda} = -\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha \tilde{k}^\mu \tilde{k}^\nu \quad (5.4)$$

onde os símbolos de Christoffel $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha$ são obtidos a partir da componente perturbada da métrica (4.11), e os únicos valores não-nulos são

$$\tilde{\Gamma}_{00}^0 = \Phi', \quad \tilde{\Gamma}_{0i}^0 = \partial_i \Phi, \quad \tilde{\Gamma}_{ij}^0 = -\Psi' \delta_{ij}. \quad (5.5)$$

Nosso objetivo é calcular como a perturbação δk^μ afeta a energia do fóton desde sua emissão em E_i até o momento em que o fóton é observado E_f . Para isso, precisamos medir a energia do fóton perturbado por um observador que o esteja acompanhando. Nossa escolha para um tal observador é óbvia: um observador que acompanha as hipersuperfícies espaciais e possui uma base de velocidades ortonormal nesse sistema de referência. Temos que um tal observador, nas hipersuperfícies da métrica do *background* (2.7) possui um componente de 4-velocidade não perturbado dado por

$$u^\mu = (-1, 0, 0, 0),$$

segundo a construção 2.1. Já no espaço-tempo perturbado dado pela métrica (4.11), utilizando a definição (4.6), temos:

$$u^\mu = a^{-1}(1 - \Phi, v^i), \quad (5.6)$$

onde v^i é o 3-vetor de velocidade das perturbações, definido no capítulo anterior. A energia do fóton medida por um observador comóvel é dada por

$$E = g_{\mu\nu} u^\mu k^\nu. \quad (5.7)$$

Antes de finalmente calcularmos a variação δk^ν no caminho do fóton perturbado, notamos que o fóton e o observador que acompanha as hipersuperfícies do tipo espaço definidas anteriormente *não experienciam a expansão do Universo*. Da maneira que definimos as hipersuperfícies e o observador, o fator de escala $a(\tau)$ não aparece na métrica do observador. Aí que entra o parâmetro afim do intervalo ds : a métrica em expansão (que é a métrica que observamos) $\hat{g}_{\mu\nu}$ e a métrica "estática" (que é a métrica que o observador que acompanha as hipersuperfícies observa) $g_{\mu\nu}$, ambas perturbadas estão relacionadas pelo fator

$$\hat{g}_{\mu\nu} = a^2 g_{\mu\nu}. \quad (5.8)$$

Para não sobrecarregarmos a notação, vamos apenas incluir o fator a^2 quando passarmos de uma métrica para outra, de tal modo que fica implícito que realizamos o passo de uma coordenada para a outra. Pela identidade (5.1), as geodésicas seguidas pelos fótons não são alteradas devido ao fator λ - isto é, dizemos que as geodésicas são **invariantes conformes**.

Em primeira ordem nas quantidades perturbadas (que incluem as conexões perturbadas $\tilde{\Gamma}$), temos que a equação (5.4) para um observador na métrica que não está em expansão, se escreve

$$\frac{d}{d\lambda} \delta k^\alpha = \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha k^\mu k^\nu. \quad (5.9)$$

A componente espacial da perturbação δk^μ não é alterada pelo potencial Φ , de tal modo que as quantidades v_i de (5.6) já são perturbações de primeira ordem [Nis14]. Integrando a parte temporal da perturbação (5.9) e passando à métrica em expansão, obtemos para $\delta \tilde{k}^0$ [Nis14]

$$\frac{\delta k}{a^2} = \frac{\delta k}{a^2} \Big|_{\eta_*} + 2[\Phi(\eta_*) - \Phi(\eta_0)] + \int_{\eta_0}^{\eta_*} (\Phi' + \Psi') d\eta, \quad (5.10)$$

onde o subíndice η_* indica o tempo conforme no momento do desacoplamento, e η_0 na observação.

Pelas equações (5.7), (4.6), e usando o fato que as geodésicas dos fótons são invariantes a menos do fator conforme a^2 , a energia do fóton observado hoje E_f e no desacoplamento E_i obedece a relação [Dur08]

$$\frac{E_f}{E_i} = \frac{(\hat{g}_{\mu\nu} \hat{u}^\mu \hat{k}^\nu)_f}{(\hat{g}_{\mu\nu} \hat{u}^\mu \hat{k}^\nu)_i} = \frac{a_f (g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu)_f}{a_i (g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu)_i}. \quad (5.11)$$

Uma consequência da relação (2.28), de (2.18), e da primeira lei da termo-

dinâmica [Wei08, Dur08] é que a temperatura de um fóton emitido em t_i e absorvido/observado em t_f obedece a relação

$$T_f = \frac{a(t_i)}{a(t_f)} T_i = \frac{a_i}{a_f} T_i. \quad (5.12)$$

A temperatura do fóton emitido no desacoplamento sofre uma perturbação resultante da perturbação δk , que evolui no tempo. Podemos então definir as temperaturas perturbadas no desacoplamento $T_{dec} = T_i + \delta T_i$ e quando observamos $T_0 = T_f + \delta T_f$. A relação (5.12) então nos leva a [Dur08]:

$$\frac{a_i}{a_f} = \frac{T_f}{T_i} = \frac{T_0}{T_{dec}} \left(1 - \frac{\delta T_f}{T_f} + \frac{\delta T_i}{T_i} \right) = \frac{T_0}{T_{dec}} \left(1 - \frac{1}{4} \delta_i^f \right), \quad (5.13)$$

onde usamos que $\rho_r \propto a^{-4} \implies \rho_r \propto T^4$, e que a perturbação da radiação δ_r é em primeira ordem.

Partindo das equações (5.10), (5.13), (5.6) e a métrica perturbada obtemos, para a diferença de energia do fóton perturbado, os passos necessários para se chegar à razão entre as Energias podem ser seguidos em [Dur08, Nis14], levando a

$$\frac{E_f}{E_i} = \frac{T_0}{T_{dec}} \left(1 - \left[\frac{1}{4} \delta_r + v_j k^j + \Psi + \Phi \right]_i^f + \int_i^f (\Psi' + \Phi') d\lambda \right), \quad (5.14)$$

onde v_j é a perturbação de velocidade da matéria bariônica/poeira e δ_r é a perturbação de densidade da matéria relativística/radiação, todas obtidas pelos métodos de primeira ordem do capítulo anterior.

5.2 Anisotropias da RCF

Os fótons liberados na última superfície de espalhamento são hoje observados como uma radiação na frequência das microondas de temperatura média $\approx 2.7K$ [Dur08, Cea18a]. Se o Universo fosse perfeitamente homogêneo e isotrópico, seguindo perfeitamente a métrica (2.7), essa radiação seria perfeitamente homogênea e isotrópica. Um estudo mais aprofundado de questões de gaussianidade e isotropia, pode ser encontrado nas referências [BMRT07, BR10]. Como vimos no capítulo 4 entretanto, é necessário que existam perturbações na métrica para que existam estruturas em larga escala no Universo, como é observado. O resultado dessas perturbações pode ser observado nas **anisotropias da RCF**, que são diferenças da temperatura média observada [BTV06]. As anisotropias secundárias ocorrem pela influência das perturbações no caminho dos fótons derivada na seção 5.1.

Observamos a radiação cósmica de fundo na esfera celeste como uma distribuição quase homogênea e isotrópica na média, como esperado dado o modelo de

concordância e a métrica FLRW. As anisotropias podem ser medidas da seguinte maneira. Dadas as coordenadas esféricas (θ, ϕ) , que representam a visão da esfera celeste, podemos definir a diferença entre a temperatura média da radiação cósmica de fundo em cada ponto a partir da diferença na energia do fóton obtida em (5.14)

$$\frac{\Delta T}{T}(\theta, \phi) \equiv \frac{E_f}{E_i}(\theta, \phi). \quad (5.15)$$

Definindo uma direção de referência (como $(\theta, \phi) = (0, 0)$, ou uma direção cuja temperatura se aproxima da média), e escrevendo os ângulos esféricos como vetores \mathbf{n} , finalmente podemos escrever a diferença de temperatura na esfera devido às anisotropias apenas como a diferença de (5.14) entre dois ângulos distintos no céu:

$$\boxed{\frac{\Delta T}{T}(\mathbf{n}) = v_j n^j(\eta_0) + \left[v_j k^j + \frac{1}{4}\delta_r + \Psi + \Phi \right](\eta_{dec}, \mathbf{x}_{dec}) + \int_i^f (\Psi' + \Phi')(\eta, \mathbf{x}(\eta)) d\eta}, \quad (5.16)$$

onde $\mathbf{x}(t)$ é a posição do fóton não-perturbado para um observador em \mathbf{x}_0 (hoje).

O primeiro termo do lado direito de (5.16) é o chamado **termo de dipolo**, e está associado ao movimento do observador, na Terra, em relação à superfície de emissão. Este termo é o que possui a maior magnitude das anisotropias, e é muito bem medido [Dur08]. Os termos dentro dos colchetes estão associados a quantidades medidas no momento do desacoplamento η_{dec} , de tal maneira que a perturbação δ_r está associada às inhomogeneidades intrínsecas da radiação na superfície de último espalhamento.

Os termos relacionados às anisotropias na própria LSS são também chamados de **anisotropias primárias**. As anisotropias primárias são resultado de processos físicos durante e antes a era do desacoplamento, de tal maneira que obtemos informações do instante ou anteriores ao desacoplamento. Os efeitos relacionados às perturbações de velocidade v_j e ao potencial $\Phi(\eta_{dec})$ no momento do desacoplamento são anisotropias primárias. Os termos com δ_r e v_j estão relacionados às **perturbações adiabáticas** e ao **efeito Doppler** [Dur08]. Uma demonstração que parte apenas do estudo perturbativo do capítulo anterior e pode ser encontrada em [Dur08] mostra que

$$\frac{1}{4}\delta_r + \Psi + \Phi = \frac{\Phi}{3}. \quad (5.17)$$

Os termos que são integrados no tempo ou calculados hoje são as chamadas **anisotropias secundárias**, decorrentes de processos físicos que ocorrem entre o momento do último espalhamento e a observação hoje. Processos que estão relacionados à evolução do Universo, como a alteração do potencial gravitacional Φ

no decorrer do tempo, são anisotropias secundárias. Espalhamentos dos fótons no caminho até a observação também são efeitos secundários.

Se utilizarmos (4.12c) com a condição de que o tensor energia momento não possui estresse anisotrópico ($\Pi = 0$), obtemos que

$$\Psi = \Phi,$$

a equação (5.16) e (5.17) apenas com os termos relacionados ao potencial Φ se escreve

$$\boxed{\frac{\Delta T^{(\text{SW})}}{T} = \frac{\Phi(z_{dec})}{3} + 2 \int_0^{z_{dec}} \Phi' dz}, \quad (5.18)$$

onde realizamos adequadamente a substituição de variáveis pelas regras de função composta $t \rightarrow z$.

As anisotropias acima, relacionados aos potenciais gravitacionais perturbativos foram primeiro derivadas teoricamente por Rainer Sachs e Arthur Wolfe em 1967 [RK67], com as ferramentas da antiga teoria de perturbações. Essa anisotropia de temperatura, relacionada com o potencial Φ tanto na última superfície de espalhamento quanto à evolução do potencial de lá até hoje, é chamado **Efeito Sachs Wolfe**. O componente em z_{dec} por vezes é chamado efeito Sachs-Wolfe *ordinário*, enquanto que o termo integrado é chamado de **efeito Sachs-Wolfe Integrado**.

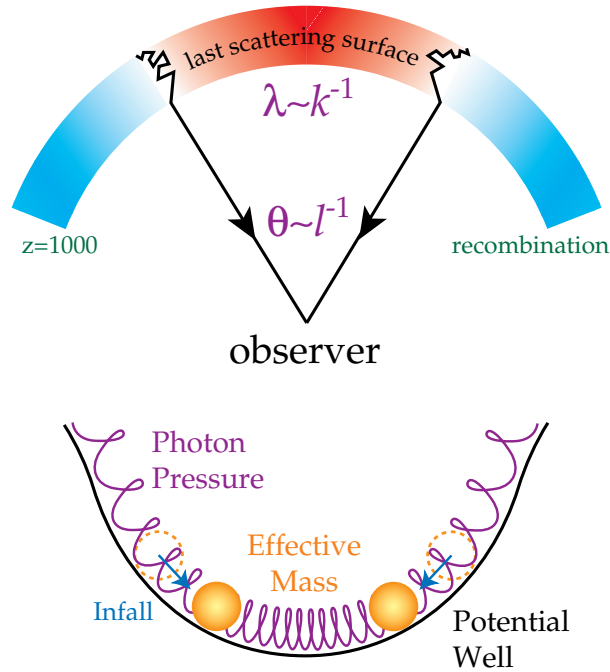


Figura 5.1: O Efeito Sachs-Wolfe ordinário: na própria superfície da LSS os potenciais gravitacionais Φ e Ψ geram anisotropias na distribuição dos fótons. A relação $\lambda \approx k^{-1}$ é a relação modo-comprimento no espaço de Fourier, e $\theta \approx l^{-1}$ relaciona os ângulos da esfera celeste como definidos em (5.15) e os multipolos l do espectro de potência. Do site de Wayne Hu

Na figura 5.1 vemos uma ilustração do mecanismo físico por trás do efeito Sachs-Wolfe Ordinário: O potencial gravitacional $\Phi(\eta_{dec})$ gerado pelas perturbações na última superfície de espalhamento causa o efeito, que na figura do Espectro de Potência é observado como o **platô de Sachs-Wolfe**.

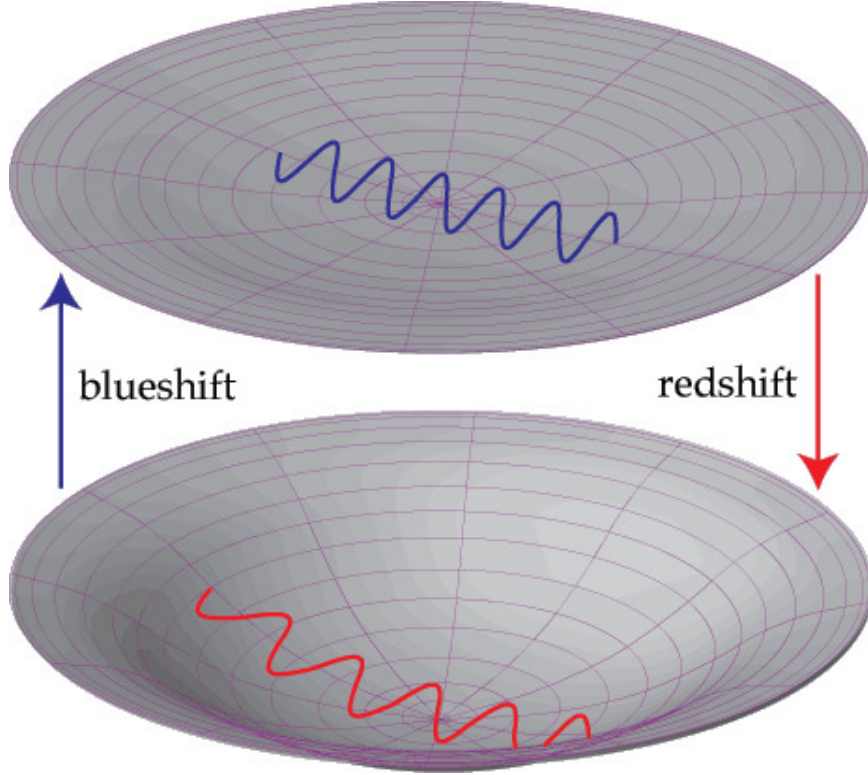


Figura 5.2: O Efeito Sachs-Wolfe *Integrado*: fótons que caem no potencial Φ sofrem um *redshift* se o potencial cresce num intervalo de tempo ($\dot{\Phi} > 0$), e um *blueshift* se o potencial decresce ($\dot{\Phi} < 0$). Como o potencial depende intimamente dos diferentes componentes na evolução do Universo por (4.15), uma expansão acelerada como a causada pela componente de Energia Escura modifica o efeito ISW. Do site de Wayne Hu

Já na figura 5.2 vemos ilustrado o efeito ISW: o potencial Φ evolui dependendo das diferentes fases da expansão do Universo em diferentes redshifts z . O caminho do fóton é então influenciado pelos poços e vales de potencial do espaço-tempo, que evoluem e afetam $\dot{\Phi}$, e o fóton sofre *redshift* ou *blueshift* gravitacional dependendo do sinal da variação do potencial.

O que medimos da RCF é o que chamamos de **Espectro de Potência Angular**, definido em (2.32) [Dur08]. Utilizando (5.16) e (2.31) podemos escrever o espectro de potência das anisotropias de temperatura da RCF como

$$C_l = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^l \left\langle \frac{\Delta T}{T}(\mathbf{n}) \frac{\Delta T}{T}(\mathbf{n}') \right\rangle, \quad (5.19)$$

onde relacionamos a direção na esfera celeste dada pelo vetor \mathbf{n} (ou as coordenadas (l, m)) com o índice l pela relação da expansão em harmônicos esféricos [Dur08, But88]

$$\frac{\Delta T}{T}(\mathbf{n}) = \sum_{l,m} a_{lm} Y_{lm}(\mathbf{n}), \quad (5.20)$$

e os a_{lm} como definidos em (2.31) são obtidos da relação de ortogonalidade [Dur08]

$$\left\langle \frac{\Delta T}{T}(\mathbf{n}) \frac{\Delta T}{T}(\mathbf{n}') \right\rangle = \sum_{l,l',m,m'} \langle a_{lm} \cdot a_{l'm'}^* \rangle Y_{lm}(\mathbf{n}) Y_{l'm'}(\mathbf{n}'). \quad (5.21)$$

O princípio cosmológico leva a uma distribuição das flutuações de temperatura $\Delta T/T$ é isotrópica e *gaussiana*, como se é observado [Cea18a], então os coeficientes a_{lm} não dependem do índice m , e o espectro de potência C_l é escrito como (5.19) a partir de (5.21) [Dur08].

A equação (5.19) nos permite associar os chamados *multipolos* l do espectro de potência com um ângulo θ no céu, tal qual podemos relacionar a amplitude ao número de onda numa transformada de Fourier, pela heurística

$$l \propto \theta^{-1}, \quad (5.22)$$

ou seja: os multipolos menores l correspondem às maiores escalas angulares na esfera celeste. Em outras palavras, quando observamos estruturas e correlações entre grandes ângulos no céu, estes correspondem a efeitos detectados em l pequenos.

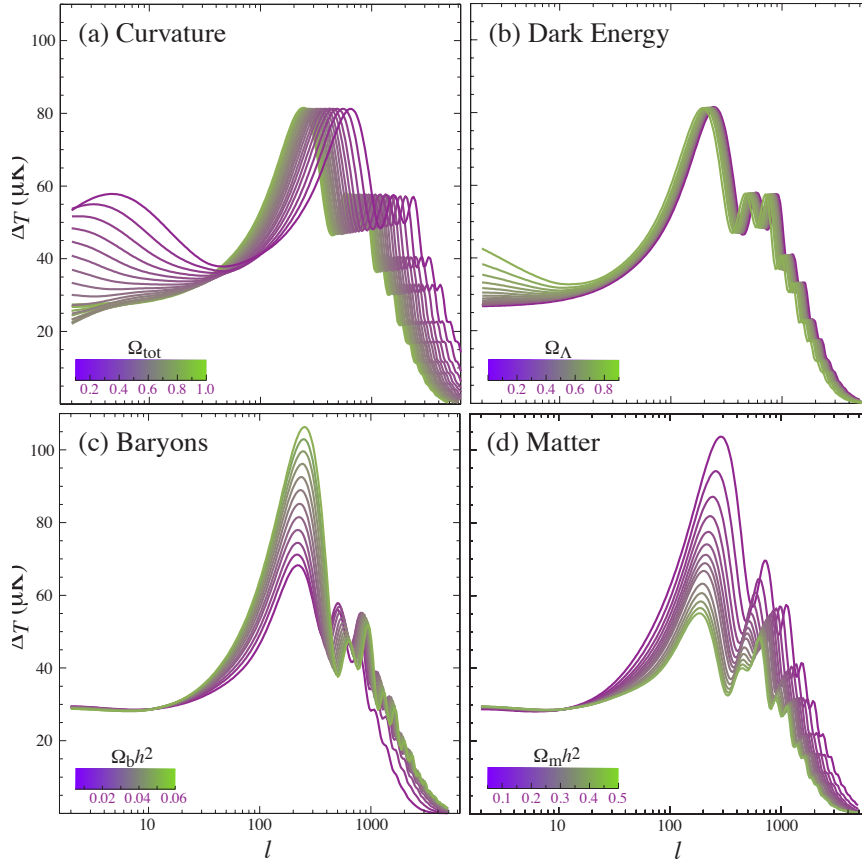


Figura 5.3: Ilustração de como os diferentes parâmetros cosmológicos influenciam na curva do espectro de potência da RCF. Vemos que os parâmetros de curvatura e Energia Escura influenciam o começo da curva (parte associada a maiores escalas), o que nos mostra que, para uma curvatura fixada, a diferença nas grandes escalas do Espectro, influenciadas pelo efeito ISW, depende da evolução da Energia Escura. Do site de Wayne Hu

5.3 O espectro de potência do efeito ISW

Se separarmos a equação (5.18) apenas com a parte integrada, podemos calcular as anisotropias do espectro relacionadas apenas a este efeito, e tal qual como na figura 5.3 é possível comparar como diferentes parâmetros afetam o espectro C_l . Partindo da equação (5.18) e utilizando (4.15), podemos escrever

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^{(\text{ISW})} = 8\pi G \int_0^z \frac{d}{dt} \left(\rho \delta \frac{a^2}{k^2} \right) dz. \quad (5.23)$$

Utilizando a definição da Função de Crescimento (4.26), do parâmetro de densidade (2.22) e uma mudança de coordenadas na diferencial $dt \rightarrow dz$, podemos reescrever (5.23) como

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^{(\text{ISW})} = \frac{3H_0^2 \Omega_{m0}}{k^2} \frac{\delta_m(0)}{f(0)} \int_0^{z_{\text{dec}}} \frac{d}{dz} [f(z)(1+z)] dz, \quad (5.24)$$

onde, como usual, $z = 0$ indica o redshift no presente momento. A equação (5.24) mostra como o efeito ISW evolui justamente pela evolução do potencial Φ e as estruturas associadas a este potencial no regime perturbativo. Vemos então que para $z = 0$, temos o potencial gravitacional Φ hoje, como era de se esperar da equação de Poisson (4.15).

Com (5.24) e (5.19), seguindo os passos encontrados nas referências [Coo02, KMB16], chegamos finalmente ao **espectro de potência do efeito ISW**:

$$C_l^{TT} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty k^2 (I_l^{ISW}(k))^2 P_m^{(0)}(k) dk, \quad (5.25)$$

onde I_l é o chamado **núcleo** do espectro de potência e $P_m^{(0)}$ é o espectro de potência das flutuações da densidade de matéria δ hoje, dados respectivamente por [Coo02]

$$I_l^{ISW}(k) = \frac{3H_0^2 \Omega_{m0}}{k^2} \int_0^{z_{\text{dec}}} \frac{d}{dz} (f(z)(1+z)) j_l(k\chi(z)) dz, \quad (5.26)$$

$$P_m(k) = 2\pi^2 \delta_H^2 k^2 \left(\frac{k}{H_0} \right)^{n+3} T^2(k). \quad (5.27)$$

j_l são as funções de Bessel esféricas, $\chi(z)$ é a distância comóvel obtida a partir da distância própria (2.9) por

$$\chi(z) = d_p(z)a(z).$$

Os parâmetros δ_H e n são, respectivamente, a amplitude de flutuações de densidade e o **índice espectral**, relacionados com a teoria de perturbações primordiais, não tratadas neste trabalho; uma leitura aprofundada pode ser encontrada em [Dur08]. Estes valores são obtidos por observações da própria RCF, como por exemplo nos dados divulgados pelo satélite Planck na referência [Cea18a].

A função transferência $T(k)$ também está relacionada à teoria de perturbações primordiais, e tem a função de conectar essas perturbações com as flutuações de densidade e estruturas que observamos hoje. A função não é a mesma para diferentes modelos cosmológicos e uma forma analítica da mesma não é facilmente encontrada [EH98]. Usam-se ajustes e códigos numéricos para seu cálculo, como por exemplo o código CAMB e CLASS.

Como obtemos a função de crescimento $f(z)$ a partir da evolução da perturbação de densidade de matéria δ e esta, por sua vez, é obtida de forma geral pela equação (4.23) no caso de Λ CDM e (4.37) no caso do modelo $f(R)$, $f(z)$ contém informações distintas dependendo do modelo cosmológico que estamos assumindo. $f(z)$ e, por conseguinte, o efeito ISW podem então nos ajudar a discriminar o modelo de gravitação no regime perturbativo. Com esta consideração e as ferramentas necessárias,

podemos partir para a análise e os resultados deste estudo.

A figura 5.4 mostra um espectro de potência recriado a partir dos dados obtidos do satélite Planck, segundo a última divulgação [Cea18a].

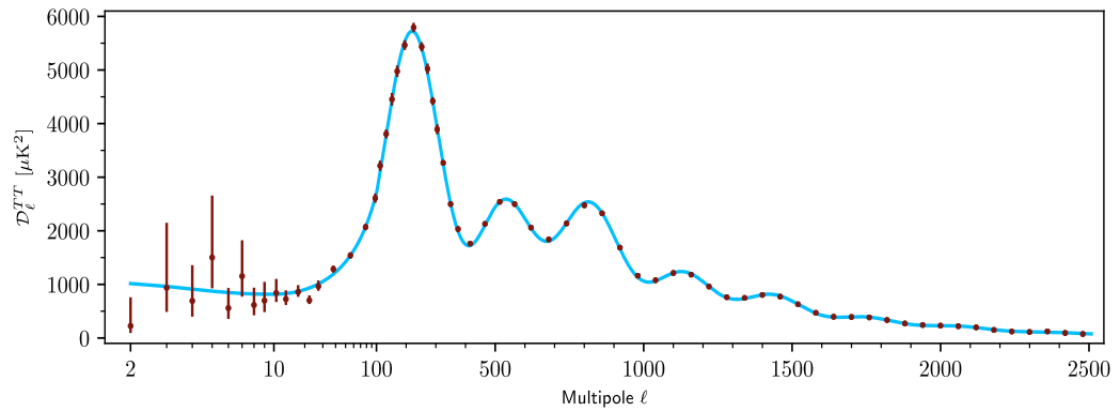


Figura 5.4: Curva do *best fit* do espectro de potência C_l da RCF a partir das observações do satélite Planck [Cea18a].

Capítulo 6

Análise e Resultados

Neste capítulo analisamos como as perturbações cosmológicas e, ao final, como o efeito ISW é afetado nas teorias Λ CDM e $f(R)$. Como vimos nos dois capítulos anteriores, as perturbações com o potencial Φ são diretamente influenciadas pela evolução cosmológica, e a dependência na escala k é diferente entre as cosmologias. Delineamos também os métodos utilizados para realizar as análises. Dado que as equações envolvidas muitas vezes não possuem solução analítica, é necessário utilizar-se integrações e soluções numéricas. Alguns parâmetros e funções também são obtidos a partir de códigos criados especificamente para cálculos cosmológicos e dados da RCF, como o CAMB e o CLASS.

Quando não especificados, os valores dos parâmetros usados para realizar os cálculos numéricos podem ser encontrados na tabela 6.1, seguindo em grande parte as referências [CGLY19] e [Cea18a].

Parâmetro	Valor
Ω_{m0}	0.306
Ω_{r0}	$7.88 \cdot 10^{-5}$
$\Omega_{\Lambda 0}$	0.694
H_0	$67.8 [km/s/Mpc]$
$\lambda^{-1} (f(R))$	0.28
$n (f(R))$	1
n_s	0.96
δ_{m0}	1
\mathcal{A}_s	$2.1 \cdot 10^{-9}$

Tabela 6.1

6.1 Evolução do contraste de densidade δ

Como vimos no capítulo 4, as perturbações de matéria obedecem a uma equação diferencial de segunda ordem (equação (4.23)), que dependem tanto da evolução da densidade ρ quanto da velocidade v_s . Aqui estudamos a evolução da densidade de matéria que, depois da componente de Energia Escura Λ , é a componente de matéria com o maior parâmetro de densidade em tempos recentes ($z < z_{tr}$). Segundo o que vimos no capítulo anterior, o potencial Φ afeta a formação de estrutura no Universo através da aglomeração da matéria gravitacionalmente. A equação (4.23) pode, neste caso, ser reescrita na forma conveniente

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m - \frac{3}{2}\Omega_m\delta_m = 0, \quad (6.1)$$

onde Ω_m e H são definidos como anteriormente. Adiante, por ser mais conveniente numericamente e ao parametrizarmos nossas variáveis para integração, utilizaremos a variável $\log a$ no lugar de a , e a equação (6.1) torna-se então

$$\delta_m'' + \left(2 + \frac{H'}{H}\right)\delta_m' - \frac{3}{2}\Omega_m\delta_m = 0, \quad (6.2)$$

onde $'$ denota a derivada em relação a $\log a$. A mudança de variáveis $a \rightarrow \log a$ é fácil de ser obtida, utilizando apenas a relação de a com o parâmetro de Hubble H e a relação (2.28). É importante notar que, pela definição, o fator G está incluído em Ω_m , e que para o caso da equação com o fator G_{eff} na gravidade modificada (equação (4.37)), a evolução é diferente apesar de a equação aparentar ser a mesma. Para que não ocorra confusão, quando a equação (6.2) possuir o termo G_{eff} , definido em (4.38), denotaremos Ω_m por Ω_m^{eff} .

A evolução do contraste de densidade de matéria δ nos modelos Λ CDM e na $f(R)$ de Starobinsky pode ser calculada então a partir das equações

$$\delta_m'' + \left(2 + \frac{H'}{H}\right)\delta_m' - \frac{3}{2}\Omega_m\delta_m = 0, \quad (6.3)$$

$$\delta_m'' + \left(2 + \frac{H'}{H}\right)\delta_m' - \frac{3}{2}\Omega_m^{\text{eff}}\delta_m = 0, \quad (6.4)$$

e aqui temos a diferença fundamental entre a evolução de δ nas duas teorias: a equação (6.3) é independente da escala k em que calculamos as perturbações, enquanto que (6.4) é diferente para cada k , dado que pela definição de G_{eff} , a evolução agora depende de mais dois fatores; a função $F(R)$ e a escala k . Aqui se torna explícito que *para a gravidade modificada $f(R)$ as perturbações são dependentes de escala*.

Antes de calcularmos (6.3) e (6.4) numericamente, é necessário calcular a

evolução do parâmetro de Hubble $H(z)$. Como vimos nos capítulos 1 e 2, para o modelo Λ CDM calcular $H(z)$ é apenas calcular a função algébrica (2.24) em função de a (facilmente transformada em função de $\log a$), uma tarefa computacionalmente simples; já calcular $H(z)$ para o modelo de Starobinsky (e modelos $f(R)$ em geral) envolve resolver o sistema de ED's acopladas (3.31), uma tarefa mais complexa. Como dito anteriormente, um método é calcular uma equação diferencial de segunda ordem obtida a partir das variáveis auxiliares (3.33). A equação diferencial a ser resolvida então é (3.35), e uma rotina com flexibilidade para resolver ED's pode ser implementada.

Nossas rotinas numéricas foram implementadas usando a linguagem Python e suas bibliotecas, onde utilizamos a rotina `itg.solve_ivp` do pacote `scipy` para integrar a equação. O método de integração utilizado foi o LSODA que permite flexibilidade na solução de equações mais sensíveis aos parâmetros, como foi testado com a equação (3.35).

No modelo de Starobinsky (sessão 3.4.3), no lugar do parâmetro de densidade Ω_Λ temos outros parâmetros na teoria: n , R_{ch} e λ . Fixando n , podemos escrever R_{ch} em termos do parâmetro de densidade de matéria Ω_m seguindo [Sta07, CGLY19] e a condição (2.23) para obtermos

$$R_{ch} = 6H_0^2(1 - \Omega_{m0}), \quad (6.5)$$

e podemos reescrever a função para o nosso modelo como

$$f(R) = R + 6\lambda H_0^2(1 - \Omega_{m0}) \left(\left(1 + \left(\frac{R}{6H_0^2(1 - \Omega_{m0})} \right)^2 \right)^{-1} - 1 \right). \quad (6.6)$$

Substituindo agora $f(R)$ dentro de (3.35) podemos obter a evolução de $H(z)$ numericamente para os valores observados dos parâmetros de densidade. A figura 6.1 mostra o resultado da integração para diferentes parâmetros e a comparação com o modelo Λ CDM.

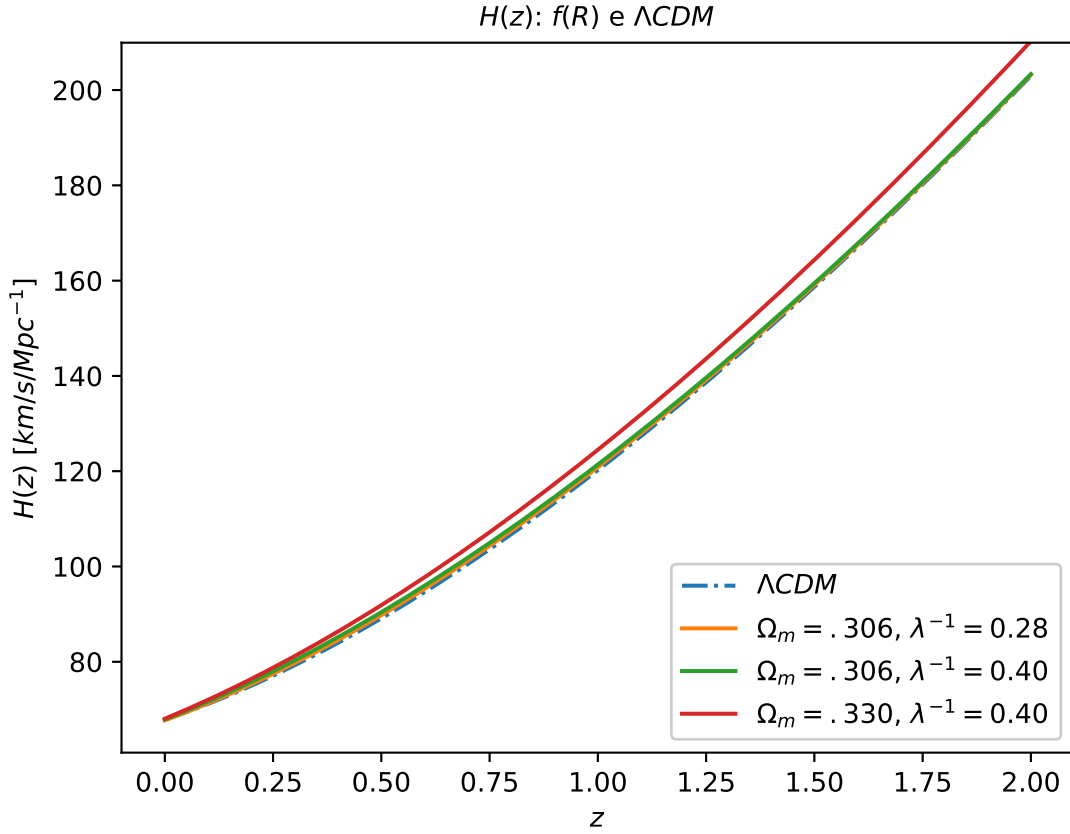


Figura 6.1: Plot de $H(z)$ para diferentes parâmetros no modelo de Starobinsky com $n = 1$. Os outros parâmetros de densidade seguem os valores de [Cea18a] ou da referência [CGLY19].

Os valores obtidos para $H(z)$ a partir de observáveis locais ($z \lesssim 2$) não permitem diferenciar entre os modelos cosmológicos com os parâmetros do modelo de Starobinsky utilizado ($n = 1, \lambda^{-1} = 0.28$) [CGLY19], usando dados obtidos como, por exemplo, pelo SDSS [KP18]. A figura 6.2 mostra a impossibilidade de se discernir entre os modelos nesse intervalo de redshift - isto é, utilizando apenas informações obtidas a partir de observáveis da métrica não perturbada. Para isso, precisamos calcular a evolução das perturbações.

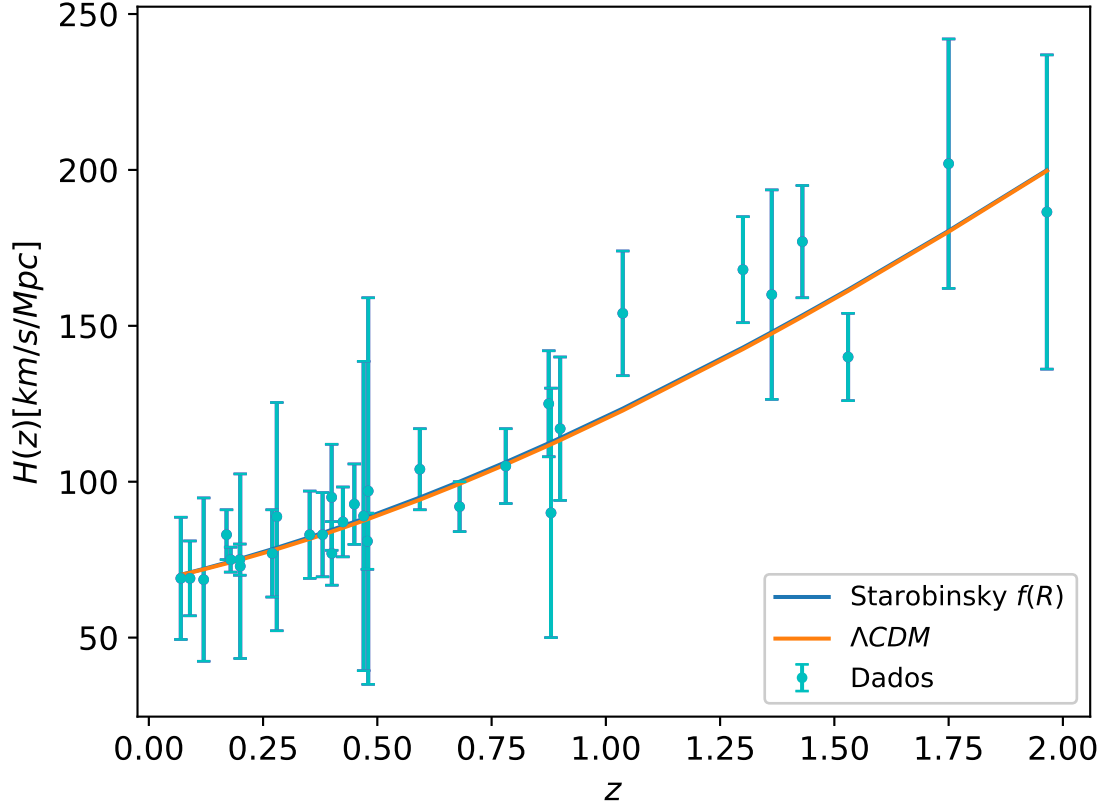


Figura 6.2: Comparação entre os dados de $H(z)$ observados e as curvas teóricas para os dois modelos (Λ CDM e $f(R)$ de Starobinsky [CGLY19]). As linhas são praticamente sobrepostas e, além disso, as barras de erro não são estreitas o suficiente para distinguir os modelos.

Podemos integrar a equação (6.3) diretamente partindo apenas dos parâmetros utilizados para calcular $H(z)$, entretanto a equação (6.4) depende ainda da escala k em que se está integrando a perturbação. Nem todas as escalas são relevantes nas perturbações, dado que k 's muito grandes correspondem a escalas muito pequenas e a contribuição de estruturas nessa escala é ínfima, como veremos logo em seguida. Podemos observar os limites em que as escalas k modificam a equação (6.4). Resgatando a definição de G_{eff} (4.38)

$$G_{\text{eff}} \equiv \frac{G_N}{8\pi F} \frac{1 + 4\frac{k^2}{a^2} \frac{F'}{F}}{1 + 3\frac{k^2}{a^2} \frac{F'}{F}}.$$

Podemos definir um parâmetro $m \equiv \frac{RF'}{F}$, onde a derivada $'$ é em relação a R e reescrever a equação acima como

$$G_{\text{eff}} \equiv \frac{G}{8\pi F} \frac{1 + 4\frac{k^2}{a^2 R} m}{1 + 3\frac{k^2}{a^2 R} m}, \quad (6.7)$$

onde entendemos que G_N é o G usado na mesma equação para as perturbações no modelo Λ CDM (assumido como 1 nas equações, sem perda de generalidade ou problemas na solução numérica). O parâmetro m pode ser entendido como uma caracterização do desvio do modelo Λ CDM [Tsu07]; se $f(R) = R$, temos $m = 0$. Podemos então investigar os limites $\frac{k^2}{a^2 R}m \gg 1$ e $\frac{k^2}{a^2 R}m \ll 1$.

O caso em que $\frac{k^2}{a^2 R}m \gg 1$ está no regime sub-horizonte, e G_{eff} se reduz a

$$G_{\text{eff}} \cong \frac{1}{8\pi F} \frac{4}{3}, \quad (6.8)$$

e para o limite $\frac{k^2}{a^2 R}m \ll 1$ temos, aproximando,

$$G_{\text{eff}} \cong \frac{1}{8\pi F} \left(1 + \frac{k^2}{a^2 R}m \right), \quad (6.9)$$

o que mostra que, para grandes escalas, que correspondem a k 's muito pequenos, a contribuição do termo G_{eff} não ultrapassa o limite $1/8\pi F < 1/8\pi$, que é o valor para Λ CDM ($F = 1$). É razoável então limitarmos as escalas que consideramos, o que serve de auxílio ao realizarmos integrações em função de k , como no cálculo do espectro de potência.

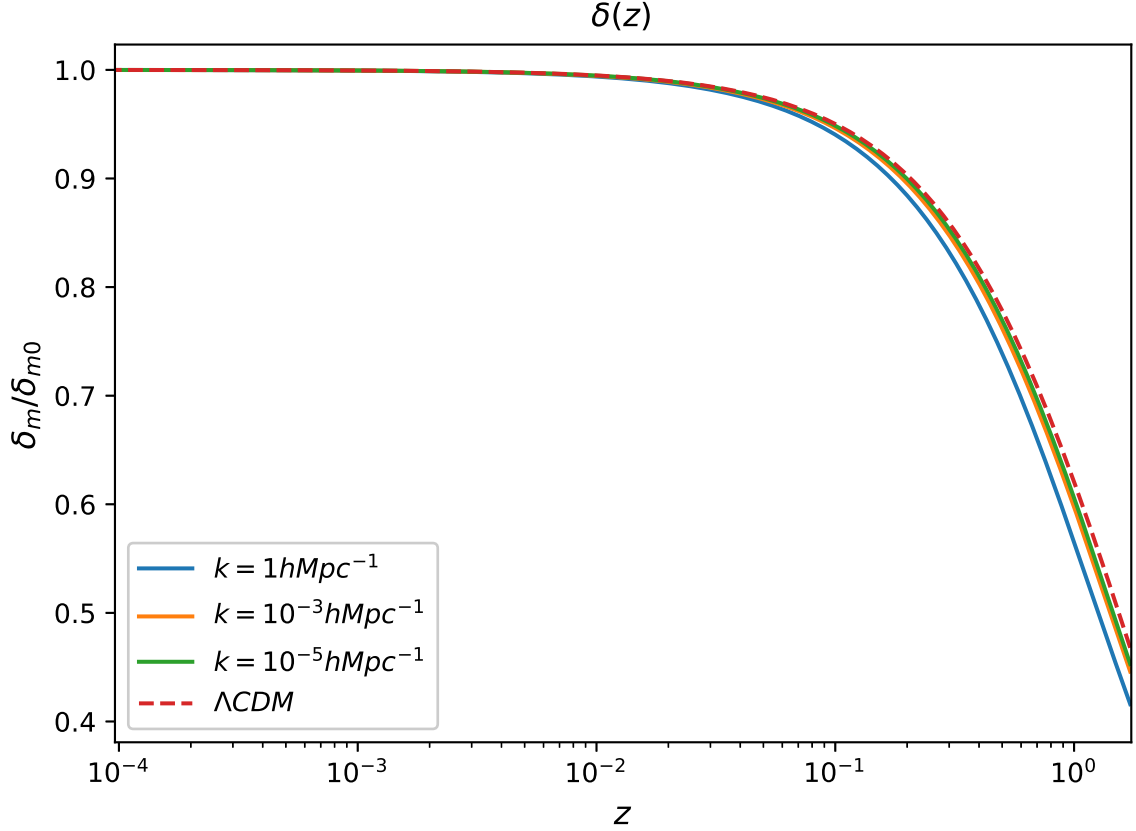


Figura 6.3: A evolução no redshift do contraste de densidade de matéria δ . A escala k é medida em relação ao parâmetro de Hubble reduzido $h \equiv 10^{-2}H_0$. Normalizamos que o contraste hoje é $\delta_{m0} = 1$. Os parâmetros são os mesmos da referência [CGLY19]

Na figura 6.3 observamos a evolução do contraste de densidade $\delta(z)$ normalizado pelo valor do contraste de densidade hoje δ_{m0} , obtida numericamente a partir das equações (6.3) e (6.4). Valores menores de k (escalas maiores) aumentam δ em maiores redshifts, mas o aumento não excede o valor de ΛCDM até para escalas de $10^{-5}h\text{Mpc}^{-1}$ que, como vimos, é limitado superiormente exatamente pelo crescimento do modelo ΛCDM .

6.2 Função de crescimento $f(z)$ e $f\sigma_8(z)$

Vimos que a evolução da perturbação $\delta(z)$ é um indicador da possível diferença entre os modelos cosmológicos, um indicador mais forte que apenas $H(z)$ e observáveis que partem estritamente do background cosmológico. Entretanto, não podemos usar apenas $\delta(z)$ como observável cosmológico, precisamos também incluir informações de suas derivadas, e assim como utilizamos $H(z)$ para observar a evolução da escala do Universo, utilizamos a função de crescimento (4.26) $f(z)$ para observar a evolução das perturbações.

A função $f(z)$, que, como visto em 4.3 representa o crescimento das perturbações δ , pode ser observada a partir da distribuição de aglomerados de galáxias, o chamado *weak lensing*, e BAOs [HKB⁺15]; e correlacionado, por exemplo, com o próprio efeito ISW, como vimos pela equação (5.25). A função de crescimento possui ainda informação sobre a derivada $\delta'(z)$, e observáveis como o chamado *Redshift Space Distortion* são particularmente sensíveis à função de crescimento [HKB⁺15].

Na figura 6.4 podemos ver como nossa teoria $f(R)$ evolui para diferentes escalas: as perturbações em escalas menores têm mais crescimento em redshifts mais recentes, como vemos nos levantamentos das curvas. Escalas menores possuem crescimentos maiores, o que mostra que para este modelo de gravidade modificada, as pequenas estruturas são favorecidas, isto é, deve-se observar uma maior formação de estruturas em pequena escala em redshifts mais recentes. Quando tendemos ao limite das grandes escalas, o comportamento se assemelha ao do modelo Λ CDM, como havíamos constatado em (6.8); aqui seguimos o *ansatz*¹ da equação (4.41) para aproximar o crescimento de f em Λ CDM. Notamos também que, para altos redshifts ($z \gtrsim 7$), o crescimento das estruturas volta a se assemelhar ao do modelo de concordância. Isso também se reduz ao caso limite (6.8), visto que satisfaz a condição de sub-horizonte: temos $k/H(z) \ll a$.

¹ $f(\Omega_m) = \Omega_m^{0.66} + \frac{\Omega_\Lambda}{H_0}(1 + 0.5\Omega_m)$

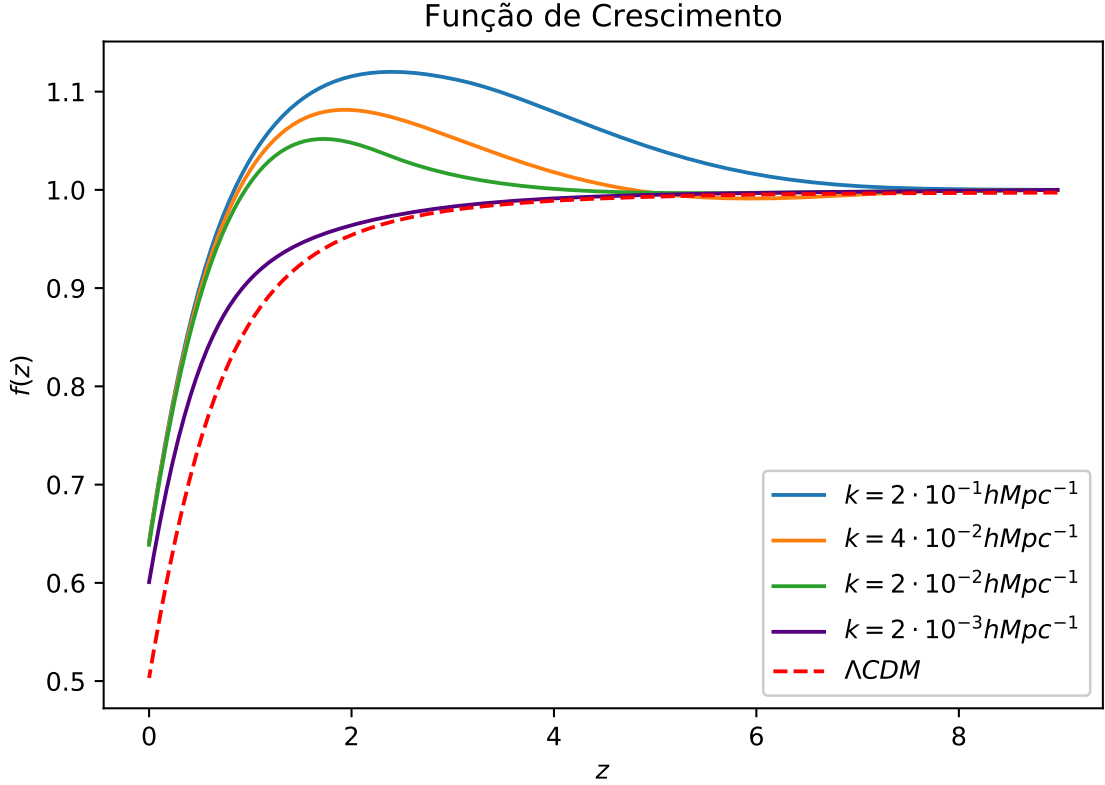


Figura 6.4: Curvas da função de crescimento $f(z)$ para diferentes escalas no modelo $f(R)$ de Starobinsky, comparadas ao modelo Λ CDM. Pequenas escalas crescem mais que as maiores em redshifts próximos, enquanto que no limite de altos redshifts ambas as escalas tendem ao limite do modelo Λ CDM. A escolha dos modos k assemelhou-se ao exemplo da referência [GMP09].

Um observável também fundamental no estudo de crescimento de estruturas e perturbações é a função de crescimento multiplicada pelo chamado *root mean square* da amplitude de flutuações de matéria δ num raio R , σ_R . σ_R é uma medida da aglomeração de estruturas em determinada escala cósmica R , e sua observação é fundamental para determinar a amplitude das flutuações de densidade de matéria.

Formalmente, definimos σ_R da seguinte maneira: se \bar{M} é o conteúdo material médio dentro de uma esfera de raio R (numa distribuição homogênea e isotrópica, idealmente teríamos $\bar{M} = \frac{4}{3}\pi R^3 \bar{\rho}$, onde $\bar{\rho}$ é a densidade média de matéria), e $M(R)$ é o conteúdo local, incluindo as perturbações δ , podemos calcular um tipo de desvio padrão, o *root mean square* ou **rms** de M :

$$\sigma_R(z) \equiv \sqrt{\frac{\langle (M - \bar{M})^2 \rangle_R}{\bar{M}^2}} = \frac{\sqrt{\langle \delta^2 \rangle_R}}{\bar{M}} = \int_0^\infty \frac{k^2 P_m(k, z) W^2(kR)}{2\pi^2} dk. \quad (6.10)$$

A equação (6.10) nos mostra então que σ funciona como uma medida do desvio da média para o conteúdo material do Universo. A segunda igualdade em (6.10) é

importante quando estamos tratando de modos k para nos referirmos às escalas do Universo e é obtida da mesma maneira que decompomos o efeito ISW em termos de escalas k (eq. (5.25)) [HKB⁺15]. $P_m(k, z)$ é o já comentado espectro de potência da matéria, e $W(kR)$ é a chamada função janela para σ [HKB⁺15], uma função que seleciona determinadas regiões e escalas de interesse. O subíndice R indica uma média ou integral sobre o raio R de uma esfera, e a dependência no redshift z é clara pela nossa definição de distância a partir da métrica.

O valor de σ_R tem a medição intimamente ligada à formação e crescimento de estruturas, de tal maneira que podemos escrever $\sigma_R(z) = \sigma_R(z=0)\delta(z)$. É então possível medir σ e associar esse observável com a função de crescimento f pelo observável $f\sigma_8$, onde σ_8 é o valor de sigma numa escala de $R = 8h^{-1}Mpc$, medido no presente momento $z = 0$. Dado que nessa escala não é sempre possível realizar-se medidas independentes de z , medidas da dependência de σ_8 com o redshift são por vezes também medidas da formação de estruturas, e logo de f [HKB⁺15].

A medida mais recente do satélite Planck [Cea18a] é de $\sigma_8 = 0.8111 \pm 0.0060$. A figura 6.5 mostra como o modelo Λ CDM se compara com nosso modelo de $f(R)$ em diferentes escalas para $f\sigma_8(z)$ e com dados escolhidos da mesma amostra da referência [ZVA19].

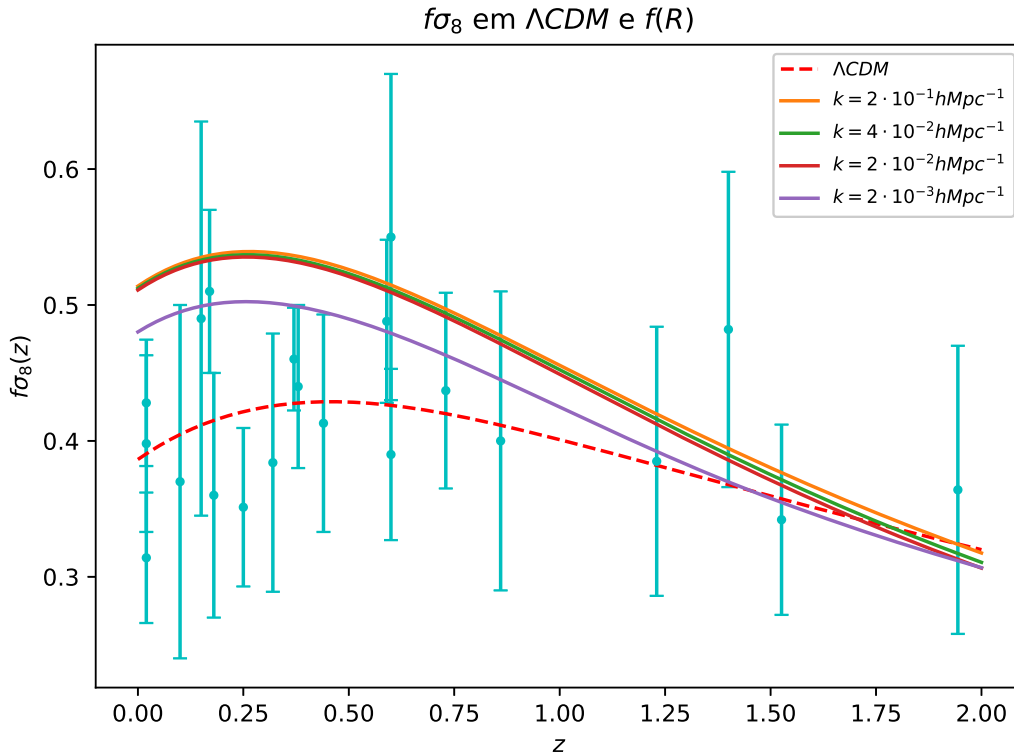


Figura 6.5: Curvas da função $f\sigma_8(z)$ em relação aos dados observados em redshifts recentes. Vemos que alguns dados favorecem estruturas menores para modelos $f(R)$ enquanto que outras favorecem o modelo de concordância. Aqui $\sigma_8 = 0.8$.

Uma análise semelhante pode ser encontrada nos dados do Planck [Cea18a], com uma comparação incluindo os mesmos dados. Os cálculos numéricos, aproximações e rotinas utilizadas diferem dos utilizados na referência do Planck, por isso as curvas não necessariamente coincidem; entretanto, o gráfico da função do modelo Λ CDM é compatível com o intervalo das mesmas barras de erro. O comportamento para o modelo alternativo é o mesmo que vimos na análise das outras perturbações: escalas pequenas são favorecidas no crescimento de matéria e, aqui, vemos que algumas observações favorecem o crescimento de pequenas escalas ao invés de um crescimento puramente independente de k . Com a pouca quantidade de dados [ZVA19] e as barras de erro ainda grandes, não é possível entretanto confirmar ou não o favorecimento de uma evolução dependente de escalas.

Com a análise dos observáveis relacionados a perturbações, podemos agora finalmente tratar do sinal do efeito ISW.

6.3 Efeito ISW nas cosmologias $f(R)$ e Λ CDM

Antes de compararmos os resultados e analisar o resultado das integrações numéricas das equações na seção 5.3, é importante notar de onde alguns dados e tabelas numéricas foram retirados, assim como certas hipóteses. Assumimos aqui que a função de transferência $T(k)$ (seção 5.3) calculada pelo código numérico CAMB para o modelo Λ CDM é válida tanto para esse modelo quanto para $f(R)$. Esta hipótese é satisfeita no regime de grandes escalas [MSY11], o que não ocorre sempre para escalas menores. Entretanto, a aproximação para estas escalas ainda é boa dados dois motivos: O primeiro, que a função de transferência nas escalas relevantes para as integrações que tratamos ($10^{-5} \lesssim k \lesssim 10^{-1}$) está dentro dos limites de crescimento de estruturas da teoria na referência [MSY11]. A segunda é que um código como o CAMB, sendo escrito em uma linguagem já muito otimizada (FORTRAN), pode providenciar resultados numéricos mais fiéis e mais rapidamente que os programas criados em python para a análise contida neste presente trabalho.

Uma segunda nota de relevância é o intervalo de redshift z em que estamos realizando a integração. A era dominada pela expansão acelerada do Universo começa em redshifts recentes (isto pode ser calculado pelos parâmetros do modelo de concordância, a partir de Ω_m). Logo, qualquer efeito no potencial Φ relacionado à mudança da era dominada por matéria para a era dominada por energia escura (ou do efeito de um termo efetivo G_{eff} de uma modificação da gravidade) deve ser detectado em redshifts recentes. Não obstante, utilizamos um intervalo de redshift aproximado $[0, 6)$, que vai até uma parte completamente dominada pelo componente de matéria ($\Omega_m > 0.95$ para Λ CDM).

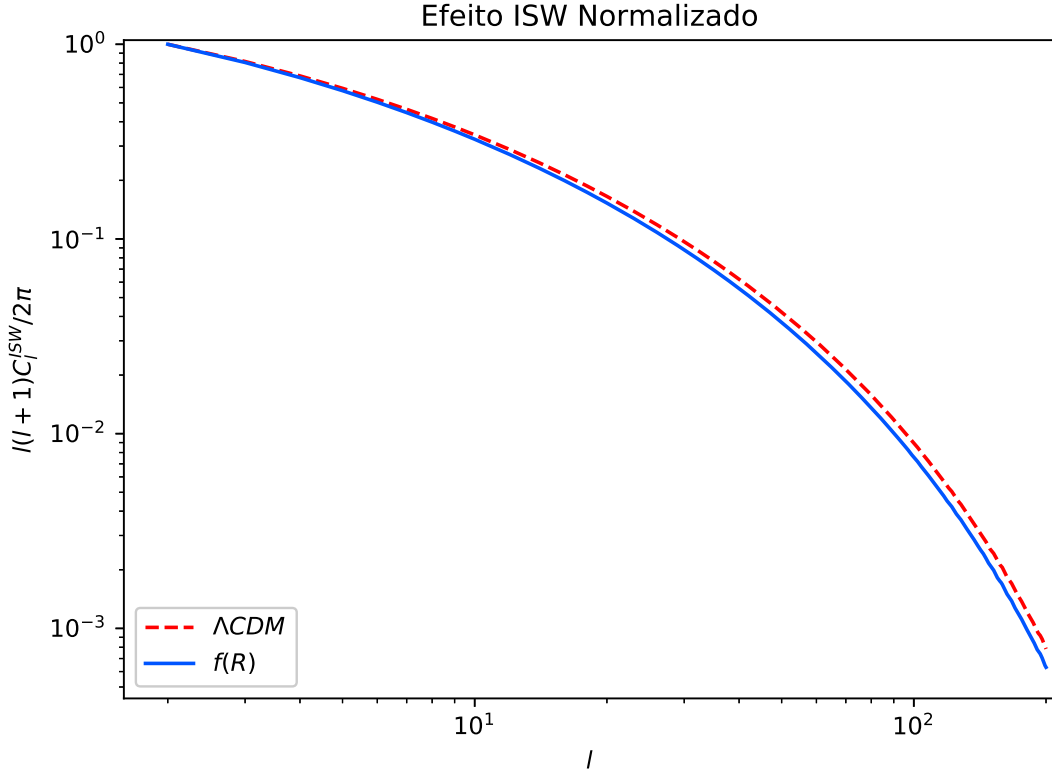


Figura 6.6: Espectro de Potência do Efeito ISW para os diferentes modelos, normalizado. o intervalo de l é $[2, 200]$, não considerando o monopolo.

Na figura 6.6 vemos o resultado da integração numérica para obter o efeito ISW nos dois modelos. Os valores estão normalizados. Vemos dois fatores importantes nas curvas:

- O sinal do espectro de potência do efeito ISW é menor para a gravidade $f(R)$
- A diferença se acentua em grandes multipolos - que correspondem a menores escalas na esfera celeste.

Podemos interpretar estes resultados da seguinte maneira: Vimos, no decorrer do trabalho, que o fator G_{eff} resultante de uma modificação da gravidade associado ao potencial Φ cria uma dependência do crescimento das perturbações nos modos k , que estão associados às diferentes escalas do Universo, enquanto que no modelo ΛCDM a constante G não varia no tempo ou em escala, e esperamos que a evolução de Φ dependa apenas da diferença nas eras cósmicas, da dominância da radiação para a matéria e da matéria para energia escura/constante cosmológica.

Podemos pensar que a gravidade é mais forte em tempos recentes, $G_{\text{eff}} \propto 1/F$, e isso faz com que as perturbações cresçam e as estruturas se aglomerem mais, em sentido contrário ao fator da expansão acelerada do Universo [CLC⁺14]. Em grandes escalas, isto é, para k 's menores, o resultado da fase acelerada está em contraponto

com a maior formação de estruturas devido à gravidade aumentada, e isto faz com que a variação do potencial $\dot{\Phi}$ *diminua*. Esta diminuição de $\dot{\Phi}$, que é justamente o que mede o efeito ISW, gera um menor sinal que no modelo padrão.

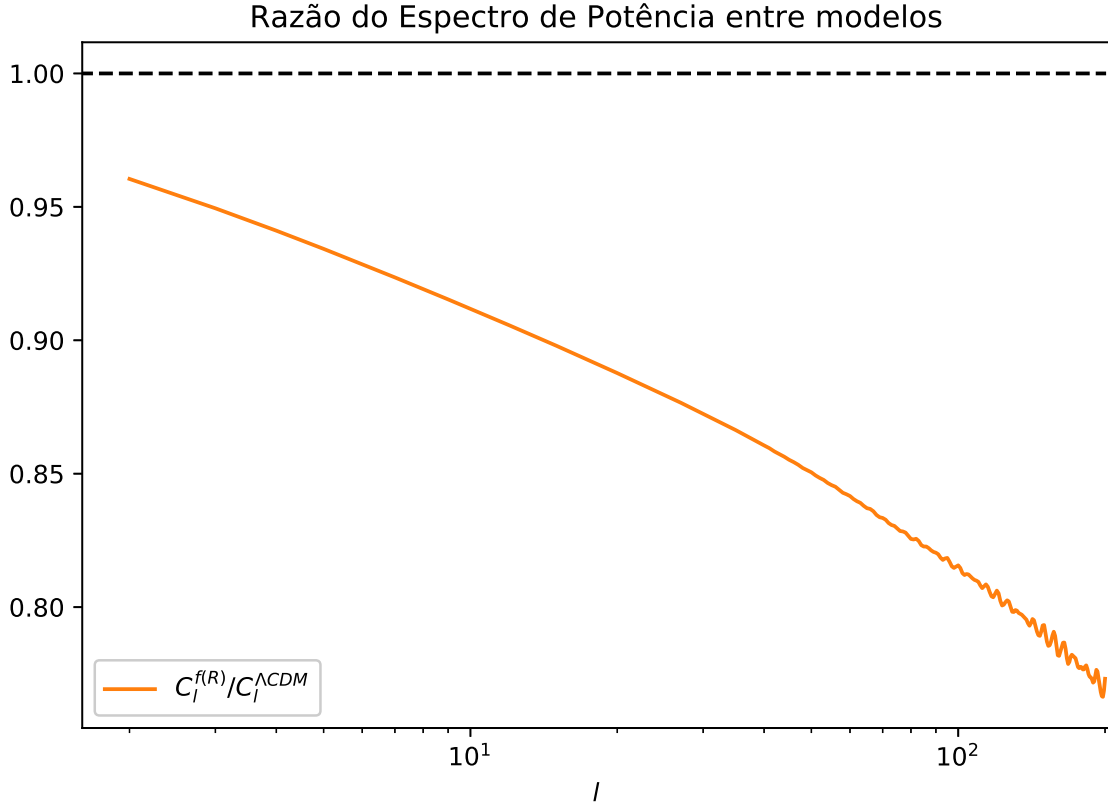


Figura 6.7: Razão do espectro de potência angular do efeito *ISW* entre os modelos Λ CDM e $f(R)$ de Starobinsky.

O aumento da diferença entre os sinais com l , isto é, da diminuição do sinal em relação ao efeito no modelo Λ CDM nos multipolos mais altos (figura 6.7) pode estar associada a questões de perturbações e formações de estrutura não-lineares, um regime em que perturbações em primeira ordem não são mais válidas, nem o regime de sub-horizonte. Neste regime o efeito associado às anisotropias resultantes da evolução de $\dot{\Phi}$ é o **efeito Rees-Sciama** [Nis14], que envolve perturbações não-lineares. O efeito Rees-Sciama está associado à formação de estruturas não-lineares em larga escala (escala de aglomerados) por conta do potencial Φ [RS68].

Uma hipótese que também pode ser levantada é a de que estruturas menores são formadas mais rapidamente devido ao maior valor da constante gravitacional na gravitação modificada. Em relação ao modelo padrão, então, estruturas menores, associadas a maiores multipolos, não evoluem tanto, resultando novamente em uma variação do potencial menor e temos novamente uma diminuição da detecção do efeito.

Para finalizar, ao usarmos os dados mais recentes do satélite Planck [Cea19], vemos que a barra de erro para o espectro de potência em multipolos mais baixos é grande o suficiente para não sermos capazes de distinguir entre os modelos, mesmo seus sinais apresentando uma diferença como mostra a figura 6.7. A própria variância cósmica [Cea18a] impede que certas medidas sejam mais acuradas. Uma possível solução para isto é associarmos os sinais do espectro de potência a outros observáveis além das anisotropias de temperatura, como a distribuição de galáxias em larga escala e a estrutura de matéria em larga escala.

Capítulo 7

Conclusões

Vimos neste trabalho como o efeito ISW está fundamentalmente relacionado à mudança de eras e de medidas da evolução de estruturas no Universo (seção 5.2). Além disto, vimos como o mesmo efeito é sensível à mudança na força da gravidade e à diferença entre diferentes modelos de gravitação (seção 5.3). Modelos de gravitação que reproduzem a era da expansão acelerada do Universo, como o de Starobinsky [Sta07], podem ser distinguidos do modelo de concordância Λ CDM pelo efeito ISW e observáveis como a função de crescimento $f\sigma_8$.

O trabalho também mostrou como podemos utilizar a RCF como um teste de modificações da gravidade que buscam resolver a questão da expansão acelerada do Universo sem assumir a existência de uma constante cosmológica. Mostrar que é possível testar modelos de gravidade modificada com as observações da RCF e outros observáveis é também mostrar que estes modelos são passíveis de análises mais aprofundadas, mesmo que as observações e dados atuais ainda não sejam precisos o suficiente para distinguir completamente entre os modelos [Cea18a].

A gravidade $f(R)$, em específico o modelo estudado de Starobinsky [Sta07], como mostrado no capítulo 6, não pode ser descartado pelos presentes dados, e satisfaz às mesmas condições e restrições observacionais que o modelo Λ CDM. Para além disso, o modelo se adequa a dados de formação de estrutura melhor que o modelo de concordância, como podemos ver, por exemplo, com a curva roxa na figura 6.5. É necessário que se façam mais medições, e que mais dados sejam observados para que a diferenciação entre os modelos seja esclarecida.

Ainda está em aberto a detecção do efeito ISW obtida de dados apenas da RCF [GCNR12]. A autocorrelação do espectro de temperatura ainda não é detectada com boa significância estatística para realizarmos afirmações sobre o espectro de potência em multipolos menores [Cea19], também muito por causa da variância cósmica. Por isso é necessário correlacionar o espectro de potência do efeito ISW com outros

observáveis. A correlação com a distribuição de galáxias e a estrutura em grande escala é um observável promissor e que deve ser investigado, pois oferece detecções do efeito e distinção entre modelos mais do que a autocorrelação [HKB⁺15, KMB16, Coo02, GCNR12].

Por fim, mas não menos importante, é promissor estudarmos regimes além do linear e de perturbações em primeira ordem. A formação de estruturas em primeira ordem está sendo bem investigada pela literatura, mas o estudo de perturbações e formação de estrutura não-lineares e em ordem maiores merece um estudo mais aprofundado [CCJF09]. O estudo do efeito Rees-Sciama, e de como modificações da gravidade podem afetar também regimes não-lineares é importante para o futuro dessas teorias.

Referências Bibliográficas

- [AAB⁺13] Luca Amendola, Stephen Appleby, David Bacon, Tessa Baker, Marco Baldi, Nicola Bartolo, Alain Blanchard, Camille Bonvin, Stefano Borgani, and et al. Cosmology and fundamental physics with the euclid satellite. *Living Reviews in Relativity*, 16(1), Sep 2013.
- [ANB⁺19] F Avila, C P Novaes, A Bernui, E de Carvalho, and J P Nogueira-Cavalcante. The angular scale of homogeneity in the local universe with the sdss blue galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 488(1):1481–1487, Jul 2019.
- [BAA⁺16] Philip Bull, Yashar Akrami, Julian Adamek, Tessa Baker, Emilio Bellini, Jose Beltrán Jiménez, Eloisa Bentivegna, Stefano Camera, Sébastien Clesse, Jonathan H. Davis, and et al. Beyond Λ cdm: Problems, solutions, and the road ahead. *Physics of the Dark Universe*, 12:56–99, Jun 2016.
- [Bar80] James M. Bardeen. Gauge invariant cosmological perturbations. 22(46):1882–1905, 1980.
- [BKLY15] Yuri L. Bolotin, Alexander Kostenko, Oleg A. Lemets, and Danylo A. Yerokhin. Cosmological evolution with interaction between dark energy and dark matter. *International Journal of Modern Physics D*, 24(03):1530007, Feb 2015.
- [BMRT07] A. BERNUI, B. MOTA, M. J. REBOUÇAS, and R. TAVAKOL. A note on the large-angle anisotropies in the wmap cut-sky maps. *International Journal of Modern Physics D*, 16(02n03):411–420, Feb 2007.
- [BR10] A. Bernui and M. J. Rebouças. Non-gaussianity in the foreground-reduced cmb maps. *Physical Review D*, 81(6), Mar 2010.
- [Bra04] Brandenberger. The early universe and observational cosmology. *Lecture Notes in Physics*, 2004.

- [BTV06] Armando Bernui, Constantino Tsallis, and Thyrso Villela. Temperature fluctuations of the cosmic microwave background radiation: A case of non-extensivity? *Physics Letters A*, 356(6):426–430, Aug 2006.
- [But88] Eugene Butkov. *Fisica matematica*. Livros Tecnicos e Cientificos, Rio de Janeiro, 1988.
- [BVR16] José Luis Bernal, Licia Verde, and Adam G. Riess. The trouble with h_0 . *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2016(10):019–019, Oct 2016.
- [Car88] Manfredo Carmo. *Geometria Riemanniana*. Instituto de Matematica Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1988.
- [CCJF09] Yan-Chuan Cai, Shaun Cole, Adrian Jenkins, and Carlos Frenk. Towards accurate modelling of the integrated sachs-wolfe effect: the non-linear contribution. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 396(2):772–778, Jun 2009.
- [Cea18a] Planck Collaboration and N. Aghanim et al. Planck 2018 results. vi. cosmological parameters, 2018.
- [Cea18b] Planck Collaboration and Y. Akrami et al. Planck 2018 results. i. overview and the cosmological legacy of planck, 2018.
- [Cea19] Planck Collaboration and N. Aghanim et al. Planck 2018 results. v. cmb power spectra and likelihoods, 2019.
- [CFPS12] Timothy Clifton, Pedro G. Ferreira, Antonio Padilla, and Constantinos Skordis. Modified gravity and cosmology. *Physics Reports*, 513(1-3):1–189, Mar 2012.
- [CGLY19] Yow-Chun Chen, Chao-Qiang Geng, Chung-Chi Lee, and Hongwei Yu. Matter power spectra in viable $f(r)$ gravity models with dynamical background. *The European Physical Journal C*, 79(2), Jan 2019.
- [CL95] Peter Coles and Francesco Lucchin. Cosmology, the origin and evolution of cosmic structure. *Chichester: Wiley, —c1995*, -1, 01 1995.
- [CLC⁺14] Y.-C. Cai, B. Li, S. Cole, C. S. Frenk, and M. Neyrinck. The integrated sachs-wolfe effect in $f(r)$ gravity. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 439(3):2978–2989, Feb 2014.

- [CLF10] Salvatore Capozziello, Mariafelicia De Laurentis, and Valerio Faraoni. A bird's eye view of $f(r)$ -gravity. *The Open Astronomy Journal*, 3(1):49–72, 2010.
- [Coo02] Asantha Cooray. Integrated sachs-wolfe effect: large scale structure correlation. *Physical Review D*, 65(10), Apr 2002.
- [CSSA11] M. Campista, B. Santos, J. Santos, and J.S. Alcaniz. Cosmological consequences of exponential gravity in palatini formalism. *Physics Letters B*, 699(5):320–324, May 2011.
- [DPRW65] R. H. Dicke, P. J. E. Peebles, P. G. Roll, and D. T. Wilkinson. Cosmic Black-Body Radiation. , 142:414–419, July 1965.
- [Dur08] Ruth Durrer. *The cosmic microwave background*. Cambridge University Press, Cambridge, UK New York, 2008.
- [EH98] Daniel J. Eisenstein and Wayne Hu. Baryonic features in the matter transfer function. *The Astrophysical Journal*, 496(2):605–614, Apr 1998.
- [Ein52] A. Einstein. *Cosmological considerations on the general theory of relativity*, pages 175–188. 1952.
- [Fer17] Pedro G. Ferreira. *A Teoria Perfeita: Uma biografia da relatividade*. 2017.
- [Fre09] K. Freese. Review of observational evidence for dark matter in the universe and in upcoming searches for dark stars. *EAS Publications Series*, 36:113–126, 2009.
- [Gam46] G. Gamow. Expanding universe and the origin of elements. *Phys. Rev.*, 70:572–573, Oct 1946.
- [GCNR12] Tommaso Giannantonio, Robert Crittenden, Robert Nichol, and Ashley J. Ross. The significance of the integrated sachs-wolfe effect revisited. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 426(3):2581–2599, Oct 2012.
- [GMP09] R Gannouji, B Moraes, and D Polarski. The growth of matter perturbations in $f(r)$ models. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2009(02):034–034, Feb 2009.
- [GSC⁺08] Tommaso Giannantonio, Ryan Scranton, Robert G. Crittenden, Robert C. Nichol, Stephen P. Boughn, Adam D. Myers, and Gordon T. Richards. Combined analysis of the integrated sachs-wolfe effect and cosmological implications. *Physical Review D*, 77(12), Jun 2008.

- [HAF19] Renier Hough, Amare Abebe, and Stefan Ferreira. $f(r)$ -gravity models constrained with cosmological data, 2019.
- [HKB⁺15] Dragan Huterer, David Kirkby, Rachel Bean, Andrew Connolly, Kyle Dawson, Scott Dodelson, August Evrard, Bhuvnesh Jain, Michael Jarvis, Eric Linder, and et al. Growth of cosmic structure: Probing dark energy beyond expansion. *Astroparticle Physics*, 63:23–41, Mar 2015.
- [HS07] Wayne Hu and Ignacy Sawicki. Models of $f(r)$ cosmic acceleration that evade solar system tests. *Physical Review D*, 76(6), Sep 2007.
- [Hub29] Edwin Hubble. A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae. *Proceedings of the National Academy of Science*, 15(3):168–173, March 1929.
- [Isl92] J. N. Islam. *An Introduction to Mathematical Cosmology*. Cambridge University Press, 1 edition, 1992.
- [JSP12] Luisa Jaime, Marcelo Salgado, and Leonardo Patino. Cosmology in $f(r)$ exponential gravity, 2012.
- [KMB16] Shahram Khosravi, Amir Mollazadeh, and Shant Baghran. Isw-galaxy cross correlation: a probe of dark energy clustering and distribution of dark matter tracers. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2016(09):003–003, Sep 2016.
- [Kob86] Donald H. Kobe. Helmholtz’s theorem revisited. *American Journal of Physics*, 54(6):552–554, Jun 1986.
- [KP18] Lavrentios Kazantzidis and Leandros Perivolaropoulos. Evolution of the f_8 tension with the planck15/cdm determination and implications for modified gravity theories. *Physical Review D*, 97(10), May 2018.
- [Kra14] Helge Kragh. Historical aspects of post-1850 cosmology. 2014.
- [Lif46] E. M. Lifshitz. On the gravitational stability of the expanding universe. *Zhurnal Eksperimentalnoi i Teoreticheskoi Fiziki*, 16:587–602, 1946.
- [LL75] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *The classical theory of fields*. Pergamon Press, Oxford New York, 1975.
- [Mis17] Charles Misner. *Gravitation*. Princeton University Press, Princeton, N.J, 2017.

- [MP19] Nareg Mirzaturyan and Elena Pierpaoli. An accurate fitting function for scale-dependent growth rate in $f(r)$ gravity. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2019(09):066–066, Sep 2019.
- [MSY11] HAYATO MOTOHASHI, ALEXEI A. STAROBINSKY, and JUN’ICHI YOKOYAMA. $f(r)$ gravity and its cosmological implications. *International Journal of Modern Physics D*, 20(08):1347–1355, Aug 2011.
- [Nis14] A. J. Nishizawa. The integrated Sachs-Wolfe effect and the Rees-Sciama effect. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2014(6):6B110–0, Jun 2014.
- [PAG⁺99] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R. A. Knop, P. Nugent, P. G. Castro, S. Deustua, S. Fabbro, A. Goobar, D. E. Groom, and et al. Measurements of Ω_m and Ω_Λ from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, 517(2):565–586, Jun 1999.
- [Pet20] A. Yu. Petrov. Introduction to modified gravity, 2020.
- [PS07] Levon Pogosian and Alessandra Silvestri. The pattern of growth in viable $f(r)$ cosmologies, 2007.
- [Pug17] Anna Pugno. *Gauge transformations and gauge-invariant cosmological perturbations*. PhD thesis, Università degli Studi di Padova, 2017.
- [PW65] A. A. Penzias and R. W. Wilson. A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s. , 142:419–421, July 1965.
- [RFC⁺98] Adam G. Riess, Alexei V. Filippenko, Peter Challis, Alejandro Clocchiatti, Alan Diercks, Peter M. Garnavich, Ron L. Gilliland, Craig J. Hogan, Saurabh Jha, Robert P. Kirshner, and et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, 116(3):1009–1038, Sep 1998.
- [Rie73] Bernhard Riemann. *On the Hypotheses Which Lie at the Bases of Geometry*. 01 1873.
- [RK67] Wolfe R. K., Sachs; A. M. Perturbations of a cosmological model and angular variations of the microwave background. 147:73–90, 1967.
- [RS68] M. J. REES and D. W. SCIAMA. Large-scale density inhomogeneities in the universe. *Nature*, 217(5128):511–516, Feb 1968.
- [SF10] Thomas P. Sotiriou and Valerio Faraoni. $f(r)$ theories of gravity. *Reviews of Modern Physics*, 82(1):451–497, Mar 2010.

- [Sta07] A. A. Starobinsky. Disappearing cosmological constant in $f(r)$ gravity. *JETP Letters*, 86(3):157–163, Oct 2007.
- [Str97] Norbert Straumann. Proof of a decomposition theorem for symmetric tensors on spaces with constant curvature. *Annalen Phys.*, 17:609–611, 1997. [Annalen Phys.520,609(2008)].
- [Tsu07] Shinji Tsujikawa. Matter density perturbations and effective gravitational constant in modified gravity models of dark energy. *Physical Review D*, 76(2), Jul 2007.
- [Vis05] Matt Visser. Cosmography: Cosmology without the einstein equations. *General Relativity and Gravitation*, 37(9):1541–1548, Sep 2005.
- [VTR19] Licia Verde, Tommaso Treu, and Adam G. Riess. Tensions between the early and late universe. *Nature Astronomy*, 3(10):891–895, Sep 2019.
- [Wei08] Steven Weinberg. *Cosmology*. Oxford University Press, Oxford New York, 2008.
- [ZVA19] Winfried Zimdahl, Hermano Velten, and William Algoner. Matter growth in imperfect fluid cosmology. *Universe*, 5(3):68, Mar 2019.