



Observatório
Nacional

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

COSMOGRAFIA COM ONDAS GRAVITACIONAIS

JONATHAN SILVA DE MORAIS

RIO DE JANEIRO

2026

Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação

Observatório Nacional

Programa de Pós-Graduação

Dissertação de Mestrado

COSMOGRAFIA COM ONDAS GRAVITACIONAIS

por

Jonathan Silva de Moraes

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação em Astronomia do Observatório Nacional, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestre em Astronomia.

Orientador: Prof. Jailson Sousa de Alcaniz

Rio de Janeiro, RJ – Brasil

31 de Julho de 2026

M827

Morais, Jonathan Silva de

Cosmografia com Ondas Gravitacionais [Rio de Janeiro]
2026.

xxiv, 107 p. 29,7 cm: graf. il. tab.

Dissertação (mestrado) - Observatório Nacional - Rio de
Janeiro, 2026.

1. Cosmografia. 2. Cosmologia. 3. Ondas Gravitacionais.
I. Observatório Nacional. II. Título.

CDU 000.000.000

“COSMOGRAFIA COM ONDAS GRAVITACIONAIS”

JONATHAN SILVA DE MORAIS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ASTRONOMIA DO OBSERVATÓRIO NACIONAL COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ASTRONOMIA.

Aprovada por:

Prof. Jailson Sousa de Alcaniz – Observatório Nacional
(Orientador)

Dr. Carlos André Paes Bengaly Junior – Observatório
Nacional

Dra. Leila Lobato Graef – Universidade Federal
Fluminense

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

31 DE JULHO DE 2026

*Dedico este trabalho à minha
família e à minha noiva, com
profunda gratidão por todo o
amor, apoio e presença ao longo
desta jornada. Obrigado por
estarem sempre comigo.*

Agradecimentos

A jornada até este momento continua sendo como navegar por mares desconhecidos. Se, em minha monografia, cada desafio, vitória e fracasso já se revelavam como oportunidades de descoberta e crescimento, nesta dissertação essa travessia ganhou novas profundidades. O caminho tornou-se mais amplo, as águas por vezes mais agitadas, e os horizontes mais distantes. Ainda assim, ao longo dessa viagem, encontrei novamente faróis, âncoras e ventos favoráveis que iluminaram meu percurso, mantiveram-me firme e me impulsionaram adiante. Este trabalho, portanto, não é fruto de uma caminhada solitária, mas de uma construção coletiva, sustentada pelo amor, pela paciência, pelo incentivo e pela presença de pessoas fundamentais.

Agradeço, primeiramente, à minha família. À minha mãe, Katilene, que sempre me apoiou e me ensinou muito além das paredes da escola, cultivando em mim o hábito de questionar e de buscar respostas. À minha irmã Stephany, meu porto seguro quando me senti à deriva, cuja criatividade, leveza e sensibilidade me ensinaram a olhar para o mundo de novas maneiras e a encontrar beleza mesmo nos momentos mais difíceis. Ao meu pai Luciano, cuja força e perseverança me mostraram o valor da resiliência. Com sua coragem, ele me ensinou a nunca desistir, e um dia espero ser, ao menos, metade do homem que ele é.

Agradeço também à minha noiva Amanda, que com todo seu amor, me acolheu e confortou nos momentos mais desafiadores. Sua presença foi abrigo em dias de incerteza, serenidade em meio às tempestades e motivação constante para que eu continuasse. Ver seu esforço, sua dedicação e sua força também me inspira profundamente. Ter você ao meu lado tornou esta travessia mais leve, mais bonita e mais cheia de sentido.

Aos meus avós Helena e Normando, cuja sabedoria, carinho e história sempre estiveram presentes em minha formação, ofereço meu sincero agradecimento. Aos familiares que já partiram — avó Antônia, avô Gonzaga, tia Luciene e prima Kelly —, deixo também minha homenagem. Vocês não foram apenas faróis; foram estrelas que continuam a iluminar, de algum lugar, as noites mais escuras desta caminhada.

Agradeço ao meu orientador, Jailson Alcaniz, pela orientação, confiança e paciência ao longo do desenvolvimento desta dissertação. Sua experiência, rigor científico e clareza foram fundamentais para que este trabalho pudesse amadurecer. Suas sugestões e críticas contribuíram de forma decisiva não apenas para a construção desta pesquisa, mas também

para minha formação acadêmica e científica.

Agradeço também a Rodrigo Gonçalves, meu ex-orientador, por ter desempenhado um papel essencial em etapas anteriores da minha trajetória. Sua orientação, incentivo e confiança foram importantes para que eu pudesse construir as bases que me permitiram chegar até aqui.

Aos amigos e colegas que estiveram presentes ao longo desta jornada, deixo minha gratidão. As conversas, trocas de ideias, críticas construtivas e momentos de descontração foram essenciais para tornar o caminho mais leve e para renovar minhas forças nos momentos de cansaço. A presença de vocês foi como uma tripulação generosa, ajudando-me a atravessar águas difíceis e a seguir em direção ao horizonte.

Por fim, agradeço novamente ao tempo, que me ensinou que a paciência e a persistência são chaves capazes de abrir portas que antes pareciam inalcançáveis. Agradeço a todos aqueles que, direta ou indiretamente, contribuíram para esta etapa da minha vida. A todos vocês, minha mais sincera gratidão.

COSMOGRAFIA COM ONDAS GRAVITACIONAIS

RESUMO

Neste trabalho, investigamos o potencial de sirenes-padrão de ondas gravitacionais para restringir parâmetros cosmológicos de maneira independente de um modelo cosmológico específico. Consideramos catálogos simulados de *bright sirens*, assumindo a identificação de contrapartes eletromagnéticas e, portanto, a determinação independente do redshift das fontes. A análise é realizada para três configurações observacionais: Advanced LIGO, Einstein Telescope e DECIGO, permitindo comparar o desempenho de detectores atuais e futuros na reconstrução da relação distância de luminosidade–redshift. Para descrever a expansão cósmica, utilizamos a expansão cosmológica de Taylor até $\mathcal{O}(z^3)$ e os aproximantes de Padé $P_{2,1}$ e $P_{3,2}$, avaliando suas propriedades de convergência e seu impacto nas restrições dos parâmetros H_0 , q_0 e j_0 , além dos parâmetros de ordem superior s_0 e l_0 no caso de Padé $P_{3,2}$. Estudamos dois cenários complementares: uma análise em função da razão sinal-ruído dos eventos e uma análise em função do número total de detecções. Os resultados mostram que o Advanced LIGO é principalmente sensível à determinação de H_0 , alcançando precisões relativas da ordem de 2% na análise por SNR e aproximadamente 1.1% nos cenários mais otimistas em número de eventos. O Einstein Telescope melhora significativamente as restrições, atingindo precisão subpercentual para H_0 , da ordem de 0.5%–0.6%, e restringindo q_0 com precisão relativa de aproximadamente 16%–19%. O DECIGO apresenta o melhor desempenho geral, alcançando precisões de cerca de 0.25%–0.30% para H_0 , 6%–10% para q_0 e tornando o parâmetro jerk j_0 observacionalmente informativo, com precisão relativa de aproximadamente 16% no cenário mais favorável. Em geral, a expansão de Taylor fornece as melhores precisões para os parâmetros comuns dentro de seu domínio de validade, enquanto os aproximantes de Padé são importantes para avaliar a estabilidade da reconstrução cosmológica em intervalos de redshift mais amplos. Concluimos que sirenes-padrão de ondas gravitacionais constituem uma ferramenta promissora e complementar para investigar a história de expansão do Universo e testar possíveis desvios em relação ao modelo cosmológico padrão.

COSMOGRAPHY WITH GRAVITATIONAL WAVES

ABSTRACT

In this work, we investigate the potential of gravitational-wave standard sirens to constrain cosmographic parameters independently of a specific cosmological model. We consider simulated catalogs of *bright sirens*, assuming the identification of electromagnetic counterparts and, therefore, an independent determination of the source redshifts. The analysis is performed for three observational configurations: Advanced LIGO, Einstein Telescope, and DECIGO, allowing us to compare the performance of current and future detectors in reconstructing the luminosity distance–redshift relation. To describe the cosmic expansion, we use the Taylor cosmographic expansion up to $\mathcal{O}(z^3)$ and the Padé approximants $P_{2,1}$ and $P_{3,2}$, evaluating their convergence properties and their impact on the constraints of the parameters H_0 , q_0 , and j_0 , as well as the higher-order parameters s_0 and l_0 in the case of Padé $P_{3,2}$. We study two complementary scenarios: an analysis as a function of the signal-to-noise ratio of the events and an analysis as a function of the total number of detections. The results show that Advanced LIGO is mainly sensitive to the determination of H_0 , reaching relative precisions of about 2% in the SNR-based analysis and approximately 1.1% in the most optimistic scenarios based on the number of events. The Einstein Telescope significantly improves the constraints, reaching subpercent precision for H_0 , of about 0.5%–0.6%, and constraining q_0 with relative precision of approximately 16%–19%. DECIGO provides the best overall performance, reaching precisions of about 0.25%–0.30% for H_0 , 6%–10% for q_0 , and making the jerk parameter j_0 observationally informative, with relative precision of approximately 16% in the most favorable scenario. In general, the Taylor expansion provides the best precision for the common set of parameters within its domain of validity, while the Padé approximants are important for assessing the stability of the cosmographic reconstruction over wider redshift intervals. We conclude that gravitational-wave standard sirens constitute a promising and complementary tool for investigating the expansion history of the Universe and testing possible deviations from the standard cosmological model.

Lista de Figuras

2.1	Ilustração de um sistema de coordenadas comóveis em um Universo em expansão, no qual os objetos que acompanham o fluxo de Hubble permanecem em posições fixas. Adaptado de <i>An Introduction to Modern Cosmology</i> , de Andrew R. Liddle (2015).	9
2.2	Diagrama de Hubble, evidenciando a relação linear entre a velocidade de recessão das galáxias e sua distância. A inclinação da reta corresponde à constante de Hubble. Adaptado de <i>A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae</i> , de Edwin Hubble (1929).	10
2.3	Representação esquemática das três possíveis geometrias espaciais do Universo: aberta ($k = -1$), plana ($k = 0$) e fechada ($k = +1$). Em cada caso, triângulos ilustram as diferenças entre as somas de seus ângulos internos. Adaptado de <i>Geometry of the Universe</i> , de James Schombert (s.d.).	12
2.4	Evolução das densidades de energia da radiação, matéria e energia escura em função do fator de escala (em escala logarítmica). A radiação decai como a^{-4} , a matéria como a^{-3} , enquanto a energia escura permanece constante. A região sombreada indica a era dominada pela matéria e a linha vertical pontilhada marca o tempo atual ($a = 1$). Elaborado pelo autor (2026).	19
2.5	Representação das linhas de mundo do emissor e do observador, mantidos em coordenadas comóveis constantes, juntamente com os raios de luz que os conectam. Adaptado de <i>An Introduction to the Science of Cosmology</i> , de Derek Raine e E. G. Thomas (2001).	22
2.6	Comportamento do fator de escala a em função do redshift z e representação do raio de convergência da série de Taylor. Adaptado de <i>The Hubble Series: Convergence Properties and Redshift Variables</i> , de Céline Cattoën e Matt Visser (2007), arXiv:0710.1887.	33
3.1	Função de densidade de probabilidade em redshift para a formação de fontes de ondas gravitacionais no contexto do modelo cosmológico Λ CDM ($H_0 = 67.68$ e $\Omega_m = 0.31$), considerando eventos do tipo <i>bright sirens</i>	50

3.2	Curvas de sensibilidade dos detectores DECIGO, Advanced LIGO e Einstein Telescope na configuração ET-D, representadas em termos do <i>strain</i> . A região sombreada indica a faixa típica de frequências associada a sistemas binários compactos. Elaborado pelo autor com o GWPlotter, ferramenta apresentada em <i>Gravitational-wave Sensitivity Curves</i> , de Christopher J. Moore, Robert H. Cole e Christopher P. L. Berry (2015), arXiv:1408.0740.	55
3.3	Resumo dos catálogos simulados de ondas gravitacionais utilizados na análise. No painel superior, apresentamos uma realização da distância de luminosidade $d_L(z)$ para os detectores Advanced LIGO (azul), Einstein Telescope (vermelho) e DECIGO (cinza). O destaque (inset) mostra um zoom na região de baixos redshifts ($0 < z < 0.2$), evidenciando a distribuição dos eventos do aLIGO, que se concentram nesse regime. No painel inferior, exibimos os erros fracionários associados a cada evento, incluindo as contribuições instrumentais, de lentes gravitacionais fracas e de velocidades peculiares. Observa-se que o termo devido às velocidades peculiares domina em baixos redshifts, enquanto o efeito de lenteamento gravitacional torna-se progressivamente mais relevante em maiores redshifts. As incertezas instrumentais refletem a sensibilidade de cada detector, sendo significativamente menores para os interferômetros de próxima geração (ET e DECIGO) em comparação ao aLIGO.	57
4.1	Distância de luminosidade em função do redshift para diferentes ordens da expansão cosmológica de Taylor (painel superior). A curva preta tracejada corresponde ao modelo fiducial Λ CDM adotado na análise. No painel inferior, apresentamos o desvio relativo entre cada aproximação de Taylor e o modelo fiducial. A região sombreada em cinza indica o limite de desvio de 1%, atingido pela expansão de terceira ordem em $z \approx 0.7$ (linha vertical pontilhada).	62
4.2	Distância de luminosidade em função do redshift para diferentes aproximações cosmológicas via polinômios de Padé (painel superior). As curvas correspondem às combinações $P_{1,1}$, $P_{2,1}$, $P_{2,2}$ e $P_{3,2}$, enquanto a linha preta tracejada representa o modelo fiducial Λ CDM adotado na análise. No painel inferior, apresentamos o desvio relativo entre cada aproximação de Padé e o modelo fiducial. A região sombreada em cinza indica o limite de desvio de 1%. A linha vertical pontilhada marca o redshift $z \approx 2.82$, no qual a aproximação $P_{3,2}$ atinge esse limite.	64

4.3	Número médio de eventos $\bar{N}$ em função do SNR para diferentes interferômetros de ondas gravitacionais. A primeira figura corresponde ao aLIGO, a segunda ao Einstein Telescope (ET) e a terceira ao DECIGO. No caso do aLIGO, todas as parametrizações consideradas — Taylor $\mathcal{O}(z^3)$, Padé (2, 1) e Padé (3, 2) — compartilham o mesmo limite superior em redshift para os dados, de modo que seus resultados coincidem e são representados por uma única distribuição. Para os detectores ET e DECIGO, comparam-se explicitamente os resultados de Taylor $\mathcal{O}(z^3)$, Padé (2, 1) e Padé (3, 2), evidenciando o aumento no número médio de eventos associado à extensão do alcance em redshift na parametrização de ordem superior. Os gráficos estão apresentados em escala logarítmica no eixo vertical.	71
4.4	Incertezas dos parâmetros cosmológicos em função da razão sinal-ruído (SNR). O primeiro, segundo e terceiro painéis apresentam, respectivamente, σ_{H_0} , σ_{q_0} e σ_{j_0} . Os resultados são mostrados para diferentes interferômetros: aLIGO (azul), Einstein Telescope — ET (vermelho) e DECIGO (verde). As parametrizações são distinguidas pelo estilo das curvas: linhas contínuas correspondem à expansão de Taylor $\mathcal{O}(z^3)$, linhas tracejadas ao aproximante de Padé (2, 1) e linhas pontilhadas ao aproximante de Padé (3, 2). O eixo horizontal está em escala logarítmica.	72
4.5	Incertezas associadas aos parâmetros cosmológicos de ordem superior em função da SNR. O primeiro painel apresenta σ_{s_0} e o segundo σ_{l_0} , obtidos a partir do aproximante de Padé (3, 2). Os resultados são mostrados para os interferômetros aLIGO (azul), Einstein Telescope — ET (vermelho) e DECIGO (verde). Esses parâmetros são exclusivos da parametrização de ordem superior, não estando definidos nas expansões de Taylor $\mathcal{O}(z^3)$ e Padé (2, 1). O eixo horizontal está em escala logarítmica.	73
4.6	Incertezas dos parâmetros cosmológicos em função do número de eventos N . O primeiro, segundo e terceiro painéis apresentam, respectivamente, σ_{H_0} , σ_{q_0} e σ_{j_0} . Os resultados são mostrados para diferentes interferômetros: aLIGO (azul), Einstein Telescope — ET (vermelho) e DECIGO (verde). As parametrizações são distinguidas pelo estilo das curvas: linhas contínuas correspondem à expansão de Taylor $\mathcal{O}(z^3)$, linhas tracejadas ao aproximante de Padé (2, 1) e linhas pontilhadas ao aproximante de Padé (3, 2). O eixo horizontal corresponde ao número de eventos simulados.	77

4.7	Incertezas associadas aos parâmetros cosmológicos de ordem superior em função do número de eventos N. O primeiro painel apresenta σ_{s_0} e o segundo σ_{l_0}, obtidos a partir do aproximante de Padé $(3, 2)$. Os resultados são mostrados para os interferômetros aLIGO (azul), Einstein Telescope — ET (vermelho) e DECIGO (verde). Esses parâmetros são exclusivos da parametrização de ordem superior, não estando definidos nas expansões de Taylor $\mathcal{O}(z^3)$ e Padé $(2, 1)$. O eixo horizontal corresponde ao número de eventos simulados.	79
-----	---	----

Lista de Tabelas

4.1	Parâmetros cosmológicos no modelo Λ CDM plano com $\Omega_m = 0.311$	60
4.2	Valores de redshift nos quais cada ordem da expansão de Taylor atinge um desvio máximo de 1% em relação ao modelo fiducial Λ CDM.	61
4.3	Valores de redshift nos quais cada combinação dos aproximantes de Padé atinge um desvio máximo de 1% em relação ao modelo fiducial Λ CDM. . .	65
4.4	Número total esperado de detecções (N_e) para cada interferômetro e número efetivo de eventos (N_z) dentro do regime de validade das parametrizações cosmológicas.	66
A.1	Estimativas dos parâmetros cosmológicos obtidas para o interferômetro aLIGO utilizando a expansão de Taylor, em função dos intervalos de razão sinal-ruído (SNR) e do número total de eventos simulados. São apresentados os valores médios de H_0 , q_0 e j_0 , suas incertezas assimétricas e as respectivas precisões relativas.	96
A.2	Resultados numéricos para o interferômetro aLIGO utilizando a parametrização Padé $P_{2,1}$, em função dos intervalos de razão sinal-ruído (SNR) e do número total de eventos simulados. A tabela apresenta as estimativas de H_0 , q_0 e j_0 , juntamente com suas incertezas assimétricas e precisões relativas.	97
A.3	Resultados numéricos para o interferômetro aLIGO utilizando a parametrização Padé $P_{3,2}$, em função dos intervalos de razão sinal-ruído (SNR) e do número total de eventos simulados. A tabela apresenta as estimativas de H_0 , q_0 e j_0 , juntamente com suas incertezas assimétricas e precisões relativas.	98
A.4	Estimativas dos parâmetros cosmológicos de ordem superior s_0 e l_0 para o interferômetro aLIGO utilizando a parametrização Padé $P_{3,2}$, em função dos intervalos de razão sinal-ruído (SNR) e do número total de eventos simulados. Devido às grandes incertezas associadas a esses parâmetros, as precisões relativas $\sigma_\theta/ \theta $ não são apresentadas, pois não fornecem uma medida quantitativa informativa do poder de restrição. As incertezas reportadas indicam que s_0 e l_0 permanecem fracamente restringidos nesta configuração.	99

A.5	Resultados numéricos para o Einstein Telescope utilizando a expansão de Taylor, em função dos intervalos de razão sinal-ruído (SNR) e do número total de eventos simulados. A tabela apresenta as estimativas de H_0 , q_0 e j_0 , juntamente com suas incertezas assimétricas e precisões relativas.	100
A.6	Resultados numéricos para o Einstein Telescope utilizando a parametrização Padé $P_{2,1}$, em função dos intervalos de razão sinal-ruído (SNR) e do número total de eventos simulados. A tabela apresenta as estimativas de H_0 , q_0 e j_0 , juntamente com suas incertezas assimétricas e precisões relativas.	101
A.7	Resultados numéricos para o Einstein Telescope utilizando a parametrização Padé $P_{3,2}$, em função dos intervalos de razão sinal-ruído (SNR) e do número total de eventos simulados. A tabela apresenta as estimativas de H_0 , q_0 e j_0 , juntamente com suas incertezas assimétricas e precisões relativas.	102
A.8	Estimativas dos parâmetros cosmográficos de ordem superior s_0 e l_0 para o Einstein Telescope utilizando a parametrização Padé $P_{3,2}$, em função dos intervalos de razão sinal-ruído (SNR) e do número total de eventos simulados. Devido às grandes incertezas associadas a esses parâmetros, as precisões relativas $\sigma_\theta/ \theta $ não são apresentadas, pois não fornecem uma medida quantitativa informativa do poder de restrição. As incertezas reportadas indicam que s_0 e l_0 permanecem fracamente restringidos em comparação com os parâmetros cosmográficos de menor ordem.	103
A.9	Resultados numéricos para o DECIGO utilizando a expansão de Taylor, em função dos intervalos de razão sinal-ruído (SNR) e do número total de eventos simulados. A tabela apresenta as estimativas de H_0 , q_0 e j_0 , juntamente com suas incertezas assimétricas e precisões relativas.	104
A.10	Resultados numéricos para o DECIGO utilizando a parametrização Padé $P_{2,1}$, em função dos intervalos de razão sinal-ruído (SNR) e do número total de eventos simulados. A tabela apresenta as estimativas de H_0 , q_0 e j_0 , juntamente com suas incertezas assimétricas e precisões relativas.	105
A.11	Resultados numéricos para o DECIGO utilizando a parametrização Padé $P_{3,2}$, em função dos intervalos de razão sinal-ruído (SNR) e do número total de eventos simulados. A tabela apresenta as estimativas de H_0 , q_0 e j_0 , juntamente com suas incertezas assimétricas e precisões relativas.	106

A.12 Estimativas dos parâmetros cosmológicos de ordem superior s_0 e l_0 para o DECIGO utilizando a parametrização Padé $P_{3,2}$, em função dos intervalos de razão sinal-ruído (SNR) e do número total de eventos simulados. Devido às grandes incertezas associadas a esses parâmetros, as precisões relativas $\sigma_\theta/ \theta $ não são apresentadas, pois não fornecem uma medida quantitativa informativa do poder de restrição. As incertezas reportadas indicam que s_0 e l_0 permanecem fracamente restringidos em comparação com os parâmetros cosmológicos de menor ordem.	107
---	-----

Sumário

Lista de Figuras	xv
Lista de Tabelas	xix
1 Introdução	1
2 Cosmologia	5
2.1 Geometria do Espaço-Tempo	6
2.2 Universo em Expansão	8
2.3 Equações de Friedmann	11
2.4 Parâmetros de Densidade	16
2.5 Distâncias Cosmológicas	20
2.5.1 Desvio para o Vermelho	21
2.5.2 Distância Comóvel	23
2.5.3 Distância de Luminosidade	24
2.6 Modelo Cosmológico Padrão	25
2.7 Cosmografia	27
2.7.1 Abordagem via Série de Taylor	27
2.7.2 Abordagem via Polinômios de Padé	33
3 Ondas Gravitacionais	39
3.1 Gravitação Linearizada	39
3.2 Ondas Gravitacionais em Cosmologia	42
3.2.1 Ondas Gravitacionais como Sirenes Padrão	43
3.2.2 <i>Bright Sirens</i> e Interferômetros da 3 ^a Geração	47
3.3 Simulações de Ondas Gravitacionais	48
3.3.1 Distribuição das Fontes Simuladas	49
3.3.2 Detecção de Ondas Gravitacionais	51
4 Análise e Resultados	59
4.1 Taylor vs Padé: Desvio em relação ao modelo Λ CDM	59
4.1.1 Convergência e Validade da Expansão de Taylor	61

4.1.2	Convergência e Validade da Expansão de Padé	61
4.2	Restrição dos Parâmetros Cosmográficos	65
4.2.1	Inferência Bayesiana	67
4.2.2	Resultados da Análise via <i>Signal-to-noise</i> ratio (SNR)	68
4.2.3	Resultados da Análise via Número de Eventos (N)	75
5	Conclusões e Perspectivas Futuras	83
	Referências Bibliográficas	89
A	Resultados Numéricos das Análises via SNR e Número de Eventos	95

Capítulo 1

Introdução

O rápido desenvolvimento da astronomia de ondas gravitacionais abriu uma nova janela observacional para a investigação do Universo, permitindo avanços simultâneos em astrofísica, física fundamental e cosmologia [1]. Desde a primeira detecção direta de um sinal de onda gravitacional pelo Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO), em 2015 [2], uma rede global de detectores de segunda geração, composta por LIGO [3], Virgo [4] e KAGRA [5], tem observado um número crescente de coalescências de sistemas binários compactos [6]. Essas detecções consolidaram as ondas gravitacionais como uma nova ferramenta observacional para estudar populações astrofísicas compactas e, ao mesmo tempo, como uma sonda independente da expansão cósmica.

Nas próximas décadas, espera-se que a operação de interferômetros com maior sensibilidade amplie significativamente o alcance observacional da astronomia de ondas gravitacionais. Detectores terrestres de terceira geração, como o Einstein Telescope (ET) [7], e futuros detectores espaciais, como o Deci-hertz Interferometer Gravitational-wave Observatory (DECIGO) [8], deverão observar coalescências de sistemas compactos a distâncias cosmológicas muito superiores às atualmente acessíveis. Em particular, esses instrumentos permitirão detectar eventos em redshifts intermediários e altos, fornecendo uma amostra mais ampla da história de expansão do Universo e tornando possível investigar parâmetros cosmológicos para além da determinação local da constante de Hubble.

Do ponto de vista cosmológico, ondas gravitacionais provenientes de coalescências de binárias compactas são especialmente relevantes por atuarem como *sirenes-padrão* [9]. Diferentemente de muitos indicadores de distância eletromagnéticos, a amplitude do sinal gravitacional permite inferir diretamente a distância de luminosidade da fonte, sem a necessidade de calibração por meio da escada de distâncias cósmicas [10; 11]. No entanto, o redshift da fonte não pode ser obtido apenas a partir do sinal gravitacional, devido à degenerescência entre as massas intrínsecas do sistema binário e o redshift cosmológico. Dessa forma, a obtenção de informação independente sobre o redshift constitui um dos principais desafios para o uso de ondas gravitacionais em cosmologia.

Uma solução direta para esse problema ocorre quando o evento de onda gravitacio-

nal possui uma contraparte eletromagnética identificada, permitindo associar a fonte a uma galáxia hospedeira e medir seu redshift de forma independente. O exemplo mais emblemático desse cenário é o evento GW170817, associado à fusão de duas estrelas de nêutrons e observado em coincidência com a explosão de raios gama GRB170817A [12]. Eventos desse tipo são conhecidos como *bright sirens* [13] e fornecem uma relação direta entre distância de luminosidade e redshift. Com o aumento da sensibilidade dos detectores futuros, espera-se que o número de *bright sirens* cresça substancialmente, incluindo fontes localizadas em intervalos de redshift mais amplos [14; 15].

Em contraste, eventos sem contraparte eletromagnética identificada são classificados como *dark sirens* [16]. Nesse caso, a informação de redshift deve ser inferida estatisticamente, por meio de catálogos de galáxias, modelos populacionais ou correlações com a estrutura em larga escala. Embora essas abordagens sejam promissoras, elas introduzem hipóteses adicionais e incertezas associadas à modelagem astrofísica e à completude dos catálogos. Nesta dissertação, concentramos nossa análise em *bright sirens*, assumindo que a identificação da contraparte eletromagnética permite determinar o redshift de forma independente. Essa hipótese possibilita estudar diretamente a relação distância de luminosidade–redshift, $d_L(z)$, de maneira pouco dependente de modelos cosmológicos específicos.

Uma forma de reconstruir a relação $d_L(z)$ sem assumir previamente um modelo dinâmico para o conteúdo do Universo é por meio da abordagem cosmográfica [17]. A cosmografia baseia-se apenas no princípio cosmológico, descrevendo a expansão cósmica por meio de uma expansão cinemática do fator de escala em torno do tempo presente. A formulação cosmográfica tradicional é frequentemente construída por meio de uma expansão de Taylor da distância de luminosidade em potências do redshift [18]. Essa abordagem é simples e eficiente em baixos redshifts, sendo particularmente adequada para eventos próximos, como aqueles mais facilmente acessíveis por detectores de segunda geração. Entretanto, séries de Taylor truncadas apresentam limitações importantes quando aplicadas a intervalos de redshift mais amplos, uma vez que suas propriedades de convergência se deterioram à medida que fontes mais distantes são incluídas [19]. Essa limitação torna-se especialmente relevante no contexto de detectores futuros, como o ET e o DECIGO, cuja maior sensibilidade permitirá acessar regiões mais profundas da história cósmica.

Motivada por essa dificuldade, esta dissertação também considera parametrizações cosmográficas baseadas em aproximantes de Padé [20]. Diferentemente de uma série polinomial truncada, os aproximantes de Padé escrevem a distância de luminosidade como uma razão entre polinômios, podendo apresentar melhor comportamento de convergência e maior estabilidade em redshifts intermediários e altos [21]. Essa característica torna os aproximantes de Padé particularmente úteis para avaliar até que ponto a cosmografia pode ser estendida quando se utilizam catálogos simulados de ondas gravitacionais provenientes de detectores de próxima geração.

Neste trabalho, investigamos a capacidade de *bright sirens* de ondas gravitacionais em restringir parâmetros cosmológicos, considerando três configurações observacionais: Advanced LIGO (aLIGO) [22], Einstein Telescope e DECIGO. Comparamos a expansão de Taylor até $\mathcal{O}(z^3)$ com os aproximantes de Padé $P_{2,1}$ e $P_{3,2}$, analisando o impacto da escolha da parametrização sobre as restrições de H_0 , q_0 e j_0 . No caso do aproximante de Padé $P_{3,2}$, também consideramos os parâmetros cosmológicos de ordem superior s_0 e l_0 , permitindo avaliar as limitações associadas ao aumento da dimensionalidade do espaço de parâmetros. Os resultados originais apresentados nesta dissertação são baseados em dois trabalhos: o primeiro, submetido para publicação [23], reúne os resultados obtidos com a expansão de Taylor, enquanto o segundo [24], atualmente em preparação, apresenta as análises realizadas com os aproximantes de Padé.

A análise é realizada a partir de catálogos simulados de *bright sirens*, assumindo que os eventos detectados possuem contrapartes eletromagnéticas e, portanto, redshifts conhecidos. Consideramos duas abordagens complementares. Na primeira, os eventos são organizados em bins de razão sinal-ruído (SNR), permitindo estudar como a qualidade individual dos sinais afeta as restrições cosmológicas. Na segunda, investigamos explicitamente o impacto do número total de eventos detectados, tratando o SNR como uma variável livre. Essa separação permite distinguir o papel da intensidade individual dos sinais do efeito estatístico associado ao tamanho da amostra.

O objetivo central desta dissertação é avaliar em que medida a cosmografia com ondas gravitacionais pode contribuir para a reconstrução da expansão cósmica em diferentes regimes observacionais. Em particular, buscamos identificar quais detectores são capazes de fornecer medidas competitivas de H_0 , quais configurações permitem restringir o parâmetro de desaceleração q_0 e em quais condições o parâmetro jerk j_0 pode se tornar observacionalmente informativo. Esse último ponto é especialmente relevante, pois desvios de j_0 em relação ao valor previsto pelo modelo Λ CDM, $j_0 = 1$, podem indicar uma dinâmica da aceleração cósmica distinta daquela produzida por uma constante cosmológica.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma. No Capítulo 2, revisamos os conceitos fundamentais de cosmologia utilizados ao longo da dissertação, incluindo a descrição geométrica do espaço-tempo, a expansão do Universo, as distâncias cosmológicas, o modelo cosmológico padrão e a abordagem cosmológica. No Capítulo 3, discutimos os principais aspectos teóricos e observacionais das ondas gravitacionais, com ênfase em sua aplicação à cosmologia, no conceito de *bright sirens* e nas simulações de fontes e detecções consideradas neste trabalho. No Capítulo 4, apresentamos a análise desenvolvida e os resultados obtidos, comparando diferentes parametrizações cosmológicas, detectores e cenários observacionais. Por fim, reunimos as principais conclusões do trabalho e discutimos suas implicações para o uso futuro de ondas gravitacionais na reconstrução da expansão cósmica. Os resultados numéricos são apresentados no Apêndice A.

Capítulo 2

Cosmologia

A cosmologia é o ramo da ciência dedicado ao estudo da origem, da evolução e da estrutura do Universo em sua totalidade. Seu objetivo central é responder questões fundamentais acerca da natureza do cosmos, investigando desde os primeiros instantes após o Big Bang até os cenários possíveis para o seu destino final [25].

Nas últimas décadas, o campo atravessa uma transição conceitual profunda, deixando de ser predominantemente qualitativo para assumir um caráter quantitativo, impulsionado pelo avanço instrumental e pela crescente precisão dos dados observacionais. Telescópios espaciais como o *Hubble Space Telescope* [26] e o *James Webb Space Telescope* [27] possibilitam a observação de galáxias em altos *redshifts*, enquanto sondas complementares, como as oscilações acústicas de bárions, fornecem uma régua padrão para mapear a expansão cósmica [28]. Paralelamente, a radiação cósmica de fundo em micro-ondas oferece uma descrição detalhada do Universo primordial, permitindo a determinação precisa dos parâmetros cosmológicos [29]. Mais recentemente, a detecção de ondas gravitacionais introduziu uma abordagem independente para medir distâncias cosmológicas, abrindo novas possibilidades para a determinação da constante de Hubble e testes do modelo cosmológico [30].

Diante da abundância de observáveis, experimentos e conjuntos de dados independentes, torna-se essencial estabelecer uma base teórica consistente capaz de organizar e interpretar essas informações de forma coerente. Nesse contexto, o início do século XXI foi marcado pela consolidação do chamado modelo cosmológico padrão, usualmente denominado modelo Λ CDM [31]. Esse modelo representa o atual consenso científico ao descrever o Universo como homogêneo e isotrópico em grandes escalas, dominado por matéria escura fria e energia escura, além de explicar com notável sucesso uma ampla gama de observações cosmológicas.

Apesar de seus êxitos, o modelo padrão não está isento de limitações. Persistem inconsistências observacionais relevantes, como as tensões associadas à determinação de parâmetros cosmológicos fundamentais, em especial a constante de Hubble [32], bem como questões conceituais relacionadas à natureza física da energia escura e da maté-

ria escura [33; 34]. Tais desafios motivam a busca por abordagens complementares que permitam testar a robustez do modelo sem assumir, a priori, uma dinâmica cosmológica específica.

Nesse cenário, a cosmografia [17] surge como uma ferramenta particularmente útil. Baseada apenas em princípios cinemáticos e na hipótese de homogeneidade e isotropia do Universo em grandes escalas, a cosmografia descreve a expansão cósmica por meio de séries de expansão em parâmetros observacionais, independentemente da forma funcional das equações de campo de Einstein. Essa abordagem permite uma análise mais agnóstica dos dados e oferece uma via alternativa para investigar possíveis discrepâncias entre observações e modelos dinâmicos. Assim, a cosmografia constitui um dos eixos centrais de discussão deste capítulo, sendo explorada como um instrumento para compreender e contextualizar as tensões atuais na cosmologia observacional.

2.1 Geometria do Espaço-Tempo

Em 1915, Albert Einstein formulou a Teoria da Relatividade Geral, fundamentada na ideia inovadora de que a gravitação não deve ser interpretada como uma força no sentido newtoniano clássico, mas como uma manifestação da geometria do espaço-tempo [35]. Essa reformulação conceitual decorre diretamente do princípio da equivalência, segundo o qual, localmente, os efeitos de um campo gravitacional são indistinguíveis daqueles observados em um sistema de referência acelerado. Tal princípio permite reinterpretar a gravidade como um efeito geométrico: corpos não são forçados a se mover, mas seguem as trajetórias naturais, chamadas de geodésicas, determinadas pela estrutura do espaço-tempo curvo [36].

O espaço-tempo é concebido como uma variedade quadridimensional que unifica as três dimensões espaciais e a dimensão temporal. Cada evento físico é descrito por um conjunto de quatro coordenadas $x^\mu = (t, x, y, z)$, e a noção de distância entre eventos é generalizada pelo intervalo espaço-temporal. Para dois eventos infinitesimalmente próximos, o elemento de linha é definido por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.1)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico. A métrica é, portanto, a quantidade fundamental da teoria: ela define comprimentos, ângulos, intervalos causais e determina a dinâmica das partículas por meio das equações geodésicas.

No caso particular de ausência de gravidade, o espaço-tempo é plano e descrito pela métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ [36], para a qual

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (2.2)$$

em unidades naturais ($c = 1$). Contudo, na presença de matéria e energia, a métrica

torna-se uma função das coordenadas, refletindo a curvatura do espaço-tempo. Assim, a gravitação manifesta-se como variação espacial e temporal das componentes de $g_{\mu\nu}$.

A curvatura associada a essa métrica é descrita matematicamente pelo tensor de Riemann,

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\alpha_{\nu\sigma} \Gamma^\rho_{\mu\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} \Gamma^\rho_{\nu\alpha}, \quad (2.3)$$

construído a partir das conexões de Christoffel,

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\alpha} (\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}). \quad (2.4)$$

As conexões expressam como vetores variam sob transporte paralelo, enquanto o tensor de Riemann mede a curvatura intrínseca do espaço-tempo [36]. Contraindo seus índices, obtêm-se o tensor de Ricci,

$$R_{\mu\nu} = R^\rho_{\mu\rho\nu}, \quad (2.5)$$

e o escalar de Ricci,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

que sintetizam informações relevantes sobre a curvatura.

A busca por uma equação de campo consistente levou Einstein a construir uma combinação geométrica cuja divergência covariante é identicamente nula, em conformidade com a conservação local de energia e momento [35]. Essa combinação é o tensor de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R, \quad (2.7)$$

o qual satisfaz

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0. \quad (2.8)$$

As equações de campo da Relatividade Geral são então dadas por

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.9)$$

onde $\kappa = 8\pi G$, com G representando a constante gravitacional, e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento que encapsula a densidade, o fluxo de energia e momento em cada ponto do espaço-tempo.

O aspecto central dessa formulação é que o lado esquerdo da equação depende exclusivamente da métrica e de suas derivadas até segunda ordem. Assim, determinar a dinâmica gravitacional equivale a resolver equações diferenciais não lineares para $g_{\mu\nu}$.

Em cosmologia, essa estrutura assume papel fundamental. Sob as hipóteses de homogeneidade e isotropia em grandes escalas, escolhe-se uma métrica compatível com essas simetrias, cuja evolução temporal descreve a expansão do Universo.

2.2 Universo em Expansão

Análises sobre a geometria e a extensão espacial do Universo conduzem, de forma geral, a duas concepções possíveis [37]: o Universo pode ser espacialmente infinito, estendendo-se indefinidamente em todas as direções (caracterizando modelos abertos ou planos), ou pode ser finito e limitado em seu alcance espacial (caracterizando um Universo fechado). Motivado por essas possibilidades e pela ausência de evidências observacionais conclusivas à época, Albert Einstein buscou incorporar um modelo cosmológico simples à sua recém-formulada Teoria da Relatividade Geral, de modo a estabelecer condições de contorno adequadas em escalas cosmológicas.

Em 1917, Einstein propôs um modelo de Universo esférico, fechado, finito e estático, uniformemente preenchido por matéria [38]. No entanto, devido ao caráter atrativo da gravitação, tal configuração mostrava-se instável: um Universo preenchido com matéria deveria inevitavelmente colapsar sob sua própria gravidade. Para contornar esse problema e obter uma solução estática, Einstein modificou suas equações de campo introduzindo um termo adicional proporcional à métrica, conhecido como constante cosmológica Λ . As equações de campo (2.9) se tornaram então

$$G^{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu}. \quad (2.10)$$

No mesmo ano, Willem de Sitter apresentou à Royal Astronomical Society um modelo cosmológico isotrópico que, para permanecer estático, não continha matéria [39]. Embora hoje seja reconhecido como um dos primeiros modelos a indicar um comportamento associado à expansão do Universo, o próprio De Sitter, assim como a comunidade científica da época, interpretava sua solução como um espaço-tempo essencialmente estático. Einstein, por sua vez, aceitou inicialmente o modelo de De Sitter apenas como uma solução matemática das equações de campo, acreditando que ele deveria ser descartado por alguma inconsistência física.

A concepção de um Universo necessariamente estático começou a ser contestada a partir da década de 1920. Em 1922, Alexander Friedmann demonstrou que as equações originais da Relatividade Geral admitiam soluções dinâmicas mesmo na ausência da constante cosmológica, descrevendo cenários nos quais o Universo poderia expandir ou contrair [40]. À época, seu resultado foi interpretado como um exercício matemático sem conexão imediata com dados astronômicos. Poucos anos depois, em 1927, Georges Lemaître chegou independentemente a conclusões semelhantes, avançando ao atribuir significado físico a essas soluções e relacioná-las às observações disponíveis [41]. As contribuições de Friedmann e Lemaître são hoje reconhecidas como pilares da cosmologia moderna.

A consolidação da ideia de expansão cósmica ocorreu em 1929, quando Edwin Hubble publicou medições das distâncias e velocidades radiais de diversas galáxias [42]. Seus resultados indicaram que, salvo algumas exceções locais, os objetos extragalácticos apre-

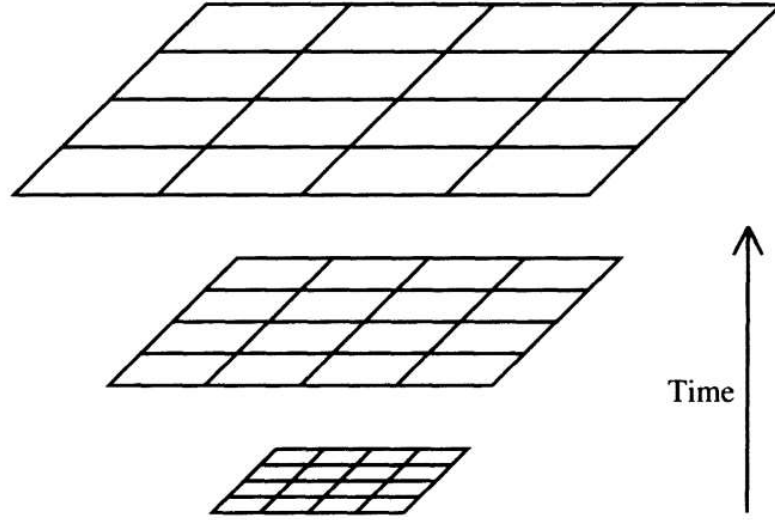


Figura 2.1: Ilustração de um sistema de coordenadas comóveis em um Universo em expansão, no qual os objetos que acompanham o fluxo de Hubble permanecem em posições fixas. Adaptado de *An Introduction to Modern Cosmology*, de Andrew R. Liddle (2015).

sentam afastamento sistemático, evidenciando que o próprio espaço está se expandindo. Diante dessas evidências observacionais, Einstein abandonou o modelo estático e reconheceu que sua teoria já continha, desde o princípio, os elementos necessários para descrever um Universo dinâmico [43].

A confirmação da expansão inaugurou uma nova etapa na compreensão do cosmos, na qual o princípio cosmológico assume papel central. Esse princípio estabelece que o Universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas, isto é, suas propriedades médias não dependem da posição nem da direção de observação [37]. A homogeneidade implica que, quando consideramos volumes suficientemente extensos, a distribuição de matéria é estatisticamente uniforme. A isotropia, por sua vez, assegura a inexistência de direções privilegiadas.

Assumindo um Universo em expansão uniforme que satisfaz o princípio cosmológico, torna-se essencial descrever a evolução da separação r entre dois objetos quaisquer. Em virtude da homogeneidade e da isotropia, essa descrição independe da localização específica dos corpos considerados. Para formalizar essa ideia, introduzimos as chamadas coordenadas comóveis [44], definidas de modo que acompanham a expansão cósmica. Nesse sistema, as posições comóveis permanecem constantes, enquanto as distâncias físicas evoluem com o tempo, como ilustrado na Figura 2.1. Nesse contexto, a relação entre a distância física $\vec{r}$ e a coordenada comóvel $\vec{x}$ pode ser escrita como

$$\vec{r} = a(t)\vec{x}, \quad (2.11)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala, função exclusiva do tempo, que quantifica a expansão do Universo. Como $\vec{x}$ é constante por definição, toda a evolução temporal da separação física

é codificada em $a(t)$.

É fundamental que o fator de escala dependa apenas do tempo; qualquer dependência explícita das coordenadas espaciais violaria a isotropia e a homogeneidade assumidas. Derivando a Eq. (2.11) em relação ao tempo, obtemos

$$\vec{v} = \frac{\dot{a}}{a} \vec{r}. \quad (2.12)$$

O termo $\dot{a}/a$ define a taxa instantânea de expansão do Universo, denominada parâmetro de Hubble $H(t)$,

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (2.13)$$

A denominação remete às observações de Hubble, que evidenciaram a relação de proporcionalidade entre a velocidade de recessão e a distância das galáxias, ilustrada na Fig. 2.2.

Avaliando o parâmetro de Hubble no tempo presente t_0 , definimos a constante de

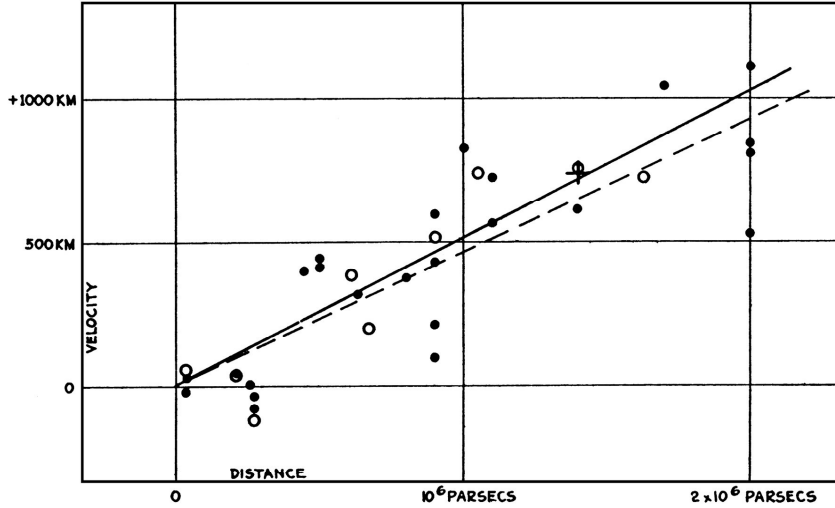


Figura 2.2: Diagrama de Hubble, evidenciando a relação linear entre a velocidade de recessão das galáxias e sua distância. A inclinação da reta corresponde à constante de Hubble. Adaptado de *A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae*, de Edwin Hubble (1929).

Hubble H_0 ,

$$H(t_0) = H_0 = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}. \quad (2.14)$$

que representa a taxa atual de expansão do Universo. A estimativa original obtida por Hubble em 1929 foi $H_0 = 550 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ [42]. Posteriormente, a identificação de erros sistemáticos levou à revisão desse valor, que passou a situar-se no intervalo aproximado entre 50 e 100 $\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$. Por conveniência, costuma-se parametrizar a constante como $H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$, onde h é um parâmetro adimensional a ser determinado observacionalmente.

Partindo desse modelo homogêneo, isotrópico e em expansão uniforme, o passo se-

guinte consiste em formalizar sua descrição geométrica por meio de uma métrica quadridimensional $g_{\mu\nu}$. Tal construção permite aplicar a estrutura da Relatividade Geral para determinar a dinâmica do Universo a partir das equações de campo de Einstein, culminando nas equações de Friedmann.

A métrica que incorpora essas hipóteses e fundamenta a descrição cosmológica em grande escala é a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) [25]. Amplamente empregada na cosmologia contemporânea, ela constitui o arcabouço geométrico a partir do qual se desenvolve o modelo padrão do Universo em expansão.

2.3 Equações de Friedmann

A métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) pode ser escrita como [25]

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (2.15)$$

onde adotamos a convenção de assinatura $(+1, -1, -1, -1)$ e k representa a constante de curvatura espacial. É importante enfatizar que o parâmetro k descreve exclusivamente a curvatura das hipersuperfícies espaciais tridimensionais de tempo constante. Portanto, ele não corresponde à curvatura completa do espaço-tempo quadridimensional, que incorpora também a dinâmica temporal e os efeitos gravitacionais associados ao conteúdo de matéria e energia do Universo.

A constante de curvatura pode assumir três valores distintos [37], cada um associado a uma geometria espacial específica:

$$k = \begin{cases} +1 & \text{geometria esférica (Universo fechado),} \\ 0 & \text{geometria euclidiana (Universo plano),} \\ -1 & \text{geometria hiperbólica (Universo aberto).} \end{cases} \quad (2.16)$$

No caso $k = 0$, as seções espaciais obedecem à geometria euclidiana, fundamentada em axiomas clássicos como o fato de que a menor distância entre dois pontos é uma linha reta. Nesse contexto, a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° e a circunferência de um círculo de raio r é dada por $2\pi r$. Observações cosmológicas indicam que essa descrição plana fornece uma excelente aproximação para a geometria do Universo em larga escala [29]. A Figura 2.3 apresenta uma representação esquemática das três possibilidades geométricas, com triângulos desenhados sobre cada superfície para evidenciar suas propriedades características.

Para $k = +1$, as hipersuperfícies espaciais possuem geometria esférica, análoga à superfície de uma esfera bidimensional imersa em três dimensões. Trata-se da forma mais simples de geometria não euclidiana. Nessa situação, a soma dos ângulos internos de um

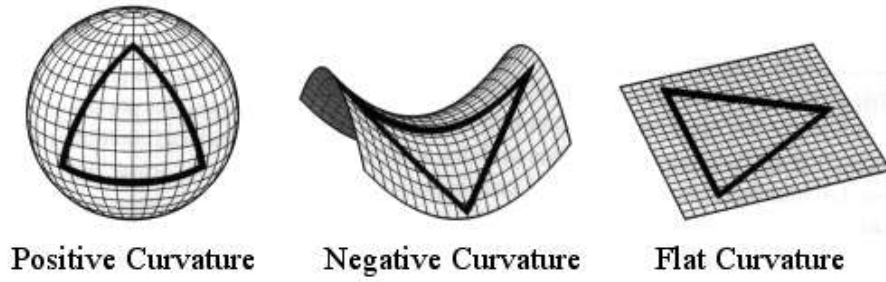


Figura 2.3: Representação esquemática das três possíveis geometrias espaciais do Universo: aberta ($k = -1$), plana ($k = 0$) e fechada ($k = +1$). Em cada caso, triângulos ilustram as diferenças entre as somas de seus ângulos internos. Adaptado de *Geometry of the Universe*, de James Schombert (s.d.).

triângulo excede 180° , enquanto a circunferência de um círculo de raio r é menor que $2\pi r$.

Já no caso $k = -1$, a geometria é hiperbólica, frequentemente descrita como uma geometria de sela. Aqui, a soma dos ângulos internos de um triângulo é inferior a 180° e a circunferência de um círculo de raio r supera $2\pi r$.

Uma vez estabelecida a forma explícita da métrica, o passo seguinte consiste em calcular as quantidades geométricas derivadas, como as conexões e tensores de curvatura. Para isso, é conveniente escrever a métrica (2.15) em notação matricial:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a(t)^2}{1 - kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(a(t)r)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(a(t)r \sin \theta)^2 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

O objetivo desta seção é deduzir as equações que governam a dinâmica do Universo. Para isso, conforme mencionado anteriormente, resolveremos as equações de campo de Einstein assumindo a métrica FLRW, neste caso dada por $g_{\mu\nu}$. Essa derivação pode ser realizada tanto na forma sem constante cosmológica quanto na forma que a inclui. Aqui, adotaremos a equação (2.10), pois ela conduz diretamente à versão das equações de Friedmann compatível com o modelo cosmológico padrão, que será discutido em uma seção posterior.

Começamos com o cálculo do tensor de Ricci a partir de sua definição em termos dos símbolos de conexão, dada por (2.5). Para isso, utilizamos os coeficientes de Christoffel a partir de (2.4). É importante notar que as simetrias fundamentais da métrica FLRW impõem fortes restrições à estrutura tensorial das quantidades geométricas construídas a partir dela. Em particular, tais simetrias exigem que o tensor de Ricci seja diagonal, de modo que todas as componentes fora da diagonal se anulam identicamente, restando apenas termos diagonais potencialmente não nulos [36].

Assim, seguindo [17; 44], o cálculo pode ser organizado avaliando separadamente as componentes independentes R_{00} e R_{ii} ($i = 1, 2, 3$), que determinam completamente o tensor de Ricci nessa geometria. Começemos pela componente temporal, que é a mais direta:

$$R_{00} = R^\mu_{0\mu 0} \quad (2.18)$$

$$= \partial_0 \Gamma^\mu_{00} - \partial_\mu \Gamma^\mu_{00} + \Gamma^\alpha_{00} \Gamma^\mu_{\alpha\mu} - \Gamma^\alpha_{0\mu} \Gamma^\mu_{0\alpha}. \quad (2.19)$$

Para a métrica FLRW, temos $\Gamma^\mu_{00} = 0$, o que simplifica a expressão para

$$R_{00} = -\partial_0 \Gamma^\mu_{\mu 0} - \Gamma^\alpha_{0\mu} \Gamma^\mu_{0\alpha}. \quad (2.20)$$

Utilizando as conexões não nulas da métrica, obtém-se

$$\Gamma^\mu_{\mu 0} = 3 \frac{\dot{a}}{a}, \quad \Gamma^\alpha_{0\mu} \Gamma^\mu_{0\alpha} = 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2. \quad (2.21)$$

Substituindo (2.21) em (2.20), segue

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a}. \quad (2.22)$$

De modo análogo, calculam-se as componentes espaciais diagonais ($i = 1, 2, 3$), nos levando a

$$R_{11} = \partial_0 \Gamma^0_{11} + \Gamma^0_{11} \Gamma^1_{10} + 2\Gamma^1_{11} \Gamma^2_{21}, \quad (2.23)$$

$$R_{22} = \partial_0 \Gamma^0_{22} + \Gamma^0_{22} \Gamma^1_{10} + \partial_1 \Gamma^1_{22} + \Gamma^1_{22} \Gamma^1_{11} + 1, \quad (2.24)$$

$$R_{33} = \partial_0 \Gamma^0_{33} + \Gamma^0_{33} \Gamma^1_{10} + \partial_1 \Gamma^1_{33} + \Gamma^1_{33} \Gamma^1_{11} + (\sin\theta)^2. \quad (2.25)$$

Após substituir explicitamente as conexões correspondentes e simplificar os termos (2.23), (2.24) e (2.25), obtém-se o resultado compacto

$$R_{ii} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \left(-\frac{g_{ii}}{a^2} \right), \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.26)$$

O próximo passo natural consiste em determinar o escalar de Ricci substituindo (2.22)

e (2.26) em (2.6), obtendo as seguintes componentes

$$R_{00}g^{00} = \left(-3\frac{\ddot{a}}{a}\right)(+1), \quad (2.27)$$

$$R_{11}g^{11} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \left(\frac{1}{1 - kr^2}\right) \left(-\frac{1 - kr^2}{a^2}\right), \quad (2.28)$$

$$R_{22}g^{22} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \left(-\frac{1}{a^2r^2}\right), \quad (2.29)$$

$$R_{33}g^{33} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2(\sin\theta)^2 \left(-\frac{1}{a^2r^2(\sin\theta)^2}\right). \quad (2.30)$$

Combinando (2.27), (2.28), (2.29) e (2.30), o escalar de Ricci para a métrica FLRW será

$$R = -6 \left(\frac{a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k}{a^2}\right). \quad (2.31)$$

Tendo obtido o tensor de Ricci e o escalar de Ricci, podemos agora construir o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$, que constitui o lado geométrico das equações de campo (2.10). Resta, portanto, especificar o lado material-energético dessas equações, descrito pelo tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$.

As simetrias de homogeneidade e isotropia da métrica FLRW restringem fortemente sua forma possível: não podem existir fluxos de energia nem tensões anisotrópicas, pois tais termos violariam o princípio cosmológico [35]. Assim, o tensor compatível com essas simetrias deve depender apenas de escalares definidos no referencial comóvel, assumindo necessariamente a forma de um fluido perfeito.

Um fluido perfeito é aquele que não tem condução de calor, nem viscosidade, porém principalmente caracterizado por ter densidade de massa ρ , pressão p e que se move através do espaço-tempo com uma velocidade quadridimensional u^μ [36]. Nessas condições, o tensor energia-momento pode ser escrito, de maneira geral, como

$$T^{\mu\nu} = A u^\mu u^\nu + B g^{\mu\nu}, \quad (2.32)$$

onde A e B são escalares. Identificando as componentes físicas no referencial de repouso do fluido, obtém-se $A = \rho + p$ e $B = -p$, resultando na expressão padrão

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}. \quad (2.33)$$

No referencial comóvel, $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$, o tensor assume forma diagonal,

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

em concordância com a isotropia espacial.

Dessa forma, dispomos de todos os elementos necessários para calcular $G_{\mu\nu}$ a partir de (2.7) em um Universo homogêneo, isotrópico e em expansão. As equações de Friedmann podem ser obtidas a partir de duas combinações independentes dessas equações: a componente G_{00} e o traço de $G_{\mu\nu}$. A primeira fornece a relação que determina a taxa instantânea de expansão do Universo, enquanto a segunda descreve como essa taxa evolui no tempo.

Iniciamos a derivação das equações de Friedmann a partir da componente G_{00} . Fixando $\mu = \nu = 0$ na forma covariante de (2.10) e utilizando a definição (2.7), obtemos

$$R_{00} - \frac{1}{2}Rg_{00} - \Lambda g_{00} = 8\pi GT_{00}. \quad (2.35)$$

Substituindo os resultados previamente obtidos para o tensor de Ricci, o escalar de Ricci e o tensor energia-momento, segue diretamente

$$\begin{aligned} -3\frac{\ddot{a}}{a} + 3\left(\frac{a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k}{a^2}\right) &= \Lambda + 8\pi G \rho, \\ 3\left(\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2}\right) &= \Lambda + 8\pi G \rho, \\ \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

A equação (2.36) é a primeira equação de Friedmann e estabelece a relação fundamental entre a taxa instantânea de expansão e o conteúdo energético do Universo, funcionando como uma condição de consistência entre geometria e matéria.

A segunda equação independente pode ser obtida a partir do traço de $G_{\mu\nu}$. Tomando o traço de (2.7), resulta

$$-R - 4\Lambda = 8\pi GT, \quad (2.37)$$

onde $T = \rho - 3p$ é o traço do tensor energia-momento. Inserindo o escalar de Ricci

calculado anteriormente e reorganizando os termos, obtém-se

$$\begin{aligned}
-\left(-\frac{6}{a^2}(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k)\right) - 4\Lambda &= 8\pi G(\rho - 3p), \\
\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{a^2 + k}{a^2} - \frac{2}{3}\Lambda &= \frac{4\pi G}{3}(\rho - 3p), \\
\frac{\ddot{a}}{a} &= \frac{\Lambda}{3} - \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p).
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Essa é a segunda equação de Friedmann, que determina a evolução temporal da expansão ao envolver a segunda derivada do fator de escala.

Em conjunto, as equações (2.36) e (2.38) formam o sistema fundamental que governa a dinâmica cosmológica. Neste trabalho, a equação (2.36) será particularmente útil, pois pode ser escrita diretamente como

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}, \tag{2.39}$$

explicitando a evolução do parâmetro de Hubble.

Diante do que foi desenvolvido, o próximo passo natural consiste em utilizar explicitamente as Equações de Friedmann para extrair informações físicas sobre o conteúdo do Universo, em particular resolvendo-as para a densidade de energia e combinando-as com a equação de conservação a fim de determinar a equação de estado dos diferentes componentes cósmicos. Essa abordagem permitirá traduzir a dinâmica da expansão em parâmetros quantitativos que caracterizam cada contribuição energética.

2.4 Parâmetros de Densidade

As Equações de Friedmann permitem extrair informações sobre a evolução do Universo para diferentes composições de seu conteúdo energético [44]. Para avançarmos nessa direção, é necessário determinar como a densidade de energia ρ evolui com o fator de escala $a(t)$.

Derivando a equação (2.36) em relação ao tempo, obtemos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3} \left(\dot{\rho} \frac{a}{\dot{a}} + 2\rho \right) + \frac{\Lambda}{3}. \tag{2.40}$$

Ao substituir a equação (2.38) na expressão acima, chega-se a

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p). \tag{2.41}$$

A equação (2.41) é denominada equação da continuidade no contexto cosmológico, pois

expressa a conservação da energia para um fluido perfeito em um Universo homogêneo e isotrópico em expansão.

Suponhamos que o Universo seja composto por N componentes independentes, indexadas por i . Seja ρ_i a densidade de energia associada à i -ésima componente. A densidade total de energia é dada pela soma de todas as contribuições individuais,

$$\rho = \sum_i \rho_i. \quad (2.42)$$

Cada componente pode ser descrita por uma equação de estado barotrópica, da forma

$$p_i = w_i \rho_i, \quad (2.43)$$

onde p_i é a pressão da i -ésima componente e w_i é o respectivo parâmetro da equação de estado. Consequentemente, a pressão total do fluido cósmico é

$$p = \sum_i p_i = \sum_i w_i \rho_i. \quad (2.44)$$

Substituindo essa expressão na equação de continuidade (2.41) e assumindo que cada componente evolui de forma independente, obtemos para cada fluido

$$\dot{\rho}_i + 3 \frac{\dot{a}}{a} \rho_i (1 + w_i) = 0. \quad (2.45)$$

A solução da equação diferencial (2.45), para w_i constante, é

$$\rho_i(a) = \rho_{i,0} a^{-3(1+w_i)}, \quad (2.46)$$

onde $\rho_{i,0}$ representa a densidade de energia atual da i -ésima componente (correspondente a $a_0 = 1$). O subíndice zero indica o valor presente da grandeza.

Podemos agora examinar separadamente a contribuição de cada componente do conteúdo energético do Universo, investigando como sua densidade evolui com o fator de escala. A partir da solução geral (2.46) fica claro que o comportamento dinâmico de cada componente é determinado pelo valor do parâmetro da equação de estado w_i .

Começemos pela radiação, que pode ser descrita como um fluido relativístico. Nesse caso, a pressão está relacionada à densidade de energia por

$$p_r = \frac{1}{3} \rho_r, \quad (2.47)$$

de modo que $w_r = 1/3$. Substituindo esse valor na expressão geral, obtemos

$$\rho_r(a) = \rho_{r,0} a^{-4}. \quad (2.48)$$

Esse comportamento indica que a densidade de energia da radiação decai rapidamente com a expansão. Tal resultado pode ser compreendido observando que, além da diluição volumétrica associada ao aumento do volume ($\propto a^{-3}$), há também uma redução adicional da energia transportada pela radiação à medida que o Universo se expande [44]. Por essa razão, a radiação domina a dinâmica apenas em épocas muito primordiais.

Consideremos agora a matéria não relativística (matéria bariônica e matéria escura fria). Para essa componente, a pressão é desprezível quando comparada à densidade de energia, isto é, $w_m = 0$. Assim, a solução geral torna-se

$$\rho_m(a) = \rho_{m,0} a^{-3}. \quad (2.49)$$

Nesse caso, a densidade decai apenas devido à diluição volumétrica causada pela expansão, o que implica uma diminuição mais lenta em comparação com a radiação.

Por fim, analisemos a energia escura na forma de uma constante cosmológica. Essa componente é caracterizada por pressão negativa igual em módulo à sua densidade de energia,

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda, \quad (2.50)$$

de modo que $w_\Lambda = -1$. Substituindo na solução geral, obtemos

$$\rho_\Lambda(a) = \rho_{\Lambda,0}, \quad (2.51)$$

ou seja, sua densidade de energia permanece constante ao longo da expansão. Essa propriedade faz com que, em épocas suficientemente tardias, a energia escura passe a dominar a dinâmica do Universo, conduzindo a uma fase de expansão acelerada.

Os comportamentos distintos das componentes discutidas podem ser visualizados na Figura 2.4. Observa-se que a radiação decai mais rapidamente, proporcionalmente a a^{-4} , enquanto a matéria evolui como a^{-3} . Já a energia escura permanece constante ao longo da expansão. Como consequência direta dessas diferentes dependências com a , o Universo atravessa fases dinâmicas distintas: inicialmente dominado pela radiação, posteriormente pela matéria e, em tempos recentes, pela energia escura.

Agora que compreendemos como cada componente evolui com o fator de escala, um passo natural é reescrever as densidades de energia em uma forma adimensional. Essa reformulação é particularmente útil, pois permite comparar diretamente os modelos teóricos com observações cosmológicas e facilita a interpretação da dinâmica do Universo em larga escala. Para isso, introduzimos a chamada densidade crítica [44], definida como a densidade necessária para que o Universo seja espacialmente plano.

A densidade crítica é obtida a partir da primeira equação de Friedmann impondo $k = 0$, resultando em

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (2.52)$$

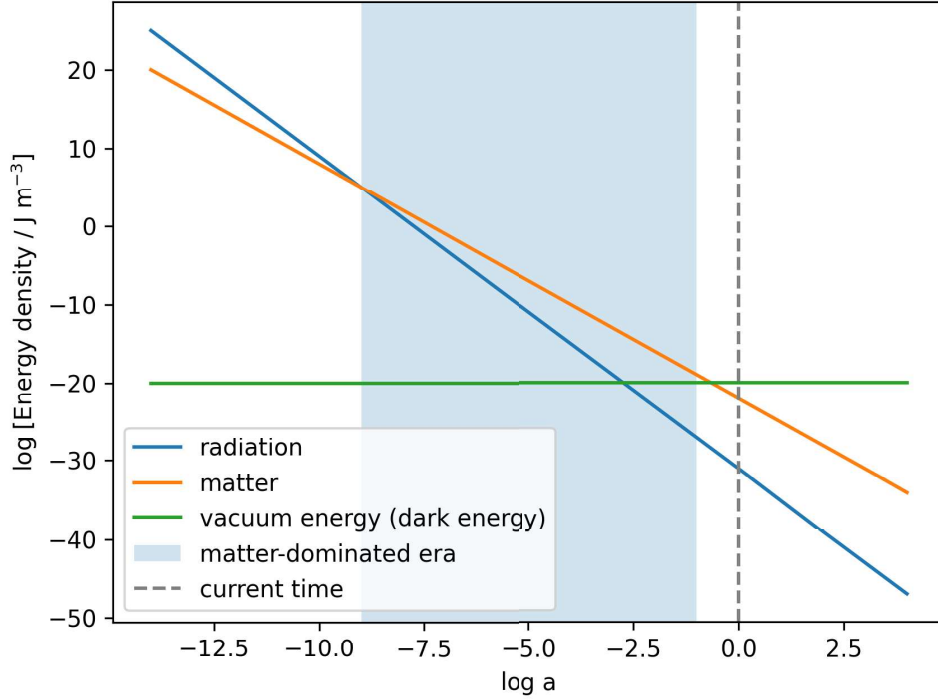


Figura 2.4: Evolução das densidades de energia da radiação, matéria e energia escura em função do fator de escala (em escala logarítmica). A radiação decai como a^{-4} , a matéria como a^{-3} , enquanto a energia escura permanece constante. A região sombreada indica a era dominada pela matéria e a linha vertical pontilhada marca o tempo atual ($a = 1$). Elaborado pelo autor (2026).

Observa-se que ρ_c depende do tempo por meio do parâmetro de Hubble $H(t)$. A comparação entre a densidade total ρ e a densidade crítica determina a geometria espacial do Universo: se $\rho > \rho_c$, o Universo possui curvatura positiva ($k > 0$, fechado); se $\rho < \rho_c$, a curvatura é negativa ($k < 0$, aberto); e se $\rho = \rho_c$, o Universo é espacialmente plano ($k = 0$).

Com base nessa definição, introduzimos o parâmetro de densidade adimensional

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}. \quad (2.53)$$

No instante atual ($t = t_0$), denotamos $\Omega_0 = \rho_0/\rho_{c,0}$, onde H_0 é o valor presente do parâmetro de Hubble.

Cada componente do conteúdo energético possui seu próprio parâmetro de densidade atual: $\Omega_{m,0}$, $\Omega_{r,0}$ e $\Omega_{\Lambda,0}$, correspondentes, respectivamente, à matéria não relativística, à radiação e à constante cosmológica. Esses parâmetros são definidos por

$$\Omega_{i,0} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{i,0}, \quad (2.54)$$

onde $i = m, r, \Lambda$.

Utilizando as leis de evolução (2.48), (2.49) e (2.51), a densidade total pode ser escrita como

$$\rho(a) = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \left[\Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{m,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 + \Omega_{r,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 \right]. \quad (2.55)$$

Substituindo essas definições na primeira equação de Friedmann, obtemos a relação fundamental entre os parâmetros de densidade no tempo presente:

$$\Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0} = 1, \quad (2.56)$$

onde o parâmetro de curvatura é definido por

$$\Omega_{k,0} = -\frac{k}{a_0^2 H_0^2}. \quad (2.57)$$

No caso particular de um Universo espacialmente plano ($k = 0$), temos

$$\Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} + \Omega_{\Lambda,0} = 1. \quad (2.58)$$

Para um Universo aberto ($k < 0$), vale

$$\Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} + \Omega_{\Lambda,0} < 1,$$

enquanto para um Universo fechado ($k > 0$),

$$\Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} + \Omega_{\Lambda,0} > 1.$$

Finalmente, substituindo as definições dos parâmetros de densidade, a equação de Friedmann (2.36) pode ser reescrita de forma geral, tornando explícita a dependência do parâmetro de Hubble com o fator de escala:

$$H(a) = H_0 \left[\Omega_{r,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 + \Omega_{m,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 + \Omega_{k,0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 + \Omega_{\Lambda,0} \right]^{1/2}. \quad (2.59)$$

A expressão acima fornece a base para a conexão entre a dinâmica da expansão e as quantidades observáveis. No próximo passo, utilizaremos essa forma explícita de $H(a)$ para deduzir as principais medidas de distância em Cosmologia, estabelecendo o elo entre o modelo teórico e os dados observacionais.

2.5 Distâncias Cosmológicas

Medir distâncias no Universo constitui, atualmente, uma das abordagens mais eficazes para investigar sua dinâmica de expansão. Por meio de técnicas observacionais avançadas, como o uso de velas padrão, supernovas do tipo Ia e a radiação cósmica de fundo em micro-

ondas, é possível inferir a taxa de expansão cósmica e suas propriedades fundamentais [29; 45]. Esses métodos não apenas permitem determinar o valor atual do parâmetro de expansão, mas também fornecem informações cruciais sobre a história evolutiva e a estrutura em larga escala do cosmos. Dessa forma, medições precisas de distâncias cosmológicas tornam-se indispensáveis para restringir modelos teóricos e aprofundar nossa compreensão acerca da evolução do Universo.

Uma observação é que para esta seção, não vamos utilizar unidades naturais, logo vamos expressar a velocidade da luz como $c = 299.792.458 \text{ m/s}$ e a constante de Plank $h = 6,62607015 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ [44].

2.5.1 Desvio para o Vermelho

O desvio para o vermelho cosmológico (z) é um dos observáveis fundamentais da cosmologia observacional, pois fornece evidência direta da expansão do Universo e está intimamente ligado ao fator de escala $a(t)$. Para ilustrar essa relação, consideremos inicialmente dois objetos próximos, separados por uma distância física dr e com velocidade relativa dv devido à expansão. No regime de pequenas separações, a lei de Hubble local pode ser escrita como

$$dv = H(t) dr = \frac{\dot{a}}{a} dr, \quad (2.60)$$

onde $H(t)$ é o parâmetro de Hubble. Se a luz emitida por um desses objetos se propaga até o outro, a diferença entre os comprimentos de onda emitido e observado pode ser associada, para pequenas velocidades relativas, ao efeito Doppler não relativístico. Nesse limite,

$$z \equiv \frac{\lambda_r - \lambda_e}{\lambda_e} \simeq \frac{dv}{c}, \quad (2.61)$$

onde λ_e e λ_r são, respectivamente, os comprimentos de onda emitido e recebido. Como o tempo de propagação satisfaz $dt = dr/c$, obtemos

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{\dot{a}}{a} dt = \frac{da}{a}. \quad (2.62)$$

Integrando essa expressão, segue que

$$\lambda \propto a. \quad (2.63)$$

Esse resultado mostra que o comprimento de onda da radiação cresce proporcionalmente ao fator de escala. Assim, se o comprimento de onda observado é, por exemplo, o dobro do emitido, isso implica que o fator de escala atual é duas vezes maior que o valor no instante de emissão. Esse alongamento desloca o espectro para frequências menores, caracterizando o chamado *redshift* cosmológico [36].

Uma derivação mais geral pode ser obtida diretamente a partir da métrica FLRW

[46]. Consideremos um observador localizado na origem das coordenadas comóveis e uma galáxia emissora situada a coordenada radial fixa r . Duas cristas sucessivas de uma onda luminosa são emitidas nos instantes t_e e $t_e + dt_e$ e recebidas nos instantes t_r e $t_r + dt_r$, como representado na Figura 2.5. Para propagação radial ($d\theta = d\phi = 0$) e trajetórias nulas ($ds^2 = 0$), a métrica implica

$$\frac{c dt}{a(t)} = -\frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (2.64)$$

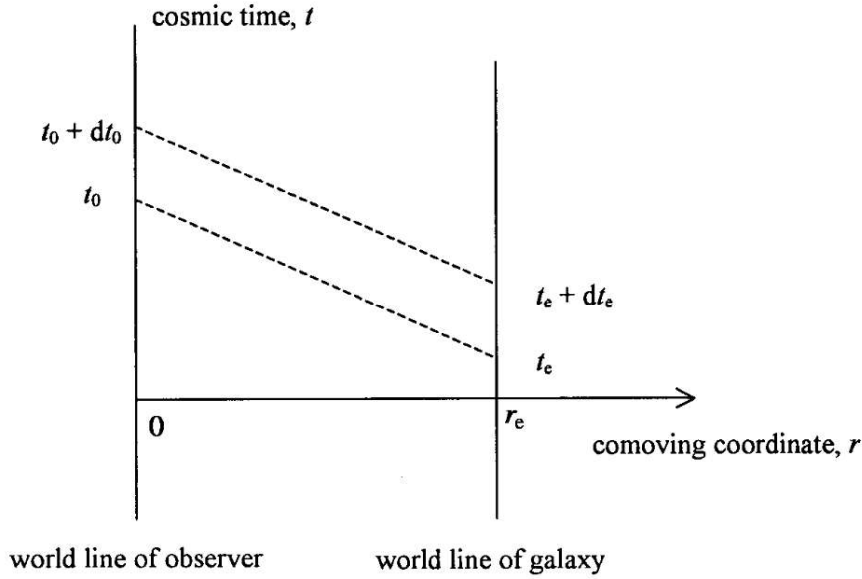


Figura 2.5: Representação das linhas de mundo do emissor e do observador, mantidos em coordenadas comóveis constantes, juntamente com os raios de luz que os conectam. Adaptado de *An Introduction to the Science of Cosmology*, de Derek Raine e E. G. Thomas (2001).

Integrando essa relação para duas frentes de onda consecutivas e subtraindo os resultados, obtém-se

$$\frac{dt_e}{a(t_e)} = \frac{dt_r}{a(t_r)}. \quad (2.65)$$

Como o período de uma onda é proporcional ao intervalo temporal entre cristas sucessivas, segue que

$$1 + z = \frac{\lambda_r}{\lambda_e} = \frac{dt_r}{dt_e} = \frac{a(t_r)}{a(t_e)}. \quad (2.66)$$

Portanto, o desvio para o vermelho mede diretamente o fator pelo qual o Universo se expandiu entre a emissão e a observação da luz.

Essa relação permite reescrever a equação de Friedmann em termos do *redshift*, resultando em

$$H(z) = H_0 \left[\Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{k,0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda,0} \right]^{1/2}. \quad (2.67)$$

2.5.2 Distância Comóvel

A distância comóvel é definida como a separação entre dois pontos medida em coordenadas comóveis, isto é, um sistema de referência que se expande juntamente com o Universo. Essa quantidade é particularmente útil em cosmologia, pois permanece constante para objetos que participam apenas do fluxo de Hubble, permitindo descrever a geometria em grande escala independentemente da evolução temporal [44].

Para deduzi-la, consideremos a propagação radial da luz em um espaço descrito pela métrica FLRW. Como a luz segue geodésicas nulas, temos $ds^2 = 0$ [36]. Imposto ainda $d\theta = d\phi = 0$, (2.15) fornece

$$\frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \frac{c dt}{a(t)}. \quad (2.68)$$

A distância comóvel radial percorrida por um fóton emitido no tempo t e observado em t_0 é obtida integrando essa expressão:

$$\chi(t) = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} = c \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')}. \quad (2.69)$$

É conveniente reescrever a integral temporal em termos do fator de escala. Usando a relação $dt = da/(aH)$, segue que

$$\chi(a) = c \int_a^{a_0} \frac{da'}{a'^2 H(a')}. \quad (2.70)$$

A distância comóvel transversal associada depende da curvatura espacial e é dada por

$$d_c(a) = \frac{c}{H_0 \sqrt{|\Omega_{k,0}|}} S_k \left(H_0 \sqrt{|\Omega_{k,0}|} \int_a^{a_0} \frac{da'}{a'^2 H(a')} \right), \quad (2.71)$$

onde a função geométrica $S_k(x)$ é definida por

$$S_k(x) = \begin{cases} \sin(x), & k = +1, \\ x, & k = 0, \\ \sinh(x), & k = -1. \end{cases} \quad (2.72)$$

Essa expressão evidencia que a relação entre distância e tempo de propagação da luz depende explicitamente da curvatura espacial e da história de expansão codificada em $H(a)$.

Também é possível expressar a distância comóvel diretamente em função do *redshift*. Utilizando a relação $1 + z = a_0/a$, obtemos

$$\frac{da}{a^2} = -\frac{dz}{a_0}, \quad (2.73)$$

o que permite escrever

$$d_c(z) = \frac{c}{H_0 \sqrt{|\Omega_{k,0}|}} S_k \left(H_0 \sqrt{|\Omega_{k,0}|} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right), \quad (2.74)$$

onde $E(z) = H(z)/H_0$. Essa forma é particularmente útil na análise observacional, pois o *redshift* é diretamente mensurável, enquanto o fator de escala não é observado de maneira direta.

2.5.3 Distância de Luminosidade

A distância de luminosidade é a grandeza que relaciona a luminosidade intrínseca de uma fonte com o fluxo observado, sendo especialmente relevante em cosmologia para objetos suficientemente distantes, nos quais os efeitos da expansão do Universo não podem ser negligenciados [44]. Em um espaço estático e euclidiano, o fluxo F recebido de uma fonte isotrópica é dado por

$$F = \frac{L}{4\pi r^2}, \quad (2.75)$$

onde L é a luminosidade absoluta da fonte e r a distância até o observador. A luminosidade corresponde à energia emitida por unidade de tempo. Se um fóton é emitido com energia E_e durante um intervalo δt_e , podemos escrever

$$L_e = \frac{E_e}{\delta t_e}. \quad (2.76)$$

Como a energia de um fóton é $E = h\nu = h/\delta t$, segue que $E_e = h/\delta t_e$.

Em um Universo em expansão, o *redshift* afeta simultaneamente a energia de cada fóton e a taxa de chegada deles ao observador. A dilatação temporal cosmológica implica

$$\frac{\delta t_r}{\delta t_e} = \frac{a(t_r)}{a(t_e)} = 1 + z, \quad (2.77)$$

enquanto a energia observada de cada fóton é reduzida por um fator $(1 + z)^{-1}$. Consequentemente, o fluxo observado sofre uma atenuação total proporcional a $(1 + z)^{-2}$: um fator devido ao alongamento do comprimento de onda e outro devido ao espaçamento temporal entre fótons sucessivos.

Para uma fonte isotrópica, a energia se distribui sobre a área de uma esfera centrada na fonte. No contexto cosmológico, o raio físico dessa esfera no instante de observação é $a_0 d_c$, onde d_c é a distância comóvel radial. Assim, o fluxo observado pode ser escrito como

$$F = \frac{L}{4\pi a_0^2 d_c^2 (1 + z)^2}. \quad (2.78)$$

Motivados pela forma euclidiana da lei do inverso do quadrado, define-se a distância de

luminosidade (d_L) de modo que

$$F = \frac{L}{4\pi d_L^2}. \quad (2.79)$$

Comparando as duas expressões, obtemos

$$d_L = a_0(1+z) d_c. \quad (2.80)$$

Substituindo a expressão geral para a distância comóvel, segue que a distância de luminosidade em um Universo FLRW é

$$d_L(z) = (1+z) \frac{c}{H_0 \sqrt{|\Omega_{k,0}|}} S_k \left(H_0 \sqrt{|\Omega_{k,0}|} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right), \quad (2.81)$$

onde $E(z) = H(z)/H_0$ e $S_k(x)$ codifica a geometria espacial. Essa quantidade é diretamente acessível observacionalmente e desempenha papel central na determinação de parâmetros cosmológicos por meio de velas padrão, como supernovas do tipo Ia, assim como sirenes padrão, como ondas gravitacionais com contraparte eletromagnética.

As expressões obtidas ao longo desta seção evidenciam que a determinação de distâncias cosmológicas está intrinsecamente ligada à história de expansão do Universo, codificada na função $H(z)$ e, conseqüentemente, nos parâmetros que a compõem. No entanto, a interpretação dessas observáveis não pode ser realizada de forma isolada, pois requer a adoção de um arcabouço teórico capaz de descrever de maneira consistente a dinâmica do cosmos. Em outras palavras, uma vez estabelecidas as relações entre *redshift* e diferentes definições de distância, torna-se necessário introduzir um modelo cosmológico que especifique o conteúdo energético do Universo e governe sua evolução temporal, permitindo assim confrontar teoria e observação de forma quantitativa.

2.6 Modelo Cosmológico Padrão

O Modelo Cosmológico Padrão (MCP), usualmente denominado Λ CDM, constitui a estrutura teórica atualmente mais bem-sucedida para descrever a dinâmica e a composição do Universo em larga escala. Fundamentado na Teoria da Relatividade Geral e no princípio cosmológico, o modelo fornece uma descrição consistente da evolução cósmica desde a fase primordial quente e densa até o regime de expansão acelerada observado na época atual. Sua robustez decorre da capacidade de explicar simultaneamente múltiplos observáveis cosmológicos, como a radiação cósmica de fundo, a formação de estruturas e a expansão do Universo.

A matéria escura é um dos pilares do modelo. Sua existência foi inicialmente sugerida a partir de estudos dinâmicos de aglomerados de galáxias e posteriormente consolidada pelas curvas de rotação galácticas, que revelaram velocidades aproximadamente constantes

nas regiões externas das galáxias espirais, em desacordo com a distribuição de massa luminosa [47; 48]. No Λ CDM, assume-se que essa componente seja composta por matéria escura fria (Cold Dark Matter, CDM), isto é, partículas não relativísticas que interagem predominantemente por meio da gravitação.

A energia escura, por sua vez, foi introduzida para explicar a expansão acelerada do Universo, descoberta a partir da observação de supernovas do tipo Ia no final da década de 1990 [49; 50]. No modelo padrão, essa componente é identificada com a constante cosmológica Λ , cuja equação de estado é caracterizada por $w = -1$.

Assumindo curvatura espacial nula ($\Omega_k = 0$), hipótese fortemente favorecida por observações da radiação cósmica de fundo (CMB) [29], o parâmetro de Hubble no modelo Λ CDM é dado por

$$H(z) = H_0 [\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda,0}]^{1/2}, \quad (2.82)$$

onde $\Omega_{m,0} = \Omega_{b,0} + \Omega_{c,0}$ representa a densidade relativa total de matéria (bariônica e matéria escura fria), $\Omega_{r,0}$ corresponde à radiação, $\Omega_{\Lambda,0}$ está associada à constante cosmológica e H_0 é o valor atual do parâmetro de Hubble.

Apesar do notável sucesso observacional, o Λ CDM enfrenta importantes desafios. Um dos mais discutidos é a chamada tensão em H_0 [51], caracterizada pela discrepância entre o valor do parâmetro de Hubble inferido a partir da CMB e aquele obtido por medições locais baseadas em escadas de distância. Essa diferença atinge níveis estatisticamente significativos e pode indicar sistemáticas ainda não compreendidas ou a necessidade de nova física além do modelo padrão.

Outra tensão relevante envolve o parâmetro S_8 [52], relacionado à amplitude das flutuações de densidade de matéria. Medidas baseadas na radiação cósmica de fundo tendem a prever valores ligeiramente maiores do que aqueles inferidos por levantamentos de lentes gravitacionais fracas, configurando mais um possível indício de inconsistência interna do modelo.

Do ponto de vista teórico, o modelo apresenta dificuldades conceituais. O problema da constante cosmológica [53] refere-se à enorme discrepância entre o valor observado de Λ e as estimativas da energia do vácuo provenientes da teoria quântica de campos, que diferem por muitas ordens de magnitude. Adicionalmente, o problema da coincidência cósmica [54] questiona por que as densidades de matéria e energia escura são da mesma ordem de grandeza precisamente na época atual, apesar de evoluírem de maneira distinta ao longo da história cósmica.

Diante desse cenário, torna-se relevante considerar abordagens que minimizem a dependência de hipóteses dinâmicas específicas sobre o conteúdo energético do Universo. Nesse contexto, a cosmografia surge como uma alternativa metodológica fundamentada apenas na validade do princípio cosmológico e na expansão em série do fator de escala em

torno da época atual. Em vez de assumir explicitamente um modelo como o Λ CDM ou extensões [55], a cosmografia descreve os observáveis cosmológicos diretamente em termos de parâmetros cinemáticos. Essa abordagem permite testar a consistência do modelo padrão de maneira mais agnóstica, reduzindo o viés associado à escolha prévia de um cenário dinâmico e oferecendo uma ferramenta complementar para investigar possíveis desvios em relação ao Λ CDM. Essa formalização será desenvolvida em detalhe na próxima seção.

2.7 Cosmografia

Weinberg, em 1972, é frequentemente citado como o primeiro a empregar o termo *Cosmografia* para se referir ao estudo puramente cinemático da expansão do Universo [17]. Nessa perspectiva, o objetivo central consiste em descrever o comportamento da expansão cósmica a partir de quantidades observáveis, evitando a introdução explícita de hipóteses sobre a dinâmica gravitacional ou sobre a composição energética do cosmos. Décadas mais tarde, Visser, em 2005, retomou e sistematizou essa abordagem, apresentando-a como uma estratégia alternativa para investigar a expansão do Universo de maneira independente de modelos cosmológicos específicos [18].

Em analogia à distinção entre cinemática e dinâmica na mecânica clássica, a cosmografia pode ser compreendida como o ramo da Cosmologia dedicado à descrição do movimento de expansão do Universo exclusivamente em termos de grandezas cinemáticas. Assim, sua formulação não depende da escolha de uma teoria gravitacional particular nem da especificação detalhada dos componentes energéticos do Universo, como matéria escura ou energia escura. Em vez disso, a abordagem fundamenta-se apenas em princípios geométricos gerais.

Mais especificamente, a cosmografia assume a validade do princípio cosmológico e utiliza a métrica de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker como estrutura geométrica para descrever o espaço-tempo. A partir dessas hipóteses mínimas, torna-se possível caracterizar a expansão cósmica por meio de parâmetros cinemáticos associados ao fator de escala e às suas derivadas temporais. Dessa forma, a cosmografia é frequentemente classificada como uma abordagem independente de modelo, pois não parte de um cenário dinâmico específico.

2.7.1 Abordagem via Série de Taylor

A metodologia central da cosmografia consiste em caracterizar a cinemática da expansão cósmica a partir de uma descrição puramente geométrica do fator de escala [18; 19]. Para isso, as quantidades cosmológicas relevantes são expressas como expansões em séries de Taylor em torno da época presente. Esse procedimento permite relacionar diretamente observáveis cosmológicos a parâmetros cinemáticos avaliados no tempo atual, fornecendo

uma descrição sistemática da evolução da expansão do Universo sem a necessidade de assumir previamente um modelo cosmológico dinâmico específico.

O fator de escala $a(t)$ pode ser expandido em torno do tempo presente t_0 como

$$a(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n a}{dt^n} \right|_{t=t_0} (t - t_0)^n, \quad (2.83)$$

Expandindo a Eq. (2.83) até sexta ordem e normalizando por $a(t_0)$, obtemos [18]

$$\begin{aligned} \frac{a(t)}{a(t_0)} = & 1 + \frac{1}{a(t_0)} \left. \frac{da}{dt} \right|_{t_0} (t - t_0) + \frac{1}{2!} \frac{1}{a(t_0)} \left. \frac{d^2 a}{dt^2} \right|_{t_0} (t - t_0)^2 \\ & + \frac{1}{3!} \frac{1}{a(t_0)} \left. \frac{d^3 a}{dt^3} \right|_{t_0} (t - t_0)^3 + \frac{1}{4!} \frac{1}{a(t_0)} \left. \frac{d^4 a}{dt^4} \right|_{t_0} (t - t_0)^4 \\ & + \frac{1}{5!} \frac{1}{a(t_0)} \left. \frac{d^5 a}{dt^5} \right|_{t_0} (t - t_0)^5 + \frac{1}{6!} \frac{1}{a(t_0)} \left. \frac{d^6 a}{dt^6} \right|_{t_0} (t - t_0)^6 + \mathcal{O}((t - t_0)^7). \end{aligned} \quad (2.84)$$

Para expressar essa expansão em termos de quantidades cinemáticas observáveis, introduz-se inicialmente o parâmetro de Hubble,

$$H(t) \equiv \frac{1}{a(t)} \frac{da}{dt}, \quad (2.85)$$

cujos valor atual é dado por

$$H_0 = \frac{1}{a(t_0)} \left. \frac{da}{dt} \right|_{t_0}. \quad (2.86)$$

De forma análoga, definem-se os parâmetros cosmográficos de ordem superior como combinações adimensionais das derivadas sucessivas do fator de escala:

$$\begin{aligned} q_0 = -\frac{1}{H_0^2} \left. \left(\frac{1}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} \right) \right|_{t=t_0}, \quad j_0 = \frac{1}{H_0^3} \left. \left(\frac{1}{a} \frac{d^3 a}{dt^3} \right) \right|_{t=t_0}, \quad s_0 = \frac{1}{H_0^4} \left. \left(\frac{1}{a} \frac{d^4 a}{dt^4} \right) \right|_{t=t_0}, \\ l_0 = \frac{1}{H_0^5} \left. \left(\frac{1}{a} \frac{d^5 a}{dt^5} \right) \right|_{t=t_0}, \quad m_0 = \frac{1}{H_0^6} \left. \left(\frac{1}{a} \frac{d^6 a}{dt^6} \right) \right|_{t=t_0}. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Os parâmetros q_0 , j_0 , s_0 , l_0 e m_0 são conhecidos, respectivamente, como parâmetros de *desaceleração* (*deceleration*), *jerk*, *snap*, *lerk* e *crackle* [56]. Tais quantidades fornecem uma descrição puramente cinemática da expansão cósmica, pois são construídas a partir das derivadas sucessivas do fator de escala em relação ao tempo, avaliadas na época atual.

Podemos avaliar as expressões de (2.87) em $t = t_0$, obtendo

$$\begin{aligned} \frac{1}{a(t_0)} \frac{d^2 a}{dt^2} \Big|_{t_0} &= -q_0 H_0^2, & \frac{1}{a(t_0)} \frac{d^3 a}{dt^3} \Big|_{t_0} &= j_0 H_0^3, & \frac{1}{a(t_0)} \frac{d^4 a}{dt^4} \Big|_{t_0} &= s_0 H_0^4, \\ \frac{1}{a(t_0)} \frac{d^5 a}{dt^5} \Big|_{t_0} &= l_0 H_0^5, & \frac{1}{a(t_0)} \frac{d^6 a}{dt^6} \Big|_{t_0} &= m_0 H_0^6. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Substituindo essas relações na expansão de Taylor e fatorando potências de $H_0(t - t_0)$, chega-se à expansão cosmográfica usual [19]

$$\begin{aligned} \frac{a(t)}{a(t_0)} &= 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0[H_0(t - t_0)]^2 + \frac{1}{6}j_0[H_0(t - t_0)]^3 \\ &\quad + \frac{1}{24}s_0[H_0(t - t_0)]^4 + \frac{1}{120}l_0[H_0(t - t_0)]^5 \\ &\quad + \frac{1}{720}m_0[H_0(t - t_0)]^6 + \mathcal{O}((t - t_0)^7). \end{aligned} \quad (2.89)$$

Os parâmetros cosmográficos permitem caracterizar a evolução da taxa de expansão sem a necessidade de assumir um modelo dinâmico específico. Em particular, q_0 indica o regime de aceleração da expansão, enquanto j_0 quantifica a variação temporal dessa aceleração. Os termos de ordem superior, como s_0 , l_0 e m_0 , capturam correções progressivamente mais sutis, refinando a descrição do comportamento cosmológico.

Um aspecto notável surge no contexto do modelo padrão Λ CDM, no qual o parâmetro *jerk* é constante e igual à unidade [18; 19]. Para demonstrar esse resultado, reescrevemos j em termos do parâmetro de Hubble, partindo de

$$j \equiv \frac{1}{aH^3} \frac{d^3 a}{dt^3}. \quad (2.90)$$

A partir de $H \equiv \dot{a}/a$, seguem as relações

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2, \quad (2.91)$$

e

$$\frac{\ddot{\ddot{a}}}{a} = \ddot{H} + 3H\dot{H} + H^3, \quad (2.92)$$

o que implica

$$j = \frac{\ddot{H}}{H^3} + 3\frac{\dot{H}}{H^2} + 1. \quad (2.93)$$

No caso de um Universo plano descrito pelo modelo Λ CDM, e desprezando a contribuição da radiação na época atual, a equação para o parâmetro de Hubble pode ser escrita como

$$H^2(a) = H_0^2 [\Omega_{m0} a^{-3} + \Omega_\Lambda], \quad (2.94)$$

Derivando em relação ao tempo e utilizando $\dot{a} = aH$, obtém-se

$$\dot{H} = -\frac{3}{2}H_0^2\Omega_{m0}a^{-3}, \quad (2.95)$$

e, por derivação adicional,

$$\ddot{H} = \frac{9}{2}H_0^2\Omega_{m0}a^{-3}H. \quad (2.96)$$

Substituindo esses resultados em (2.93), segue

$$j = \frac{9}{2}\frac{H_0^2\Omega_{m0}a^{-3}}{H^2} - \frac{9}{2}\frac{H_0^2\Omega_{m0}a^{-3}}{H^2} + 1, \quad (2.97)$$

onde ocorre o cancelamento exato dos termos dependentes de a , resultando em $j = 1$. Esse resultado mostra que, no modelo Λ CDM, o parâmetro *jerk* é identicamente unitário em qualquer época cósmica. Assim, desvios observacionais em relação a $j_0 = 1$ podem ser interpretados como indícios de física além do modelo padrão.

É de interesse definir funções de distância relevantes em cosmologia. Em particular, para a análise desenvolvida neste trabalho, é conveniente expressar a distância de luminosidade $d_L(z)$ em termos dos parâmetros cosmológicos.

Seguindo os passos de [18], partimos da definição da distância física D percorrida por um fóton emitido no tempo t_e e observado na época atual t_0 . Essa distância pode ser escrita como

$$D = c \int_{t_e}^{t_0} dt = c(t_0 - t_e), \quad (2.98)$$

onde a diferença $\Delta t = t_0 - t_e$ é denominada *lookback time*. No que segue adotaremos unidades naturais ($c = 1$), de modo que

$$D = t_0 - t_e. \quad (2.99)$$

A relação entre *redshift* e fator de escala pode então ser escrita como

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \frac{a(t_0)}{a(t_0 - \Delta t)} = \frac{a(t_0)}{a(t_0 - D)}. \quad (2.100)$$

Expandindo essa expressão em série de Taylor em torno do tempo presente t_0 , e mantendo termos até quarta ordem em $H_0 D$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{a(t_0)}{a(t_0 - D)} &= 1 + H_0 D + \frac{2 + q_0}{2} H_0^2 D^2 + \frac{6(1 + q_0) + j_0}{6} H_0^3 D^3 \\ &+ \frac{24 - s_0 + 8j_0 + 36q_0 + 6q_0^2}{24} H_0^4 D^4 + \mathcal{O}[(H_0 D)^5]. \end{aligned} \quad (2.101)$$

Utilizando a relação acima, podemos escrever o *redshift* como uma expansão em função da distância física

$$z(D) = H_0 D + \frac{2+q_0}{2} H_0^2 D^2 + \frac{6(1+q_0)+j_0}{6} H_0^3 D^3 + \frac{24-s_0+8j_0+36q_0+6q_0^2}{24} H_0^4 D^4 + \mathcal{O}[(H_0 D)^5]. \quad (2.102)$$

A reversão dessa série de potência, que permite converter $z(D) \rightarrow D(z)$, resulta em

$$D(z) = \frac{z}{H_0} \left\{ 1 - \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) z + \left(1 + q_0 + \frac{q_0^2}{2} - \frac{j_0}{6}\right) z^2 - \left[1 + \frac{3}{2}q_0(1+q_0) + \frac{5}{8}q_0^3 - \frac{1}{2}j_0 - \frac{5}{12}q_0j_0 - \frac{s_0}{24}\right] z^3 + \mathcal{O}(z^4) \right\}. \quad (2.103)$$

De forma análoga à distância física, podemos introduzir a distância de luminosidade. Considere um fóton emitido na coordenada radial $r = 0$ no tempo t_e e observado na coordenada $r = r_0$ no tempo t_0 . Nesse caso, a distância de luminosidade pode ser escrita como

$$d_L(D) = a(t_0) \frac{r_0(D)}{a(t_e)} = \frac{a_0}{a(t_0 - D)} (a_0 r_0(D)). \quad (2.104)$$

A coordenada radial percorrida depende da curvatura espacial k e é dada por

$$r_0(D) = \begin{cases} \sin\left(\int_{t_0-D}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}\right), & k = +1, \\ \int_{t_0-D}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}, & k = 0, \\ \sinh\left(\int_{t_0-D}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}\right), & k = -1. \end{cases} \quad (2.105)$$

Observações cosmológicas atuais indicam que o Universo é espacialmente plano, o que permite assumir $k \simeq 0$ como boa aproximação [29]. Dessa forma,

$$r_0(D) = \int_{t_0-D}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \frac{D}{a_0} \left\{ 1 + \frac{1}{2} H_0 D + \left[\frac{2+q_0}{6}\right] (H_0 D)^2 + \left[\frac{6(1+q_0)+j_0}{24}\right] (H_0 D)^3 + \mathcal{O}[(H_0 D)^4] \right\}. \quad (2.106)$$

Substituindo essa expressão em (2.104), obtemos

$$d_L(D) = D \left\{ 1 + \frac{3}{2}(H_0 D) + \frac{1}{6}[11 + 4q_0](H_0 D)^2 + \frac{1}{24}[40 + 40q_0 + 5j_0](H_0 D)^3 + \mathcal{O}[(H_0 D)^4] \right\}. \quad (2.107)$$

Finalmente, substituindo (2.103) na expansão acima, encontramos a expressão da distância de luminosidade em função do *redshift*

$$d_L(z) = \frac{1}{H_0} \left\{ z + \frac{1}{2}(1 - q_0)z^2 - \frac{1}{6}[1 - q_0 - 3q_0^2 + j_0]z^3 + \frac{1}{24}[2 - 2q_0 - 15q_0^2 - 15q_0^3 + 5j_0 + 10q_0j_0 + s_0]z^4 + \mathcal{O}(z^5) \right\}. \quad (2.108)$$

A obtenção de expansões para ordens mais altas torna-se algebricamente trabalhosa. Nesse caso, é comum recorrer a softwares de álgebra simbólica, como *Maple*. A expressão da distância de luminosidade em ordens superiores, incluindo parâmetros cosmográficos adicionais como *lerk* e *crackle*, podem ser encontradas em [56]. Esta é dada por

$$\begin{aligned} d_L(z) = \frac{1}{H_0} & \left[z + \frac{1}{2}(1 - q_0)z^2 + \left(-\frac{1}{6} - \frac{j_0}{6} + \frac{q_0}{6} + \frac{q_0^2}{2} \right) z^3 \right. \\ & + \left(\frac{1}{12} + \frac{5j_0}{24} - \frac{q_0}{12} + \frac{5j_0q_0}{12} - \frac{5q_0^2}{8} - \frac{5q_0^3}{8} + \frac{s_0}{24} \right) z^4 \\ & + \left(-\frac{1}{20} - \frac{9j_0}{40} + \frac{j_0^2}{12} - \frac{l_0}{120} + \frac{q_0}{20} - \frac{11j_0q_0}{12} + \frac{27q_0^2}{40} - \frac{7j_0q_0^2}{8} \right. \\ & \quad \left. + \frac{11q_0^3}{8} + \frac{7q_0^4}{8} - \frac{11s_0}{120} - \frac{q_0s_0}{8} \right) z^5 \\ & + \left(\frac{1}{30} + \frac{7j_0}{30} - \frac{19j_0^2}{72} + \frac{19l_0}{720} + \frac{m_0}{720} - \frac{q_0}{30} + \frac{13j_0q_0}{9} - \frac{7j_0^2q_0}{18} \right. \\ & \quad + \frac{7l_0q_0}{240} - \frac{7q_0^2}{10} + \frac{133j_0q_0^2}{48} - \frac{13q_0^3}{6} + \frac{7j_0q_0^3}{4} - \frac{133q_0^4}{48} \\ & \quad \left. - \frac{21q_0^5}{16} + \frac{13s_0}{90} - \frac{7j_0s_0}{144} + \frac{19q_0s_0}{48} + \frac{7q_0^2s_0}{24} \right) z^6 + \mathcal{O}(z^7) \Big]. \quad (2.109) \end{aligned}$$

Embora essa abordagem apresente diversas vantagens conceituais e seja amplamente utilizada em cosmologia observacional, a expansão em série de Taylor em *redshift* possui um problema fundamental de convergência [19]. A relação entre *redshift* e fator de escala pode ser expandida em torno da época presente utilizando os parâmetros cosmográficos, porém essa expansão apresenta um polo em $z = -1$, que corresponde fisicamente ao limite

em que o fator de escala diverge ($a \rightarrow \infty$), isto é, a um estado futuro do Universo. Do ponto de vista matemático, pela teoria de funções de variável complexa, o raio de convergência de uma série de potências é determinado pela distância até a singularidade mais próxima no plano complexo. Como a singularidade ocorre em $z = -1$, o raio de convergência da expansão em *redshift* é, no máximo, $|z| = 1$ (ver Fig. 2.6). Consequentemente, expansões em série de Taylor em torno de $z = 0$ tendem a apresentar mau comportamento ou até mesmo deixar de convergir para $z > 1$, região na qual o Universo possuía menos da metade de seu tamanho atual. Esse fato limita a utilidade da expansão tradicional de $d_L(z)$ quando aplicada a dados observacionais de alto *redshift*.

Para contornar essa limitação, diversas parametrizações alternativas foram propostas na literatura, incluindo mudanças de variável de *redshift* [19; 57] e o uso de aproximações racionais [58]. Entre estas, destacam-se as aproximações de Padé [20; 21; 59], que frequentemente apresentam melhores propriedades de convergência e estabilidade em intervalos mais amplos de *redshift*.

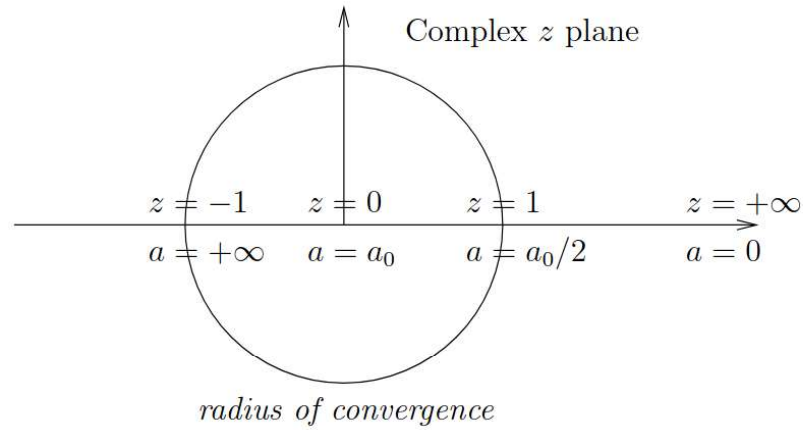


Figura 2.6: Comportamento do fator de escala a em função do redshift z e representação do raio de convergência da série de Taylor. Adaptado de *The Hubble Series: Convergence Properties and Redshift Variables*, de Céline Cattoën e Matt Visser (2007), arXiv:0710.1887.

2.7.2 Abordagem via Polinômios de Padé

Consideremos a expansão em série de Taylor de uma função $f(x)$ em torno de $x = 0$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n. \quad (2.110)$$

Os aproximantes de Padé associados a essa expansão são funções racionais, isto é, razões entre dois polinômios, construídas de modo a reproduzir a série de Taylor até uma ordem finita. Diferentemente de uma expansão polinomial truncada, tais aproximantes frequen-

temente apresentam melhor comportamento de convergência, especialmente em regiões onde a série de Taylor não converge adequadamente.

Um aproximante de Padé de ordem (n, m) é caracterizado por dois inteiros não negativos n e m , que correspondem, respectivamente, aos graus do numerador e do denominador. Explicitamente, ele é definido por [60] como

$$P_{n,m}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \quad (2.111)$$

onde

$$P_n(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_nx^n, \quad (2.112)$$

e

$$Q_m(x) = 1 + q_1x + q_2x^2 + \cdots + q_mx^m. \quad (2.113)$$

A escolha $q_0 = 1$ é uma normalização convencional que garante a unicidade do aproximante, evitando uma degenerescência trivial associada à multiplicação simultânea de numerador e denominador por uma constante.

Os coeficientes p_i e q_j são determinados a partir dos coeficientes f_n da expansão de Taylor, impondo-se que o aproximante de Padé reproduza a função original até a ordem $n + m$ [61]. Essa condição é expressa por

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = f(x) + \mathcal{O}(x^{n+m+1}). \quad (2.114)$$

Multiplicando ambos os lados por $Q_m(x)$, obtemos

$$P_n(x) = f(x) Q_m(x) + \mathcal{O}(x^{n+m+1}). \quad (2.115)$$

Substituindo as expansões em série,

$$f(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + \cdots, \quad (2.116)$$

e

$$Q_m(x) = 1 + q_1x + q_2x^2 + \cdots + q_mx^m, \quad (2.117)$$

segue que

$$P_n(x) = (f_0 + f_1x + f_2x^2 + \cdots) (1 + q_1x + q_2x^2 + \cdots + q_mx^m) + \mathcal{O}(x^{n+m+1}), \quad (2.118)$$

o que fornece, ao comparar coeficientes de mesma ordem em x , um sistema de equações algébricas que determina univocamente os coeficientes p_i e q_j .

A construção apresentada acima é geral e pode ser aplicada diretamente a quantidades cosmológicas de interesse. Em particular, consideremos a expansão em série de Taylor

da distância de luminosidade $d_L(z)$ em torno de baixos *redshifts* [21; 56], conforme a Eq. (2.108). Para ilustrar o procedimento, construiremos explicitamente o aproximante de Padé mais simples, porém não trivial, $P_{1,1}$.

Truncando a expansão de $d_L(z)$ até segunda ordem em z , temos

$$d_L(z) = z + \frac{1}{2}(1 - q_0)z^2. \quad (2.119)$$

A escolha de truncar a expansão de $d_L(z)$ até segunda ordem não é arbitrária, estando diretamente relacionada à ordem do aproximante de Padé considerado. De fato, um aproximante $P_{n,m}$ é construído de modo a reproduzir a expansão em série de Taylor da função original até a ordem $n + m$. No caso específico de $P_{1,1}$, temos $n + m = 2$, o que implica que a correspondência com a série de Taylor deve ser garantida até termos de ordem z^2 .

O aproximante de Padé $P_{1,1}$ é escrito como

$$P_{1,1}(z) = \frac{a_0 + a_1 z}{1 + b_1 z}. \quad (2.120)$$

Para determinar os coeficientes a_0 , a_1 e b_1 , impomos que a expansão em série de Taylor de $P_{1,1}(z)$ coincida com a de $d_L(z)$ até ordem z^2 .

Expandindo o denominador,

$$\frac{1}{1 + b_1 z} = 1 - b_1 z + b_1^2 z^2 + \mathcal{O}(z^3), \quad (2.121)$$

segue que

$$P_{1,1}(z) = (a_0 + a_1 z)(1 - b_1 z + b_1^2 z^2) + \mathcal{O}(z^3). \quad (2.122)$$

Efetuada o produto, obtemos

$$P_{1,1}(z) = a_0 + (a_1 - a_0 b_1)z + (a_0 b_1^2 - a_1 b_1)z^2 + \mathcal{O}(z^3). \quad (2.123)$$

Comparando termo a termo com a expansão de $d_L(z)$, obtemos o sistema

$$a_0 = 0, \quad (2.124)$$

$$a_1 - a_0 b_1 = 1, \quad (2.125)$$

$$a_0 b_1^2 - a_1 b_1 = \frac{1}{2}(1 - q_0). \quad (2.126)$$

A partir da primeira equação, segue imediatamente $a_0 = 0$, o que simplifica as demais relações. Assim,

$$a_1 = 1, \quad (2.127)$$

$$-a_1 b_1 = \frac{1}{2}(1 - q_0), \quad (2.128)$$

de onde resulta

$$b_1 = -\frac{1}{2}(1 - q_0). \quad (2.129)$$

Substituindo os coeficientes encontrados na expressão de $P_{1,1}(z)$, obtemos

$$P_{1,1}(z) = \frac{z}{1 - \frac{1}{2}(1 - q_0)z}. \quad (2.130)$$

Equivalentemente, pode-se reescrever essa expressão na forma

$$P_{1,1}(z) = \frac{2z}{2 - (1 - q_0)z}, \quad (2.131)$$

o que explicita a estrutura racional do aproximante.

O mesmo procedimento pode ser aplicado a aproximantes de ordem mais elevada, como $P_{2,1}$, $P_{2,2}$ e $P_{3,2}$. A escolha desses casos específicos segue a abordagem adotada em [21], que será utilizada como base metodológica ao longo deste trabalho. Em particular, tais aproximantes representam um compromisso entre complexidade algébrica e ganho de convergência, sendo suficientemente ricos para capturar correções de ordem superior, sem introduzir um número excessivo de parâmetros livres.

Entretanto, a determinação explícita desses aproximantes envolve manipulações algébricas extensas e pouco elucidativas do ponto de vista físico. Por essa razão, optamos por apresentar diretamente suas expressões finais, obtidas com o auxílio do software *Maple* e também disponíveis na literatura [21].

$$P_{2,1}(z) = \frac{1}{H_0} \left[\frac{z(6(-1 + q_0) + (-5 - 2j_0 + q_0(8 + 3q_0))z)}{-2(3 + z + j_0z) + 2q_0(3 + z + 3q_0z)} \right], \quad (2.132)$$

$$\begin{aligned} P_{2,2}(z) = & \frac{1}{H_0} (6z(10 + 9z - 6q_0^3z + s_0z - 2q_0^2(3 + 7z) - q_0(16 + 19z) + j_0(4 + (9 + 6q_0)z)) \\ & / (60 + 24z + 6s_0z - 2z^2 + 4j_0^2z^2 - 9q_0^4z^2 - 3s_0z^2 + 6q_0^3z(-9 + 4z) \\ & + q_0^2(-36 - 114z + 19z^2) + j_0(24 + 6(7 + 8q_0)z + (-7 - 23q_0 + 6q_0^2)z^2) \\ & + q_0(-96 - 36z + (4 + 3s_0)z^2))). \end{aligned} \quad (2.133)$$

$$\begin{aligned}
P_{3,2}(z) = \frac{1}{H_0} & \left(z \left(-120 - 180s_0 - 156z - 36l_0z - 426s_0z - 40z^2 + 80j_0^3z^2 - 30l_0z^2 - 135q_0^6z^2 \right. \right. \\
& - 210s_0z^2 + 15s_0^2z^2 - 270q_0^5z(3 + 4z) + 9q_0^4(-60 + 50z + 63z^2) \\
& + 2q_0^3(720 + 1767z + 887z^2) + 3j_0^2(80 + 20(13 + 2q_0)z + (177 + 40q_0 - 60q_0^2)z^2) \\
& + 6q_0^2(190 + 5(67 + 9s_0)z + (125 + 3l_0 + 58s_0)z^2) \\
& - 6q_0(s_0(-30 + 4z + 17z^2) - 2(20 + (31 + 3l_0)z + (9 + 4l_0)z^2)) \\
& + 6j_0(-70 + (-127 + 10s_0)z + 45q_0^4z^2 + (-47 - 2l_0 + 13s_0)z^2 \\
& \quad + 5q_0^3z(30 + 41z) - 3q_0^2(-20 + 75z + 69z^2) \\
& \quad + 2q_0(-115 - 274z + (-136 + 5s_0)z^2)) \Big) / \\
& \left(3(-40 - 60s_0 - 32z - 12l_0z - 112s_0z - 4z^2 + 40j_0^3z^2 - 4l_0z^2 - 135q_0^6z^2 \right. \\
& - 24s_0z^2 + 5s_0^2z^2 - 30q_0^5z(12 + 5z) + 3q_0^4(-60 + 160z + 71z^2) \\
& + j_0^2(80 + 20(11 + 4q_0)z + (57 + 20q_0 - 40q_0^2)z^2) \\
& + 6q_0^3(80 + 188z + (44 + 5s_0)z^2) \\
& + 2q_0^2(190 + 20(13 + 3s_0)z + (46 + 6l_0 + 21s_0)z^2) \\
& + 4q_0(20 + (16 + 3l_0)z + (2 + l_0)z^2 + s_0(15 - 17z - 9z^2)) \\
& + 2j_0(-70 + 2(-46 + 5s_0)z + 90q_0^4z^2 + (-16 - 2l_0 + 3s_0)z^2 \\
& \quad + 15q_0^3z(12 + 5z) + q_0^2(60 - 370z - 141z^2) \\
& \quad + 2q_0(-115 - 234z + 2(-26 + 5s_0)z^2)) \Big) \Big).
\end{aligned}
\tag{2.134}$$

Neste capítulo, exploramos os principais fundamentos da cosmologia, abrangendo desde a compreensão da estrutura e da evolução do Universo até a formulação do modelo cosmológico padrão Λ CDM. Discutimos também abordagens alternativas que buscam contornar algumas de suas limitações, como é o caso da cosmografia, que fornece uma descrição puramente cinemática da expansão cósmica.

Na sequência, apresentaremos o principal observável cosmológico considerado neste trabalho. Em particular, exploraremos como as Ondas Gravitacionais podem ser utilizadas como sondas cosmológicas, sendo combinadas com as técnicas descritas anteriormente para a extração de informações sobre a dinâmica da expansão do Universo.

Capítulo 3

Ondas Gravitacionais

O desenvolvimento recente da cosmologia observacional tem sido acompanhado pela introdução de novas ferramentas capazes de testar modelos teóricos com maior precisão. Entre essas ferramentas, as ondas gravitacionais destacam-se como um observável fundamental para o estudo do Universo. Diferentemente da radiação eletromagnética, que pode sofrer processos de absorção ou espalhamento ao interagir com a matéria, as ondas gravitacionais propagam-se praticamente sem sofrer atenuação.

No contexto da Relatividade Geral, a existência de ondas gravitacionais surge naturalmente quando se analisam pequenas perturbações na geometria do espaço-tempo. Esse procedimento é conhecido como gravitação linearizada [36]. Nesse regime, considera-se que a métrica do espaço-tempo pode ser descrita como uma pequena perturbação em torno de uma geometria de fundo aproximadamente plana. A análise dessas perturbações mostra que elas se propagam como ondas que viajam à velocidade da luz, em concordância com as previsões fundamentais da teoria.

No início deste capítulo, apresentamos a formulação da gravitação linearizada, seguindo as derivações desenvolvidas em [17; 36; 62], e mostramos como as equações de campo de Einstein admitem soluções ondulatórias. Essa construção teórica estabelece a base para a compreensão das ondas gravitacionais e de suas propriedades físicas, além de fornecer o fundamento necessário para suas aplicações em cosmologia observacional.

3.1 Gravitação Linearizada

Considere um espaço-tempo cuja métrica $g_{\mu\nu}$ apresenta apenas pequenas diferenças em relação à métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$. Nessa situação, é conveniente representar a métrica como a soma da métrica plana com uma pequena perturbação,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

onde $h_{\mu\nu}$ descreve a perturbação da métrica e ϵ é um parâmetro adimensional tal que $|\epsilon| \ll 1$. Ao trabalhar nesse regime perturbativo, consideram-se apenas termos até primeira ordem em ϵ , desprezando contribuições de ordem ϵ^2 ou superior.

O objetivo principal desta seção é determinar a forma das equações de campo de Einstein quando a métrica apresenta esse tipo de perturbação. Para isso, é necessário inicialmente obter a expressão correspondente para a métrica inversa. Supondo uma expansão da forma

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \epsilon k^{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

podemos utilizar a relação

$$g_{\mu\sigma} g^{\sigma\nu} = \delta_\mu^\nu \quad (3.3)$$

para determinar a conexão entre as perturbações $h_{\mu\nu}$ e $k^{\mu\nu}$. Substituindo as expansões perturbativas na expressão acima, obtemos

$$g_{\mu\sigma} g^{\sigma\nu} = (\eta_{\mu\sigma} + \epsilon h_{\mu\sigma})(\eta^{\sigma\nu} + \epsilon k^{\sigma\nu}). \quad (3.4)$$

Mantendo apenas termos lineares em ϵ , segue que

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu}, \quad (3.5)$$

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \epsilon h^{\mu\nu}. \quad (3.6)$$

Essas expressões permitem calcular as conexões de Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\sigma$ definidas pela equação (2.4). A partir dessas conexões pode-se determinar o tensor de Riemann associado à métrica perturbada. Considerando apenas termos de primeira ordem na perturbação, obtém-se

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}\epsilon\eta^{\rho\alpha}(\partial_\mu\partial_\sigma h_{\alpha\nu} - \partial_\nu\partial_\sigma h_{\alpha\mu} - \partial_\mu\partial_\alpha h_{\sigma\nu} + \partial_\nu\partial_\alpha h_{\sigma\mu}). \quad (3.7)$$

O tensor de Ricci pode ser obtido contraindo-se o tensor de Riemann de acordo com a relação (2.5). Esse procedimento conduz à expressão

$$R_{\sigma\nu} = \frac{1}{2}\epsilon(\partial_\mu\partial_\sigma h_\nu^\mu - \partial^\mu\partial_\mu h_{\nu\sigma} - \partial_\nu\partial_\sigma h_\mu^\mu + \partial_\nu\partial_\alpha h_\sigma^\alpha). \quad (3.8)$$

Introduzindo o operador d'Alembertiano definido por

$$\square = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = \partial_\mu\partial^\mu, \quad (3.9)$$

e definindo o traço da perturbação

$$h \equiv h_\mu^\mu = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}, \quad (3.10)$$

podemos reescrever o tensor de Ricci na forma

$$R_{\sigma\nu} = \frac{1}{2}\epsilon(\partial_\mu\partial_\sigma h_\nu^\mu + \partial_\nu\partial_\alpha h_\sigma^\alpha - \square h_{\nu\sigma} - \partial_\nu\partial_\sigma h). \quad (3.11)$$

A contração do tensor de Ricci fornece o escalar de Ricci,

$$R = \epsilon(\partial_\mu\partial_\sigma h^{\mu\sigma} - \square h). \quad (3.12)$$

Com essas quantidades é possível calcular o tensor de Einstein definido pela equação (2.7). Substituindo as expressões obtidas para a métrica perturbada, o tensor de Ricci e o escalar de Ricci, encontra-se

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon(\partial^\alpha\partial_\mu h_{\alpha\nu} + \partial^\alpha\partial_\nu h_{\mu\alpha} - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu h - \eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta h_{\alpha\beta} + \eta_{\mu\nu}\square h). \quad (3.13)$$

Uma forma conveniente de simplificar essa expressão consiste em introduzir a perturbação de traço reverso,

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \quad (3.14)$$

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h. \quad (3.15)$$

Com essa definição, o tensor de Einstein pode ser escrito como

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon(\partial^\alpha\partial_\mu \bar{h}_{\alpha\nu} + \partial^\alpha\partial_\nu \bar{h}_{\mu\alpha} - \partial^\alpha\partial_\alpha \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial^\alpha\partial^\beta \bar{h}_{\alpha\beta}). \quad (3.16)$$

Para analisar as propriedades dessas perturbações, consideramos agora uma transformação de calibre da forma

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon\xi^\mu. \quad (3.17)$$

Essa transformação corresponde a uma mudança infinitesimal de coordenadas e implica que a perturbação métrica se transforma segundo

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - 2\xi_{(\mu,\nu)}. \quad (3.18)$$

Uma escolha particularmente útil consiste em impor a condição de calibre harmônico, também conhecida como calibre de Lorentz [36],

$$\partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (3.19)$$

Sob uma transformação de calibre, essa condição transforma-se como

$$\partial^\mu \bar{h}'_{\mu\nu} = \partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} - \square \xi_\nu. \quad (3.20)$$

Escolhendo a função ξ^μ de modo que

$$\square \xi_\nu = \partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu}, \quad (3.21)$$

a condição de calibre pode ser satisfeita, o que simplifica significativamente as equações de campo. Nesse caso obtém-se

$$\frac{1}{2} \epsilon \square \bar{h}_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}. \quad (3.22)$$

No vácuo, onde $T_{\mu\nu} = 0$, a equação acima reduz-se a

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (3.23)$$

Essa expressão corresponde à equação de onda relativística para as perturbações da métrica. Portanto, as perturbações gravitacionais propagam-se na forma de ondas no espaço-tempo. Reescrevendo essa equação em termos de $h_{\mu\nu}$, obtemos

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = \square \left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \right) = \square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \square h = 0. \quad (3.24)$$

Multiplicando essa expressão por $\eta^{\mu\nu}$ resulta

$$\square h_{\mu\nu} = 0. \quad (3.25)$$

Como o operador d'Alembertiano envolve explicitamente a constante c , conclui-se que essas perturbações propagam-se à velocidade da luz. Assim, as interações gravitacionais podem manifestar-se na forma de ondas que se propagam com velocidade c . Essas perturbações ondulatórias da geometria do espaço-tempo são denominadas ondas gravitacionais [36; 62]. Tais ondas são geradas por sistemas astrofísicos altamente energéticos e acelerados, como a coalescência de buracos negros binários, fusões de estrelas de nêutrons e até mesmo processos associados ao Universo primordial. Nesse contexto, além de fornecerem informações sobre suas fontes, as ondas gravitacionais também podem ser exploradas como um observável independente na Cosmologia, abrindo novas possibilidades para a investigação das propriedades e da dinâmica do Universo em larga escala.

3.2 Ondas Gravitacionais em Cosmologia

Em 1986, Schutz demonstrou que a constante de Hubble H_0 pode ser inferida a partir de observações de ondas gravitacionais [9]. A ideia central é que o sinal emitido por sistemas binários compactos contém informação suficiente para determinar diretamente a distância de luminosidade até a fonte, sem a necessidade de recorrer à *cosmic distance*

ladder, isto é, ao método tradicional baseado em uma sequência de calibrações sucessivas entre diferentes indicadores de distância astronômica. Este feito é possível porque a amplitude da onda gravitacional decai com a distância, enquanto a evolução temporal da fase (o chamado *chirp*) codifica propriedades intrínsecas do sistema, como as massas e a dinâmica orbital.

Além disso, estimativas iniciais indicaram que um número relativamente pequeno de detecções, da ordem de $\mathcal{O}(10)$ eventos a distâncias típicas de ~ 100 Mpc, já permitiria determinar H_0 com precisão de poucos por cento [9]. Esse resultado evidencia o grande potencial das ondas gravitacionais como ferramenta cosmológica independente e complementar aos métodos tradicionais. A confirmação experimental dessa proposta tornou-se possível com a detecção direta de ondas gravitacionais, abrindo uma nova janela observacional para o estudo do Universo. Nesse contexto, fontes de ondas gravitacionais que permitem a determinação direta da distância de luminosidade passaram a ser interpretadas como análogas às velas padrão, sendo denominadas sirenes padrão.

3.2.1 Ondas Gravitacionais como Sirenes Padrão

Supernovas do tipo Ia são amplamente utilizadas como velas padronizáveis (*standardizable candles*), pois sua luminosidade intrínseca pode ser calibrada, permitindo a determinação da distância de luminosidade a partir do fluxo observado [63]. No contexto das ondas gravitacionais, sinais provenientes de sistemas binários compactos também carregam informação direta sobre a distância até a fonte, sem a necessidade de calibração empírica externa [1; 13; 64]. Essa propriedade decorre da forma como a amplitude e a fase do sinal dependem dos parâmetros físicos do sistema e da sua distância. A demonstração explícita desse resultado será apresentada ao longo desta subseção.

Os detectores de ondas gravitacionais são interferômetros a laser, tipicamente compostos por braços perpendiculares ou triangulares, nos quais se mede o *strain* $h(t)$, definido como a deformação relativa do espaço-tempo induzida pela passagem da onda gravitacional [62]. O sinal observado pode ser expresso como uma combinação linear das duas polarizações independentes da onda,

$$h(t) = F_+(\theta, \phi, \psi) h_+(t) + F_\times(\theta, \phi, \psi) h_\times(t), \quad (3.26)$$

onde F_+ e $F_\times$ são as funções padrão de antena do detector, que dependem da posição da fonte no céu, descrita pelos ângulos (θ, ϕ) , do ângulo de polarização ψ e da geometria do equipamento.

Seguindo as derivações apresentadas em [62; 65; 66], consideramos, no domínio de Fourier, a aproximação quadrupolar para sistemas binários em órbitas circulares, juntamente com a aproximação de fase estacionária. Desprezando os efeitos de spin e mantendo apenas o termo dominante da expansão pós-newtoniana, as duas polarizações da onda

gravitacional podem ser escritas como

$$\begin{aligned}\tilde{h}_+(f) &= \mathcal{A}(f, \mathcal{M}) \frac{1 + \cos^2 \iota}{2} e^{i\Psi(f, \mathcal{M})}, \\ \tilde{h}_\times(f) &= \mathcal{A}(f, \mathcal{M}) \cos \iota e^{i(\frac{\pi}{2} + \Psi(f, \mathcal{M}))},\end{aligned}\tag{3.27}$$

onde ι é o ângulo de inclinação do sistema binário. A fase do sinal é dada por

$$\Psi(f, \mathcal{M}) = 2\pi f t - \frac{\pi}{4} - \phi_c + \frac{3}{128} \left(\frac{\pi G \mathcal{M}}{c^3} \right)^{-5/3} \frac{1}{f^{5/3}},\tag{3.28}$$

enquanto a amplitude assume a forma

$$\mathcal{A}(f, \mathcal{M}) = \frac{1}{d_p} \frac{5}{24\pi^{4/3}} \frac{(G\mathcal{M})^{5/6}}{c^{3/2}} \frac{1}{f^{7/6}}.\tag{3.29}$$

Nas equações acima, f é a frequência da onda gravitacional, d_p representa a distância física até a fonte e $\mathcal{M}$ é a massa de chirp, definida por

$$\mathcal{M} = \frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}}.\tag{3.30}$$

Essa combinação específica das massas individuais (m_1 e m_2) governa a evolução da fase do sinal e é, portanto, determinada com alta precisão a partir do *chirp*. Em contrapartida, a distância está diretamente associada à normalização da amplitude, evidenciando a separação entre parâmetros intrínsecos e extrínsecos do sistema.

Ao considerar fontes a distâncias cosmológicas, torna-se necessário incorporar os efeitos do *redshift* devido à expansão do Universo. Para isso, distinguimos quantidades medidas no referencial da fonte, indicadas pelo subscrito s , e quantidades medidas no referencial do detector, indicadas pelo subscrito d . Além disso, definimos a massa de chirp observada como

$$\mathcal{M}_d = (1 + z) \mathcal{M}_s,\tag{3.31}$$

de modo que o efeito cosmológico sobre as massas possa ser absorvido nas quantidades inferidas diretamente pelo detector. O tempo e a frequência transformam-se segundo

$$t_d = (1 + z) t_s, \quad f_d = \frac{f_s}{1 + z}.\tag{3.32}$$

Consequentemente, o sinal temporal observado no detector relaciona-se com o sinal na fonte por

$$h_d(t_d) = h_s \left(\frac{t_d}{1 + z} \right).\tag{3.33}$$

Aplicando a transformada de Fourier no referencial do detector, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_d[h_d(t_d)] &= \mathcal{F}_d \left[h_s \left(\frac{t_d}{1+z} \right) \right] \\ &= (1+z) \mathcal{F}_s[h_s(t_s)](f_d(1+z)) \\ &= (1+z) \tilde{h}_s(f_d(1+z)).\end{aligned}\tag{3.34}$$

A relação obtida na Eq. (3.34) mostra que o sinal observado no detector corresponde ao sinal emitido na fonte avaliado em frequências da fonte dadas por $f_s = (1+z)f_d$, acompanhado de um fator global $(1+z)$ proveniente da transformação da variável temporal. Assim, para um mesmo valor de frequência emitida, a frequência observada é deslocada para valores menores por um fator $(1+z)$. Em particular, para valores elevados de z , o espectro observado tende a se concentrar em frequências mais baixas, refletindo o alongamento temporal causado pela expansão cósmica.

Podemos agora expandir explicitamente a Eq. (3.34). Começando pelo termo de fase, e assumindo que não há contribuições adicionais provenientes da amplitude, a fase do sinal no detector pode ser escrita como

$$\Psi_d(f_d) = \Psi_s((1+z)f_d).\tag{3.35}$$

A partir dessa relação, basta substituir $f_s = (1+z)f_d$ e lembrar que $t_s = t_d/(1+z)$ para reescrever a fase em termos das quantidades observadas. Dessa forma, a Eq. (3.28) torna-se

$$\Psi_d(f_d, \mathcal{M}_d) = 2\pi f_d t_d - \frac{\pi}{4} - \phi_c + \frac{3}{128} \left(\frac{\pi G \mathcal{M}_d}{c^3} \right)^{-5/3} \frac{1}{f_d^{5/3}},\tag{3.36}$$

onde $\mathcal{M}_d = (1+z)\mathcal{M}_s$ é a massa de chirp observada. Esse resultado mostra que a fase medida no detector mantém a mesma forma funcional daquela definida no referencial da fonte, com a substituição da massa de chirp intrínseca pela massa de chirp observada.

Procedendo de forma análoga para a amplitude, substituímos novamente $f_s = (1+z)f_d$ e reescrevemos a expressão em termos de $\mathcal{M}_d$. Obtemos

$$\mathcal{A}(f_d, \mathcal{M}_d) = \frac{1}{d_p(1+z)} \frac{5}{24\pi^{4/3}} \frac{(G\mathcal{M}_d)^{5/6}}{c^{3/2}} \frac{1}{f_d^{7/6}}.\tag{3.37}$$

Utilizando a definição de distância de luminosidade, $d_L = d_p(1+z)$, podemos reescrever as polarizações diretamente em termos de quantidades observáveis no detector,

$$\tilde{h}_{d,+}(f_d) = \frac{1}{d_L} \frac{5}{24\pi^{4/3}} \frac{(G\mathcal{M}_d)^{5/6}}{c^{3/2}} \frac{1}{f_d^{7/6}} \frac{1 + \cos^2 \iota}{2} e^{i\Psi(f_d, \mathcal{M}_d)}, \quad (3.38)$$

$$\tilde{h}_{d,\times}(f_d) = \frac{1}{d_L} \frac{5}{24\pi^{4/3}} \frac{(G\mathcal{M}_d)^{5/6}}{c^{3/2}} \frac{1}{f_d^{7/6}} \cos \iota e^{i(\frac{\pi}{2} + \Psi(f_d, \mathcal{M}_d))}. \quad (3.39)$$

As expressões acima evidenciam dois resultados fundamentais. Primeiramente, o sinal observado mantém a mesma estrutura funcional daquele definido no referencial da fonte, sendo as únicas modificações a substituição da distância física pela distância de luminosidade e da massa de chirp intrínseca pela massa de chirp observada. Em segundo lugar, o sinal fornece diretamente dois observáveis principais: a massa de chirp observada, determinada com alta precisão a partir da evolução da fase, e a distância de luminosidade, inferida a partir da amplitude do sinal.

No entanto, essas quantidades não são independentes do *redshift*. Existe uma degenerescência fundamental entre a massa intrínseca da fonte e o *redshift*, uma vez que apenas a combinação $\mathcal{M}_d = (1+z)\mathcal{M}_s$ é acessível observacionalmente. Consequentemente, o *redshift* da fonte não pode ser determinado exclusivamente a partir do sinal de ondas gravitacionais, sendo necessária informação adicional para sua determinação.

Sistemas binários compactos detectados por ondas gravitacionais constituem, portanto, uma classe de fontes que permitem a medição direta da distância de luminosidade a partir da emissão gravitacional. Por essa razão, tais fontes são frequentemente denominadas *standard sirens* [13]. Diferentemente de fontes eletromagnéticas, não é necessário assumir uma luminosidade intrínseca ou realizar calibrações externas, pois a normalização do sinal é prevista diretamente pela teoria.

Em síntese, a utilização de ondas gravitacionais como sondas cosmológicas requer a combinação entre a distância de luminosidade, obtida diretamente do sinal, e o *redshift* da fonte. Enquanto a primeira é acessível por meio da amplitude da onda gravitacional, o *redshift* não pode ser extraído do sinal de forma independente, o que motiva o desenvolvimento de estratégias complementares para sua determinação.

Uma possibilidade particularmente promissora para contornar essa limitação consiste na identificação de uma contraparte eletromagnética associada ao evento de ondas gravitacionais. A observação simultânea em múltiplos mensageiros permite, em princípio, acessar diretamente o *redshift* da fonte, estabelecendo a conexão necessária entre as grandezas observáveis. A seguir, discutiremos em detalhes como essa abordagem pode ser implementada e suas implicações no contexto cosmológico.

3.2.2 *Bright Sirens* e Interferômetros da 3ª Geração

Em 14 de setembro de 2015, ocorreu a primeira detecção direta de ondas gravitacionais [2]. O sinal, denominado GW150914, foi observado pelos dois interferômetros do LIGO, localizados em Hanford e Livingston, através de variações diferenciais no comprimento de seus braços, causadas pela passagem da onda. A fonte foi identificada como a coalescência de um sistema binário de buracos negros com massas de aproximadamente $36M_{\odot}$ e $29M_{\odot}$, situado a uma distância de cerca de 410^{+160}_{-180} Mpc. Essa observação confirmou, na prática, a proposta de Schutz de utilizar ondas gravitacionais como *standard sirens* para inferência cosmológica. Entretanto, na ausência de uma contraparte eletromagnética, não foi possível determinar o *redshift* da fonte.

Atualmente, as detecções são realizadas principalmente pela colaboração LIGO–Virgo–KAGRA (LVK) [6], que reúne os interferômetros Advanced LIGO (Estados Unidos) [22], Advanced Virgo (Itália) [4] e KAGRA (Japão) [5]. Esses detectores são interferômetros a laser de grande escala, sensíveis a variações relativas de comprimento da ordem de 10^{-21} . Em termos de desempenho, eles operam predominantemente na faixa de frequências entre ~ 10 Hz e $\sim 10^3$ Hz, sendo mais sensíveis na região de ~ 100 Hz. Essa janela espectral é ideal para a observação de sistemas compactos em coalescência, como binárias de buracos negros e estrelas de nêutrons. Atualmente, o alcance típico (*horizon distance*) para binárias de estrelas de nêutrons é da ordem de ~ 200 Mpc, podendo chegar a *redshifts* $z \sim 0.05\text{--}0.2$ [67], enquanto sistemas de buracos negros mais massivos podem ser detectados a distâncias cosmológicas maiores, ainda que sem identificação direta do *redshift*.

Um marco importante ocorreu em 17 de agosto de 2017 com a detecção do evento GW170817 [12], proveniente da fusão de uma binária de estrelas de nêutrons. Diferentemente de eventos anteriores, esse sistema apresentou uma contraparte eletromagnética observada em múltiplos comprimentos de onda, incluindo o surto de raios gama GRB 170817A, detectado aproximadamente 1,7 segundos após o sinal gravitacional. A identificação da galáxia hospedeira, NGC 4993, possibilitou a determinação direta do *redshift* da fonte. Esse tipo de evento, no qual tanto a distância de luminosidade quanto o *redshift* são conhecidos, é denominado *bright siren*. Por outro lado, a maioria das detecções atuais corresponde a *dark sirens*, nas quais não há contraparte eletromagnética e, portanto, o *redshift* não pode ser determinado diretamente. Até o momento, entre centenas de eventos reportados pela colaboração LVK, apenas GW170817 possui uma medida robusta de *redshift* associada.

Essa limitação observacional impõe um desafio significativo à cosmologia de ondas gravitacionais. A ausência de medidas diretas de *redshift* dificulta a construção da relação distância–*redshift*, fundamental para a inferência de parâmetros cosmológicos. Em consequência, métodos alternativos têm sido desenvolvidos, incluindo abordagens

estatísticas para *dark sirens*, nas quais distribuições de galáxias são utilizadas para inferir probabilisticamente o *redshift* das fontes [68; 69]. Ainda assim, tais métodos apresentam incertezas consideravelmente maiores quando comparados aos casos de *bright sirens*.

Nesse contexto, a próxima geração de detectores de ondas gravitacionais surge como uma perspectiva promissora. O Einstein Telescope [7], um interferômetro subterrâneo de terceira geração, deverá operar com sensibilidade aproximadamente uma ordem de magnitude superior à dos detectores atuais e com uma faixa de frequências estendida, alcançando valores tão baixos quanto ~ 1 Hz. Essa melhoria permitirá a detecção de sistemas binários a *redshifts* elevados ($z \gtrsim 2-5$) [70], além de aumentar significativamente a taxa de eventos envolvendo estrelas de nêutrons, que são candidatos naturais a *bright sirens*.

Complementarmente, o detector espacial DECIGO [8] será sensível a frequências intermediárias, na faixa de ~ 0.1 Hz a ~ 10 Hz, preenchendo a lacuna entre detectores terrestres e missões como o LISA (Laser Interferometer Space Antenna) [71]. Essa configuração permitirá a observação antecipada da fase inspiral de binárias compactas, possibilitando previsões precisas do tempo de coalescência e facilitando campanhas coordenadas de observação eletromagnética. Como resultado, espera-se um aumento substancial no número de eventos com identificação de contraparte, ampliando o catálogo de *bright sirens* [72].

Apesar dessas perspectivas, detectores de terceira geração ainda estão em fase de planejamento ou desenvolvimento, com operação prevista apenas para as próximas décadas. Dessa forma, a cosmologia baseada em ondas gravitacionais, no cenário atual, depende fortemente de simulações realistas de catálogos futuros [14; 15; 72–74]. Em particular, a geração de populações simuladas de *bright sirens* desempenha um papel central na avaliação do potencial desses experimentos para a determinação de parâmetros cosmológicos. Esse será o foco da próxima seção.

3.3 Simulações de Ondas Gravitacionais

Como discutido anteriormente, a principal limitação no uso de ondas gravitacionais como sondas cosmológicas reside na escassez de eventos com *redshift* diretamente determinado. Até o momento, apenas o evento GW170817 possui essa informação de forma robusta, o que inviabiliza a obtenção de restrições cosmológicas estatisticamente significativas. Diante desse cenário, a simulação de catálogos futuros de ondas gravitacionais tem se consolidado como uma abordagem essencial para contornar essa limitação observacional.

Nesse contexto, o foco deste trabalho recai sobre as *bright sirens*, uma vez que esses eventos fornecem simultaneamente a distância de luminosidade e o *redshift*, permitindo a construção direta da relação distância–*redshift*. A construção de catálogos simulados

desses eventos, no entanto, não é única e depende de um conjunto de hipóteses físicas e instrumentais. Entre os principais fatores estão o tipo de sistema binário considerado, que influencia diretamente a taxa de eventos e a probabilidade de emissão de contraparte eletromagnética; a geometria do interferômetro, que determina a resposta angular do detector e sua capacidade de localização no céu; e, de forma crucial, a curva de sensibilidade instrumental, que define a faixa de frequências acessível e o alcance em distância das detecções.

Todos esses aspectos desempenham um papel fundamental na construção de simulações realistas e serão tratados em detalhe nesta seção, onde serão estabelecidos os critérios adotados para a geração dos catálogos de *bright sirens* utilizados neste trabalho.

3.3.1 Distribuição das Fontes Simuladas

Neste trabalho, estamos interessados em simular detecções de *bright sirens*, em particular aquelas oriundas de binárias de estrelas de nêutrons (BNS), que constituem as fontes mais promissoras para a identificação de contrapartes eletromagnéticas. A construção de um catálogo simulado desses eventos requer a modelagem da distribuição em redshift das fontes coalescentes, a qual fornece uma descrição estatística de sua distribuição cosmológica. Para sistemas binários de origem estelar, essa distribuição pode ser escrita como

$$P(z) \propto \frac{4\pi d_C^2(z) R(z)}{H(z)(1+z)}, \quad (3.40)$$

onde $d_C(z)$ é a distância comóvel, $H(z)$ é o parâmetro de Hubble, e o fator $(1+z)^{-1}$ leva em conta a dilatação temporal entre o referencial da fonte e o observador. O termo $4\pi d_C^2(z)/H(z)$ corresponde ao elemento de volume comóvel por unidade de redshift, refletindo o crescimento do volume acessível com z [75].

A função $R(z)$ descreve a evolução da taxa de coalescência por unidade de volume comóvel e codifica a física astrofísica das fontes, estando diretamente relacionada à história de formação estelar e à distribuição de tempos de atraso entre a formação do sistema binário e sua fusão. Neste trabalho, adotamos uma parametrização fenomenológica amplamente utilizada na literatura [14; 15; 75–77], dada por

$$R(z) = \begin{cases} 1 + 2z, & z \leq 1, \\ \frac{3}{4}(5 - z), & 1 < z < 5, \\ 0, & z \geq 5, \end{cases} \quad (3.41)$$

a qual reproduz, de forma simplificada, o crescimento da taxa de eventos em baixos redshifts, acompanhando a evolução da formação estelar, seguido por um decaimento em redshifts mais elevados, conforme ilustrado na Fig. 3.1.

Neste trabalho, consideramos três configurações instrumentais: o Advanced LIGO,

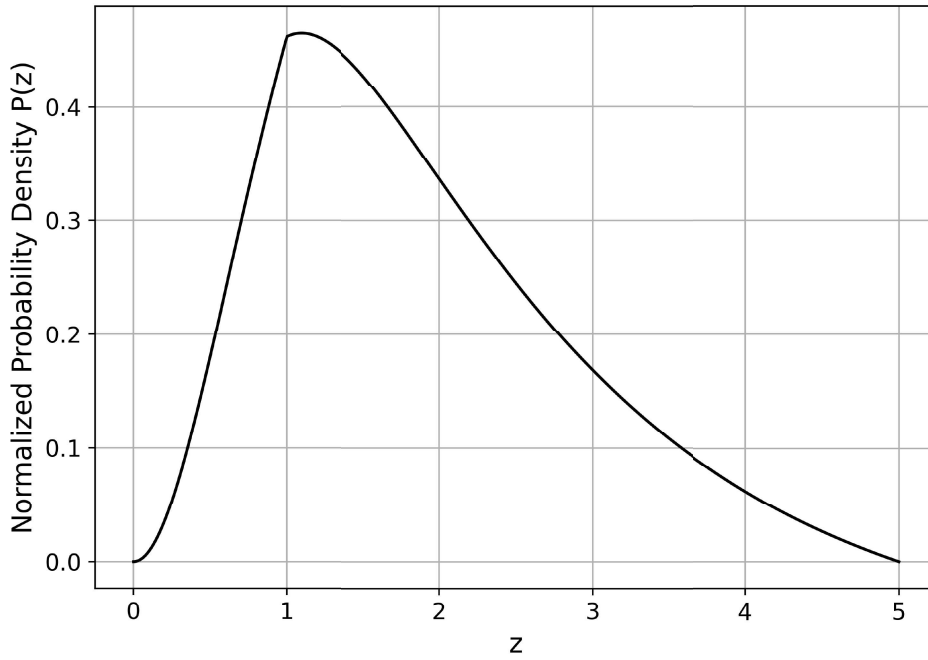


Figura 3.1: Função de densidade de probabilidade em redshift para a formação de fontes de ondas gravitacionais no contexto do modelo cosmológico Λ CDM ($H_0 = 67.68$ e $\Omega_m = 0.31$), considerando eventos do tipo *bright sirens*.

representando a geração atual de detectores terrestres, o Einstein Telescope e o detector espacial DECIGO. A inclusão do aLIGO permite estabelecer uma referência para as capacidades observacionais atuais, enquanto o ET e o DECIGO representam avanços significativos esperados para as próximas gerações. Em particular, esses instrumentos diferem substancialmente em sua sensibilidade, o que se reflete diretamente no alcance observacional para binárias de estrelas de nêutrons.

Atualmente, o aLIGO é capaz de detectar sistemas BNS até redshifts da ordem de $z \sim 0.1\text{--}0.2$ [67; 78]. Em contraste, o Einstein Telescope, projetado como um interferômetro subterrâneo de terceira geração, deverá estender esse alcance para $z \sim 2\text{--}3$ [70; 79]. Por sua vez, o DECIGO, operando em ambiente espacial e beneficiando-se de níveis de ruído significativamente reduzidos, apresenta o maior potencial observacional entre os três, podendo detectar tais sistemas até redshifts de $z \sim 5$ [80]. Essa hierarquia evidencia a capacidade dos detectores de próxima geração em sondar regiões cada vez mais profundas do Universo.

Uma vez estabelecido o alcance observacional desses instrumentos, o passo seguinte consiste em relacionar a distribuição em redshift das fontes com o número esperado de eventos detectados. Do ponto de vista teórico, a distribuição em redshift (3.40) pode ser normalizada a partir da taxa local de eventos, $R_0 \equiv R(z = 0)$, permitindo a construção de uma taxa absoluta de detecções quando integrada sobre o volume comóvel e o tempo de observação [81]. Nesse caso, a função $P(z)$ deixa de ser apenas proporcional e passa a

fornecer diretamente o número esperado de eventos ao longo do redshift.

Entretanto, nesta pesquisa adotamos uma estratégia alternativa, na qual o número total esperado de detecções, denotado por N_e , é fixado a priori. Essa abordagem é particularmente conveniente para a metodologia empregada, pois permite trabalhar com catálogos simulados de tamanho controlado, facilitando a análise do impacto estatístico das amostras. Assim, a distribuição em redshift é utilizada exclusivamente como uma função de probabilidade normalizada, responsável por governar a amostragem dos eventos.

Os valores adotados para N_e refletem tanto a sensibilidade dos detectores quanto seus tempos típicos de operação. Para o Einstein Telescope, considerando uma missão de 3 anos, espera-se a detecção de aproximadamente 10^3 eventos do tipo *bright sirens* [14; 70; 75]. No caso do DECIGO, projeções indicam cerca de 10^4 detecções em um intervalo de tempo semelhante [72; 80]. Já para o Advanced LIGO, dada a ausência de estimativas consolidadas na literatura para *bright sirens*, adotamos uma abordagem conservadora, assumindo 10 eventos ao longo de uma década de operação [82]. Dessa forma, os cenários considerados abrangem desde o regime atual, limitado por estatística reduzida, até o cenário futuro, no qual grandes catálogos permitirão inferências cosmológicas mais precisas.

Com os cenários observacionais devidamente estabelecidos, o próximo passo consiste em incorporar, de forma explícita, os efeitos instrumentais no processo de simulação. Em particular, torna-se necessário modelar como as propriedades intrínsecas das fontes se traduzem em sinais detectáveis, levando em conta a resposta dos interferômetros e suas limitações experimentais.

3.3.2 Detecção de Ondas Gravitacionais

Uma vez estabelecidas as propriedades fundamentais das fontes de ondas gravitacionais, o passo seguinte consiste em modelar como esses sinais são registrados por detectores interferométricos. Para isso, é necessário levar em conta não apenas as propriedades intrínsecas da fonte, mas também a resposta do detector, codificada nas funções de padrão de antena F_+ e $F_\times$.

No domínio da frequência, o sinal é obtido a partir da transformada de Fourier do *strain* temporal por meio da aproximação de fase estacionária (*stationary phase approximation*, SPA), válida para sistemas binários em regime de *inspiral* quase-circular [62]. Nesse formalismo, o sinal assume a forma

$$\mathcal{H}(f) = \mathcal{A} f^{-7/6} e^{i\Psi(f)}, \quad (3.42)$$

onde $\Psi(f)$ representa a fase no domínio da frequência, contendo a informação dinâmica do sistema. Neste trabalho, a fase é calculada no contexto da expansão pós-newtoniana até ordem 3.5PN. Dentro dessa aproximação, efeitos de spin são negligenciados, uma vez que

contribuem de forma subdominante para sistemas não rotantes ou com rotação lenta [14]. Já $\mathcal{A}$ corresponde à amplitude efetiva observada.

A amplitude pode ser escrita explicitamente como

$$\mathcal{A} = \frac{1}{d_L} \sqrt{F_+^2 (1 + \cos^2 \iota)^2 + 4F_\times^2 \cos^2 \iota} \sqrt{\frac{5}{96}} \pi^{-2/3} \mathcal{M}_c^{5/6}. \quad (3.43)$$

Embora os parâmetros envolvidos já tenham sido definidos anteriormente, nesta seção será necessário avaliá-los numericamente, uma vez que a amplitude desempenha um papel central na determinação da razão sinal-ruído e, conseqüentemente, na estimativa das incertezas em d_L .

Assumimos uma distribuição uniforme para as massas das estrelas de nêutrons no intervalo $[1, 2] M_\odot$, em concordância com a literatura [83]. Para cada sistema binário simulado, as massas são sorteadas dessa distribuição, o redshift é obtido a partir de (3.40), e a massa de chirp $\mathcal{M}_c$ é então calculada.

Outro parâmetro relevante em (3.43) é o ângulo de inclinação ι , definido como o ângulo entre o momento angular orbital do sistema binário e a linha de visada do observador. Esse parâmetro determina a orientação do sistema: $\iota = 0$ (ou π) corresponde a configurações *face-on* (ou *face-off*), enquanto $\iota = \pi/2$ descreve um sistema *edge-on*. Sua influência manifesta-se diretamente na amplitude das polarizações da onda gravitacional, conforme os fatores $(1 + \cos^2 \iota)/2$ e $\cos \iota$. Assumimos $\iota \in [0, \pi]$, com distribuição uniforme em $\cos \iota$.

Os padrões de antena F_+ e $F_\times$ descrevem a resposta angular do detector às duas polarizações da onda gravitacional. Em particular, são funções dos ângulos (θ, ϕ) , que definem a posição da fonte no referencial do detector, e do ângulo de polarização ψ , que determina a orientação das polarizações no plano perpendicular à linha de visada.

Para cada detector considerado, utilizamos as expressões dos padrões de antena disponíveis na literatura [84–86]. No caso do aLIGO, um interferômetro com braços perpendiculares, os padrões são dados por

$$F_+^{(1)}(\theta, \phi, \psi) = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta) \cos 2\phi \cos 2\psi - \cos \theta \sin 2\phi \sin 2\psi, \quad (3.44)$$

$$F_\times^{(1)}(\theta, \phi, \psi) = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta) \cos 2\phi \sin 2\psi + \cos \theta \sin 2\phi \cos 2\psi. \quad (3.45)$$

Para o Einstein Telescope, composto por três interferômetros em configuração triangular, os padrões para cada unidade $i = 1, 2, 3$ são dados por

$$F_+^{(1)}(\theta, \phi, \psi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta) \cos(2\phi) \cos(2\psi) - \cos \theta \sin(2\phi) \sin(2\psi) \right], \quad (3.46)$$

$$F_\times^{(1)}(\theta, \phi, \psi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta) \cos(2\phi) \sin(2\psi) + \cos \theta \sin(2\phi) \cos(2\psi) \right], \quad (3.47)$$

sendo os demais obtidos por rotações de $2\pi/3$ no ângulo ϕ ,

$$F_{+,\times}^{(2)}(\theta, \phi, \psi) = F_{+,\times}^{(1)}(\theta, \phi + 2\pi/3, \psi), \quad F_{+,\times}^{(3)}(\theta, \phi, \psi) = F_{+,\times}^{(1)}(\theta, \phi + 4\pi/3, \psi). \quad (3.48)$$

Para o detector espacial DECIGO, os padrões de antena de um dos interferômetros são dados por

$$F_+^{(1)}(\theta, \phi, \psi) = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta) \cos(2\phi) \cos(2\psi) - \cos \theta \sin(2\phi) \sin(2\psi), \quad (3.49)$$

$$F_\times^{(1)}(\theta, \phi, \psi) = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta) \cos(2\phi) \sin(2\psi) + \cos \theta \sin(2\phi) \cos(2\psi), \quad (3.50)$$

sendo o segundo interferômetro obtido por uma rotação em ϕ ,

$$F_{+,\times}^{(2)}(\theta, \phi, \psi) = F_{+,\times}^{(1)}(\theta, \phi - \pi/4, \psi). \quad (3.51)$$

Para as nossas análises, seguindo [83], os ângulos são amostrados de forma a garantir isotropia: $\cos \theta \in [-1, 1]$, $\phi \in [0, 2\pi]$ e $\psi \in [0, 2\pi]$, todos com distribuições uniformes.

A distância de luminosidade em (3.43) é obtida a partir do redshift sorteado em (3.40). No cálculo da amplitude, desprezamos inicialmente as incertezas em d_L , uma vez que as fontes consideradas são *bright sirens*. O valor de d_L pode ser determinado assumindo um modelo cosmológico por meio de (2.81), ou alternativamente utilizando expansões cosmográficas, como as aproximações em série de Taylor ou Padé.

Uma vez determinadas a amplitude e a fase da forma de onda, o passo seguinte consiste em avaliar se o *strain* detectado corresponde a um sinal astrofísico real ou se pode ser atribuído a flutuações do ruído instrumental. Essa distinção é quantificada por meio da razão sinal-ruído (SNR, do inglês *signal-to-noise ratio*), que mede o quão forte é o sinal em comparação com o nível de ruído do detector. Em termos simples, quanto maior a SNR, maior a confiança de que o evento observado não é uma flutuação estatística do ruído. Na prática, uma detecção é reivindicada quando a SNR da rede excede um limiar típico de $\rho \geq 8$, em concordância com o critério adotado pelas colaborações LIGO–Virgo–KAGRA [67].

Para uma rede composta por N interferômetros independentes, a SNR combinada é definida como

$$\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^N (\rho^{(i)})^2}, \quad (3.52)$$

onde $\rho^{(i)} = \sqrt{\langle \mathcal{H}^{(i)}, \mathcal{H}^{(i)} \rangle}$ representa a SNR do i -ésimo detector. Essa expressão reflete o fato de que diferentes interferômetros observam o mesmo evento com sensibilidades e orientações distintas, contribuindo de forma independente para a detecção.

O produto interno utilizado em (3.52) é definido como

$$\langle a, b \rangle \equiv 4 \int_{f_{\min}}^{f_{\max}} \frac{\tilde{a}(f)\tilde{b}^*(f) + \tilde{a}^*(f)\tilde{b}(f)}{2} \frac{df}{S_h(f)}, \quad (3.53)$$

onde $\tilde{a}(f)$ e $\tilde{b}(f)$ são as transformadas de Fourier das funções temporais $a(t)$ e $b(t)$, e $S_h(f)$ é a densidade espectral de potência (PSD) unilateral do ruído do detector. Esse formalismo pondera o sinal pelo ruído em cada frequência, de modo que regiões onde o detector é mais sensível (menor $S_h(f)$) contribuem mais significativamente para a SNR. Os limites de integração $f_{\min}$ e $f_{\max}$ são determinados pela banda de sensibilidade de cada interferômetro [83; 87].

No presente trabalho, tratamos explicitamente cada detector como uma rede composta por seus interferômetros constituintes. Assim, para o Advanced LIGO consideramos $N = 2$, correspondendo às unidades de Hanford e Livingston. Para o Einstein Telescope, adotamos $N = 3$, refletindo sua configuração triangular com três interferômetros independentes. Já para o DECIGO, consideramos $N = 2$, de acordo com sua configuração de múltiplos interferômetros efetivos. Em todos os casos, a SNR total é obtida combinando quadraticamente as contribuições individuais conforme a Eq. (3.52).

As funções de PSD utilizadas para o Advanced LIGO e o Einstein Telescope são obtidas a partir da documentação técnica oficial¹². Para o aLIGO, consideramos sua sensibilidade de projeto conforme descrito em [67], enquanto para o ET adotamos a configuração ET-D [88]. A PSD do DECIGO é implementada seguindo a parametrização apresentada em [72].

A Fig. 3.2 apresenta as curvas de sensibilidade dos detectores considerados neste trabalho, permitindo visualizar diretamente as faixas de frequência nas quais cada instrumento opera de forma mais eficiente. Observa-se que o DECIGO atinge maior sensibilidade em baixas frequências, tipicamente abaixo de ~ 1 Hz, enquanto o Einstein Telescope (ET-D) apresenta desempenho superior na faixa intermediária, estendendo-se até algumas centenas de Hz. Por sua vez, o Advanced LIGO é mais sensível em frequências mais elevadas, da ordem de dezenas a milhares de Hz. A região sombreada na figura indica a faixa típica de frequências associada à evolução de sistemas binários compactos (BNS, NSBH e BBH), onde a maior parte do sinal detectável é acumulada durante a fase de inspiral até o merger. Nota-se que essa faixa está principalmente contida na banda de sensibilidade dos detectores terrestres, em particular do ET e do aLIGO, enquanto o DECIGO é capaz de observar essas fontes em estágios mais iniciais da evolução orbital, quando o sistema ainda emite em frequências mais baixas. Consequentemente, detectores espaciais como o DECIGO podem acompanhar a evolução do sistema por tempos significativamente mais longos, potencialmente anos antes da coalescência, ao passo que detectores

¹<https://dcc.ligo.org/LIGO-T2000012/public>

²<https://www.et-gw.eu/index.php/etsensitivities>

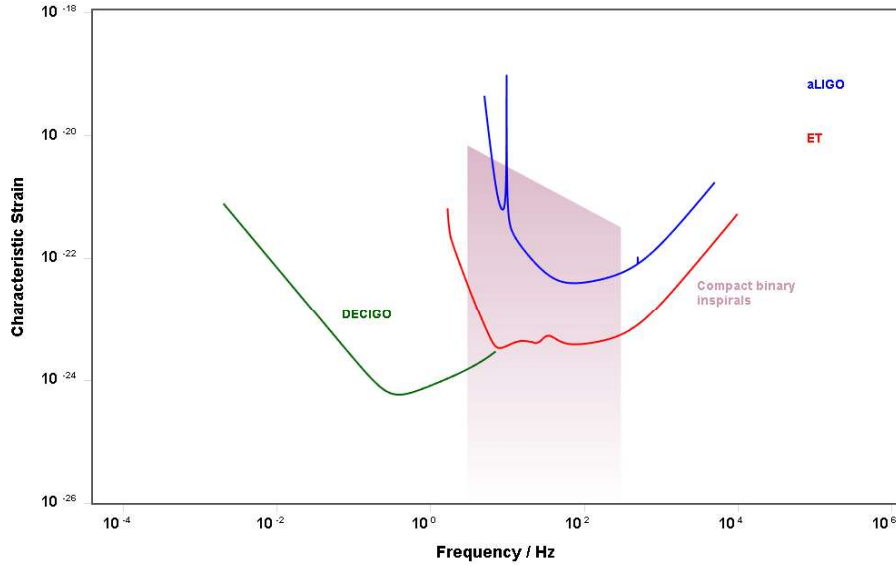


Figura 3.2: Curvas de sensibilidade dos detectores DECIGO, Advanced LIGO e Einstein Telescope na configuração ET-D, representadas em termos do *strain*. A região sombreada indica a faixa típica de frequências associada a sistemas binários compactos. Elaborado pelo autor com o GWPlotter, ferramenta apresentada em *Gravitational-wave Sensitivity Curves*, de Christopher J. Moore, Robert H. Cole e Christopher P. L. Berry (2015), arXiv:1408.0740.

terrestres observam apenas as fases finais do inspiral e o merger. Essas diferenças refletem as limitações físicas e tecnológicas de cada detector e são fundamentais na definição dos limites de integração do produto interno em Eq. (3.52), uma vez que determinam quais regiões do espectro contribuem de maneira dominante para a razão sinal-ruído.

Após a identificação de um sinal por meio da Eq. (3.52), procede-se à estimativa da incerteza na medida da distância de luminosidade. A contribuição instrumental para essa incerteza é usualmente avaliada no contexto do formalismo da matriz de Fisher [81]. Como primeira aproximação, considera-se um cenário simplificado no qual a distância de luminosidade d_L é tratada como não correlacionada com os demais parâmetros do sinal de ondas gravitacionais. Sob essa hipótese, o erro instrumental pode ser escrito como

$$\sigma_{d_L}^{\text{inst}} \simeq \sqrt{\left\langle \frac{\partial H}{\partial d_L}, \frac{\partial H}{\partial d_L} \right\rangle^{-1}}, \quad (3.54)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno ponderado pelo ruído do detector.

A partir das Eqs. (3.42) e (3.43), observa-se que a amplitude do sinal obedece à relação $H \propto d_L^{-1}$. Como consequência, na ausência de correlações entre parâmetros, obtém-se a estimativa $\sigma_{d_L}^{\text{inst}} \simeq d_L/\rho$, onde ρ representa a razão sinal-ruído.

Entretanto, essa aproximação subestima a incerteza ao negligenciar degenerescências relevantes. Em particular, existe uma forte correlação entre a distância de luminosidade e o ângulo de inclinação orbital ι , uma vez que ambos afetam diretamente a amplitude

observada do sinal. Essa degenerescência pode introduzir variações na razão sinal-ruído de até um fator da ordem de dois para ι no intervalo 0° – 90° [14; 15; 83]. Para incorporar esse efeito de forma conservadora, reescala-se a incerteza instrumental, resultando em

$$\sigma_{d_L}^{\text{inst}} \simeq \frac{2 d_L}{\rho}. \quad (3.55)$$

Além da contribuição instrumental, há efeitos astrofísicos que introduzem incertezas adicionais na determinação de d_L . Um dos principais é o lenteamento gravitacional fraco, que distorce a propagação da radiação ao longo da linha de visada devido à distribuição de matéria em grande escala. Esse efeito pode ser parametrizado como [75]

$$\sigma_{d_L}^{\text{lens}} = 0.05 z d_L, \quad (3.56)$$

sendo particularmente relevante em redshifts mais elevados.

Outra fonte de incerteza decorre das velocidades peculiares das galáxias hospedeiras, associadas à dinâmica de estruturas locais e ao movimento do baricentro do sistema binário. Esse efeito é mais significativo em baixos redshifts e pode ser modelado por [89]

$$\sigma_{d_L}^{\text{pv}}(z) = d_L(z) \times \left| 1 - \frac{(1+z)^2}{H(z) d_L(z)} \right| \sigma_{v,\text{gal}}, \quad (3.57)$$

onde $\sigma_{v,\text{gal}}$ representa a dispersão unidimensional de velocidades das galáxias, tipicamente assumida como $\sigma_{v,\text{gal}} = 300 \text{ km s}^{-1}$, aproximadamente independente do redshift.

A incerteza total na distância de luminosidade é então obtida pela combinação quadrática dessas contribuições, assumidas estatisticamente independentes:

$$\sigma_{d_L} = \sqrt{(\sigma_{d_L}^{\text{inst}})^2 + (\sigma_{d_L}^{\text{lens}})^2 + (\sigma_{d_L}^{\text{pv}})^2}. \quad (3.58)$$

Uma vez determinados d_L e σ_{d_L} , é possível construir catálogos simulados de ondas gravitacionais por meio de simulações de Monte Carlo. Nesse procedimento, os valores observados de distância de luminosidade são amostrados a partir de distribuições gaussianas centradas nos valores fiduciais de d_L , com dispersão dada por σ_{d_L} . Esse processo permite incorporar de forma consistente as incertezas associadas a cada evento, produzindo realizações sintéticas que refletem tanto o modelo cosmológico subjacente quanto os efeitos observacionais.

Na Fig. 3.3, apresentamos um resumo dos dados simulados utilizados nesta análise para o modelo Λ CDM. O painel superior mostra uma realização da distância de luminosidade para cada interferômetro considerado (aLIGO, Einstein Telescope e DECIGO), construída seguindo o procedimento descrito acima. Já o painel inferior exhibe os erros fracionários associados, incluindo tanto a contribuição instrumental quanto os efeitos sistemáticos provenientes de lentes gravitacionais fracas e de velocidades peculiares.

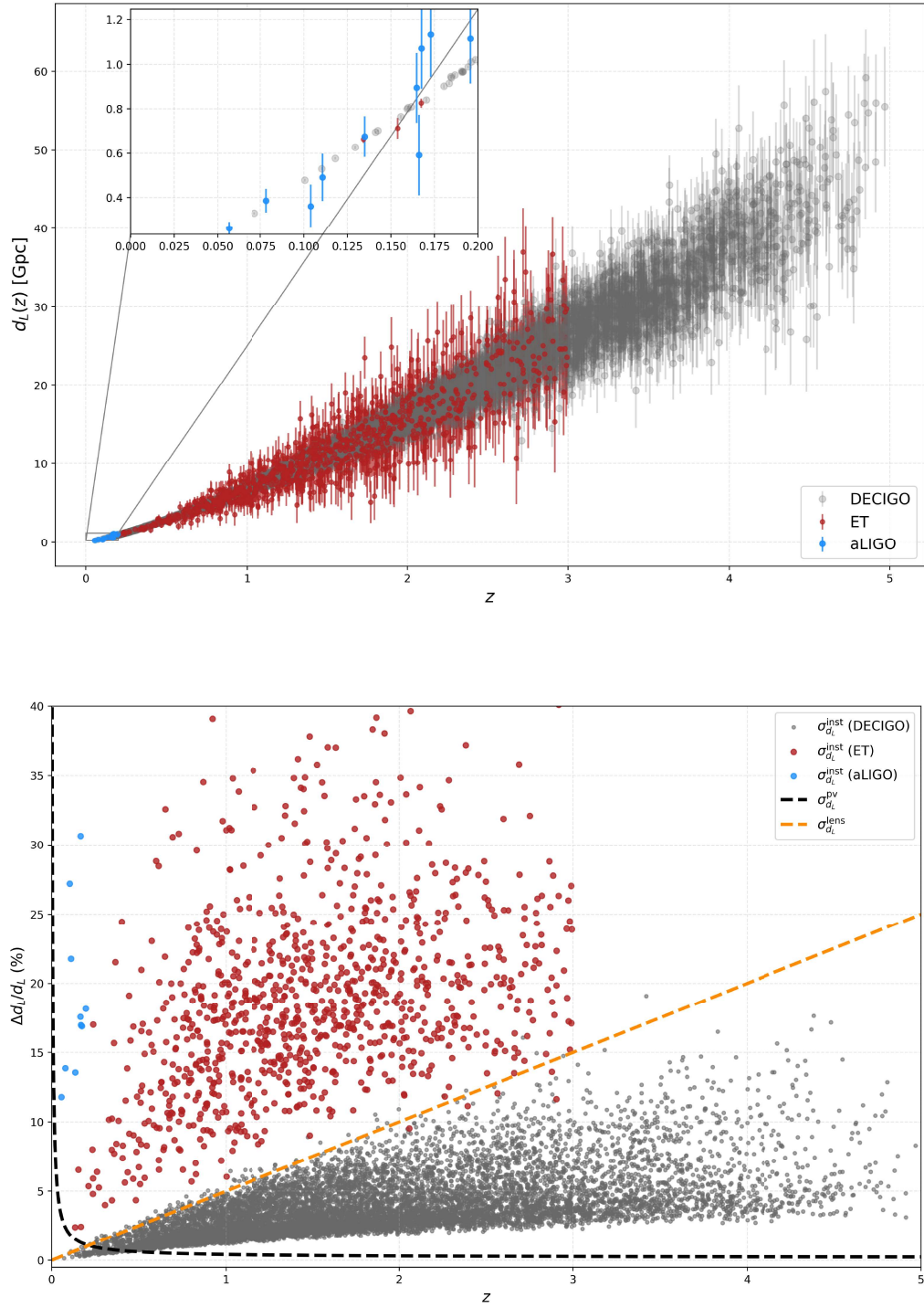


Figura 3.3: Resumo dos catálogos simulados de ondas gravitacionais utilizados na análise. No painel superior, apresentamos uma realização da distância de luminosidade $d_L(z)$ para os detectores Advanced LIGO (azul), Einstein Telescope (vermelho) e DECIGO (cinza). O destaque (inset) mostra um zoom na região de baixos redshifts ($0 < z < 0.2$), evidenciando a distribuição dos eventos do aLIGO, que se concentram nesse regime. No painel inferior, exibimos os erros fracionários associados a cada evento, incluindo as contribuições instrumentais, de lentes gravitacionais fracas e de velocidades peculiares. Observa-se que o termo devido às velocidades peculiares domina em baixos redshifts, enquanto o efeito de lenteamento gravitacional torna-se progressivamente mais relevante em maiores redshifts. As incertezas instrumentais refletem a sensibilidade de cada detector, sendo significativamente menores para os interferômetros de próxima geração (ET e DECIGO) em comparação ao aLIGO.

Observa-se que, em baixos redshifts, o erro fracionário devido às velocidades peculiares domina a incerteza total, uma vez que pequenas variações nos movimentos locais correspondem a uma fração significativa da distância de luminosidade nesse regime. Por outro lado, a contribuição associada ao efeito de lentes gravitacionais cresce com o redshift, refletindo a distorção acumulada na propagação do sinal causada pela estrutura em larga escala do Universo.

O comportamento das incertezas instrumentais, por sua vez, depende diretamente das características de cada detector, em particular da razão sinal-ruído (SNR). Como esperado, os interferômetros de próxima geração, como o Einstein Telescope e o DECIGO, apresentam incertezas instrumentais significativamente menores quando comparados à configuração atual do aLIGO, principalmente em virtude de sua maior sensibilidade.

Com o aparato teórico de cosmologia e cosmografia estabelecido no capítulo anterior, bem como a metodologia de simulação de eventos de ondas gravitacionais devidamente descrita, estamos agora em posição de avançar para a etapa de análise. O objetivo central consiste em investigar o potencial de futuros detectores de ondas gravitacionais em impor restrições aos parâmetros cosmográficos. A metodologia adotada, juntamente com os procedimentos de análise e interpretação dos resultados, será apresentada em detalhe no capítulo seguinte.

Capítulo 4

Análise e Resultados

Neste capítulo, investigamos o potencial das observações de ondas gravitacionais como ferramentas cosmológicas para restringir os parâmetros cosmográficos que descrevem a expansão do Universo. Em particular, avaliamos como diferentes regimes observacionais, associados a detectores atuais e de próxima geração, como o Advanced LIGO, o Einstein Telescope e o DECIGO, influenciam a precisão na determinação desses parâmetros. Os resultados apresentados neste capítulo baseiam-se nas referências [23] e [24].

Para descrever a relação entre a distância de luminosidade e o redshift no contexto cosmográfico, adotamos duas parametrizações distintas, previamente discutidas: a expansão em série de Taylor e os aproximantes racionais de Padé. Como etapa inicial, torna-se necessário estabelecer o regime de validade dessas expansões, investigando o intervalo de redshift no qual cada parametrização fornece uma descrição confiável da distância de luminosidade.

Com base nesses limites, avançamos para a construção dos catálogos simulados e para a análise da capacidade dos diferentes interferômetros de restringir os parâmetros cosmográficos, explorando duas abordagens complementares: uma baseada na razão sinal-ruído e outra no número total de eventos detectados. Na primeira, investigamos como diferentes intervalos de SNR afetam a precisão das estimativas; na segunda, analisamos o impacto de cenários progressivamente mais otimistas quanto ao número de detecções. Os detalhes da metodologia, bem como os resultados obtidos, serão apresentados e discutidos nas seções seguintes.

4.1 Taylor vs Padé: Desvio em relação ao modelo Λ CDM

Nesta seção, estabelecemos o critério necessário para definir o regime de validade das parametrizações cosmográficas adotadas ao longo deste trabalho. Para isso, tomamos como referência um modelo cosmológico fiducial descrito pelo cenário Λ CDM e avaliamos,

para cada ordem da expansão de Taylor em (2.109) e para cada combinação de polinômios de Padé em (2.132), (2.133) e (2.134), como as curvas da distância de luminosidade se desviam da predição do modelo padrão.

As análises são realizadas assumindo os parâmetros cosmológicos obtidos a partir das observações da radiação cósmica de fundo [29], com $\Omega_m = 0.311$ e $H_0 = 67.66 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. A partir desses valores, os parâmetros cosmográficos são determinados por meio de expressões analíticas no contexto do modelo Λ CDM. Em particular, ao substituir a forma padrão da função de Hubble, $H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + 1 - \Omega_m}$, nas relações que conectam os parâmetros cosmográficos [56], obtemos:

$$\begin{aligned} q_0 &= -1 + \frac{3}{2}\Omega_m, \\ j_0 &= 1, \\ s_0 &= 1 - \frac{9}{2}\Omega_m, \\ l_0 &= 1 + 3\Omega_m - \frac{27}{2}\Omega_m^2, \\ m_0 &= 1 - \frac{27}{2}\Omega_m^2 - 81\Omega_m^2 - \frac{81}{2}\Omega_m^3. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Utilizando o valor de $\Omega_m = 0.311$ em (4.1), os parâmetros cosmográficos assumem os valores numéricos apresentados na Tabela 4.1.

q_0	j_0	s_0	l_0	m_0
-0.533	1	-0.4	0.627	-9.365

Tabela 4.1: Parâmetros cosmográficos no modelo Λ CDM plano com $\Omega_m = 0.311$.

Esses valores são então utilizados como entrada na construção das curvas de $d_L(z)$ para diferentes ordens da expansão de Taylor e diferentes aproximações de Padé, permitindo uma análise consistente do efeito do truncamento em cada caso. Ressalta-se que a mesma análise foi realizada utilizando estimativas provenientes do projeto SH0ES [49], resultando em diferenças desprezíveis; portanto, a escolha específica de H_0 não afeta significativamente os resultados.

Como critério quantitativo, adotamos um limite de desvio relativo de 1% em relação ao modelo Λ CDM para definir o redshift máximo de validade (z_{max}) de cada expansão, como já feito em trabalhos semelhantes [90].

A seguir, realizamos essa análise separadamente para as expansões de Taylor e de Padé, investigando seus respectivos domínios de validade e suas implicações para as etapas subsequentes da análise.

4.1.1 Convergência e Validade da Expansão de Taylor

Podemos agora calcular a distância de luminosidade utilizando a Eq. (2.109) em conjunto com os parâmetros fiduciais apresentados na Tabela 4.1, considerando o intervalo de redshift $z < 1$, em virtude das limitações de convergência discutidas anteriormente. Na Fig. 4.1, apresentamos o comportamento de d_L em função do redshift para diferentes ordens de truncamento da série cosmográfica. Para fins de comparação, a predição do modelo fiducial Λ CDM também é exibida (linha preta tracejada). O painel inferior mostra o desvio relativo entre cada aproximação cosmográfica e o modelo fiducial.

Essa comparação permite determinar a ordem de truncamento mais adequada para a análise. Observa-se que a série truncada em terceira ordem apresenta desvio inferior a 1% em relação ao modelo fiducial no intervalo $0 < z < 0.7$. Embora expansões de ordem superior permaneçam dentro do limite de 1% até $z \approx 0.8$, o ganho marginal em redshift não compensa a introdução de graus de liberdade adicionais. Dessa forma, adotamos a expansão até terceira ordem, com $z_{\max} = 0.7$ como limite superior do conjunto de dados, em concordância com trabalhos anteriores [90].

Os valores correspondentes de $z_{\max}$ para cada ordem da expansão cosmográfica, definidos a partir do critério de desvio de 1%, são apresentados na Tabela 4.2.

Ordem	$z_{\max}$ para desvio de 1%
$\mathcal{O}(z^1)$	0.013
$\mathcal{O}(z^2)$	0.205
$\mathcal{O}(z^3)$	0.694
$\mathcal{O}(z^4)$	0.790
$\mathcal{O}(z^5)$	0.762
$\mathcal{O}(z^6)$	1.183

Tabela 4.2: Valores de redshift nos quais cada ordem da expansão de Taylor atinge um desvio máximo de 1% em relação ao modelo fiducial Λ CDM.

4.1.2 Convergência e Validade da Expansão de Padé

A mesma metodologia foi aplicada às aproximações de Padé, utilizando os parâmetros cosmográficos fiduciais apresentados na Tabela 4.1 como entrada nas expressões correspondentes às combinações $P_{1,1}$, $P_{2,1}$, $P_{2,2}$ e $P_{3,2}$, conforme Eqs. (2.131), (2.132), (2.133) e (2.134). Diferentemente das expansões em série de Taylor, os aproximantes de Padé são construídos como razões de polinômios, o que lhes confere uma estrutura racional capaz de capturar melhor o comportamento global da função, especialmente em regimes de redshift mais elevados. Como consequência, essas aproximações apresentam, em geral, uma região de validade mais ampla, uma vez que não estão limitadas por um raio de convergência estritamente determinado pela expansão local em torno de $z = 0$.

Na Fig. 4.2, apresentamos o comportamento da distância de luminosidade $d_L(z)$ em

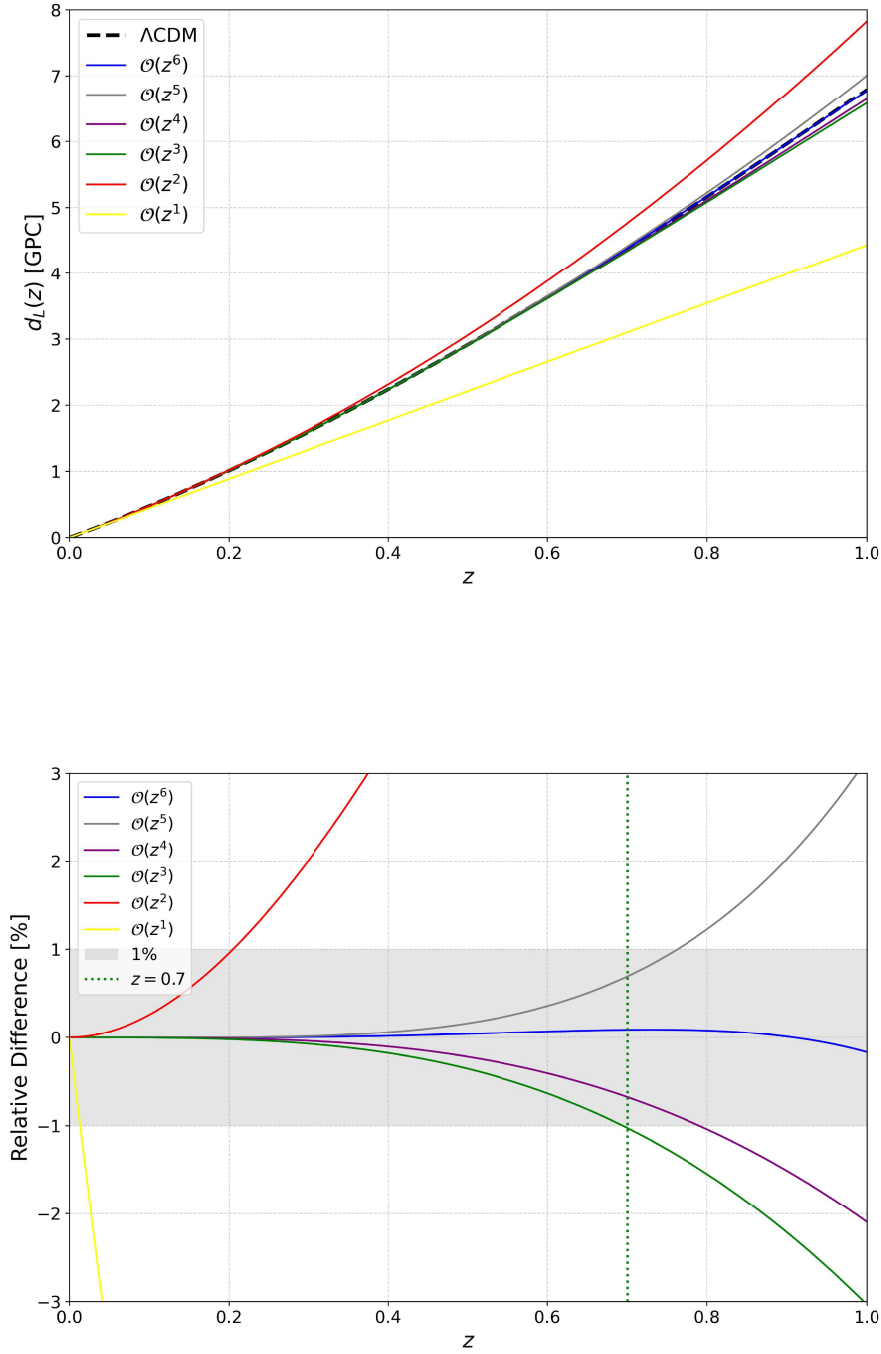


Figura 4.1: Distância de luminosidade em função do redshift para diferentes ordens da expansão cosmológica de Taylor (painel superior). A curva preta tracejada corresponde ao modelo fiducial Λ CDM adotado na análise. No painel inferior, apresentamos o desvio relativo entre cada aproximação de Taylor e o modelo fiducial. A região sombreada em cinza indica o limite de desvio de 1%, atingido pela expansão de terceira ordem em $z \approx 0.7$ (linha vertical pontilhada).

função do redshift para diferentes combinações dos polinômios de Padé. Para fins de comparação, a predição do modelo fiducial Λ CDM também é exibida (linha preta tracejada). O painel inferior da Fig. 4.2 mostra o desvio relativo entre cada aproximação de Padé e o modelo fiducial.

Observa-se que a combinação $P_{1,1}$ apresenta um comportamento não físico, com divergência acentuada em baixos redshifts. Esse comportamento está associado à presença de um polo na função racional, fazendo com que a curva apresente uma estrutura semelhante a uma hipérbole. Esse efeito também se manifesta no painel inferior, onde o desvio relativo diverge e muda de sinal abruptamente ao cruzar o modelo fiducial, resultando na linha vertical observada.

De forma semelhante, a aproximação $P_{2,2}$ também exhibe comportamento não físico, conforme discutido em [21], uma vez que não reproduz adequadamente a evolução da distância de luminosidade mesmo em regiões onde se esperaria convergência. Esse resultado indica que nem todas as combinações de Padé são adequadas para aplicações cosmológicas, sendo necessário avaliar cuidadosamente sua consistência física.

Restam, portanto, as combinações $P_{2,1}$ e $P_{3,2}$ como candidatas viáveis. A aproximação $P_{2,1}$ possui o mesmo número de graus de liberdade que a expansão de Taylor até terceira ordem ($\mathcal{O}(z^3)$), permitindo uma comparação direta entre os dois métodos. Observa-se que seu desvio relativo atinge o limite de 1% em um redshift semelhante ao caso de Taylor, $z \approx 0.7$, indicando que ambas as abordagens apresentam desempenho comparável nesse regime. Dessa forma, adotamos $P_{2,1}$ como um análogo direto da expansão de Taylor de terceira ordem na análise subsequente.

Por outro lado, a combinação $P_{3,2}$ apresenta uma melhoria significativa na região de validade, mantendo o desvio relativo abaixo de 1% até $z \approx 2.82$. Esse ganho em alcance de redshift decorre da maior flexibilidade da aproximação racional, ao custo da introdução de dois graus de liberdade adicionais em relação à expansão de Taylor de terceira ordem. Ainda assim, essa combinação se mostra particularmente relevante para aplicações envolvendo fontes em redshifts mais elevados, como no caso de binárias compactas, cujo pico de taxa de coalescência ocorre em regimes de z maiores, conforme mostrado na Fig. 3.1.

Os valores correspondentes de z_{max} para cada combinação dos aproximantes de Padé, definidos a partir do critério de desvio de 1% em relação ao modelo fiducial Λ CDM, são apresentados na Tabela 4.3.

Em vista desses resultados, adotamos as aproximações $P_{2,1}$ e $P_{3,2}$ nas análises subsequentes, de modo a explorar, respectivamente, um cenário diretamente comparável à expansão de Taylor e uma alternativa com maior alcance em redshift.

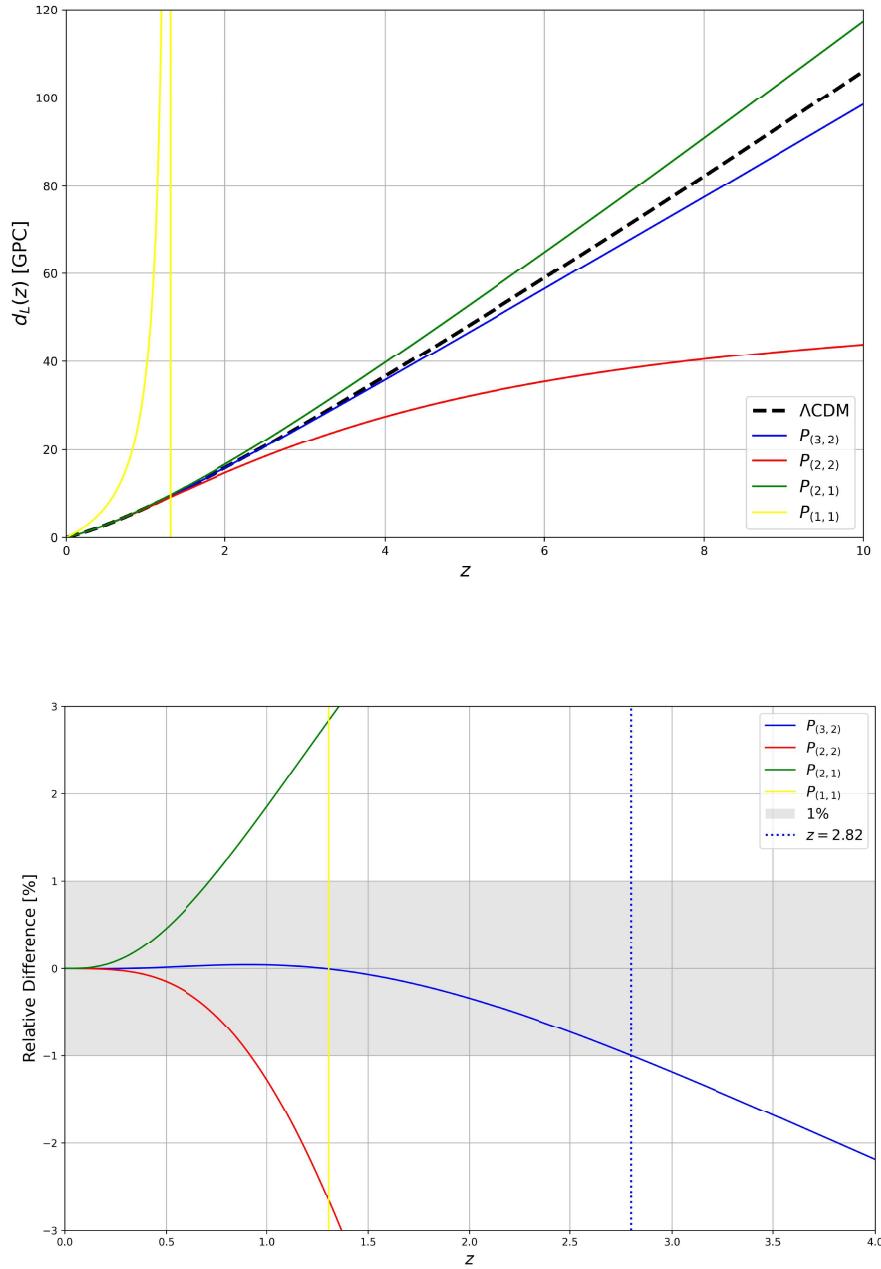


Figura 4.2: Distância de luminosidade em função do redshift para diferentes aproximações cosmológicas via polinômios de Padé (painel superior). As curvas correspondem às combinações $P_{1,1}$, $P_{2,1}$, $P_{2,2}$ e $P_{3,2}$, enquanto a linha preta tracejada representa o modelo fiducial Λ CDM adotado na análise. No painel inferior, apresentamos o desvio relativo entre cada aproximação de Padé e o modelo fiducial. A região sombreada em cinza indica o limite de desvio de 1%. A linha vertical pontilhada marca o redshift $z \approx 2.82$, no qual a aproximação $P_{3,2}$ atinge esse limite.

Aproximação	$z_{\max}$ para desvio de 1%
$P_{1,1}$	0.001
$P_{2,1}$	0.710
$P_{2,2}$	0.920
$P_{3,2}$	2.820

Tabela 4.3: Valores de redshift nos quais cada combinação dos aproximantes de Padé atinge um desvio máximo de 1% em relação ao modelo fiducial Λ CDM.

4.2 Restrição dos Parâmetros Cosmográficos

Com base na análise realizada, estabelecemos de forma consistente o intervalo de redshift no qual as diferentes parametrizações cosmográficas apresentam convergência controlada, bem como as aproximações que serão adotadas ao longo deste trabalho. Em particular, selecionamos três descrições: a expansão de Taylor até terceira ordem, e os aproximantes de Padé $P_{2,1}$ e $P_{3,2}$.

A expansão de Taylor até $\mathcal{O}(z^3)$ define um regime de validade em baixos redshifts, com $z_{\max} \approx 0.7$, envolvendo três parâmetros cosmográficos (ou graus de liberdade), a saber: H_0 , q_0 e j_0 . Essa escolha reflete um compromisso entre precisão e simplicidade, evitando a introdução de parâmetros adicionais que não resultam em ganho significativo no domínio de validade.

O aproximante de Padé $P_{2,1}$, por sua vez, apresenta o mesmo número de graus de liberdade e um limite de convergência comparável, $z_{\max} \approx 0.7$, porém construído a partir de uma estrutura racional. Essa abordagem alternativa permite uma comparação direta com a expansão de Taylor, isolando o impacto da parametrização na reconstrução da distância de luminosidade.

Em contraste, o aproximante $P_{3,2}$ estende significativamente o domínio de validade, alcançando $z_{\max} \approx 2.82$. Esse ganho em redshift decorre da maior flexibilidade da parametrização, ao custo da introdução de dois graus de liberdade adicionais, associados aos parâmetros cosmográficos s_0 e l_0 , além de H_0 , q_0 e j_0 .

A inclusão dessa terceira abordagem permite explorar de forma consistente regimes de redshift mais elevados, nos quais se espera um aumento significativo na taxa de detecção de eventos de ondas gravitacionais por detectores de próxima geração, conforme ilustrado na Fig. 3.1. Dessa forma, as três parametrizações selecionadas fornecem um conjunto complementar de descrições, cobrindo tanto o regime de baixo redshift quanto extensões confiáveis para maiores distâncias cosmológicas.

A etapa final da análise consiste na geração dos catálogos simulados e na subsequente restrição dos parâmetros cosmográficos. No que diz respeito à simulação, todo o procedimento já foi detalhado no capítulo anterior. Em termos práticos, a geração dos catálogos requer apenas a substituição da expressão da distância de luminosidade d_L na equação da amplitude (3.43) pela forma correspondente à parametrização adotada. Por

Tabela 4.4: Número total esperado de detecções (N_e) para cada interferômetro e número efetivo de eventos (N_z) dentro do regime de validade das parametrizações cosmográficas.

Interferometer	N_e	N_z (Taylor $\mathcal{O}(z^3)$ e Padé $P_{2,1}$)	N_z (Padé $P_{3,2}$)
Advanced LIGO	10	10	10
Einstein Telescope	1000	100	820
DECIGO	10000	800	8200

exemplo, no caso da expansão de Taylor, utilizamos a Eq. (2.109) truncada até terceira ordem. De maneira análoga, para as aproximações de Padé, empregamos as expressões de d_L dadas pelas Eqs. (2.132) e (2.134), conforme a combinação considerada.

Entretanto, um ponto sutil deve ser levado em conta. O número total de eventos esperados N_e , discutido anteriormente, é definido considerando todo o intervalo de sensibilidade em redshift de cada detector. Por outro lado, as parametrizações cosmográficas possuem um domínio de validade limitado a $z_{\max}$, de modo que a inclusão de eventos além desse limite pode introduzir desvios não controlados. Como consequência, não é consistente utilizar diretamente os valores de N_e na construção dos catálogos simulados, especialmente no caso de detectores de próxima geração, como o Einstein Telescope e o DECIGO, cujos alcances em redshift excedem significativamente o regime de convergência das parametrizações.

Para contornar essa limitação, introduzimos uma nova quantidade, denotada por N_z , que representa o número efetivo de eventos contidos no intervalo $0 < z < z_{\max}$. A determinação de N_z é realizada a partir da distribuição de probabilidade em redshift das fontes, dada pela Eq. (3.40). Especificamente, geramos amostras aleatórias de redshift seguindo essa distribuição ao longo de todo o intervalo acessível e, em seguida, restringimos os eventos ao domínio de validade de cada parametrização. Repetindo esse procedimento diversas vezes, obtemos o valor médio de eventos dentro do intervalo considerado, que definimos como N_z .

Esse procedimento é aplicado de forma consistente para cada detector e para cada escolha de parametrização, refletindo diretamente as diferenças nos respectivos valores de $z_{\max}$. Os valores correspondentes de N_z , bem como os valores originais de N_e , são apresentados na Tabela 4.4.

Nota-se que, no caso do Advanced LIGO, o número total de eventos já se encontra integralmente contido dentro do regime de validade das parametrizações adotadas, de modo que $N_z = N_e$. Em contraste, para detectores de próxima geração, como o Einstein Telescope e o DECIGO, observa-se uma redução significativa no número efetivo de eventos ao se restringir ao intervalo de convergência, especialmente para parametrizações válidas apenas em baixos redshifts. Por outro lado, a utilização do aproximante de Padé $P_{3,2}$ permite recuperar uma fração substancial desses eventos, evidenciando sua importância para análises que exploram regimes de redshift mais elevados.

Uma vez estabelecido o número efetivo de eventos N_z para cada configuração, passamos à etapa de restrição dos parâmetros cosmoográficos. O objetivo central é investigar o impacto de diferentes regimes observacionais na capacidade de constranger os parâmetros H_0 , q_0 e j_0 em parametrizações de baixa ordem, já em alta ordem com a adição de s_0 e l_0 . Para isso, adotamos duas abordagens complementares: (i) uma análise baseada na binagem do signal-to-noise ratio (SNR), e (ii) a consideração de cenários otimistas de detecção, nos quais exploramos diferentes valores de N_z .

Essa estratégia permite avaliar de forma sistemática como a qualidade do sinal e o número de eventos influenciam a precisão das estimativas cosmoográficas, indo além de uma simples comparação estatística entre interferômetros. Em particular, buscamos estabelecer uma conexão direta entre as características físicas dos detectores, como sensibilidade e alcance em redshift, e o poder de constrangimento dos parâmetros cosmológicos.

4.2.1 Inferência Bayesiana

Neste trabalho, adotamos um arcabouço Bayesiano [91–93] para estimar os parâmetros cosmoográficos $\{\theta_i\}$, que, de forma geral, podem ser escritos como $\{H_0, q_0, j_0, s_0, l_0\}$, assumindo um modelo $\mathcal{M}$ descrito pela expansão cosmoográfica da distância de luminosidade, seja via série de Taylor ou aproximantes de Padé. Ressalta-se que o conjunto efetivo de parâmetros $\{\theta_i\}$ depende da parametrização adotada, uma vez que diferentes expansões envolvem distintos números de graus de liberdade. Nesse contexto, o objetivo é inferir a distribuição de probabilidade dos parâmetros cosmoográficos a partir de um conjunto de dados observacionais d .

A inferência Bayesiana baseia-se no teorema de Bayes, que relaciona a probabilidade a posteriori à verossimilhança e ao conhecimento prévio sobre os parâmetros:

$$P(\{\theta_i\}|d, \mathcal{M}) = \frac{P(d|\{\theta_i\}, \mathcal{M}) P(\{\theta_i\}|\mathcal{M})}{P(d)}, \quad (4.2)$$

onde $P(d|\{\theta_i\}, \mathcal{M})$ é a função de verossimilhança, $P(\{\theta_i\}|\mathcal{M})$ representa os priors e $P(d)$ é a evidência bayesiana, atuando como fator de normalização.

Assumindo que os erros associados às observações são gaussianos e não correlacionados, a verossimilhança pode ser escrita como:

$$P(d|\{\theta_i\}, \mathcal{M}) = \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{|d_i - f_i(\{\theta_i\}, z_i)|^2}{\sigma_i^2} \right], \quad (4.3)$$

onde N é o número de eventos, d_i representa os dados observados (distâncias de luminosidade simuladas), σ_i suas incertezas associadas, e $f_i(\{\theta_i\}, z_i)$ corresponde à predição teórica do modelo cosmoográfico para cada redshift z_i . Note que o termo no expoente é

equivalente à função χ^2 , frequentemente utilizada em análises de ajuste de parâmetros.

Os priors adotados para os parâmetros cosmográficos são uniformes e definidos de modo a abranger os limites observacionais atuais sem introduzir viés informativo significativo. Em particular, consideramos $H_0 \in [54, 81] \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, $q_0 \in [-1, 0]$ e $j_0 \in [-1, 3]$ baseado em [90]. Para os parâmetros de ordem superior, adotamos intervalos amplos baseados na literatura cosmográfica [21], com $s_0 \in [-10, 10]$ e $l_0 \in [-50, 50]$, de forma a garantir flexibilidade suficiente na reconstrução sem impor restrições artificiais ao espaço paramétrico. Além disso, desprezamos incertezas no redshift, assumindo a identificação precisa da galáxia hospedeira por meio de contrapartidas eletromagnéticas.

A obtenção da distribuição a posteriori é realizada numericamente por meio de técnicas de amostragem do tipo Markov Chain Monte Carlo (MCMC), utilizando o pacote `emcee` [94]. Esse algoritmo implementa um *ensemble sampler* que explora eficientemente o espaço de parâmetros, construindo cadeias de Markov cuja densidade de pontos converge para a distribuição a posteriori desejada. Em termos práticos, a cadeia percorre o espaço paramétrico de forma estocástica, aceitando ou rejeitando novos pontos com base na razão entre probabilidades, de modo que regiões de maior probabilidade são mais densamente amostradas.

Para cada configuração e bin analisado, realizamos 50 realizações independentes dos catálogos simulados, de forma a capturar flutuações estatísticas associadas ao processo de detecção. Para cada realização, obtemos as distribuições a posteriori dos parâmetros H_0 , q_0 , j_0 , s_0 e l_0 por meio do MCMC, em seguida calculamos a média dos valores centrais e a média das incertezas ao longo de todas as realizações, fornecendo uma estimativa mais robusta e estável dos parâmetros cosmográficos.

As incertezas reportadas neste trabalho são expressas em termos de intervalos de credibilidade de 1σ , correspondentes a uma probabilidade de aproximadamente 68% para distribuições gaussianas. Na prática, esses intervalos são obtidos diretamente das distribuições marginais a posteriori, por meio dos percentis 16th e 84th, de modo a não depender da hipótese estrita de normalidade. Esse procedimento garante uma caracterização consistente das incertezas mesmo na presença de assimetrias ou desvios de gaussianidade.

4.2.2 Resultados da Análise via *Signal-to-noise* ratio (SNR)

Nesta etapa, construímos catálogos simulados de eventos de ondas gravitacionais organizados em intervalos da razão sinal-ruído (SNR), considerando o número efetivo de eventos N_z distribuídos no domínio de validade de cada parametrização cosmográfica (ver Tabela 4.4). Em particular, utilizamos a expansão de Taylor até $\mathcal{O}(z^3)$ e o aproximante de Padé $P_{2,1}$ no intervalo $z \in [0, 0.7]$, enquanto o aproximante $P_{3,2}$, devido ao seu maior

raio de convergência, permite estender a análise até $z \in [0, 2.82]$.

Para cada interferômetro, os limites mínimo e máximo de SNR são definidos com base em sua sensibilidade instrumental [81; 86]. Os intervalos adotados neste trabalho — [8, 88] para o Advanced LIGO, [8, 308] para o Einstein Telescope e [8, 808] para o DECIGO — foram escolhidos de modo a garantir, simultaneamente, um número estatisticamente relevante de eventos simulados e uma representação adequada do regime de sensibilidade de cada detector. O valor mínimo $\text{SNR} = 8$ corresponde ao limiar padrão utilizado para a identificação de sinais de ondas gravitacionais. Cada um desses intervalos é subdividido em 20 bins igualmente espaçados, permitindo uma amostragem homogênea do espaço de SNR.

A construção dos catálogos segue um procedimento estatístico controlado. Para cada bin de SNR, realizamos um número máximo de tentativas de preenchimento igual a N_z . Em cada tentativa, um valor de redshift é sorteado segundo a distribuição de probabilidade dada pela Eq. (3.40). Em seguida, são geradas até 500 realizações de parâmetros da fonte, incluindo quantidades intrínsecas (como massas) e extrínsecas (como ângulos de orientação). Para cada realização, calcula-se a SNR correspondente, sendo a configuração aceita caso o valor obtido pertença ao intervalo do bin considerado.

Como exemplo, para o Advanced LIGO ($N_z = 10$), são realizadas até 10 tentativas independentes por bin. Em cada tentativa, busca-se uma combinação de parâmetros que produza uma SNR dentro do intervalo especificado. Caso nenhuma configuração satisfaça esse critério, a tentativa é contabilizada como não sucedida e o processo segue com um novo sorteio de redshift.

A limitação no número de tentativas está diretamente relacionada à dependência da SNR com a distância de luminosidade: como a amplitude do sinal decai com d_L^{-1} (ver Eq. (3.29)), eventos mais próximos tendem a apresentar valores mais elevados de SNR, enquanto eventos mais distantes contribuem predominantemente para a região de baixa SNR. Consequentemente, a distribuição conjunta em redshift e SNR não é uniforme, o que afeta a eficiência de preenchimento dos bins.

Como resultado, o número efetivo de eventos em cada intervalo de SNR pode ser inferior a N_z . A média do número de eventos por bin, obtida a partir de 50 realizações independentes para cada interferômetro — Advanced LIGO (azul), Einstein Telescope (vermelho) e DECIGO (verde) — é apresentada na Fig. 4.3.

Observa-se, por exemplo, que no caso do DECIGO, no intervalo de baixa SNR ([8, 48]), as parametrizações $\mathcal{O}(z^3)$ e $P_{2,1}$ produzem um número reduzido de eventos. Isso ocorre porque, dada a alta sensibilidade do detector, valores baixos de SNR estão associados a fontes mais distantes, fora do domínio de validade dessas parametrizações. Por outro lado, o aproximante $P_{3,2}$, ao permitir a inclusão de redshifts mais elevados, resulta em um aumento significativo no número de eventos nesse limiar, refletindo a contribuição de fontes mais distantes com SNR reduzida.

Uma vez construídos os conjuntos de dados simulados, procede-se à estimação dos parâmetros cosmológicos em cada intervalo de SNR definido pelos bins, com ênfase na quantificação de suas incertezas, σ_{H_0} , σ_{q_0} , σ_{j_0} , bem como σ_{s_0} e σ_{l_0} no caso de parametrizações de ordem superior. As incertezas são estimadas a partir das distribuições obtidas em cada bin, sendo definidas como a média dos desvios superior e inferior em torno do valor mediano. Como apontado na seção 4.2.1, para cada intervalo de SNR, são consideradas 50 realizações independentes dos catálogos simulados, o que reduz flutuações estatísticas.

Os resultados são apresentados na Fig. 4.4, cujos painéis mostram, respectivamente, σ_{H_0} , σ_{q_0} e σ_{j_0} em função da SNR, e na Fig. 4.5, que exibe σ_{s_0} e σ_{l_0} . As diferentes parametrizações são distinguidas pelo estilo das curvas: linhas contínuas representam a expansão de Taylor até $\mathcal{O}(z^3)$, linhas tracejadas correspondem ao aproximante de Padé (2, 1), e linhas pontilhadas ao aproximante de Padé (3, 2). As tabelas com todos os resultados numéricos encontram-se no Apêndice A.

Para o aLIGO, as três parametrizações consideradas produzem estimativas muito semelhantes ao longo dos bins de SNR, sem diferenças sistemáticas relevantes entre Taylor $\mathcal{O}(z^3)$, Padé (2, 1) e Padé (3, 2). Para H_0 , os valores centrais permanecem compatíveis com o valor fiducial $H_0 = 67.68 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, variando entre 67.27 e $68.33 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ para Taylor, entre 67.28 e $68.32 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ para Padé (2, 1), e entre 67.11 e $68.36 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ para Padé (3, 2). Em todas as parametrizações, observa-se uma redução de σ_{H_0} dos bins de menor SNR até valores intermediários, seguida por uma leve degradação em altos SNR. A melhor precisão para Taylor ocorre em $\text{SNR} \in [40, 44]$, com $H_0 = 68.07^{+1.42}_{-1.37} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, isto é, $\sigma_{H_0} \simeq 1.40 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, correspondente a uma precisão relativa de aproximadamente 2.0%. Para Padé (2, 1), o menor erro ocorre em $\text{SNR} \in [44, 48]$, com $H_0 = 67.68^{+1.45}_{-1.40} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, ou $\sigma_{H_0} \simeq 1.43 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, também com precisão relativa de $\sim 2.1\%$. Já para Padé (3, 2), a melhor restrição é obtida em $\text{SNR} \in [36, 40]$, com $H_0 = 67.46^{+1.43}_{-1.37} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, resultando em $\sigma_{H_0} \simeq 1.40 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, equivalente a uma precisão relativa de $\sim 2.1\%$. Para q_0 , os valores centrais permanecem concentrados entre aproximadamente -0.49 e -0.53 em todas as parametrizações, compatíveis com o valor fiducial $q_0 = -0.533$, enquanto σ_{q_0} permanece praticamente constante em todos os bins, com $\sigma_{q_0} \simeq 0.33\text{--}0.34$, correspondendo a uma precisão relativa da ordem de 65%–70% quando calculada em relação ao valor médio estimado. Para j_0 , as estimativas se mantêm próximas de $j_0 = 1$, com valores centrais entre 0.97 e 1.01 para todas as parametrizações, porém as incertezas permanecem elevadas e quase independentes do SNR, com $\sigma_{j_0} \simeq 1.35\text{--}1.37$, o que implica uma precisão relativa da ordem de 135%. Finalmente, para os parâmetros de ordem superior avaliados apenas com Padé (3, 2), não se observa ganho estatístico relevante ao longo dos bins de SNR: os valores centrais de s_0 variam entre aproximadamente -0.09 e 0.14 , com melhor caso em $\text{SNR} \in [60, 64]$, onde $\sigma_{s_0} \simeq 6.77$, enquanto l_0 varia entre aproximadamente -0.11 e 0.09 , com $\sigma_{l_0} \simeq 6.79$ nos melhores bins. Como os valores médios de s_0 e l_0 permanecem

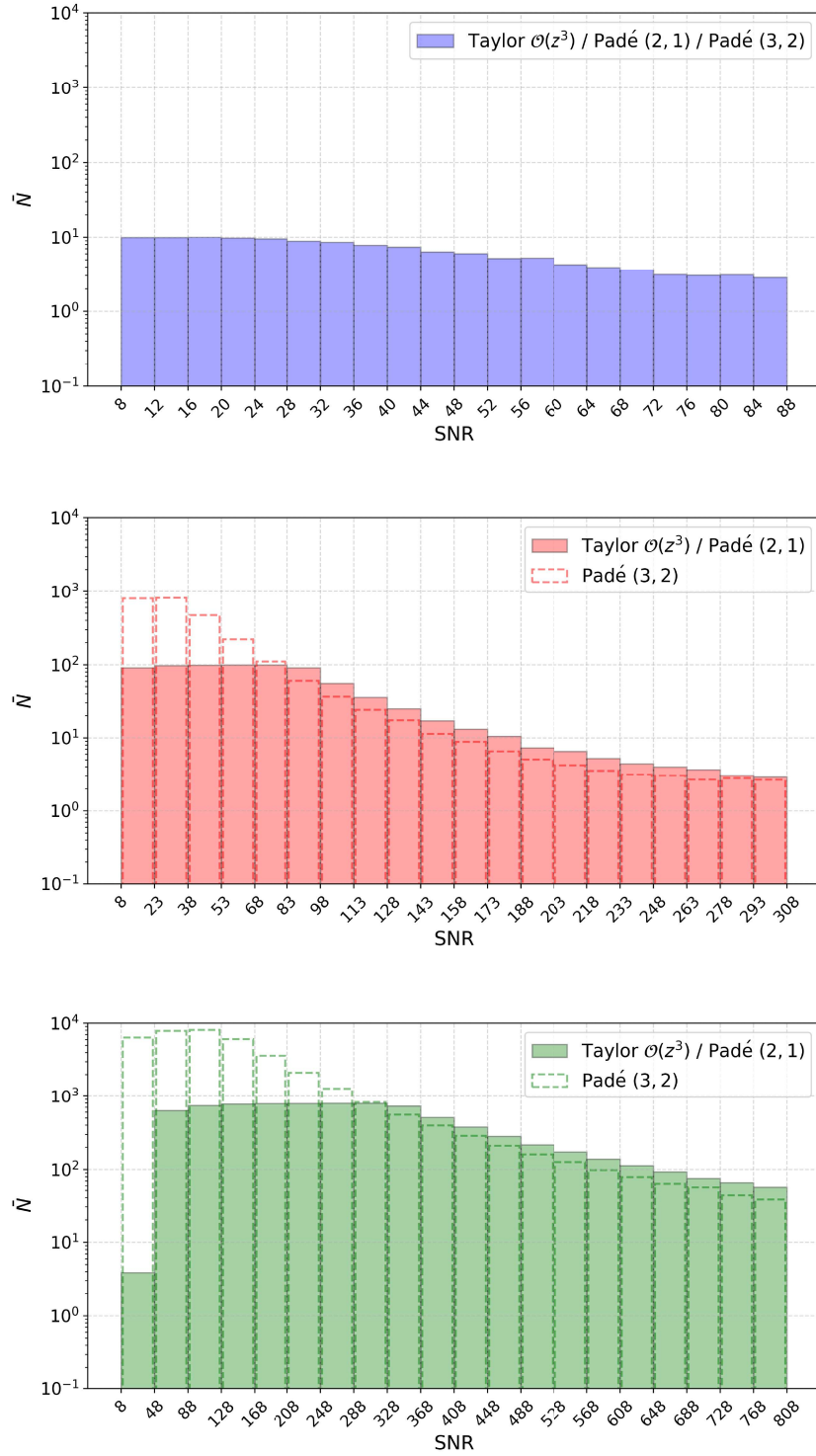


Figura 4.3: Número médio de eventos $\tilde{N}$ em função do SNR para diferentes interferômetros de ondas gravitacionais. A primeira figura corresponde ao aLIGO, a segunda ao Einstein Telescope (ET) e a terceira ao DECIGO. No caso do aLIGO, todas as parametrizações consideradas — Taylor $\mathcal{O}(z^3)$, Padé (2, 1) e Padé (3, 2) — compartilham o mesmo limite superior em redshift para os dados, de modo que seus resultados coincidem e são representados por uma única distribuição. Para os detectores ET e DECIGO, comparam-se explicitamente os resultados de Taylor $\mathcal{O}(z^3)$, Padé (2, 1) e Padé (3, 2), evidenciando o aumento no número médio de eventos associado à extensão do alcance em redshift na parametrização de ordem superior. Os gráficos estão apresentados em escala logarítmica no eixo vertical.

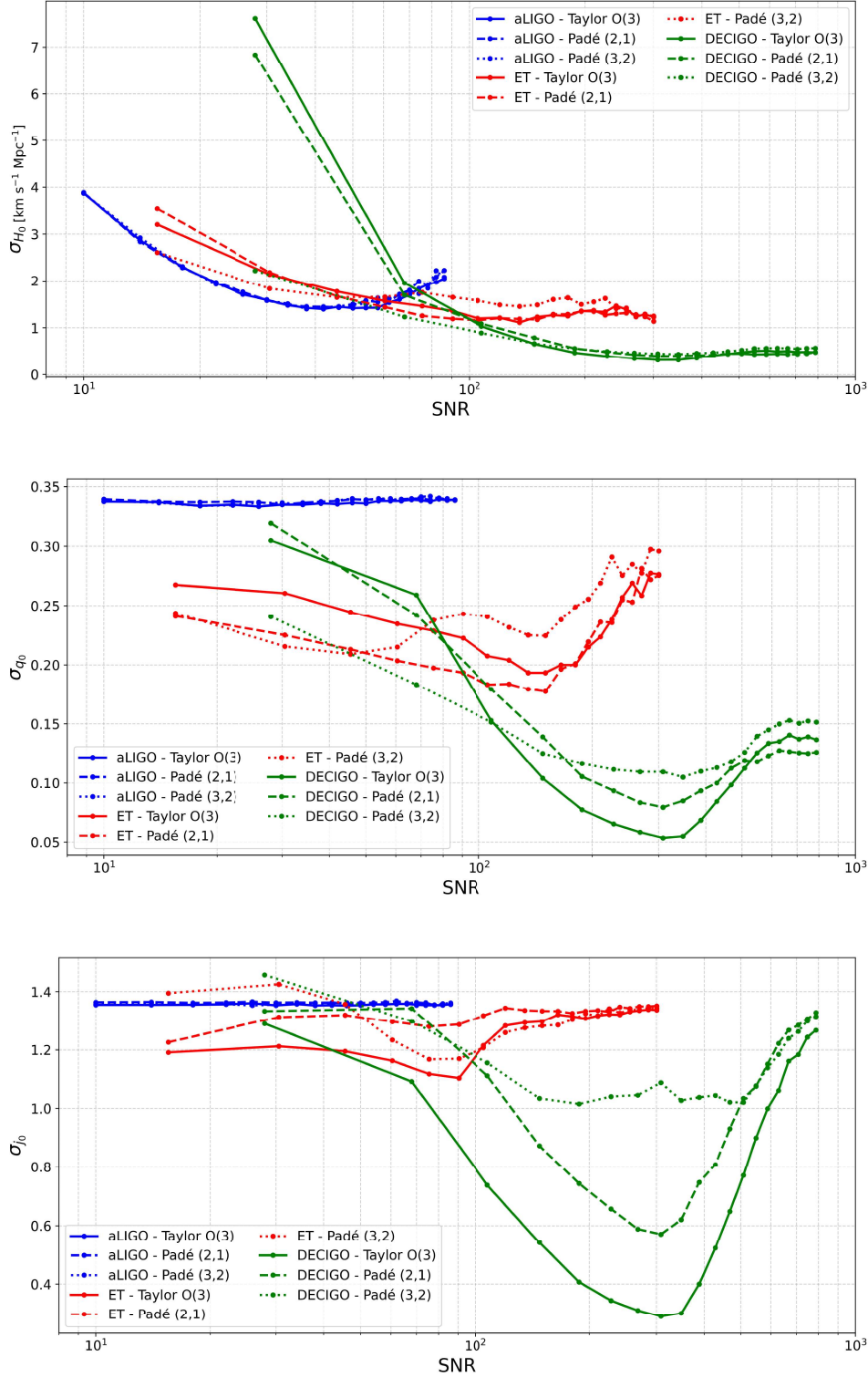


Figura 4.4: Incertezas dos parâmetros cosmológicos em função da razão sinal-ruído (SNR). O primeiro, segundo e terceiro painéis apresentam, respectivamente, σ_{H_0} , σ_{q_0} e σ_{j_0} . Os resultados são mostrados para diferentes interferômetros: aLIGO (azul), Einstein Telescope — ET (vermelho) e DECIGO (verde). As parametrizações são distinguidas pelo estilo das curvas: linhas contínuas correspondem à expansão de Taylor $\mathcal{O}(z^3)$, linhas tracejadas ao aproximante de Padé (2,1) e linhas pontilhadas ao aproximante de Padé (3,2). O eixo horizontal está em escala logarítmica.

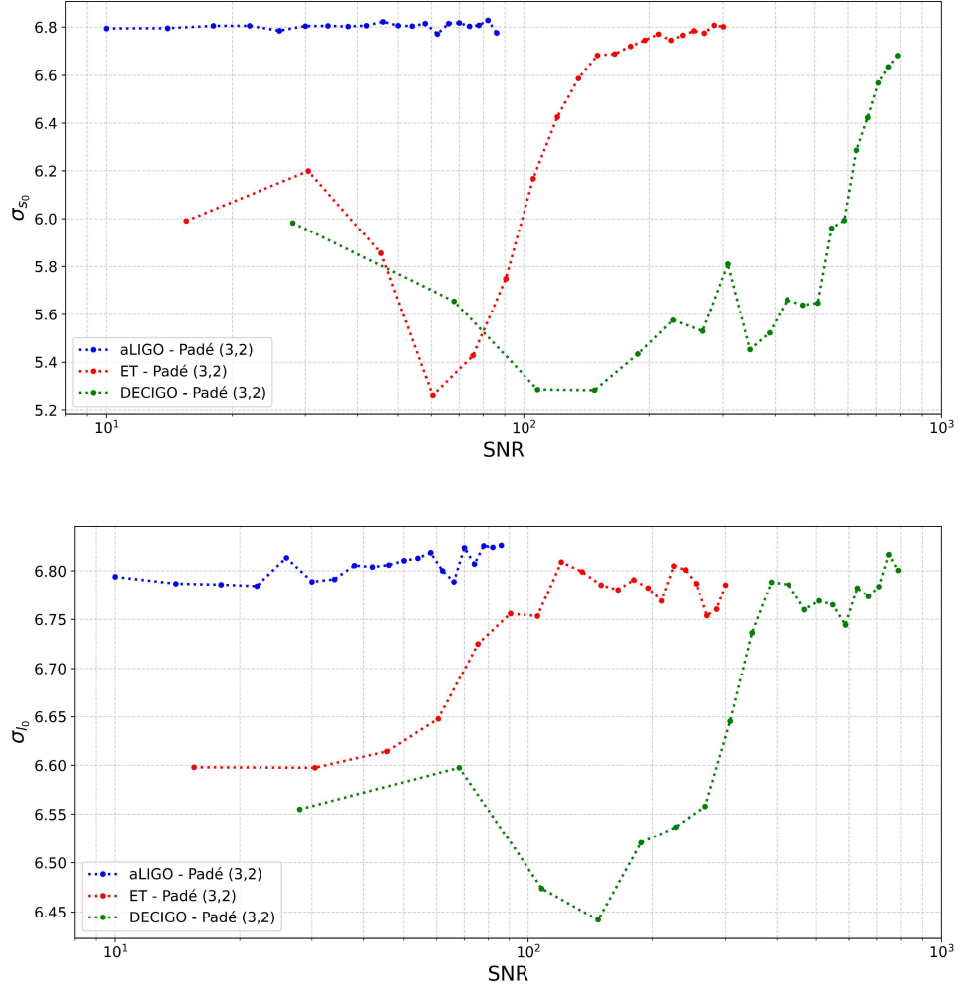


Figura 4.5: Incertezas associadas aos parâmetros cosmológicos de ordem superior em função da SNR. O primeiro painel apresenta σ_{s_0} e o segundo σ_{l_0} , obtidos a partir do aproximante de Padé (3, 2). Os resultados são mostrados para os interferômetros aLIGO (azul), Einstein Telescope — ET (vermelho) e DECIGO (verde). Esses parâmetros são exclusivos da parametrização de ordem superior, não estando definidos nas expansões de Taylor $\mathcal{O}(z^3)$ e Padé (2, 1). O eixo horizontal está em escala logarítmica.

próximos de zero e as incertezas são muito maiores que os próprios valores centrais, a precisão relativa não é uma medida informativa nesses casos.

Para o Einstein Telescope, as três parametrizações apresentam estimativas globalmente consistentes entre si, mas com uma melhora de precisão em relação ao aLIGO, sobretudo para H_0 e q_0 . Para H_0 , os valores centrais permanecem próximos do valor fiducial $H_0 = 67.68 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, variando entre 67.26 e $67.84 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ para Taylor $\mathcal{O}(z^3)$, entre 67.17 e $68.26 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ para Padé (2, 1), e entre 67.29 e $67.74 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ para Padé (3, 2). A melhor precisão para Taylor ocorre em $\text{SNR} \in [128, 143]$, com $H_0 = 67.39^{+1.11}_{-1.12} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, isto é, $\sigma_{H_0} \simeq 1.12 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, correspondente a uma precisão relativa de aproximadamente 1.7%. Para Padé (2, 1), o melhor resultado ocorre em $\text{SNR} \in [293, 308]$, com $H_0 = 67.56^{+1.15}_{-1.13} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, ou $\sigma_{H_0} \simeq 1.14 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$,

também com precisão relativa de $\sim 1.7\%$. Já para Padé (3, 2), a menor incerteza é obtida em $\text{SNR} \in [263, 278]$, com $H_0 = 67.39_{-1.17}^{+1.29} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, resultando em $\sigma_{H_0} \simeq 1.23 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, equivalente a uma precisão relativa de $\sim 1.8\%$. Para q_0 , os valores centrais permanecem em torno do valor fiducial $q_0 = -0.533$, variando aproximadamente entre -0.46 e -0.54 para Taylor, entre -0.46 e -0.57 para Padé (2, 1), e entre -0.47 e -0.56 para Padé (3, 2). A melhor restrição com Taylor ocorre em $\text{SNR} \in [143, 158]$, com $q_0 = -0.52_{-0.18}^{+0.20}$, ou $\sigma_{q_0} \simeq 0.19$, correspondente a uma precisão relativa de aproximadamente 37%. Para Padé (2, 1), o melhor caso também ocorre em $\text{SNR} \in [143, 158]$, com $q_0 = -0.53_{-0.17}^{+0.18}$, isto é, $\sigma_{q_0} \simeq 0.18$, equivalente a uma precisão relativa de $\sim 33\%$. Para Padé (3, 2), a menor incerteza aparece em $\text{SNR} \in [38, 53]$, com $q_0 = -0.51_{-0.20}^{+0.21}$, fornecendo $\sigma_{q_0} \simeq 0.21$, ou uma precisão relativa de $\sim 40\%$. Para j_0 , as estimativas permanecem estatisticamente compatíveis com $j_0 = 1$, mas com incertezas ainda elevadas e sem uma tendência monotônica clara com o SNR. Os valores centrais variam entre 0.65 e 1.04 para Taylor, entre 0.89 e 1.05 para Padé (2, 1), e entre 0.62 e 1.41 para Padé (3, 2). A melhor precisão para Taylor ocorre em $\text{SNR} \in [83, 98]$, com $j_0 = 0.65_{-0.98}^{+1.23}$ e $\sigma_{j_0} \simeq 1.11$, correspondendo a uma precisão relativa de aproximadamente 170% em relação ao valor médio estimado. Para Padé (2, 1), o menor erro ocorre em $\text{SNR} \in [8, 23]$, com $j_0 = 0.96_{-1.21}^{+1.24}$, isto é, $\sigma_{j_0} \simeq 1.23$, ou precisão relativa de $\sim 128\%$. Para Padé (3, 2), a melhor restrição é obtida em $\text{SNR} \in [68, 83]$, com $j_0 = 0.62_{-0.99}^{+1.35}$, resultando em $\sigma_{j_0} \simeq 1.17$, embora a precisão relativa permaneça muito elevada, em torno de $\sim 190\%$. Para os parâmetros de ordem superior, avaliados apenas com Padé (3, 2), observa-se que s_0 apresenta valores centrais entre -0.39 e 1.54 , com melhor precisão em $\text{SNR} \in [53, 68]$, onde $s_0 = 0.05_{-5.49}^{+5.03}$ e $\sigma_{s_0} \simeq 5.26$. Já l_0 varia entre -1.15 e 0.13 , com menor incerteza em $\text{SNR} \in [8, 23]$, onde $l_0 = -1.12_{-6.15}^{+7.04}$ e $\sigma_{l_0} \simeq 6.60$. Em ambos os casos, as incertezas permanecem muito superiores aos valores centrais, de modo que a precisão relativa não constitui uma medida informativa para avaliar a qualidade das restrições.

Para o DECIGO, observa-se uma melhora expressiva na precisão das estimativas em relação ao aLIGO e ao Einstein Telescope, especialmente para os parâmetros de menor ordem, embora a hierarquia entre as parametrizações dependa do parâmetro considerado. Para H_0 , os valores centrais permanecem compatíveis com o valor fiducial $H_0 = 67.68 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, variando entre 67.14 e $67.91 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ para Taylor $\mathcal{O}(z^3)$, entre 67.51 e $67.88 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ para Padé (2, 1), e entre 67.26 e $68.14 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ para Padé (3, 2). A melhor precisão para Taylor ocorre em $\text{SNR} \in [288, 328]$, com $H_0 = 67.72_{-0.31}^{+0.32} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, isto é, $\sigma_{H_0} \simeq 0.32 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, correspondente a uma precisão relativa de aproximadamente 0.5%. Para Padé (2, 1), o melhor resultado também ocorre em $\text{SNR} \in [288, 328]$, com $H_0 = 67.76_{-0.40}^{+0.40} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, ou $\sigma_{H_0} \simeq 0.40 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, equivalente a uma precisão relativa de $\sim 0.6\%$. Já para Padé (3, 2), a menor incerteza é obtida em $\text{SNR} \in [328, 368]$, com $H_0 = 67.62_{-0.43}^{+0.45} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, resultando em $\sigma_{H_0} \simeq 0.44 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, ou uma precisão relativa de $\sim 0.7\%$. Para q_0 , os va-

lores centrais permanecem próximos do valor fiducial $q_0 = -0.533$, variando aproximadamente entre -0.47 e -0.56 para Taylor, entre -0.50 e -0.57 para Padé (2, 1), e entre -0.51 e -0.60 para Padé (3, 2). A melhor restrição com Taylor ocorre em $\text{SNR} \in [288, 328]$, com $q_0 = -0.54_{-0.05}^{+0.05}$, isto é, $\sigma_{q_0} \simeq 0.05$, correspondente a uma precisão relativa de aproximadamente 9%. Para Padé (2, 1), as menores incertezas aparecem em $\text{SNR} \in [248, 288]$ e $[288, 328]$, com $q_0 = -0.55_{-0.08}^{+0.08}$ e $q_0 = -0.56_{-0.08}^{+0.08}$, respectivamente, fornecendo $\sigma_{q_0} \simeq 0.08$, ou uma precisão relativa de $\sim 15\%$. Para Padé (3, 2), o melhor caso ocorre em $\text{SNR} \in [328, 368]$, com $q_0 = -0.52_{-0.11}^{+0.10}$, resultando em $\sigma_{q_0} \simeq 0.11$, equivalente a uma precisão relativa de $\sim 20\%$. Para j_0 , as estimativas permanecem estatisticamente compatíveis com $j_0 = 1$, mas as diferenças entre as parametrizações tornam-se mais evidentes: Taylor apresenta valores centrais entre 0.77 e 1.13, Padé (2, 1) entre 0.88 e 1.34, e Padé (3, 2) entre 0.72 e 1.48. A melhor precisão para Taylor ocorre em $\text{SNR} \in [288, 328]$, com $j_0 = 1.03_{-0.28}^{+0.30}$ e $\sigma_{j_0} \simeq 0.29$, correspondendo a uma precisão relativa de aproximadamente 28%. Para Padé (2, 1), a menor incerteza ocorre no mesmo intervalo, com $j_0 = 1.18_{-0.54}^{+0.61}$, isto é, $\sigma_{j_0} \simeq 0.58$, ou uma precisão relativa de $\sim 49\%$. Para Padé (3, 2), a melhor restrição é obtida em $\text{SNR} \in [168, 208]$, com $j_0 = 1.42_{-1.29}^{+0.73}$, resultando em $\sigma_{j_0} \simeq 1.01$, ainda com precisão relativa elevada, da ordem de $\sim 71\%$. Para os parâmetros de ordem superior, avaliados apenas com Padé (3, 2), observa-se que s_0 apresenta valores centrais entre -1.21 e 1.99 , com melhor precisão em $\text{SNR} \in [88, 128]$ e $[128, 168]$, onde se obtém, respectivamente, $s_0 = 0.67_{-5.55}^{+5.02}$ e $s_0 = 1.47_{-5.79}^{+4.78}$, ambos com $\sigma_{s_0} \simeq 5.29$. Já l_0 varia entre -1.16 e 0.15 , com menor incerteza em $\text{SNR} \in [128, 168]$, onde $l_0 = -0.99_{-6.04}^{+6.85}$ e $\sigma_{l_0} \simeq 6.45$. Assim como nos demais detectores, as incertezas associadas a s_0 e l_0 permanecem muito superiores aos valores centrais, de modo que a precisão relativa não é uma medida robusta ou informativa para esses parâmetros.

4.2.3 Resultados da Análise via Número de Eventos (N)

Na segunda etapa da análise, investigamos o impacto do número total de eventos na determinação dos parâmetros cosmológicos, adotando uma abordagem complementar àquela baseada na binagem em SNR. Diferentemente do procedimento anterior, nesta etapa o signal-to-noise ratio não é fixado em intervalos específicos, sendo tratado como uma variável livre nas simulações. Assim, o foco recai exclusivamente sobre o efeito estatístico associado ao aumento do número de eventos detectados.

Como ponto de partida, utilizamos os números efetivos de eventos N_z para cada parametrização (ver Tabela 4.4) e, a partir desses valores, aumentamos progressivamente N com o objetivo de explorar cenários mais otimistas de detecção. Para as parametrizações de ordem mais baixa — Taylor $\mathcal{O}(z^3)$ e Padé (2, 1) — consideramos $N \in [10, 100]$ para o Advanced LIGO, com $\Delta N = 10$, $N \in [100, 550]$ para o Einstein Telescope, com $\Delta N = 50$, e $N \in [800, 2600]$ para o DECIGO, com $\Delta N = 200$. Esses intervalos são mutuamente

exclusivos e refletem diretamente tanto as capacidades observacionais quanto os valores efetivos de eventos acessíveis em cada configuração.

Para a parametrização de Padé (3, 2), adotamos intervalos distintos, compatíveis com os valores mais elevados de N_z associados a essa aproximação. Em particular, utilizamos $N \in [820, 1000]$, com $\Delta N = 20$, para o Einstein Telescope, e $N \in [8200, 10000]$, com $\Delta N = 200$, para o DECIGO. Ressalta-se que não extrapolamos o limite superior correspondente ao número máximo de eventos esperados, dado o tempo de operação dos equipamentos assumido neste trabalho.

Os resultados são apresentados na Fig. 4.6, cujos painéis mostram, respectivamente, σ_{H_0} , σ_{q_0} e σ_{j_0} em função do número de eventos N , e na Fig. 4.7, que exhibe σ_{s_0} e σ_{l_0} . As diferentes parametrizações são distinguidas pelo estilo das curvas: linhas contínuas representam a expansão de Taylor até $\mathcal{O}(z^3)$, linhas tracejadas correspondem ao aproximante de Padé (2, 1), e linhas pontilhadas ao aproximante de Padé (3, 2). As tabelas contendo todos os resultados numéricos, incluindo os valores de N e as incertezas associadas a cada parâmetro, encontram-se no Apêndice A.

Para o aLIGO, na análise em função do número de eventos N , as três parametrizações apresentam resultados bastante consistentes entre si para os parâmetros de menor ordem, com redução clara das incertezas associadas a H_0 conforme N aumenta, enquanto q_0 e j_0 permanecem praticamente limitados por incertezas quase constantes. Para H_0 , os valores centrais mantêm-se compatíveis com o valor fiducial $H_0 = 67.68 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, variando entre 67.43 e $67.79 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ para Taylor $\mathcal{O}(z^3)$, entre 67.50 e $68.21 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ para Padé (2, 1), e entre 67.50 e $67.82 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ para Padé (3, 2). Em todas as parametrizações, a melhor precisão ocorre no maior número de eventos considerado, $N = 100$. Para Taylor, obtém-se $H_0 = 67.66^{+0.77}_{-0.76} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, isto é, $\sigma_{H_0} \simeq 0.77 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, correspondente a uma precisão relativa de aproximadamente 1.13%. Para Padé (2, 1), tem-se $H_0 = 67.79^{+0.76}_{-0.75} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, com $\sigma_{H_0} \simeq 0.75 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, equivalente a uma precisão relativa de $\sim 1.11\%$. Para Padé (3, 2), obtém-se $H_0 = 67.71^{+0.75}_{-0.73} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, com $\sigma_{H_0} \simeq 0.74 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, ou precisão relativa de $\sim 1.10\%$. Para q_0 , os valores centrais permanecem próximos do valor fiducial $q_0 = -0.533$, variando entre -0.53 e -0.48 para Taylor, entre -0.53 e -0.47 para Padé (2, 1), e entre -0.53 e -0.50 para Padé (3, 2). As incertezas em q_0 apresentam apenas uma leve redução com N : no melhor caso, em $N = 100$, Taylor fornece $q_0 = -0.50^{+0.31}_{-0.32}$, com $\sigma_{q_0} \simeq 0.31$, Padé (2, 1) fornece $q_0 = -0.52^{+0.32}_{-0.31}$, com $\sigma_{q_0} \simeq 0.31$, e Padé (3, 2) fornece $q_0 = -0.50^{+0.31}_{-0.31}$, com $\sigma_{q_0} \simeq 0.31$, correspondendo a precisões relativas da ordem de 60%–63% em relação aos valores médios estimados. Para j_0 , os valores centrais permanecem estatisticamente compatíveis com $j_0 = 1$, variando entre 0.97 e 1.02 para Taylor, entre 0.99 e 1.02 para Padé (2, 1), e entre 0.98 e 1.01 para Padé (3, 2). Entretanto, diferentemente de H_0 , as incertezas em j_0 praticamente não diminuem com o aumento de N : em $N = 100$, Taylor fornece $j_0 = 1.00^{+1.35}_{-1.35}$, com $\sigma_{j_0} \simeq 1.35$, Padé (2, 1) fornece $j_0 = 1.00^{+1.36}_{-1.36}$, com $\sigma_{j_0} \simeq 1.36$, e Padé

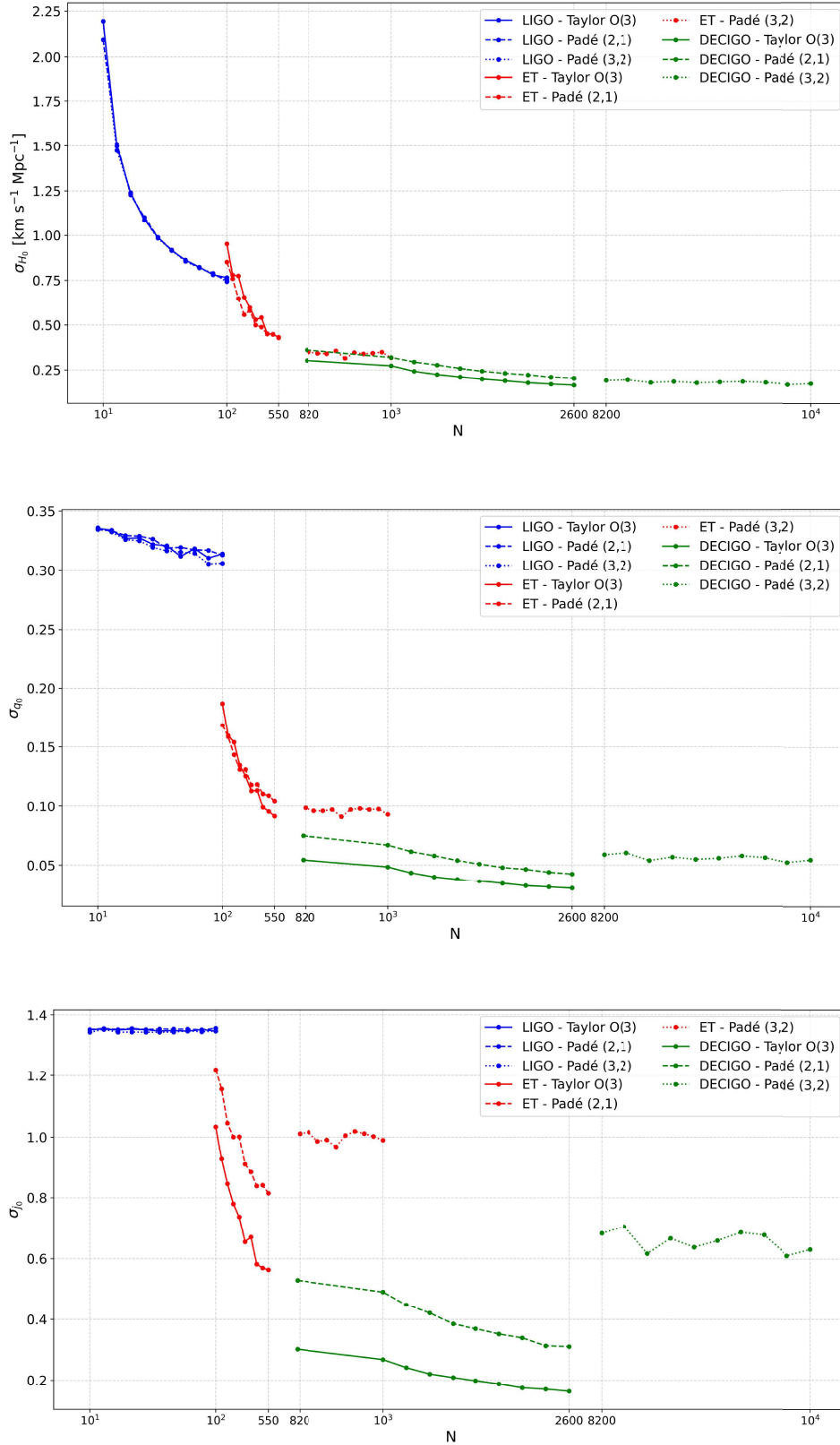


Figura 4.6: Incertezas dos parâmetros cosmológicos em função do número de eventos N . O primeiro, segundo e terceiro painéis apresentam, respectivamente, σ_{H_0} , σ_{q_0} e σ_{j_0} . Os resultados são mostrados para diferentes interferômetros: aLIGO (azul), Einstein Telescope — ET (vermelho) e DECIGO (verde). As parametrizações são distinguidas pelo estilo das curvas: linhas contínuas correspondem à expansão de Taylor $\mathcal{O}(z^3)$, linhas tracejadas ao aproximante de Padé (2,1) e linhas pontilhadas ao aproximante de Padé (3,2). O eixo horizontal corresponde ao número de eventos simulados.

(3, 2) fornece $j_0 = 1.00^{+1.35}_{-1.35}$, com $\sigma_{j_0} \simeq 1.35$, resultando em precisões relativas da ordem de 135%. Para os parâmetros de ordem superior, avaliados apenas com Padé (3, 2), os valores centrais de s_0 variam entre -0.08 e 0.08 , enquanto l_0 varia entre -0.18 e 0.10 , sem aproximação sistemática clara aos valores fiduciais. As incertezas permanecem praticamente constantes ao longo de todo o intervalo de N , com $\sigma_{s_0} \sim 6.7$ e $\sigma_{l_0} \sim 6.7$; em $N = 100$, por exemplo, obtém-se $s_0 = 0.05^{+6.73}_{-6.77}$, com $\sigma_{s_0} \simeq 6.75$, e $l_0 = -0.08^{+6.77}_{-6.69}$, com $\sigma_{l_0} \simeq 6.73$. Como esses erros são muito maiores que os valores centrais, a precisão relativa não é uma medida informativa para s_0 e l_0 . De modo geral, para o aLIGO, o aumento do número de eventos melhora principalmente a determinação de H_0 , enquanto q_0 , j_0 e os parâmetros de ordem superior permanecem fracamente restringidos, com diferenças desprezíveis entre as parametrizações.

Para o Einstein Telescope, na análise em função do número de eventos N , observa-se uma melhora significativa em relação ao aLIGO, com redução sistemática das incertezas para H_0 , q_0 e j_0 conforme o número de eventos aumenta. Para Taylor $\mathcal{O}(z^3)$ e Padé (2, 1), avaliados no intervalo $N \in [100, 550]$, os resultados permanecem globalmente consistentes entre si, enquanto Padé (3, 2), avaliado no intervalo distinto $N \in [820, 1000]$, apresenta incertezas menores para H_0 e q_0 , mas ainda mantém restrições fracas para os parâmetros de ordem superior. Para H_0 , os valores centrais permanecem compatíveis com o valor fiducial $H_0 = 67.68 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, variando entre 67.45 e $67.84 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ para Taylor, entre 67.58 e $67.73 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ para Padé (2, 1), e entre 67.60 e $67.80 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ para Padé (3, 2). Para Taylor, a melhor precisão ocorre em $N = 550$, com $H_0 = 67.84^{+0.42}_{-0.44} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, isto é, $\sigma_{H_0} \simeq 0.43 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, correspondente a uma precisão relativa de aproximadamente 0.64%. Para Padé (2, 1), também em $N = 550$, obtém-se $H_0 = 67.70^{+0.42}_{-0.44} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, com $\sigma_{H_0} \simeq 0.43 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, equivalente a uma precisão relativa de $\sim 0.63\%$. Já para Padé (3, 2), a melhor restrição ocorre em $N = 900$, com $H_0 = 67.66^{+0.31}_{-0.32} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, resultando em $\sigma_{H_0} \simeq 0.32 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, ou precisão relativa de $\sim 0.47\%$. Para q_0 , os valores centrais permanecem próximos do valor fiducial $q_0 = -0.533$, variando entre -0.57 e -0.49 para Taylor, entre -0.56 e -0.51 para Padé (2, 1), e entre -0.56 e -0.52 para Padé (3, 2). A melhor precisão para Taylor ocorre em $N = 550$, com $q_0 = -0.57^{+0.09}_{-0.09}$ e $\sigma_{q_0} \simeq 0.09$, correspondente a uma precisão relativa de aproximadamente 16%. Para Padé (2, 1), também em $N = 550$, obtém-se $q_0 = -0.55^{+0.11}_{-0.10}$, com $\sigma_{q_0} \simeq 0.10$, ou precisão relativa de $\sim 19\%$. Para Padé (3, 2), a menor incerteza ocorre em $N = 900$, com $q_0 = -0.52^{+0.09}_{-0.09}$, fornecendo $\sigma_{q_0} \simeq 0.09$, equivalente a uma precisão relativa de $\sim 17\%$. Para j_0 , as estimativas permanecem estatisticamente compatíveis com $j_0 = 1$, embora com incertezas ainda elevadas. Os valores centrais variam entre 0.74 e 1.27 para Taylor, entre 0.82 e 1.22 para Padé (2, 1), e entre 0.74 e 1.07 para Padé (3, 2). Para Taylor, a melhor precisão ocorre em $N = 550$, com $j_0 = 1.27^{+0.57}_{-0.55}$ e $\sigma_{j_0} \simeq 0.56$, correspondente a uma precisão relativa de aproximadamente 44%. Para Padé (2, 1), também em $N = 550$, tem-se $j_0 = 1.17^{+0.84}_{-0.79}$, com $\sigma_{j_0} \simeq 0.82$, ou precisão relativa de $\sim 70\%$. Para

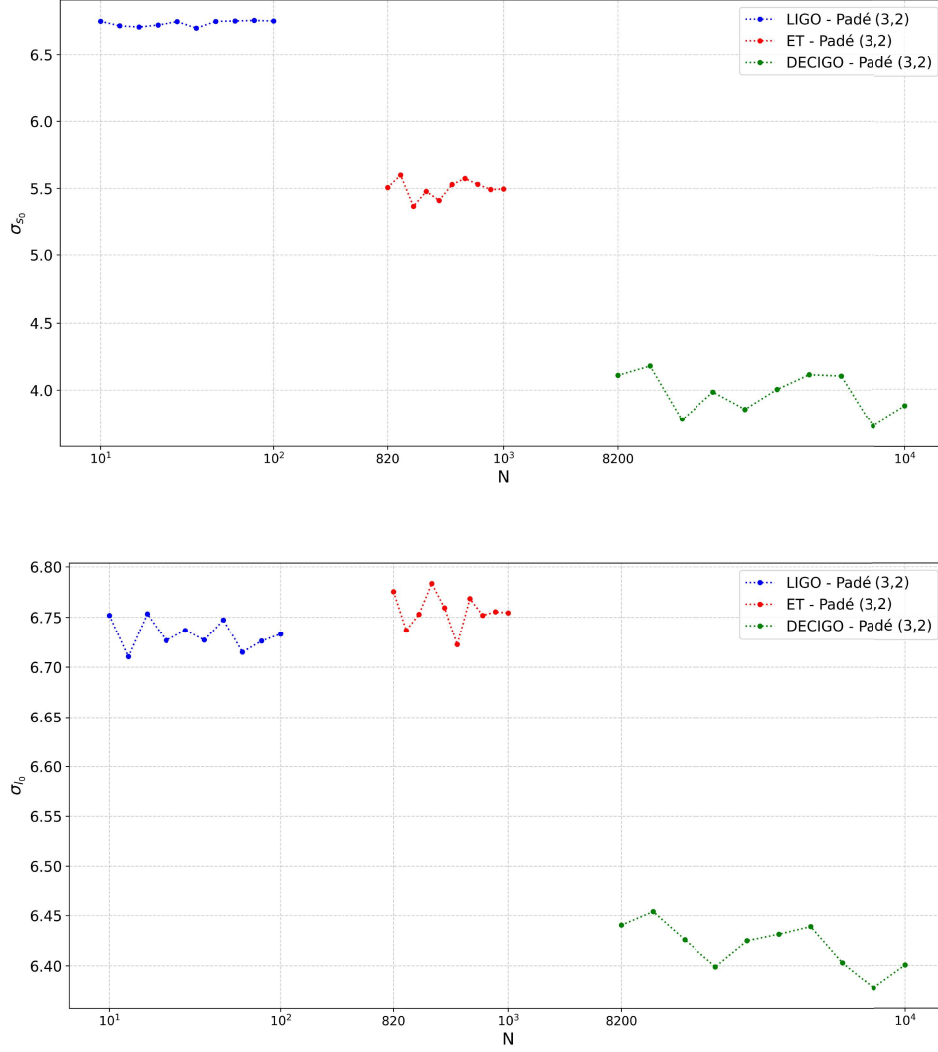


Figura 4.7: Incertezas associadas aos parâmetros cosmoográficos de ordem superior em função do número de eventos N . O primeiro painel apresenta σ_{s_0} e o segundo σ_{l_0} , obtidos a partir do aproximante de Padé (3, 2). Os resultados são mostrados para os interferômetros aLIGO (azul), Einstein Telescope — ET (vermelho) e DECIGO (verde). Esses parâmetros são exclusivos da parametrização de ordem superior, não estando definidos nas expansões de Taylor $\mathcal{O}(z^3)$ e Padé (2, 1). O eixo horizontal corresponde ao número de eventos simulados.

Padé (3, 2), a menor incerteza ocorre em $N = 900$, com $j_0 = 0.82_{-0.95}^{+0.99}$, resultando em $\sigma_{j_0} \simeq 0.97$, o que ainda representa uma precisão relativa elevada, de aproximadamente 118%. Para os parâmetros de ordem superior, avaliados apenas com Padé (3, 2), os valores centrais de s_0 variam entre -1.19 e -0.56 , enquanto l_0 varia entre -0.30 e -0.14 , sem aproximação sistemática clara aos valores fiduciais. A menor incerteza para s_0 ocorre em $N = 860$, com $s_0 = -1.19_{-5.40}^{+5.34}$ e $\sigma_{s_0} \simeq 5.37$, enquanto para l_0 a melhor precisão ocorre em $N = 920$, com $l_0 = -0.23_{-6.64}^{+6.80}$ e $\sigma_{l_0} \simeq 6.72$. Como essas incertezas permanecem muito superiores aos valores centrais, a precisão relativa não é uma medida informativa para s_0 e l_0 . De modo geral, para o Einstein Telescope, o aumento de N melhora de forma clara as restrições sobre H_0 e q_0 , produz um ganho moderado para j_0 , mas ainda não é suficiente para restringir de maneira robusta os parâmetros cosmológicos de ordem superior.

Para o DECIGO, na análise em função do número de eventos N , observa-se a maior capacidade de restrição entre os detectores considerados, com melhora sistemática das incertezas conforme N aumenta para Taylor $\mathcal{O}(z^3)$ e Padé (2, 1), avaliados em $N \in [800, 2600]$. Para Padé (3, 2), avaliado no intervalo mais elevado $N \in [8200, 10000]$, as restrições sobre H_0 e q_0 tornam-se ainda mais precisas, embora os parâmetros de ordem superior continuem fracamente determinados. Para H_0 , os valores centrais permanecem compatíveis com o valor fiducial $H_0 = 67.68 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, variando entre 67.60 e $67.73 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ para Taylor, entre 67.59 e $67.74 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ para Padé (2, 1), e entre 67.62 e $67.68 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ para Padé (3, 2). Para Taylor, a melhor precisão ocorre em $N = 2600$, com $H_0 = 67.66_{-0.17}^{+0.17} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, isto é, $\sigma_{H_0} \simeq 0.17 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, correspondente a uma precisão relativa de aproximadamente 0.25%. Para Padé (2, 1), também em $N = 2600$, obtém-se $H_0 = 67.70_{-0.20}^{+0.21} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, com $\sigma_{H_0} \simeq 0.20 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, equivalente a uma precisão relativa de $\sim 0.30\%$. Já para Padé (3, 2), a melhor restrição ocorre em $N = 9800$, com $H_0 = 67.64_{-0.17}^{+0.17} \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, resultando em $\sigma_{H_0} \simeq 0.17 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, ou precisão relativa de $\sim 0.25\%$. Para q_0 , os valores centrais permanecem próximos do valor fiducial $q_0 = -0.533$, variando entre -0.54 e -0.52 para Taylor, entre -0.55 e -0.52 para Padé (2, 1), e entre -0.54 e -0.52 para Padé (3, 2). A melhor precisão para Taylor ocorre em $N = 2600$, com $q_0 = -0.53_{-0.03}^{+0.03}$ e $\sigma_{q_0} \simeq 0.03$, correspondente a uma precisão relativa de aproximadamente 6%. Para Padé (2, 1), também em $N = 2600$, obtém-se $q_0 = -0.54_{-0.04}^{+0.04}$, com $\sigma_{q_0} \simeq 0.04$, ou precisão relativa de $\sim 8\%$. Para Padé (3, 2), a menor incerteza ocorre em $N = 9800$, com $q_0 = -0.53_{-0.05}^{+0.05}$, fornecendo $\sigma_{q_0} \simeq 0.05$, equivalente a uma precisão relativa de $\sim 10\%$. Para j_0 , as estimativas permanecem compatíveis com $j_0 = 1$, com valores centrais entre 0.95 e 1.07 para Taylor, entre 0.93 e 1.10 para Padé (2, 1), e entre 0.85 e 1.12 para Padé (3, 2). Para Taylor, a melhor precisão ocorre em $N = 2600$, com $j_0 = 1.01_{-0.16}^{+0.17}$ e $\sigma_{j_0} \simeq 0.16$, correspondente a uma precisão relativa de aproximadamente 16%. Para Padé (2, 1), o melhor caso também ocorre em $N = 2600$, com $j_0 = 1.09_{-0.30}^{+0.32}$, resultando em $\sigma_{j_0} \simeq 0.31$, ou precisão relativa de $\sim 28\%$. Para Padé (3, 2), a menor incerteza ocorre em $N = 9800$, com $j_0 = 0.93_{-0.67}^{+0.55}$, isto é, $\sigma_{j_0} \simeq 0.61$, correspondendo a uma precisão relativa

ainda elevada, de aproximadamente 66%. Para os parâmetros de ordem superior, avaliados apenas com Padé (3, 2), os valores centrais de s_0 variam entre -0.87 e 0.55 , enquanto l_0 permanece entre -1.16 e -0.69 , sem convergência clara para os valores fiduciais. A menor incerteza para s_0 ocorre em $N = 9800$, com $s_0 = -0.40^{+3.39}_{-4.07}$ e $\sigma_{s_0} \simeq 3.73$, enquanto para l_0 o melhor caso também ocorre em $N = 9800$, com $l_0 = -0.98^{+6.64}_{-6.11}$ e $\sigma_{l_0} \simeq 6.38$. Assim como nos demais detectores, as incertezas associadas a s_0 e l_0 permanecem muito maiores que os valores centrais, de modo que a precisão relativa não fornece uma medida robusta para esses parâmetros. De modo geral, o DECIGO apresenta o ganho estatístico mais expressivo com o aumento de N , permitindo restrições subpercentuais para H_0 e significativamente melhores para q_0 e j_0 , embora os parâmetros cosmológicos de ordem superior permaneçam pouco restringidos mesmo nos cenários mais otimistas considerados.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas Futuras

A consolidação da astronomia de ondas gravitacionais abriu uma nova possibilidade para o estudo da expansão cósmica, independente das técnicas tradicionais baseadas na escada de distâncias. Nesse contexto, coalescências de sistemas binários compactos podem atuar como sirenes-padrão, fornecendo uma medida direta da distância de luminosidade da fonte. Quando uma contraparte eletromagnética é identificada, esses eventos, denominados *bright sirens*, também permitem a determinação independente do redshift, estabelecendo uma relação observacional entre d_L e z . A combinação dessas observações com a cosmografia oferece, portanto, uma abordagem essencialmente cinemática para reconstruir a expansão do Universo, sem a necessidade de assumir previamente um modelo específico para a dinâmica de seus componentes. Com o desenvolvimento de detectores mais sensíveis e o consequente aumento do número e do alcance das detecções, torna-se especialmente importante avaliar tanto o potencial quanto as limitações dessa abordagem.

Neste trabalho, investigamos a capacidade de observações futuras de sirenes-padrão de ondas gravitacionais em restringir parâmetros cosmográficos. Em particular, consideramos o Advanced LIGO, o Einstein Telescope e o DECIGO, comparando o desempenho da expansão de Taylor até $\mathcal{O}(z^3)$ com os aproximantes de Padé $(2, 1)$ e $(3, 2)$. Essa comparação permitiu avaliar não apenas o poder de restrição de cada detector, mas também o papel desempenhado pela parametrização cosmográfica adotada. Como séries cosmo-gráficas truncadas não são esperadas descrever adequadamente a expansão cósmica em redshifts arbitrariamente altos, o uso de aproximantes de Padé fornece uma alternativa relevante, especialmente em regimes nos quais as propriedades de convergência se tornam importantes. Ao longo da análise, assumimos a detecção de contrapartes eletromagnéticas, garantindo assim uma determinação independente do redshift para as *bright sirens* simuladas.

Inicialmente, analisamos a dependência das restrições cosmográficas com o signal-to-noise ratio dos eventos detectados. Para o Advanced LIGO, as três parametrizações conduzem a resultados muito semelhantes, sem uma hierarquia sistemática entre Taylor $\mathcal{O}(z^3)$, Padé $(2, 1)$ e Padé $(3, 2)$. As melhores restrições sobre H_0 são obtidas em bins

intermediários de SNR, com $\sigma_{H_0} \simeq 1.40 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, correspondendo a uma precisão relativa de aproximadamente 2%. Entretanto, as restrições sobre os parâmetros de ordem superior permanecem fracas: $\sigma_{q_0} \sim 0.33\text{--}0.34$, correspondendo a incertezas relativas da ordem de 65%–70%, enquanto $\sigma_{j_0} \sim 1.35\text{--}1.37$, com incertezas relativas da ordem de 135%. Os parâmetros s_0 e l_0 , estimados apenas no caso de Padé (3, 2), permanecem essencialmente não restringidos, com incertezas da ordem de $\sigma_{s_0} \sim 6.7$ e $\sigma_{l_0} \sim 6.7$.

Para o Einstein Telescope, a análise baseada em SNR mostra uma melhora clara em relação ao Advanced LIGO, especialmente para H_0 e q_0 . As melhores restrições sobre H_0 atingem $\sigma_{H_0} \simeq 1.12 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ para Taylor, $\sigma_{H_0} \simeq 1.14 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ para Padé (2, 1), e $\sigma_{H_0} \simeq 1.23 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ para Padé (3, 2), correspondendo a precisões relativas de aproximadamente 1.7%–1.8%. Para q_0 , a melhor precisão relativa melhora para aproximadamente 33%–40%, dependendo da parametrização. Ainda assim, o parâmetro jerk permanece apenas fracamente restringido, com incertezas relativas ainda superiores a 100% nos melhores casos. Como no caso do Advanced LIGO, os parâmetros s_0 e l_0 permanecem pouco determinados, com incertezas muito maiores que seus valores centrais.

As restrições mais fortes na análise baseada em SNR são obtidas para o DECIGO. Nesse caso, H_0 atinge precisão subpercentual, com $\sigma_{H_0} \simeq 0.32 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ para Taylor, $\sigma_{H_0} \simeq 0.40 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ para Padé (2, 1) e $\sigma_{H_0} \simeq 0.44 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ para Padé (3, 2). As precisões relativas correspondentes são de aproximadamente 0.5%, 0.6% e 0.7%, respectivamente. Para q_0 , Taylor fornece a restrição mais forte, com $\sigma_{q_0} \simeq 0.05$, correspondente a uma precisão relativa de cerca de 9%, enquanto Padé (2, 1) e Padé (3, 2) produzem precisões relativas de aproximadamente 15% e 20%. A mesma hierarquia é observada para j_0 : Taylor apresenta o melhor resultado, com $\sigma_{j_0} \simeq 0.29$ e precisão relativa de aproximadamente 28%, seguido por Padé (2, 1), com $\sigma_{j_0} \simeq 0.58$, e Padé (3, 2), com $\sigma_{j_0} \simeq 1.01$. Esses resultados indicam que o DECIGO é o único detector, entre os considerados, capaz de fornecer restrições informativas sobre o parâmetro jerk na análise baseada em SNR.

O comportamento observado na análise por bins de SNR está diretamente relacionado ao número de eventos disponível em cada intervalo. Como o SNR mede a intensidade do sinal detectado, valores maiores de SNR estão, em geral, associados a eventos mais próximos. Contudo, a distribuição final de eventos não é determinada apenas pelo SNR, mas também pela densidade de probabilidade em redshift, que cresce ao longo do intervalo relevante. Consequentemente, bins de alto SNR não necessariamente dominam o poder estatístico da análise. Isso é particularmente importante na comparação entre parametrizações. Para o DECIGO, por exemplo, Padé (3, 2) pode apresentar melhor desempenho em baixos SNR porque seu maior raio de convergência permite incluir eventos em um intervalo mais amplo de redshift. O maior número de eventos nos bins de baixo SNR, como indicado pelas distribuições de eventos, pode compensar parcialmente a menor intensidade individual dos sinais. Portanto, a dependência das incertezas com o SNR reflete uma competição entre a informação carregada por cada evento individual e o número de

eventos disponível em cada bin.

Na segunda etapa da análise, estudamos o impacto do número total de eventos detectados N , tratando o SNR como uma variável livre em vez de fixá-lo em bins predefinidos. Essa abordagem fornece uma perspectiva complementar sobre o escalonamento estatístico das restrições cosmológicas. Para o Advanced LIGO, aumentar o número de eventos de $N = 10$ para $N = 100$ melhora principalmente a determinação de H_0 . Em $N = 100$, as três parametrizações fornecem $\sigma_{H_0} \simeq 0.74\text{--}0.77 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, correspondendo a precisões relativas de aproximadamente 1.1%. Esse resultado é comparável, e em alguns casos superior, à precisão obtida pelo Einstein Telescope na análise baseada em SNR. Isso não é inesperado: os catálogos do Advanced LIGO estão restritos a baixos redshifts, aproximadamente $z \lesssim 0.2$, onde a distância de luminosidade é dominada pela dependência principal em H_0 . Como a contribuição de H_0 aparece no termo de menor ordem da expansão em redshift, sua determinação pode ser bastante eficiente em uma amostra de baixo redshift quando o número de eventos é suficientemente grande. Por outro lado, a mesma restrição em redshift impede melhorias significativas em q_0 e j_0 , cujas contribuições aparecem em ordens mais altas da expansão cosmológica. Consequentemente, mesmo para $N = 100$, q_0 permanece restringido apenas no nível de $\sim 60\%$, enquanto j_0 permanece essencialmente não restringido, com incertezas relativas da ordem de 135%.

Para o Einstein Telescope, a análise em função do número de eventos mostra uma melhora clara em relação ao Advanced LIGO para q_0 e uma melhora moderada para j_0 . Para Taylor e Padé (2, 1), avaliados até $N = 550$, as melhores restrições sobre H_0 são $\sigma_{H_0} \simeq 0.43 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, correspondendo a precisões relativas de aproximadamente 0.6%. Para Padé (3, 2), avaliado no intervalo mais alto de eventos $N \in [820, 1000]$, o melhor resultado é $\sigma_{H_0} \simeq 0.32 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, correspondente a uma precisão relativa de aproximadamente 0.47%. O parâmetro de desaceleração atinge precisões relativas de aproximadamente 16%–19%, enquanto j_0 permanece menos bem restringido, com incertezas relativas de aproximadamente 44% para Taylor, 70% para Padé (2, 1) e acima de 100% para Padé (3, 2). Assim, o Einstein Telescope melhora significativamente a reconstrução da primeira correção além de H_0 , mas ainda não fornece restrições robustas sobre todos os parâmetros cosmológicos de ordem superior.

A análise em função do número de eventos confirma o DECIGO como a configuração mais poderosa considerada neste trabalho. Para Taylor e Padé (2, 1), avaliados até $N = 2600$, as restrições sobre H_0 atingem $\sigma_{H_0} \simeq 0.17\text{--}0.20 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, correspondendo a precisões relativas de aproximadamente 0.25%–0.30%. Para Padé (3, 2), avaliado até $N = 10000$, uma precisão semelhante é obtida para H_0 , com $\sigma_{H_0} \simeq 0.17 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. O parâmetro de desaceleração também é bem restringido, com precisões relativas de cerca de 6% para Taylor, 8% para Padé (2, 1) e 10% para Padé (3, 2). Para j_0 , Taylor novamente fornece a restrição mais forte, atingindo $\sigma_{j_0} \simeq 0.16$ e uma precisão relativa de aproximadamente 16%, enquanto Padé (2, 1) fornece uma precisão relativa de cerca de 28% e Padé

(3, 2) permanece menos restritivo, com incerteza relativa de aproximadamente 66%. Esses resultados mostram que o DECIGO é capaz de tornar o parâmetro jerk uma quantidade observacionalmente informativa, especialmente quando a expansão de Taylor é utilizada dentro de seu domínio adequado de redshift.

Comparando as parametrizações, Taylor $\mathcal{O}(z^3)$ fornece, de modo geral, a melhor precisão numérica para o conjunto de parâmetros comum a todos os modelos, especialmente nas análises envolvendo o DECIGO. Isso é particularmente evidente para q_0 e j_0 , para os quais Taylor produz sistematicamente incertezas menores que Padé (2, 1) e Padé (3, 2) nos regimes mais restritivos. Padé (2, 1) apresenta desempenho muito próximo ao de Taylor para H_0 e frequentemente permanece competitivo para q_0 , mas tende a ser menos preciso para j_0 . Por sua vez, Padé (3, 2) tem a vantagem de possuir um maior raio de convergência e de permitir a inclusão dos parâmetros de ordem superior s_0 e l_0 , mas essa flexibilidade adicional vem acompanhada de degenerescências mais fortes entre os parâmetros cosmológicos. Como consequência, embora Padé (3, 2) seja teoricamente atraente para estender o domínio em redshift, ele não fornece, nas simulações consideradas aqui, as restrições mais precisas sobre os parâmetros de menor ordem.

A comparação entre Taylor e os aproximantes de Padé evidencia, portanto, um compromisso importante. Parametrizações de menor ordem são mais eficientes para estimar H_0 , q_0 e j_0 quando o intervalo de redshift é suficientemente restrito e a expansão permanece bem comportada. Aproximantes de Padé de ordem mais alta, por outro lado, são mais adequados para explorar intervalos mais amplos de redshift, mas exigem amostras de eventos substancialmente maiores para superar degenerescências paramétricas. Nesse sentido, Taylor $\mathcal{O}(z^3)$ pode ser considerada a parametrização mais precisa para o conjunto comum de parâmetros nas configurações estudadas, enquanto Padé (3, 2) fornece uma descrição mais flexível, porém menos fortemente restringida, da distância de luminosidade.

Os resultados para os parâmetros de ordem superior s_0 e l_0 reforçam esse ponto. Mesmo nos cenários mais otimistas envolvendo o DECIGO, esses parâmetros permanecem fracamente restringidos. Suas incertezas são muito maiores que os respectivos valores centrais, tornando a precisão relativa uma medida inadequada para avaliar sua restrição. Esse comportamento indica que a inclusão de s_0 e l_0 aumenta significativamente a dimensionalidade do espaço de parâmetros e introduz degenerescências que não são completamente quebradas pelos catálogos simulados considerados neste trabalho. Restrições significativas sobre esses parâmetros provavelmente exigiriam uma combinação de amostras de eventos maiores, maior alcance em redshift, sensibilidade instrumental aprimorada e, possivelmente, informação cosmológica complementar proveniente de observações eletromagnéticas.

As implicações cosmológicas desses resultados são diretas. O Advanced LIGO pode fornecer medidas independentes e livres de calibração de H_0 em nível percentual sob hipóteses otimistas para o número de eventos, contribuindo para a discussão da tensão de

Hubble [51; 95; 96], embora não se espere que a resolva sozinho. O Einstein Telescope melhora esse cenário ao atingir precisão subpercentual ou próxima de subpercentual para H_0 e ao fornecer restrições mais informativas sobre q_0 . O DECIGO, por sua vez, leva a cosmografia com ondas gravitacionais a um regime verdadeiramente de alta precisão, produzindo restrições subpercentuais para H_0 , restrições em nível de poucos por cento para q_0 e sensibilidade significativa a j_0 . Como desvios de j_0 em relação ao valor previsto pelo modelo Λ CDM ($j_0 = 1$) podem sinalizar desvios em relação a uma constante cosmológica, essa capacidade é particularmente relevante para testar a dinâmica da aceleração cósmica com sirenes-padrão.

Em resumo, nossa análise mostra que bright sirens de ondas gravitacionais fornecem uma rota robusta e complementar para a estimação de parâmetros cosmográficos. O poder de restrição depende não apenas da sensibilidade do detector, mas também da distribuição em redshift dos eventos, da seleção em SNR, do número total de detecções e da parametrização cosmográfica adotada. Entre os casos estudados, Taylor $\mathcal{O}(z^3)$ fornece a melhor precisão geral para o conjunto comum de parâmetros, enquanto os aproximantes de Padé são importantes para avaliar convergência e estender o domínio em redshift. O Advanced LIGO é principalmente sensível a H_0 , o Einstein Telescope melhora a reconstrução de q_0 , e o DECIGO é necessário para obter restrições significativas sobre j_0 . Os parâmetros s_0 e l_0 permanecem fora do alcance das configurações simuladas neste trabalho, indicando que a cosmografia de ordem mais alta exigirá maior poder estatístico e possivelmente informação observacional adicional. À medida que os catálogos de ondas gravitacionais cresçam em tamanho e qualidade, a cosmografia com sirenes-padrão deverá se tornar uma ferramenta cada vez mais poderosa para investigar a história de expansão do Universo e testar a origem física da aceleração cósmica.

Como perspectiva futura da pesquisa, pretende-se ampliar a análise da restrição de parâmetros cosmográficos utilizando sirenes padrão de ondas gravitacionais detectadas por interferômetros de maior sensibilidade. Em particular, será interessante estender a metodologia desenvolvida neste trabalho para detectores espaciais, como o LISA [71] e TianQin [97]. Esses experimentos poderão observar eventos em diferentes faixas de frequência e em intervalos de redshift mais amplos ($z \leq 10$), possibilitando testar com maior precisão a expansão cosmográfica do Universo e avaliar de forma mais robusta o desempenho de diferentes parametrizações e parâmetros de mais alta ordem.

Referências Bibliográficas

- [1] B. S. Sathyaprakash and B. F. Schutz, [Living Rev. Rel. **12**, 2 \(2009\)](#), [arXiv:0903.0338 \[gr-qc\]](#) .
- [2] B. P. Abbott *et al.* (LIGO Scientific, Virgo), [Phys. Rev. Lett. **116**, 061102 \(2016\)](#), [arXiv:1602.03837 \[gr-qc\]](#) .
- [3] B. P. Abbott *et al.* (LIGO Scientific), [Rept. Prog. Phys. **72**, 076901 \(2009\)](#), [arXiv:0711.3041 \[gr-qc\]](#) .
- [4] F. Acernese (Virgo), [J. Phys. Conf. Ser. **610**, 012014 \(2015\)](#).
- [5] T. Akutsu *et al.* (KAGRA), [PTEP **2021**, 05A101 \(2021\)](#), [arXiv:2005.05574 \[physics.ins-det\]](#) .
- [6] A. G. Abac *et al.* (LIGO Scientific, VIRGO, KAGRA), (2025), [arXiv:2508.18082 \[gr-qc\]](#) .
- [7] M. Punturo *et al.*, [Class. Quant. Grav. **27**, 194002 \(2010\)](#).
- [8] S. Kawamura *et al.*, [Class. Quant. Grav. **23**, S125 \(2006\)](#).
- [9] B. F. Schutz, [Nature **323**, 310 \(1986\)](#).
- [10] M. Rowan-Robinson, *The Cosmological Distance Ladder* (W. H. Freeman and Co., 1985).
- [11] P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology*, Princeton Series in Physics (Princeton University Press).
- [12] B. P. Abbott *et al.* (LIGO Scientific, Virgo), [Phys. Rev. Lett. **119**, 161101 \(2017\)](#), [arXiv:1710.05832 \[gr-qc\]](#) .
- [13] D. E. Holz and S. A. Hughes, [Astrophys. J. **629**, 15 \(2005\)](#), [arXiv:astro-ph/0504616](#) .
- [14] J.-F. Zhang, M. Zhang, S.-J. Jin, J.-Z. Qi, and X. Zhang, [JCAP **09**, 068](#), [arXiv:1907.03238 \[astro-ph.CO\]](#) .

- [15] X. Zheng, S. Cao, Y. Liu, M. Biesiada, T. Liu, S. Geng, Y. Lian, and W. Guo, *Eur. Phys. J. C* **81**, 14 (2021), [arXiv:2012.14607 \[astro-ph.CO\]](#) .
- [16] M. Soares-Santos *et al.* (DES, LIGO Scientific, Virgo), *Astrophys. J. Lett.* **876**, L7 (2019), [arXiv:1901.01540 \[astro-ph.CO\]](#) .
- [17] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (John Wiley and Sons, New York, 1972).
- [18] M. Visser, *Gen. Rel. Grav.* **37**, 1541 (2005), [arXiv:gr-qc/0411131](#) .
- [19] C. Cattoen and M. Visser, *Class. Quant. Grav.* **24**, 5985 (2007), [arXiv:0710.1887 \[gr-qc\]](#) .
- [20] A. Aviles, A. Bravetti, S. Capozziello, and O. Luongo, *Phys. Rev. D* **90**, 043531 (2014), [arXiv:1405.6935 \[gr-qc\]](#) .
- [21] S. Capozziello, R. D’Agostino, and O. Luongo, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **494**, 2576 (2020), [arXiv:2003.09341 \[astro-ph.CO\]](#) .
- [22] J. Aasi *et al.* (LIGO Scientific), *Class. Quant. Grav.* **32**, 074001 (2015), [arXiv:1411.4547 \[gr-qc\]](#) .
- [23] J. Morais, R. Gonçalves, and J. Alcaniz, (2026), [arXiv:2602.05969 \[astro-ph.CO\]](#) .
- [24] J. Morais, R. Gonçalves, and J. Alcaniz (2026), manuscript in preparation.
- [25] S. Weinberg, *Cosmology* (Oxford University Press, Oxford, 2008).
- [26] A. G. Riess *et al.*, *Astrophys. J.* **699**, 539 (2009), [arXiv:0905.0695 \[astro-ph.CO\]](#) .
- [27] J. P. Gardner *et al.*, *Space Sci. Rev.* **123**, 485 (2006), [arXiv:astro-ph/0606175](#) .
- [28] DESI Collaboration, *JCAP* **02**, 021, [arXiv:2404.03002 \[astro-ph.CO\]](#) .
- [29] N. Aghanim *et al.* (Planck), *Astron. Astrophys.* **641**, A6 (2020), [Erratum: *Astron. Astrophys.* 652, C4 (2021)], [arXiv:1807.06209 \[astro-ph.CO\]](#) .
- [30] LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration and KAGRA Collaboration, (2025), [arXiv:2509.04348 \[gr-qc\]](#) .
- [31] J. A. Frieman, M. S. Turner, and D. Huterer, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **46**, 385 (2008), [arXiv:0803.0982 \[astro-ph\]](#) .
- [32] L. Verde, T. Treu, and A. G. Riess, *Nature Astronomy* **3**, 891 (2019), [arXiv:1907.10625 \[astro-ph.CO\]](#) .

- [33] L. A. Escamilla, W. Giare, E. Di Valentino, R. C. Nunes, and S. Vagnozzi, JCAP [arXiv:2307.14802 \[astro-ph.CO\]](#) .
- [34] B. Wang, E. Abdalla, F. Atrio-Barandela, and D. Pavon, (2024), [arXiv:2402.00819 \[astro-ph.CO\]](#) .
- [35] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, *Gravitation* (W. H. Freeman, 1973).
- [36] R. d’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*, 2nd ed. (Oxford University Press, 2012).
- [37] A. R. Liddle, *An Introduction to Modern Cosmology*, 3rd ed. (Wiley, 2015).
- [38] A. Einstein, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) , 142 (1917).
- [39] W. de Sitter, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **78**, 3 (1917).
- [40] A. Friedmann, Zeitschrift für Physik **10**, 377 (1922).
- [41] G. Lemaître, Annales de la Société Scientifique de Bruxelles **47**, 49 (1927).
- [42] E. Hubble, Proc. Nat. Acad. Sci. **15**, 168 (1929).
- [43] A. Einstein, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) , 235 (1931).
- [44] B. Ryden, *Introduction to Cosmology*, 2nd ed. (Cambridge University Press, 2017).
- [45] A. G. Riess, S. Casertano, W. Yuan, L. M. Macri, and D. Scolnic, [Astrophys. J. **876**, 85 \(2019\), arXiv:1903.07603 \[astro-ph.CO\]](#) .
- [46] D. Raine and E. Thomas, *An Introduction to the Science of Cosmology* (IOP Publishing, 2001).
- [47] F. Zwicky, Helv. Phys. Acta **6**, 110 (1933).
- [48] V. C. Rubin, W. K. J. Ford, and N. Thonnard, *Astrophys. J.* **238**, 471 (1980).
- [49] A. G. Riess *et al.*, [Astron. J. **116**, 1009 \(1998\), arXiv:astro-ph/9805201](#) .
- [50] S. Perlmutter *et al.*, [Astrophys. J. **517**, 565 \(1999\), arXiv:astro-ph/9812133](#) .
- [51] E. Di Valentino *et al.*, [Rept. Prog. Phys. **84**, 116901 \(2021\), arXiv:2103.01183 \[astro-ph.CO\]](#) .
- [52] E. Abdalla *et al.*, [Rept. Prog. Phys. **85**, 066901 \(2022\), arXiv:2203.06142 \[astro-ph.CO\]](#) .
- [53] S. Weinberg, [Rev. Mod. Phys. **61**, 1 \(1989\)](#).

- [54] P. J. E. Peebles and B. Ratra, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 559 (2003), [arXiv:astro-ph/0207347](#) .
- [55] A. Joyce, B. Jain, J. Khoury, and M. Trodden, *Phys. Rept.* **568**, 1 (2015), [arXiv:1407.0059 \[astro-ph.CO\]](#) .
- [56] A. Aviles, C. Gruber, O. Luongo, and H. Quevedo, *Phys. Rev. D* **86**, 123516 (2012), [arXiv:1204.2007 \[astro-ph.CO\]](#) .
- [57] R. Lazkoz, J. Alcaniz, C. Escamilla-Rivera, V. Salzano, and I. Sendra, *JCAP* **12**, 005, [arXiv:1311.6817 \[astro-ph.CO\]](#) .
- [58] A. Shafieloo, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* **2012** (05), 024–024.
- [59] C. Gruber and O. Luongo, *Phys. Rev. D* **89**, 103506 (2014), [arXiv:1309.3215 \[gr-qc\]](#) .
- [60] G. A. J. Baker, *Essentials of Padé Approximants* (Academic Press, New York, 1975).
- [61] A. Aviles, A. Bravetti, S. Capozziello, and O. Luongo, *Phys. Rev. D* **90**, 043531 (2014), [arXiv:1405.6935 \[astro-ph.CO\]](#) .
- [62] M. Maggiore, *Gravitational Waves. Vol. 1: Theory and Experiments* (Oxford University Press, 2007).
- [63] A. G. Riess *et al.* (Supernova Search Team), *Astron. J.* **116**, 1009 (1998), [arXiv:astro-ph/9805201](#) .
- [64] S.-J. Jin, J.-Y. Song, T.-Y. Sun, S.-R. Xiao, H. Wang, L.-F. Wang, J.-F. Zhang, and X. Zhang, *Sci. China Phys. Mech. Astron.* **69**, 220401 (2026), [arXiv:2507.12965 \[astro-ph.CO\]](#) .
- [65] C. Cutler and E. E. Flanagan, *Phys. Rev. D* **49**, 2658 (1994), [arXiv:gr-qc/9402014](#) .
- [66] T. G. F. Li, *Extracting Physics from Gravitational Waves: Testing the Strong-field Dynamics of General Relativity and Inferring the Large-scale Structure of the Universe*, Ph.D. thesis, Vrije U., Amsterdam, Vrije U., Amsterdam (2013).
- [67] B. P. Abbott *et al.* (KAGRA, LIGO Scientific, Virgo), *Living Rev. Rel.* **19**, 1 (2016), [arXiv:1304.0670 \[gr-qc\]](#) .
- [68] V. Alfradique *et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **528**, 3249 (2024), [arXiv:2310.13695 \[astro-ph.CO\]](#) .
- [69] C. R. Bom, V. Alfradique, A. Palmese, G. Teixeira, L. Santana-Silva, A. Santos, and P. Darc, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **535**, 961 (2024), [arXiv:2404.16092 \[astro-ph.CO\]](#) .

- [70] A. Abac *et al.* (ET), *JCAP* **03**, 081, [arXiv:2503.12263 \[gr-qc\]](#) .
- [71] P. Amaro-Seoane *et al.* (LISA), (2017), [arXiv:1702.00786 \[astro-ph.IM\]](#) .
- [72] T. Liu, S. Cao, M. Biesiada, Y. Zhang, and J. Wang, *Astrophys. J. Lett.* **965**, L11 (2024), [arXiv:2404.07419 \[astro-ph.CO\]](#) .
- [73] R.-G. Cai and T. Yang, *Phys. Rev. D* **95**, 044024 (2017), [arXiv:1608.08008 \[astro-ph.CO\]](#) .
- [74] A. Nishizawa, K. Yagi, A. Taruya, and T. Tanaka, *Phys. Rev. D* **85**, 044047 (2012), [arXiv:1110.2865 \[astro-ph.CO\]](#) .
- [75] W. Zhao, C. Van Den Broeck, D. Baskaran, and T. G. F. Li, *Phys. Rev. D* **83**, 023005 (2011), [arXiv:1009.0206 \[astro-ph.CO\]](#) .
- [76] R. Schneider, V. Ferrari, S. Matarrese, and S. F. Portegies Zwart, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **324**, 797 (2001), [arXiv:astro-ph/0002055](#) .
- [77] M. Rezaei, S. Pan, W. Yang, and D. F. Mota, *Astrophys. J.* **995**, 164 (2025), [arXiv:2510.09766 \[astro-ph.CO\]](#) .
- [78] M. Lagos, M. Fishbach, P. Landry, and D. E. Holz, *Phys. Rev. D* **99**, 083504 (2019), [arXiv:1901.03321 \[astro-ph.CO\]](#) .
- [79] E. e. a. Barausse, *Einstein Telescope Design Report Update 2020*, Tech. Rep. ET-0007B-20 (Einstein Telescope Collaboration, 2020).
- [80] C. Liu, Y. Kang, and L. Shao, *Astrophys. J.* **934**, 84 (2022), [arXiv:2204.06161 \[astro-ph.HE\]](#) .
- [81] F. Iacovelli, M. Mancarella, S. Foffa, and M. Maggiore, *Astrophys. J.* **941**, 208 (2022), [arXiv:2207.02771 \[gr-qc\]](#) .
- [82] B. F. Schutz, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A* **376**, 20170279 (2018), [arXiv:1804.06308 \[astro-ph.IM\]](#) .
- [83] R.-G. Cai, T.-B. Liu, X.-W. Liu, S.-J. Wang, and T. Yang, *Phys. Rev. D* **97**, 103005 (2018), [arXiv:1712.00952 \[astro-ph.CO\]](#) .
- [84] T. Yang, *JCAP* **05**, 044, [arXiv:2103.01923 \[astro-ph.CO\]](#) .
- [85] M. Califano, I. de Martino, D. Vernieri, and S. Capozziello, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **518**, 3372 (2022), [arXiv:2205.11221 \[astro-ph.CO\]](#) .
- [86] K. Yagi and N. Seto, *Phys. Rev. D* **83**, 044011 (2011), [Erratum: *Phys. Rev. D* **95**, 109901 (2017)], [arXiv:1101.3940 \[astro-ph.CO\]](#) .

- [87] L. Yang, H.-Y. Wan, T.-J. Zhang, and T. Yanke, (2017), [arXiv:1703.07923 \[astro-ph.CO\]](#) .
- [88] S. Hild *et al.*, [Class. Quant. Grav.](#) **28**, 094013 (2011), [arXiv:1012.0908 \[gr-qc\]](#) .
- [89] C. Gordon, K. Land, and A. Slosar, [Phys. Rev. Lett.](#) **99**, 081301 (2007), [arXiv:0705.1718 \[astro-ph\]](#) .
- [90] J. M. S. de Souza, R. Sturani, and J. Alcaniz, [JCAP](#) **03** (03), 025, [arXiv:2110.13316 \[gr-qc\]](#) .
- [91] R. Trotta, [Contemp. Phys.](#) **49**, 71 (2008), [arXiv:0803.4089 \[astro-ph\]](#) .
- [92] R. Trotta (2017) [arXiv:1701.01467 \[astro-ph.CO\]](#) .
- [93] L. E. Padilla, L. O. Tellez, L. A. Escamilla, and J. A. Vazquez, [Universe](#) **7**, 213 (2021), [arXiv:1903.11127 \[astro-ph.CO\]](#) .
- [94] D. Foreman-Mackey, D. W. Hogg, D. Lang, and J. Goodman, [Publ. Astron. Soc. Pac.](#) **125**, 306 (2013), [arXiv:1202.3665 \[astro-ph.IM\]](#) .
- [95] J.-P. Hu and F.-Y. Wang, [Universe](#) **9**, 94 (2023), [arXiv:2302.05709 \[astro-ph.CO\]](#) .
- [96] S. Capozziello, G. Sarracino, and G. De Somma, [Universe](#) **10**, 140 (2024), [arXiv:2403.12796 \[gr-qc\]](#) .
- [97] J. Luo *et al.* (TianQin), [Class. Quant. Grav.](#) **33**, 035010 (2016), [arXiv:1512.02076 \[astro-ph.IM\]](#)

Apêndice A

Resultados Numéricos das Análises via SNR e Número de Eventos

Neste apêndice, apresentamos as tabelas completas com os resultados numéricos obtidos nas análises baseadas em intervalos de razão sinal-ruído (SNR) e no número total de eventos simulados. Essas tabelas complementam a discussão apresentada no corpo principal do trabalho, fornecendo os valores médios dos parâmetros cosmológicos, suas incertezas assimétricas e, para os parâmetros de menor ordem, as respectivas precisões relativas calculadas a partir do valor médio obtido em cada caso.

Os resultados são organizados por detector e por parametrização cosmológica. Para o aLIGO, apresentamos inicialmente os resultados da expansão de Taylor $\mathcal{O}(z^3)$, seguidos pelas parametrizações Padé $P_{2,1}$ e Padé $P_{3,2}$, nas Tabelas [A.1](#), [A.2](#) e [A.3](#), respectivamente. Os parâmetros de ordem superior s_0 e l_0 , presentes apenas na parametrização Padé $P_{3,2}$, são apresentados separadamente na Tabela [A.4](#).

De forma análoga, para o Einstein Telescope, os resultados correspondentes à expansão de Taylor $\mathcal{O}(z^3)$, ao Padé $P_{2,1}$ e ao Padé $P_{3,2}$ são apresentados nas Tabelas [A.5](#), [A.6](#) e [A.7](#), enquanto os resultados para s_0 e l_0 são mostrados na Tabela [A.8](#).

Por fim, para o DECIGO, os resultados são apresentados seguindo a mesma estrutura: Taylor $\mathcal{O}(z^3)$, Padé $P_{2,1}$ e Padé $P_{3,2}$ nas Tabelas [A.9](#), [A.10](#) e [A.11](#), respectivamente, e os parâmetros s_0 e l_0 na Tabela [A.12](#).

Para os parâmetros s_0 e l_0 , não apresentamos a precisão relativa $\sigma_\theta/|\theta|$, pois as incertezas associadas a esses parâmetros são significativamente grandes em todas as configurações analisadas. Nesse regime, a precisão relativa deixa de fornecer uma medida quantitativa útil do poder de restrição, podendo sugerir uma interpretação estatística pouco informativa. Assim, as tabelas correspondentes reportam apenas as estimativas centrais e suas incertezas assimétricas, que evidenciam de forma mais direta que os parâmetros cosmológicos de ordem superior permanecem fracamente restringidos nas análises consideradas.

SNR interval / N	H_0 (Km/s/Mpc)	q_0	j_0	σ_{H_0}/H_0 (%)	$\sigma_{q_0}/ q_0 $ (%)	σ_{j_0}/j_0 (%)
SNR Intervals						
[8,12]	$68.02^{+4.03}_{-3.72}$	$-0.508^{+0.341}_{-0.334}$	$0.993^{+1.357}_{-1.354}$	5.7	66.5	136.6
[12,16]	$67.72^{+2.98}_{-2.75}$	$-0.508^{+0.342}_{-0.332}$	$1.003^{+1.353}_{-1.358}$	4.2	66.6	135.5
[16,20]	$67.69^{+2.37}_{-2.23}$	$-0.510^{+0.338}_{-0.330}$	$0.993^{+1.359}_{-1.353}$	3.4	65.4	136.9
[20,24]	$67.60^{+2.00}_{-1.91}$	$-0.501^{+0.336}_{-0.334}$	$1.003^{+1.356}_{-1.359}$	2.9	66.8	135.4
[24,28]	$67.35^{+1.74}_{-1.66}$	$-0.495^{+0.332}_{-0.334}$	$0.999^{+1.364}_{-1.358}$	2.5	67.2	136.2
[28,32]	$67.69^{+1.62}_{-1.56}$	$-0.507^{+0.338}_{-0.332}$	$0.993^{+1.356}_{-1.352}$	2.3	66.0	136.7
[32,36]	$67.93^{+1.51}_{-1.45}$	$-0.508^{+0.339}_{-0.331}$	$1.000^{+1.359}_{-1.358}$	2.2	66.1	135.9
[36,40]	$67.68^{+1.45}_{-1.39}$	$-0.504^{+0.338}_{-0.334}$	$0.996^{+1.357}_{-1.350}$	2.1	66.7	136.1
[40,44]	$68.07^{+1.42}_{-1.37}$	$-0.505^{+0.339}_{-0.332}$	$0.999^{+1.353}_{-1.356}$	2.1	66.4	135.5
[44,48]	$68.32^{+1.47}_{-1.42}$	$-0.519^{+0.345}_{-0.328}$	$0.983^{+1.362}_{-1.344}$	2.1	64.9	137.2
[48,52]	$67.67^{+1.44}_{-1.39}$	$-0.507^{+0.333}_{-0.333}$	$1.001^{+1.357}_{-1.357}$	2.1	65.7	135.7
[52,56]	$67.64^{+1.45}_{-1.39}$	$-0.496^{+0.336}_{-0.340}$	$0.991^{+1.361}_{-1.354}$	2.1	68.1	136.7
[56,60]	$67.62^{+1.45}_{-1.40}$	$-0.503^{+0.339}_{-0.337}$	$0.994^{+1.360}_{-1.355}$	2.1	67.1	136.4
[60,64]	$67.27^{+1.57}_{-1.50}$	$-0.503^{+0.340}_{-0.336}$	$0.999^{+1.358}_{-1.360}$	2.3	67.3	135.9
[64,68]	$67.73^{+1.64}_{-1.56}$	$-0.503^{+0.341}_{-0.337}$	$0.993^{+1.364}_{-1.354}$	2.4	67.3	136.8
[68,72]	$67.76^{+1.65}_{-1.74}$	$-0.506^{+0.341}_{-0.336}$	$1.010^{+1.361}_{-1.349}$	2.5	66.9	135.3
[72,76]	$68.33^{+1.88}_{-1.77}$	$-0.500^{+0.337}_{-0.338}$	$1.011^{+1.355}_{-1.353}$	2.7	67.5	134.8
[76,80]	$68.18^{+1.96}_{-1.87}$	$-0.505^{+0.340}_{-0.337}$	$0.998^{+1.355}_{-1.356}$	2.8	66.9	135.7
[80,84]	$67.81^{+2.03}_{-1.92}$	$-0.501^{+0.343}_{-0.337}$	$1.005^{+1.349}_{-1.354}$	2.9	67.9	134.6
[84,88]	$67.97^{+2.11}_{-1.99}$	$-0.506^{+0.342}_{-0.336}$	$1.003^{+1.356}_{-1.360}$	3.0	66.9	135.7
N						
10	$67.74^{+2.25}_{-2.13}$	$-0.506^{+0.339}_{-0.332}$	$1.009^{+1.342}_{-1.362}$	3.2	66.4	134.8
20	$67.79^{+1.52}_{-1.47}$	$-0.498^{+0.334}_{-0.334}$	$1.013^{+1.346}_{-1.362}$	2.2	67.1	134.5
30	$67.43^{+1.26}_{-1.21}$	$-0.524^{+0.337}_{-0.317}$	$0.979^{+1.346}_{-1.342}$	1.8	62.8	137.1
40	$67.69^{+1.10}_{-1.08}$	$-0.532^{+0.340}_{-0.315}$	$0.966^{+1.374}_{-1.334}$	1.6	61.1	140.3
50	$67.56^{+1.01}_{-0.97}$	$-0.511^{+0.327}_{-0.317}$	$0.983^{+1.359}_{-1.344}$	1.5	63.1	137.0
60	$67.62^{+0.92}_{-0.91}$	$-0.493^{+0.320}_{-0.322}$	$1.003^{+1.348}_{-1.347}$	1.4	64.9	134.4
70	$67.61^{+0.88}_{-0.85}$	$-0.481^{+0.304}_{-0.320}$	$1.010^{+1.345}_{-1.353}$	1.3	64.9	133.6
80	$67.51^{+0.83}_{-0.82}$	$-0.519^{+0.326}_{-0.311}$	$0.980^{+1.354}_{-1.340}$	1.2	61.7	137.5
90	$67.71^{+0.79}_{-0.77}$	$-0.482^{+0.306}_{-0.315}$	$1.023^{+1.345}_{-1.359}$	1.2	64.5	132.6
100	$67.66^{+0.77}_{-0.76}$	$-0.497^{+0.311}_{-0.317}$	$0.998^{+1.350}_{-1.345}$	1.1	63.2	135.0

Tabela A.1: Estimativas dos parâmetros cosmológicos obtidas para o interferômetro aLIGO utilizando a expansão de Taylor, em função dos intervalos de razão sinal-ruído (SNR) e do número total de eventos simulados. São apresentados os valores médios de H_0 , q_0 e j_0 , suas incertezas assimétricas e as respectivas precisões relativas.

SNR interval / N	H_0 (Km/s/Mpc)	q_0	j_0	σ_{H_0}/H_0 (%)	$\sigma_{q_0}/ q_0 $ (%)	σ_{j_0}/j_0 (%)
SNR Intervals						
[8,12]	$68.32^{+4.04}_{-3.73}$	$-0.51^{+0.34}_{-0.34}$	$1.00^{+1.36}_{-1.36}$	5.7	66.7	136.0
[12,16]	$67.28^{+2.95}_{-2.73}$	$-0.50^{+0.34}_{-0.34}$	$1.00^{+1.37}_{-1.36}$	4.2	68.0	136.5
[16,20]	$67.38^{+2.36}_{-2.21}$	$-0.53^{+0.35}_{-0.33}$	$0.99^{+1.37}_{-1.36}$	3.4	64.2	137.9
[20,24]	$67.86^{+2.02}_{-1.91}$	$-0.50^{+0.34}_{-0.34}$	$1.01^{+1.36}_{-1.37}$	2.9	68.0	135.1
[24,28]	$68.13^{+1.80}_{-1.71}$	$-0.50^{+0.34}_{-0.34}$	$1.00^{+1.37}_{-1.36}$	2.6	68.0	136.5
[28,32]	$67.60^{+1.61}_{-1.55}$	$-0.52^{+0.34}_{-0.33}$	$0.99^{+1.36}_{-1.36}$	2.3	64.4	137.4
[32,36]	$67.41^{+1.51}_{-1.45}$	$-0.51^{+0.34}_{-0.33}$	$0.99^{+1.37}_{-1.36}$	2.2	65.7	137.9
[36,40]	$67.70^{+1.48}_{-1.42}$	$-0.51^{+0.34}_{-0.33}$	$0.99^{+1.37}_{-1.36}$	2.1	65.7	137.9
[40,44]	$67.97^{+1.47}_{-1.42}$	$-0.51^{+0.34}_{-0.33}$	$0.99^{+1.37}_{-1.36}$	2.1	65.7	137.9
[44,48]	$67.68^{+1.45}_{-1.40}$	$-0.50^{+0.34}_{-0.34}$	$1.00^{+1.35}_{-1.37}$	2.1	68.0	136.0
[48,52]	$67.96^{+1.50}_{-1.44}$	$-0.50^{+0.34}_{-0.34}$	$0.99^{+1.36}_{-1.35}$	2.2	68.0	136.9
[52,56]	$67.81^{+1.61}_{-1.54}$	$-0.50^{+0.34}_{-0.34}$	$1.01^{+1.36}_{-1.36}$	2.3	68.0	134.7
[56,60]	$67.47^{+1.58}_{-1.51}$	$-0.51^{+0.34}_{-0.34}$	$0.99^{+1.36}_{-1.36}$	2.3	66.7	137.4
[60,64]	$67.59^{+1.58}_{-1.51}$	$-0.50^{+0.34}_{-0.34}$	$1.01^{+1.35}_{-1.37}$	2.3	68.0	134.7
[64,68]	$67.40^{+1.75}_{-1.67}$	$-0.50^{+0.34}_{-0.34}$	$1.00^{+1.36}_{-1.36}$	2.5	68.0	136.0
[68,72]	$67.67^{+1.84}_{-1.75}$	$-0.50^{+0.34}_{-0.34}$	$1.00^{+1.36}_{-1.37}$	2.7	68.0	136.5
[72,76]	$67.78^{+2.06}_{-1.92}$	$-0.50^{+0.34}_{-0.34}$	$0.99^{+1.37}_{-1.35}$	2.9	68.0	137.4
[76,80]	$68.13^{+1.96}_{-1.86}$	$-0.50^{+0.34}_{-0.34}$	$1.00^{+1.36}_{-1.36}$	2.8	68.0	136.0
[80,84]	$68.21^{+2.15}_{-2.01}$	$-0.50^{+0.34}_{-0.34}$	$0.99^{+1.36}_{-1.35}$	3.0	68.0	136.9
[84,88]	$68.28^{+2.30}_{-2.15}$	$-0.50^{+0.34}_{-0.34}$	$1.00^{+1.36}_{-1.35}$	3.3	68.0	135.5
N						
10	$67.946^{+2.162}_{-2.026}$	$-0.503^{+0.335}_{-0.334}$	$0.991^{+1.358}_{-1.347}$	3.1	66.5	136.5
20	$68.211^{+1.537}_{-1.487}$	$-0.514^{+0.339}_{-0.328}$	$0.997^{+1.361}_{-1.351}$	2.2	64.9	136.0
30	$67.620^{+1.247}_{-1.209}$	$-0.492^{+0.326}_{-0.333}$	$1.010^{+1.351}_{-1.354}$	1.8	67.0	133.9
40	$67.827^{+1.119}_{-1.089}$	$-0.497^{+0.328}_{-0.330}$	$0.997^{+1.356}_{-1.356}$	1.6	66.2	136.0
50	$67.696^{+0.998}_{-0.981}$	$-0.529^{+0.339}_{-0.314}$	$0.995^{+1.352}_{-1.353}$	1.5	61.7	135.9
60	$67.645^{+0.932}_{-0.905}$	$-0.465^{+0.306}_{-0.332}$	$1.021^{+1.347}_{-1.361}$	1.4	68.6	132.6
70	$67.498^{+0.864}_{-0.853}$	$-0.501^{+0.321}_{-0.318}$	$0.994^{+1.354}_{-1.354}$	1.3	63.8	136.2
80	$67.725^{+0.827}_{-0.814}$	$-0.506^{+0.321}_{-0.314}$	$0.996^{+1.350}_{-1.357}$	1.2	62.7	135.9
90	$67.597^{+0.789}_{-0.777}$	$-0.507^{+0.321}_{-0.313}$	$0.991^{+1.356}_{-1.346}$	1.2	62.5	136.3
100	$67.792^{+0.760}_{-0.745}$	$-0.518^{+0.321}_{-0.305}$	$0.997^{+1.355}_{-1.358}$	1.1	60.4	136.1

Tabela A.2: Resultados numéricos para o interferômetro aLIGO utilizando a parametrização Padé $P_{2,1}$, em função dos intervalos de razão sinal-ruído (SNR) e do número total de eventos simulados. A tabela apresenta as estimativas de H_0 , q_0 e j_0 , juntamente com suas incertezas assimétricas e precisões relativas.

SNR interval / N	H_0 (Km/s/Mpc)	q_0	j_0	σ_{H_0}/H_0 (%)	$\sigma_{q_0}/ q_0 $ (%)	σ_{j_0}/j_0 (%)
SNR Intervals						
[8,12]	$68.03^{+4.05}_{-3.69}$	$-0.50^{+0.34}_{-0.34}$	$0.98^{+1.37}_{-1.35}$	5.7	68.0	138.8
[12,16]	$68.36^{+3.04}_{-2.81}$	$-0.51^{+0.34}_{-0.33}$	$0.99^{+1.36}_{-1.36}$	4.3	65.7	137.4
[16,20]	$67.75^{+2.38}_{-2.23}$	$-0.51^{+0.34}_{-0.33}$	$0.99^{+1.36}_{-1.35}$	3.4	65.7	136.9
[20,24]	$67.64^{+1.99}_{-1.87}$	$-0.51^{+0.34}_{-0.33}$	$1.01^{+1.35}_{-1.37}$	2.9	65.7	134.7
[24,28]	$67.93^{+1.79}_{-1.70}$	$-0.51^{+0.34}_{-0.33}$	$0.99^{+1.36}_{-1.35}$	2.6	65.7	136.9
[28,32]	$67.68^{+1.61}_{-1.55}$	$-0.50^{+0.34}_{-0.33}$	$1.00^{+1.36}_{-1.35}$	2.3	67.0	135.5
[32,36]	$68.05^{+1.55}_{-1.47}$	$-0.49^{+0.33}_{-0.34}$	$1.00^{+1.36}_{-1.36}$	2.2	68.4	136.0
[36,40]	$67.46^{+1.43}_{-1.37}$	$-0.51^{+0.34}_{-0.33}$	$0.99^{+1.36}_{-1.36}$	2.1	65.7	137.4
[40,44]	$67.89^{+1.46}_{-1.41}$	$-0.50^{+0.34}_{-0.34}$	$1.00^{+1.36}_{-1.36}$	2.1	68.0	136.0
[44,48]	$67.79^{+1.48}_{-1.42}$	$-0.51^{+0.34}_{-0.34}$	$0.98^{+1.37}_{-1.35}$	2.1	66.7	138.8
[48,52]	$67.26^{+1.53}_{-1.47}$	$-0.50^{+0.34}_{-0.34}$	$0.99^{+1.37}_{-1.35}$	2.2	68.0	137.4
[52,56]	$67.62^{+1.53}_{-1.47}$	$-0.50^{+0.34}_{-0.34}$	$1.00^{+1.36}_{-1.36}$	2.2	68.0	136.0
[56,60]	$67.60^{+1.67}_{-1.59}$	$-0.51^{+0.34}_{-0.34}$	$1.00^{+1.36}_{-1.37}$	2.4	66.7	136.5
[60,64]	$67.64^{+1.65}_{-1.58}$	$-0.50^{+0.34}_{-0.34}$	$0.99^{+1.37}_{-1.36}$	2.4	68.0	137.9
[64,68]	$67.11^{+1.75}_{-1.64}$	$-0.50^{+0.34}_{-0.34}$	$0.97^{+1.38}_{-1.34}$	2.5	68.0	140.2
[68,72]	$67.88^{+1.85}_{-1.73}$	$-0.50^{+0.34}_{-0.34}$	$1.01^{+1.35}_{-1.36}$	2.6	68.0	134.2
[72,76]	$68.05^{+1.76}_{-1.68}$	$-0.49^{+0.34}_{-0.34}$	$0.99^{+1.37}_{-1.36}$	2.5	69.4	137.9
[76,80]	$67.27^{+1.89}_{-1.79}$	$-0.50^{+0.34}_{-0.34}$	$1.01^{+1.35}_{-1.36}$	2.7	68.0	134.2
[80,84]	$68.30^{+2.29}_{-2.16}$	$-0.50^{+0.34}_{-0.34}$	$0.98^{+1.37}_{-1.35}$	3.3	68.0	138.8
[84,88]	$67.88^{+2.15}_{-2.01}$	$-0.50^{+0.34}_{-0.34}$	$1.00^{+1.36}_{-1.36}$	3.1	68.0	136.0
N						
10	$67.774^{+2.158}_{-2.030}$	$-0.503^{+0.338}_{-0.334}$	$1.007^{+1.338}_{-1.349}$	3.1	66.8	133.4
20	$67.496^{+1.501}_{-1.446}$	$-0.498^{+0.332}_{-0.333}$	$1.001^{+1.351}_{-1.354}$	2.2	66.8	135.1
30	$67.666^{+1.263}_{-1.218}$	$-0.507^{+0.329}_{-0.323}$	$1.001^{+1.342}_{-1.345}$	1.8	64.3	134.2
40	$67.624^{+1.106}_{-1.072}$	$-0.520^{+0.333}_{-0.317}$	$0.982^{+1.356}_{-1.332}$	1.6	62.5	136.9
50	$67.618^{+0.996}_{-0.972}$	$-0.501^{+0.321}_{-0.318}$	$1.000^{+1.345}_{-1.342}$	1.5	63.8	134.4
60	$67.715^{+0.928}_{-0.905}$	$-0.498^{+0.316}_{-0.317}$	$0.992^{+1.344}_{-1.343}$	1.4	63.6	135.4
70	$67.639^{+0.860}_{-0.851}$	$-0.529^{+0.328}_{-0.303}$	$0.993^{+1.347}_{-1.341}$	1.3	59.6	135.3
80	$67.665^{+0.829}_{-0.809}$	$-0.505^{+0.317}_{-0.312}$	$1.005^{+1.345}_{-1.351}$	1.2	62.3	134.1
90	$67.818^{+0.793}_{-0.786}$	$-0.532^{+0.317}_{-0.294}$	$1.007^{+1.340}_{-1.350}$	1.2	57.4	133.6
100	$67.705^{+0.750}_{-0.734}$	$-0.499^{+0.307}_{-0.305}$	$0.998^{+1.348}_{-1.346}$	1.1	61.3	135.0

Tabela A.3: Resultados numéricos para o interferômetro aLIGO utilizando a parametrização Padé $P_{3,2}$, em função dos intervalos de razão sinal-ruído (SNR) e do número total de eventos simulados. A tabela apresenta as estimativas de H_0 , q_0 e j_0 , juntamente com suas incertezas assimétricas e precisões relativas.

SNR interval / N	s_0	l_0
SNR Intervals		
[8,12]	$0.02^{+6.79}_{-6.80}$	$-0.03^{+6.80}_{-6.79}$
[12,16]	$-0.09^{+6.84}_{-6.75}$	$-0.02^{+6.79}_{-6.78}$
[16,20]	$0.10^{+6.78}_{-6.83}$	$-0.03^{+6.80}_{-6.77}$
[20,24]	$-0.04^{+6.80}_{-6.81}$	$-0.01^{+6.79}_{-6.78}$
[24,28]	$0.00^{+6.78}_{-6.79}$	$0.06^{+6.77}_{-6.86}$
[28,32]	$0.02^{+6.79}_{-6.82}$	$-0.02^{+6.80}_{-6.78}$
[32,36]	$-0.04^{+6.83}_{-6.78}$	$-0.11^{+6.85}_{-6.73}$
[36,40]	$0.08^{+6.76}_{-6.84}$	$0.00^{+6.81}_{-6.80}$
[40,44]	$-0.02^{+6.81}_{-6.80}$	$0.00^{+6.81}_{-6.80}$
[44,48]	$0.03^{+6.82}_{-6.83}$	$0.01^{+6.81}_{-6.80}$
[48,52]	$0.00^{+6.79}_{-6.82}$	$-0.01^{+6.82}_{-6.80}$
[52,56]	$0.14^{+6.72}_{-6.89}$	$-0.04^{+6.83}_{-6.80}$
[56,60]	$0.03^{+6.82}_{-6.81}$	$0.09^{+6.76}_{-6.88}$
[60,64]	$0.10^{+6.73}_{-6.81}$	$0.02^{+6.80}_{-6.80}$
[64,68]	$0.02^{+6.79}_{-6.84}$	$0.01^{+6.78}_{-6.80}$
[68,72]	$0.07^{+6.82}_{-6.82}$	$-0.04^{+6.86}_{-6.79}$
[72,76]	$-0.04^{+6.83}_{-6.78}$	$0.06^{+6.79}_{-6.83}$
[76,80]	$-0.02^{+6.83}_{-6.78}$	$-0.01^{+6.84}_{-6.81}$
[80,84]	$-0.01^{+6.83}_{-6.83}$	$-0.00^{+6.82}_{-6.83}$
[84,88]	$0.07^{+6.75}_{-6.80}$	$-0.01^{+6.84}_{-6.81}$
N		
10	$-0.056^{+6.792}_{-6.701}$	$0.016^{+6.723}_{-6.781}$
20	$0.001^{+6.717}_{-6.709}$	$0.032^{+6.680}_{-6.741}$
30	$0.039^{+6.685}_{-6.724}$	$-0.039^{+6.776}_{-6.731}$
40	$0.081^{+6.675}_{-6.763}$	$-0.028^{+6.766}_{-6.687}$
50	$-0.084^{+6.774}_{-6.715}$	$-0.114^{+6.787}_{-6.687}$
60	$-0.083^{+6.715}_{-6.677}$	$-0.178^{+6.843}_{-6.611}$
70	$-0.050^{+6.773}_{-6.719}$	$0.015^{+6.739}_{-6.756}$
80	$-0.054^{+6.788}_{-6.710}$	$-0.105^{+6.774}_{-6.656}$
90	$-0.021^{+6.751}_{-6.755}$	$0.095^{+6.684}_{-6.768}$
100	$0.047^{+6.726}_{-6.772}$	$-0.082^{+6.772}_{-6.694}$

Tabela A.4: Estimativas dos parâmetros cosmológicos de ordem superior s_0 e l_0 para o interferômetro aLIGO utilizando a parametrização Padé $P_{3,2}$, em função dos intervalos de razão sinal-ruído (SNR) e do número total de eventos simulados. Devido às grandes incertezas associadas a esses parâmetros, as precisões relativas $\sigma_\theta/|\theta|$ não são apresentadas, pois não fornecem uma medida quantitativa informativa do poder de restrição. As incertezas reportadas indicam que s_0 e l_0 permanecem fracamente restringidos nesta configuração.

SNR interval / N	H_0 (Km/s/Mpc)	q_0	j_0	σ_{H_0}/H_0 (%)	$\sigma_{q_0}/ q_0 $ (%)	σ_{j_0}/j_0 (%)
SNR Intervals						
[8,23]	$67.47^{+3.33}_{-3.09}$	$-0.505^{+0.285}_{-0.250}$	$0.918^{+1.276}_{-1.107}$	4.8	53.0	130.5
[23,38]	$67.34^{+2.16}_{-2.12}$	$-0.485^{+0.272}_{-0.249}$	$0.809^{+1.351}_{-1.073}$	3.2	53.6	150.0
[38,53]	$67.59^{+1.73}_{-1.81}$	$-0.513^{+0.262}_{-0.227}$	$0.907^{+1.273}_{-1.118}$	2.6	47.6	132.8
[53,68]	$67.49^{+1.53}_{-1.61}$	$-0.512^{+0.250}_{-0.219}$	$0.929^{+1.231}_{-1.095}$	2.3	45.7	125.6
[68,83]	$67.27^{+1.44}_{-1.48}$	$-0.488^{+0.235}_{-0.222}$	$0.837^{+1.225}_{-1.011}$	2.2	47.0	133.6
[83,98]	$67.26^{+1.34}_{-1.37}$	$-0.461^{+0.225}_{-0.220}$	$0.651^{+1.228}_{-0.980}$	2.0	48.3	170.4
[98,113]	$67.68^{+1.17}_{-1.24}$	$-0.526^{+0.220}_{-0.195}$	$0.948^{+1.261}_{-1.169}$	1.8	39.5	128.6
[113,128]	$67.62^{+1.19}_{-1.24}$	$-0.523^{+0.217}_{-0.191}$	$0.927^{+1.326}_{-1.240}$	1.8	38.9	138.8
[128,143]	$67.39^{+1.11}_{-1.12}$	$-0.494^{+0.201}_{-0.186}$	$0.898^{+1.347}_{-1.240}$	1.6	39.2	144.6
[143,158]	$67.61^{+1.23}_{-1.24}$	$-0.521^{+0.202}_{-0.185}$	$0.887^{+1.351}_{-1.244}$	1.8	37.1	146.2
[158,173]	$67.70^{+1.27}_{-1.27}$	$-0.525^{+0.209}_{-0.191}$	$0.907^{+1.377}_{-1.277}$	1.9	38.1	146.4
[173,188]	$67.69^{+1.23}_{-1.23}$	$-0.531^{+0.206}_{-0.194}$	$0.913^{+1.353}_{-1.278}$	1.8	37.7	144.5
[188,203]	$67.84^{+1.35}_{-1.35}$	$-0.536^{+0.225}_{-0.205}$	$0.900^{+1.352}_{-1.264}$	2.0	40.1	145.3
[203,218]	$67.53^{+1.37}_{-1.32}$	$-0.501^{+0.229}_{-0.218}$	$0.989^{+1.328}_{-1.308}$	2.0	44.6	133.3
[218,233]	$67.48^{+1.36}_{-1.32}$	$-0.507^{+0.244}_{-0.232}$	$0.969^{+1.341}_{-1.304}$	2.0	47.0	136.0
[233,248]	$67.57^{+1.50}_{-1.43}$	$-0.511^{+0.261}_{-0.253}$	$0.989^{+1.325}_{-1.318}$	2.2	50.3	133.7
[248,263]	$67.39^{+1.44}_{-1.33}$	$-0.462^{+0.266}_{-0.272}$	$1.040^{+1.345}_{-1.318}$	2.1	58.0	128.7
[263,278]	$67.67^{+1.27}_{-1.21}$	$-0.522^{+0.263}_{-0.254}$	$0.941^{+1.359}_{-1.312}$	1.8	49.8	142.5
[278,293]	$67.38^{+1.34}_{-1.23}$	$-0.502^{+0.276}_{-0.253}$	$1.018^{+1.326}_{-1.312}$	1.9	52.7	129.5
[293,308]	$67.64^{+1.24}_{-1.22}$	$-0.493^{+0.282}_{-0.271}$	$0.998^{+1.342}_{-1.333}$	1.8	56.0	134.1
N						
100	$67.45^{+0.93}_{-0.98}$	$-0.500^{+0.194}_{-0.180}$	$0.879^{+1.091}_{-0.976}$	1.4	37.4	117.5
150	$67.65^{+0.76}_{-0.80}$	$-0.542^{+0.167}_{-0.152}$	$1.100^{+0.954}_{-0.898}$	1.2	29.4	84.4
200	$67.50^{+0.77}_{-0.78}$	$-0.485^{+0.154}_{-0.154}$	$0.744^{+0.911}_{-0.780}$	1.1	31.8	113.5
250	$67.66^{+0.64}_{-0.68}$	$-0.536^{+0.140}_{-0.129}$	$1.087^{+0.797}_{-0.763}$	1.0	25.1	71.5
300	$67.71^{+0.59}_{-0.61}$	$-0.541^{+0.128}_{-0.123}$	$1.083^{+0.766}_{-0.709}$	0.9	23.1	68.1
350	$67.60^{+0.52}_{-0.54}$	$-0.518^{+0.115}_{-0.111}$	$0.934^{+0.679}_{-0.630}$	0.8	21.9	70.9
400	$67.72^{+0.53}_{-0.55}$	$-0.542^{+0.116}_{-0.111}$	$1.068^{+0.694}_{-0.646}$	0.8	21.0	63.1
450	$67.66^{+0.45}_{-0.45}$	$-0.521^{+0.100}_{-0.098}$	$0.938^{+0.604}_{-0.560}$	0.7	19.1	62.1
500	$67.65^{+0.44}_{-0.45}$	$-0.534^{+0.098}_{-0.093}$	$1.045^{+0.584}_{-0.555}$	0.7	17.9	54.6
550	$67.84^{+0.42}_{-0.44}$	$-0.572^{+0.094}_{-0.089}$	$1.267^{+0.573}_{-0.554}$	0.6	16.0	44.4

Tabela A.5: Resultados numéricos para o Einstein Telescope utilizando a expansão de Taylor, em função dos intervalos de razão sinal-ruído (SNR) e do número total de eventos simulados. A tabela apresenta as estimativas de H_0 , q_0 e j_0 , juntamente com suas incertezas assimétricas e precisões relativas.

SNR interval / N	H_0 (Km/s/Mpc)	q_0	j_0	σ_{H_0}/H_0 (%)	$\sigma_{q_0}/ q_0 $ (%)	σ_{j_0}/j_0 (%)
SNR Intervals						
[8,23]	$68.26^{+3.65}_{-3.44}$	$-0.53^{+0.25}_{-0.23}$	$0.96^{+1.24}_{-1.21}$	5.2	45.3	127.6
[23,38]	$67.54^{+2.20}_{-2.16}$	$-0.52^{+0.24}_{-0.21}$	$0.99^{+1.34}_{-1.29}$	3.2	43.3	132.8
[38,53]	$67.60^{+1.66}_{-1.68}$	$-0.51^{+0.23}_{-0.20}$	$0.93^{+1.38}_{-1.26}$	2.5	42.2	141.9
[53,68]	$67.69^{+1.41}_{-1.47}$	$-0.53^{+0.22}_{-0.18}$	$0.98^{+1.32}_{-1.27}$	2.1	37.7	132.1
[68,83]	$67.70^{+1.22}_{-1.29}$	$-0.52^{+0.21}_{-0.18}$	$0.89^{+1.35}_{-1.21}$	1.9	37.5	143.8
[83,98]	$67.40^{+1.16}_{-1.23}$	$-0.50^{+0.21}_{-0.18}$	$0.92^{+1.34}_{-1.23}$	1.8	39.0	139.7
[98,113]	$67.55^{+1.15}_{-1.17}$	$-0.52^{+0.20}_{-0.17}$	$0.97^{+1.34}_{-1.29}$	1.7	35.6	135.6
[113,128]	$67.39^{+1.20}_{-1.21}$	$-0.50^{+0.19}_{-0.17}$	$0.96^{+1.37}_{-1.32}$	1.8	36.0	140.1
[128,143]	$67.66^{+1.19}_{-1.19}$	$-0.52^{+0.19}_{-0.17}$	$0.92^{+1.38}_{-1.29}$	1.8	34.6	145.1
[143,158]	$67.64^{+1.18}_{-1.18}$	$-0.53^{+0.18}_{-0.17}$	$0.97^{+1.35}_{-1.31}$	1.7	33.0	137.1
[158,173]	$67.45^{+1.31}_{-1.26}$	$-0.50^{+0.20}_{-0.19}$	$1.01^{+1.34}_{-1.33}$	1.9	39.0	132.2
[173,188]	$67.94^{+1.28}_{-1.29}$	$-0.57^{+0.19}_{-0.19}$	$0.93^{+1.35}_{-1.30}$	1.9	33.3	142.5
[188,203]	$67.48^{+1.31}_{-1.31}$	$-0.50^{+0.20}_{-0.22}$	$1.03^{+1.32}_{-1.34}$	1.9	42.0	129.1
[203,218]	$67.17^{+1.29}_{-1.28}$	$-0.46^{+0.22}_{-0.24}$	$1.05^{+1.34}_{-1.35}$	1.9	50.0	128.1
[218,233]	$67.54^{+1.37}_{-1.25}$	$-0.51^{+0.24}_{-0.23}$	$0.97^{+1.33}_{-1.32}$	1.9	46.1	136.6
[233,248]	$67.41^{+1.37}_{-1.23}$	$-0.47^{+0.25}_{-0.26}$	$1.04^{+1.33}_{-1.36}$	1.9	54.3	129.3
[248,263]	$67.65^{+1.32}_{-1.31}$	$-0.53^{+0.26}_{-0.24}$	$0.96^{+1.36}_{-1.32}$	1.9	47.2	139.6
[263,278]	$67.61^{+1.29}_{-1.27}$	$-0.51^{+0.29}_{-0.27}$	$0.99^{+1.35}_{-1.35}$	1.9	54.9	136.4
[278,293]	$67.49^{+1.27}_{-1.20}$	$-0.52^{+0.27}_{-0.27}$	$1.00^{+1.35}_{-1.35}$	1.8	51.9	135.0
[293,308]	$67.56^{+1.15}_{-1.13}$	$-0.52^{+0.28}_{-0.27}$	$0.95^{+1.37}_{-1.33}$	1.7	52.9	142.1
N						
100	$67.642^{+0.833}_{-0.871}$	$-0.525^{+0.180}_{-0.157}$	$0.961^{+1.270}_{-1.170}$	1.3	32.1	127.0
150	$67.650^{+0.736}_{-0.782}$	$-0.526^{+0.168}_{-0.149}$	$0.967^{+1.208}_{-1.103}$	1.1	30.1	119.5
200	$67.588^{+0.641}_{-0.656}$	$-0.506^{+0.146}_{-0.141}$	$0.824^{+1.127}_{-0.964}$	1.0	28.4	126.9
250	$67.661^{+0.538}_{-0.578}$	$-0.530^{+0.138}_{-0.124}$	$1.020^{+1.035}_{-0.966}$	0.8	24.7	98.1
300	$67.732^{+0.552}_{-0.610}$	$-0.557^{+0.141}_{-0.121}$	$1.220^{+1.005}_{-0.998}$	0.9	23.5	82.1
350	$67.649^{+0.481}_{-0.518}$	$-0.541^{+0.124}_{-0.112}$	$1.113^{+0.928}_{-0.891}$	0.7	21.8	81.7
400	$67.584^{+0.478}_{-0.500}$	$-0.506^{+0.121}_{-0.116}$	$0.843^{+0.936}_{-0.832}$	0.7	23.4	104.9
450	$67.589^{+0.442}_{-0.458}$	$-0.518^{+0.112}_{-0.109}$	$0.944^{+0.887}_{-0.790}$	0.7	21.3	88.8
500	$67.622^{+0.435}_{-0.463}$	$-0.534^{+0.113}_{-0.105}$	$1.098^{+0.873}_{-0.809}$	0.7	20.4	76.6
550	$67.701^{+0.418}_{-0.441}$	$-0.549^{+0.108}_{-0.101}$	$1.171^{+0.840}_{-0.790}$	0.6	19.0	69.6

Tabela A.6: Resultados numéricos para o Einstein Telescope utilizando a parametrização Padé $P_{2,1}$, em função dos intervalos de razão sinal-ruído (SNR) e do número total de eventos simulados. A tabela apresenta as estimativas de H_0 , q_0 e j_0 , juntamente com suas incertezas assimétricas e precisões relativas.

SNR interval / N	H_0 (Km/s/Mpc)	q_0	j_0	σ_{H_0}/H_0 (%)	$\sigma_{q_0}/ q_0 $ (%)	σ_{j_0}/j_0 (%)
SNR Intervals						
[8,23]	$67.39^{+2.52}_{-2.70}$	$-0.52^{+0.27}_{-0.22}$	$1.10^{+1.23}_{-1.56}$	3.9	47.1	126.8
[23,38]	$67.58^{+1.78}_{-1.88}$	$-0.56^{+0.24}_{-0.19}$	$1.41^{+1.02}_{-1.83}$	2.7	38.4	101.1
[38,53]	$67.44^{+1.59}_{-1.70}$	$-0.51^{+0.21}_{-0.20}$	$0.98^{+1.27}_{-1.44}$	2.4	40.2	138.3
[53,68]	$67.42^{+1.61}_{-1.70}$	$-0.48^{+0.22}_{-0.21}$	$0.72^{+1.35}_{-1.12}$	2.5	44.8	171.5
[68,83]	$67.48^{+1.77}_{-1.72}$	$-0.47^{+0.23}_{-0.24}$	$0.62^{+1.35}_{-0.99}$	2.6	50.0	188.7
[83,98]	$67.70^{+1.66}_{-1.64}$	$-0.53^{+0.25}_{-0.24}$	$0.90^{+1.23}_{-1.11}$	2.4	46.2	130.0
[98,113]	$67.64^{+1.60}_{-1.55}$	$-0.53^{+0.24}_{-0.24}$	$0.96^{+1.22}_{-1.20}$	2.3	45.3	126.0
[113,128]	$67.54^{+1.51}_{-1.47}$	$-0.52^{+0.23}_{-0.23}$	$1.00^{+1.25}_{-1.27}$	2.2	44.2	126.0
[128,143]	$67.56^{+1.48}_{-1.43}$	$-0.51^{+0.22}_{-0.23}$	$1.01^{+1.27}_{-1.28}$	2.2	44.1	126.2
[143,158]	$67.59^{+1.51}_{-1.46}$	$-0.51^{+0.22}_{-0.23}$	$0.94^{+1.30}_{-1.27}$	2.2	44.1	136.7
[158,173]	$67.37^{+1.67}_{-1.53}$	$-0.50^{+0.23}_{-0.24}$	$1.03^{+1.27}_{-1.30}$	2.4	47.0	124.8
[173,188]	$67.48^{+1.67}_{-1.60}$	$-0.51^{+0.25}_{-0.26}$	$1.02^{+1.29}_{-1.32}$	2.4	50.0	127.9
[188,203]	$67.74^{+1.51}_{-1.48}$	$-0.52^{+0.28}_{-0.25}$	$0.99^{+1.32}_{-1.33}$	2.2	51.0	133.8
[203,218]	$67.71^{+1.57}_{-1.53}$	$-0.53^{+0.28}_{-0.26}$	$0.96^{+1.33}_{-1.30}$	2.3	50.9	137.0
[218,233]	$67.29^{+1.72}_{-1.52}$	$-0.47^{+0.28}_{-0.30}$	$1.06^{+1.32}_{-1.37}$	2.4	61.7	126.9
[233,248]	$67.48^{+1.43}_{-1.38}$	$-0.52^{+0.28}_{-0.27}$	$0.99^{+1.33}_{-1.32}$	2.1	52.9	133.8
[248,263]	$67.63^{+1.46}_{-1.37}$	$-0.51^{+0.29}_{-0.28}$	$1.00^{+1.34}_{-1.33}$	2.1	55.9	133.5
[263,278]	$67.39^{+1.29}_{-1.17}$	$-0.49^{+0.27}_{-0.28}$	$1.03^{+1.33}_{-1.35}$	1.8	56.1	130.1
[278,293]	$67.57^{+1.32}_{-1.25}$	$-0.52^{+0.30}_{-0.29}$	$0.99^{+1.35}_{-1.34}$	1.9	56.7	135.9
[293,308]	$67.47^{+1.31}_{-1.19}$	$-0.47^{+0.29}_{-0.30}$	$1.07^{+1.31}_{-1.38}$	1.9	62.8	125.7
N						
820	$67.663^{+0.348}_{-0.353}$	$-0.526^{+0.097}_{-0.100}$	$0.882^{+1.025}_{-0.997}$	0.5	18.7	114.6
840	$67.801^{+0.332}_{-0.353}$	$-0.560^{+0.098}_{-0.094}$	$1.074^{+1.007}_{-1.026}$	0.5	17.1	94.6
860	$67.634^{+0.341}_{-0.341}$	$-0.515^{+0.093}_{-0.099}$	$0.739^{+1.032}_{-0.941}$	0.5	18.6	133.5
880	$67.597^{+0.355}_{-0.357}$	$-0.515^{+0.095}_{-0.099}$	$0.803^{+1.015}_{-0.967}$	0.5	18.8	123.4
900	$67.660^{+0.314}_{-0.316}$	$-0.521^{+0.089}_{-0.093}$	$0.822^{+0.992}_{-0.945}$	0.5	17.5	117.8
920	$67.630^{+0.347}_{-0.346}$	$-0.519^{+0.094}_{-0.100}$	$0.811^{+1.048}_{-0.963}$	0.5	18.7	124.0
940	$67.650^{+0.337}_{-0.343}$	$-0.524^{+0.095}_{-0.101}$	$0.840^{+1.054}_{-0.984}$	0.5	18.7	121.3
960	$67.692^{+0.342}_{-0.345}$	$-0.526^{+0.094}_{-0.100}$	$0.829^{+1.036}_{-0.987}$	0.5	18.4	122.0
980	$67.652^{+0.355}_{-0.344}$	$-0.520^{+0.093}_{-0.102}$	$0.815^{+1.044}_{-0.961}$	0.5	18.8	123.0
1000	$67.661^{+0.319}_{-0.318}$	$-0.528^{+0.091}_{-0.095}$	$0.885^{+0.991}_{-0.989}$	0.5	17.6	111.9

Tabela A.7: Resultados numéricos para o Einstein Telescope utilizando a parametrização Padé $P_{3,2}$, em função dos intervalos de razão sinal-ruído (SNR) e do número total de eventos simulados. A tabela apresenta as estimativas de H_0 , q_0 e j_0 , juntamente com suas incertezas assimétricas e precisões relativas.

SNR interval / N	s_0	l_0
SNR Intervals		
[8,23]	$0.57^{+5.70}_{-6.29}$	$-1.12^{+7.04}_{-6.15}$
[23,38]	$1.54^{+5.15}_{-7.25}$	$-1.15^{+7.07}_{-6.13}$
[38,53]	$0.26^{+5.61}_{-6.10}$	$-0.86^{+6.91}_{-6.32}$
[53,68]	$0.05^{+5.03}_{-5.49}$	$-0.17^{+6.65}_{-6.65}$
[68,83]	$0.58^{+5.15}_{-5.70}$	$0.03^{+6.69}_{-6.76}$
[83,98]	$-0.27^{+5.75}_{-5.75}$	$0.11^{+6.70}_{-6.81}$
[98,113]	$-0.39^{+6.29}_{-6.04}$	$0.02^{+6.73}_{-6.77}$
[113,128]	$-0.19^{+6.49}_{-6.36}$	$0.03^{+6.79}_{-6.82}$
[128,143]	$-0.28^{+6.69}_{-6.48}$	$0.13^{+6.74}_{-6.86}$
[143,158]	$0.03^{+6.66}_{-6.70}$	$-0.00^{+6.80}_{-6.77}$
[158,173]	$-0.25^{+6.77}_{-6.61}$	$-0.00^{+6.79}_{-6.77}$
[173,188]	$-0.10^{+6.77}_{-6.67}$	$-0.07^{+6.83}_{-6.75}$
[188,203]	$-0.01^{+6.74}_{-6.75}$	$-0.06^{+6.80}_{-6.76}$
[203,218]	$-0.03^{+6.78}_{-6.76}$	$0.04^{+6.75}_{-6.79}$
[218,233]	$-0.17^{+6.82}_{-6.67}$	$-0.01^{+6.82}_{-6.79}$
[233,248]	$0.01^{+6.75}_{-6.78}$	$-0.05^{+6.85}_{-6.75}$
[248,263]	$-0.06^{+6.81}_{-6.76}$	$-0.01^{+6.77}_{-6.80}$
[263,278]	$-0.14^{+6.85}_{-6.70}$	$0.05^{+6.74}_{-6.76}$
[278,293]	$0.12^{+6.73}_{-6.88}$	$0.01^{+6.75}_{-6.77}$
[293,308]	$-0.18^{+6.87}_{-6.74}$	$-0.04^{+6.80}_{-6.77}$
N		
820	$-0.725^{+5.403}_{-5.610}$	$-0.235^{+6.827}_{-6.724}$
840	$-0.556^{+5.542}_{-5.655}$	$-0.184^{+6.805}_{-6.669}$
860	$-1.187^{+5.341}_{-5.396}$	$-0.170^{+6.815}_{-6.691}$
880	$-0.969^{+5.443}_{-5.513}$	$-0.141^{+6.833}_{-6.734}$
900	$-0.925^{+5.340}_{-5.483}$	$-0.180^{+6.808}_{-6.711}$
920	$-1.020^{+5.512}_{-5.545}$	$-0.232^{+6.802}_{-6.643}$
940	$-0.886^{+5.520}_{-5.627}$	$-0.303^{+6.842}_{-6.695}$
960	$-1.009^{+5.450}_{-5.609}$	$-0.190^{+6.790}_{-6.714}$
980	$-1.022^{+5.473}_{-5.511}$	$-0.194^{+6.838}_{-6.673}$
1000	$-0.645^{+5.329}_{-5.662}$	$-0.215^{+6.811}_{-6.698}$

Tabela A.8: Estimativas dos parâmetros cosmológicos de ordem superior s_0 e l_0 para o Einstein Telescope utilizando a parametrização Padé $P_{3,2}$, em função dos intervalos de razão sinal-ruído (SNR) e do número total de eventos simulados. Devido às grandes incertezas associadas a esses parâmetros, as precisões relativas $\sigma_\theta/|\theta|$ não são apresentadas, pois não fornecem uma medida quantitativa informativa do poder de restrição. As incertezas reportadas indicam que s_0 e l_0 permanecem fracamente restringidos em comparação com os parâmetros cosmológicos de menor ordem.

SNR interval / N	H_0 (Km/s/Mpc)	q_0	j_0	σ_{H_0}/H_0 (%)	$\sigma_{q_0}/ q_0 $ (%)	σ_{j_0}/j_0 (%)
SNR Intervals						
[8,48]	$67.91^{+7.74}_{-7.48}$	$-0.508^{+0.317}_{-0.293}$	$1.004^{+1.274}_{-1.306}$	11.2	60.1	128.6
[48,88]	$67.14^{+1.94}_{-1.96}$	$-0.467^{+0.261}_{-0.257}$	$0.765^{+1.263}_{-0.921}$	2.9	55.6	142.3
[88,128]	$67.62^{+1.00}_{-1.07}$	$-0.524^{+0.158}_{-0.148}$	$1.016^{+0.776}_{-0.699}$	1.5	29.1	72.6
[128,168]	$67.81^{+0.66}_{-0.66}$	$-0.555^{+0.104}_{-0.104}$	$1.132^{+0.573}_{-0.511}$	1.0	18.7	47.9
[168,208]	$67.69^{+0.48}_{-0.47}$	$-0.540^{+0.077}_{-0.078}$	$1.056^{+0.427}_{-0.388}$	0.7	14.4	38.6
[208,248]	$67.62^{+0.40}_{-0.40}$	$-0.525^{+0.065}_{-0.066}$	$0.970^{+0.360}_{-0.329}$	0.6	12.5	35.4
[248,288]	$67.67^{+0.35}_{-0.35}$	$-0.532^{+0.058}_{-0.059}$	$0.987^{+0.323}_{-0.298}$	0.5	10.9	31.5
[288,328]	$67.72^{+0.32}_{-0.31}$	$-0.539^{+0.053}_{-0.054}$	$1.033^{+0.300}_{-0.278}$	0.5	9.9	28.1
[328,368]	$67.67^{+0.32}_{-0.32}$	$-0.533^{+0.055}_{-0.055}$	$1.001^{+0.311}_{-0.289}$	0.5	10.3	30.0
[368,408]	$67.70^{+0.36}_{-0.35}$	$-0.539^{+0.068}_{-0.069}$	$1.040^{+0.416}_{-0.384}$	0.5	12.7	38.5
[408,448]	$67.67^{+0.41}_{-0.41}$	$-0.531^{+0.084}_{-0.085}$	$0.992^{+0.545}_{-0.501}$	0.6	16.0	53.1
[448,488]	$67.67^{+0.44}_{-0.45}$	$-0.537^{+0.099}_{-0.100}$	$1.051^{+0.670}_{-0.627}$	0.7	18.5	61.6
[488,528]	$67.59^{+0.48}_{-0.48}$	$-0.512^{+0.113}_{-0.112}$	$0.856^{+0.801}_{-0.740}$	0.7	21.9	89.4
[528,568]	$67.64^{+0.51}_{-0.51}$	$-0.521^{+0.126}_{-0.125}$	$0.927^{+0.935}_{-0.864}$	0.8	24.1	97.1
[568,608]	$67.61^{+0.52}_{-0.52}$	$-0.511^{+0.133}_{-0.134}$	$0.804^{+1.052}_{-0.946}$	0.8	26.1	124.3
[608,648]	$67.54^{+0.50}_{-0.50}$	$-0.506^{+0.136}_{-0.134}$	$0.816^{+1.105}_{-1.018}$	0.7	26.7	130.5
[648,688]	$67.64^{+0.50}_{-0.52}$	$-0.523^{+0.143}_{-0.138}$	$0.920^{+1.134}_{-1.089}$	0.8	26.9	121.5
[688,728]	$67.70^{+0.48}_{-0.50}$	$-0.534^{+0.141}_{-0.133}$	$0.995^{+1.197}_{-1.172}$	0.7	25.7	119.1
[728,768]	$67.65^{+0.48}_{-0.50}$	$-0.533^{+0.135}_{-0.133}$	$1.014^{+1.246}_{-1.201}$	0.7	25.2	120.4
[768,808]	$67.71^{+0.48}_{-0.49}$	$-0.530^{+0.137}_{-0.136}$	$0.867^{+1.320}_{-1.214}$	0.7	25.8	146.1
N						
800	$67.73^{+0.30}_{-0.30}$	$-0.544^{+0.054}_{-0.055}$	$1.068^{+0.314}_{-0.290}$	0.4	10.0	28.3
1000	$67.69^{+0.27}_{-0.27}$	$-0.537^{+0.048}_{-0.049}$	$1.020^{+0.276}_{-0.260}$	0.4	9.0	26.2
1200	$67.67^{+0.24}_{-0.24}$	$-0.536^{+0.043}_{-0.044}$	$1.025^{+0.248}_{-0.235}$	0.4	8.1	23.6
1400	$67.65^{+0.22}_{-0.22}$	$-0.530^{+0.040}_{-0.040}$	$0.987^{+0.226}_{-0.215}$	0.3	7.5	22.4
1600	$67.65^{+0.21}_{-0.21}$	$-0.534^{+0.038}_{-0.038}$	$1.019^{+0.213}_{-0.205}$	0.3	7.1	20.6
1800	$67.68^{+0.20}_{-0.20}$	$-0.538^{+0.036}_{-0.036}$	$1.038^{+0.203}_{-0.194}$	0.3	6.7	19.1
2000	$67.66^{+0.19}_{-0.19}$	$-0.535^{+0.034}_{-0.034}$	$1.024^{+0.190}_{-0.186}$	0.3	6.4	18.4
2200	$67.60^{+0.18}_{-0.18}$	$-0.524^{+0.032}_{-0.032}$	$0.952^{+0.179}_{-0.172}$	0.3	6.1	18.4
2400	$67.66^{+0.17}_{-0.17}$	$-0.534^{+0.031}_{-0.031}$	$1.005^{+0.174}_{-0.168}$	0.3	5.8	17.1
2600	$67.66^{+0.17}_{-0.17}$	$-0.534^{+0.030}_{-0.030}$	$1.008^{+0.167}_{-0.161}$	0.3	5.6	16.3

Tabela A.9: Resultados numéricos para o DECIGO utilizando a expansão de Taylor, em função dos intervalos de razão sinal-ruído (SNR) e do número total de eventos simulados. A tabela apresenta as estimativas de H_0 , q_0 e j_0 , juntamente com suas incertezas assimétricas e precisões relativas.

SNR interval / N	H_0 (Km/s/Mpc)	q_0	j_0	σ_{H_0}/H_0 (%)	$\sigma_{q_0}/ q_0 $ (%)	σ_{j_0}/j_0 (%)
SNR Intervals						
[8,48]	$67.76^{+7.35}_{-6.32}$	$-0.50^{+0.33}_{-0.31}$	$1.06^{+1.31}_{-1.36}$	10.1	64.0	125.9
[48,88]	$67.51^{+1.49}_{-1.89}$	$-0.51^{+0.27}_{-0.21}$	$0.88^{+1.41}_{-1.28}$	2.5	47.1	152.8
[88,128]	$67.64^{+0.96}_{-1.21}$	$-0.54^{+0.20}_{-0.16}$	$1.07^{+1.13}_{-1.10}$	1.6	33.3	104.2
[128,168]	$67.53^{+0.77}_{-0.81}$	$-0.51^{+0.14}_{-0.14}$	$0.91^{+0.94}_{-0.81}$	1.2	27.5	96.2
[168,208]	$67.88^{+0.54}_{-0.60}$	$-0.57^{+0.11}_{-0.10}$	$1.33^{+0.76}_{-0.73}$	0.8	18.4	56.0
[208,248]	$67.74^{+0.48}_{-0.50}$	$-0.55^{+0.09}_{-0.09}$	$1.18^{+0.69}_{-0.62}$	0.7	16.4	55.5
[248,288]	$67.73^{+0.43}_{-0.44}$	$-0.55^{+0.08}_{-0.08}$	$1.13^{+0.62}_{-0.56}$	0.6	14.5	52.2
[288,328]	$67.76^{+0.40}_{-0.40}$	$-0.56^{+0.08}_{-0.08}$	$1.18^{+0.61}_{-0.54}$	0.6	14.3	48.7
[328,368]	$67.71^{+0.41}_{-0.41}$	$-0.54^{+0.08}_{-0.09}$	$1.08^{+0.66}_{-0.58}$	0.6	15.7	57.4
[368,408]	$67.81^{+0.40}_{-0.43}$	$-0.57^{+0.10}_{-0.09}$	$1.34^{+0.77}_{-0.73}$	0.6	16.7	56.0
[408,448]	$67.72^{+0.41}_{-0.44}$	$-0.55^{+0.10}_{-0.10}$	$1.20^{+0.82}_{-0.79}$	0.6	18.2	67.1
[448,488]	$67.64^{+0.49}_{-0.47}$	$-0.53^{+0.12}_{-0.11}$	$1.03^{+0.96}_{-0.90}$	0.7	21.7	90.3
[488,528]	$67.72^{+0.43}_{-0.48}$	$-0.55^{+0.13}_{-0.11}$	$1.11^{+1.05}_{-1.02}$	0.7	21.8	93.2
[528,568]	$67.72^{+0.44}_{-0.47}$	$-0.55^{+0.13}_{-0.11}$	$1.18^{+1.06}_{-1.09}$	0.7	21.8	91.1
[568,608]	$67.66^{+0.43}_{-0.46}$	$-0.53^{+0.13}_{-0.12}$	$1.00^{+1.15}_{-1.13}$	0.7	23.6	114.0
[608,648]	$67.63^{+0.44}_{-0.47}$	$-0.53^{+0.13}_{-0.12}$	$0.96^{+1.26}_{-1.18}$	0.7	23.6	127.1
[648,688]	$67.68^{+0.43}_{-0.46}$	$-0.53^{+0.13}_{-0.12}$	$0.98^{+1.29}_{-1.24}$	0.7	23.6	129.1
[688,728]	$67.60^{+0.44}_{-0.46}$	$-0.52^{+0.13}_{-0.12}$	$0.97^{+1.31}_{-1.26}$	0.7	24.0	132.5
[728,768]	$67.66^{+0.45}_{-0.47}$	$-0.53^{+0.13}_{-0.12}$	$0.90^{+1.35}_{-1.26}$	0.7	23.6	145.0
[768,808]	$67.58^{+0.48}_{-0.49}$	$-0.52^{+0.13}_{-0.12}$	$0.99^{+1.34}_{-1.31}$	0.7	24.0	133.8
N						
800	$67.587^{+0.366}_{-0.357}$	$-0.520^{+0.073}_{-0.077}$	$0.932^{+0.571}_{-0.488}$	0.5	14.4	56.8
1000	$67.742^{+0.322}_{-0.317}$	$-0.546^{+0.066}_{-0.068}$	$1.103^{+0.522}_{-0.461}$	0.5	12.3	44.6
1200	$67.707^{+0.296}_{-0.293}$	$-0.544^{+0.061}_{-0.062}$	$1.101^{+0.474}_{-0.424}$	0.4	11.3	40.8
1400	$67.689^{+0.280}_{-0.274}$	$-0.541^{+0.057}_{-0.059}$	$1.080^{+0.446}_{-0.395}$	0.4	10.7	38.9
1600	$67.657^{+0.260}_{-0.256}$	$-0.532^{+0.053}_{-0.055}$	$1.002^{+0.406}_{-0.364}$	0.4	10.2	38.4
1800	$67.692^{+0.246}_{-0.240}$	$-0.539^{+0.050}_{-0.052}$	$1.056^{+0.390}_{-0.348}$	0.4	9.5	34.9
2000	$67.699^{+0.234}_{-0.228}$	$-0.542^{+0.047}_{-0.049}$	$1.077^{+0.370}_{-0.334}$	0.3	8.9	32.7
2200	$67.710^{+0.225}_{-0.219}$	$-0.544^{+0.046}_{-0.047}$	$1.088^{+0.356}_{-0.322}$	0.3	8.5	31.2
2400	$67.628^{+0.213}_{-0.206}$	$-0.530^{+0.043}_{-0.045}$	$0.994^{+0.329}_{-0.297}$	0.3	8.3	31.5
2600	$67.701^{+0.206}_{-0.202}$	$-0.543^{+0.042}_{-0.043}$	$1.090^{+0.324}_{-0.297}$	0.3	7.8	28.5

Tabela A.10: Resultados numéricos para o DECIGO utilizando a parametrização Padé $P_{2,1}$, em função dos intervalos de razão sinal-ruído (SNR) e do número total de eventos simulados. A tabela apresenta as estimativas de H_0 , q_0 e j_0 , juntamente com suas incertezas assimétricas e precisões relativas.

SNR interval / N	H_0 (Km/s/Mpc)	q_0	j_0	σ_{H_0}/H_0 (%)	$\sigma_{q_0}/ q_0 $ (%)	σ_{j_0}/j_0 (%)
SNR Intervals						
[8,48]	$67.26^{+2.25}_{-2.19}$	$-0.52^{+0.25}_{-0.23}$	$1.15^{+1.25}_{-1.67}$	3.3	46.2	127.0
[48,88]	$68.14^{+1.10}_{-1.36}$	$-0.60^{+0.22}_{-0.15}$	$1.48^{+1.05}_{-1.55}$	1.8	30.8	87.8
[88,128]	$67.89^{+0.86}_{-0.92}$	$-0.57^{+0.16}_{-0.14}$	$1.25^{+1.06}_{-1.25}$	1.3	26.3	92.4
[128,168]	$67.83^{+0.60}_{-0.73}$	$-0.57^{+0.14}_{-0.11}$	$1.35^{+0.86}_{-1.21}$	1.0	21.9	76.7
[168,208]	$67.82^{+0.48}_{-0.64}$	$-0.57^{+0.14}_{-0.09}$	$1.42^{+0.73}_{-1.29}$	0.8	20.2	71.1
[208,248]	$67.76^{+0.48}_{-0.53}$	$-0.55^{+0.12}_{-0.10}$	$1.21^{+0.88}_{-1.21}$	0.7	20.0	86.4
[248,288]	$67.67^{+0.46}_{-0.48}$	$-0.54^{+0.12}_{-0.10}$	$1.11^{+0.89}_{-1.21}$	0.7	20.4	94.6
[288,328]	$67.72^{+0.45}_{-0.46}$	$-0.55^{+0.12}_{-0.10}$	$1.11^{+0.96}_{-1.22}$	0.7	20.0	98.2
[328,368]	$67.62^{+0.45}_{-0.43}$	$-0.52^{+0.10}_{-0.11}$	$0.84^{+1.04}_{-1.02}$	0.7	20.2	122.6
[368,408]	$67.57^{+0.47}_{-0.46}$	$-0.51^{+0.10}_{-0.12}$	$0.72^{+1.13}_{-0.95}$	0.7	21.6	144.4
[408,448]	$67.69^{+0.47}_{-0.48}$	$-0.53^{+0.11}_{-0.11}$	$0.90^{+1.10}_{-0.99}$	0.7	20.8	116.1
[448,488]	$67.70^{+0.49}_{-0.52}$	$-0.54^{+0.12}_{-0.11}$	$0.93^{+1.06}_{-0.98}$	0.7	21.3	109.7
[488,528]	$67.66^{+0.53}_{-0.53}$	$-0.54^{+0.13}_{-0.12}$	$0.97^{+1.05}_{-0.99}$	0.8	23.1	105.2
[528,568]	$67.59^{+0.59}_{-0.55}$	$-0.52^{+0.14}_{-0.14}$	$0.86^{+1.11}_{-1.04}$	0.8	26.9	125.0
[568,608]	$67.66^{+0.57}_{-0.57}$	$-0.54^{+0.15}_{-0.14}$	$0.98^{+1.16}_{-1.11}$	0.8	26.9	115.8
[608,648]	$67.56^{+0.60}_{-0.55}$	$-0.51^{+0.14}_{-0.16}$	$0.82^{+1.24}_{-1.13}$	0.9	29.4	144.5
[648,688]	$67.71^{+0.58}_{-0.56}$	$-0.54^{+0.15}_{-0.15}$	$1.05^{+1.23}_{-1.25}$	0.8	27.8	118.1
[688,728]	$67.58^{+0.57}_{-0.54}$	$-0.51^{+0.14}_{-0.16}$	$0.93^{+1.29}_{-1.23}$	0.8	29.4	135.5
[728,768]	$67.53^{+0.58}_{-0.56}$	$-0.51^{+0.15}_{-0.16}$	$0.93^{+1.33}_{-1.27}$	0.8	30.4	139.8
[768,808]	$67.53^{+0.58}_{-0.57}$	$-0.51^{+0.15}_{-0.15}$	$1.04^{+1.30}_{-1.33}$	0.9	29.4	126.4
N						
8200	$67.642^{+0.185}_{-0.200}$	$-0.529^{+0.065}_{-0.053}$	$1.002^{+0.571}_{-0.794}$	0.3	11.2	68.1
8400	$67.637^{+0.183}_{-0.209}$	$-0.531^{+0.069}_{-0.052}$	$1.017^{+0.571}_{-0.840}$	0.3	11.4	69.4
8600	$67.681^{+0.171}_{-0.190}$	$-0.541^{+0.060}_{-0.048}$	$1.119^{+0.515}_{-0.718}$	0.3	10.0	55.1
8800	$67.630^{+0.175}_{-0.198}$	$-0.525^{+0.064}_{-0.050}$	$0.962^{+0.552}_{-0.780}$	0.3	10.9	69.2
9000	$67.643^{+0.172}_{-0.187}$	$-0.528^{+0.060}_{-0.050}$	$0.979^{+0.544}_{-0.730}$	0.3	10.4	65.1
9200	$67.654^{+0.176}_{-0.191}$	$-0.530^{+0.061}_{-0.051}$	$0.981^{+0.566}_{-0.751}$	0.3	10.6	67.1
9400	$67.630^{+0.176}_{-0.197}$	$-0.526^{+0.065}_{-0.051}$	$0.963^{+0.573}_{-0.798}$	0.3	11.0	71.2
9600	$67.620^{+0.182}_{-0.181}$	$-0.519^{+0.058}_{-0.055}$	$0.850^{+0.631}_{-0.723}$	0.3	10.9	79.6
9800	$67.638^{+0.171}_{-0.171}$	$-0.525^{+0.054}_{-0.050}$	$0.929^{+0.551}_{-0.670}$	0.3	9.9	65.7
10000	$67.655^{+0.166}_{-0.186}$	$-0.535^{+0.060}_{-0.048}$	$1.052^{+0.523}_{-0.740}$	0.3	10.1	60.0

Tabela A.11: Resultados numéricos para o DECIGO utilizando a parametrização Padé $P_{3,2}$, em função dos intervalos de razão sinal-ruído (SNR) e do número total de eventos simulados. A tabela apresenta as estimativas de H_0 , q_0 e j_0 , juntamente com suas incertezas assimétricas e precisões relativas.

SNR interval / N	s_0	l_0
SNR Intervals		
[8,48]	$0.51^{+5.35}_{-6.61}$	$-1.16^{+6.99}_{-6.12}$
[48,88]	$1.52^{+4.87}_{-6.44}$	$-1.02^{+6.96}_{-6.23}$
[88,128]	$0.67^{+5.02}_{-5.55}$	$-1.09^{+6.88}_{-6.07}$
[128,168]	$1.47^{+4.78}_{-5.79}$	$-0.99^{+6.85}_{-6.04}$
[168,208]	$1.99^{+4.58}_{-6.29}$	$-1.06^{+6.91}_{-6.13}$
[208,248]	$1.03^{+5.06}_{-6.09}$	$-0.81^{+6.76}_{-6.32}$
[248,288]	$0.61^{+4.95}_{-6.12}$	$-0.86^{+6.78}_{-6.34}$
[288,328]	$0.26^{+5.37}_{-6.25}$	$-0.65^{+6.85}_{-6.45}$
[328,368]	$-0.84^{+5.37}_{-5.54}$	$-0.25^{+6.81}_{-6.66}$
[368,408]	$-1.21^{+5.63}_{-5.41}$	$-0.03^{+6.78}_{-6.80}$
[408,448]	$-0.86^{+5.73}_{-5.60}$	$0.04^{+6.76}_{-6.81}$
[448,488]	$-0.37^{+5.61}_{-5.67}$	$0.07^{+6.73}_{-6.79}$
[488,528]	$-0.67^{+5.72}_{-5.57}$	$0.15^{+6.69}_{-6.85}$
[528,568]	$-0.14^{+5.89}_{-6.03}$	$0.05^{+6.74}_{-6.79}$
[568,608]	$-0.31^{+6.02}_{-5.97}$	$0.07^{+6.72}_{-6.77}$
[608,648]	$0.20^{+6.19}_{-6.38}$	$0.03^{+6.76}_{-6.80}$
[648,688]	$-0.47^{+6.57}_{-6.28}$	$0.13^{+6.72}_{-6.83}$
[688,728]	$0.04^{+6.53}_{-6.60}$	$-0.01^{+6.79}_{-6.78}$
[728,768]	$0.07^{+6.59}_{-6.68}$	$0.13^{+6.75}_{-6.89}$
[768,808]	$-0.13^{+6.71}_{-6.65}$	$0.08^{+6.75}_{-6.85}$
N		
8200	$-0.041^{+3.602}_{-4.617}$	$-1.163^{+6.793}_{-6.088}$
8400	$-0.029^{+3.625}_{-4.730}$	$-1.102^{+6.795}_{-6.113}$
8600	$0.551^{+3.298}_{-4.263}$	$-1.158^{+6.793}_{-6.059}$
8800	$-0.200^{+3.478}_{-4.495}$	$-1.014^{+6.663}_{-6.135}$
9000	$-0.155^{+3.406}_{-4.312}$	$-1.014^{+6.689}_{-6.161}$
9200	$-0.206^{+3.597}_{-4.414}$	$-0.908^{+6.643}_{-6.220}$
9400	$-0.281^{+3.621}_{-4.606}$	$-1.097^{+6.743}_{-6.135}$
9600	$-0.872^{+3.848}_{-4.360}$	$-0.686^{+6.534}_{-6.272}$
9800	$-0.404^{+3.391}_{-4.067}$	$-0.977^{+6.643}_{-6.112}$
10000	$0.168^{+3.391}_{-4.363}$	$-1.134^{+6.697}_{-6.104}$

Tabela A.12: Estimativas dos parâmetros cosmológicos de ordem superior s_0 e l_0 para o DECIGO utilizando a parametrização Padé $P_{3,2}$, em função dos intervalos de razão sinal-ruído (SNR) e do número total de eventos simulados. Devido às grandes incertezas associadas a esses parâmetros, as precisões relativas $\sigma_\theta/|\theta|$ não são apresentadas, pois não fornecem uma medida quantitativa informativa do poder de restrição. As incertezas reportadas indicam que s_0 e l_0 permanecem fracamente restringidos em comparação com os parâmetros cosmológicos de menor ordem.