



Observatório
Nacional

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ESTUDO DE MODELOS DE GRAVIDADE MODIFICADA USANDO DADOS
COSMOLÓGICOS DE AGLOMERAÇÃO DE MATÉRIA

MANOEL VICENTE DE SOUZA FILHO

RIO DE JANEIRO

2026

Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações
Observatório Nacional
Programa de Pós-Graduação

Dissertação de Mestrado

ESTUDO DE MODELOS DE GRAVIDADE MODIFICADA USANDO DADOS
COSMOLÓGICOS DE AGLOMERAÇÃO DE MATÉRIA

por

Manoel Vicente de Souza Filho

Dissertação submetida ao Corpo Docente do
Programa de Pós-graduação em Astronomia
do Observatório Nacional, como parte dos
requisitos necessários para a obtenção do Grau
de Mestre em Astronomia.

Orientador: Dr. Armando Bernui

Rio de Janeiro, RJ – Brasil
Janeiro de 2026

d837

de Souza Filho, Manoel Vicente

Estudo de modelos de gravidade modificada usando dados
cosmológicos de aglomeração de matéria [Rio de Janeiro] 2026.
[xx](#), [76](#) p. 29,7 cm: [graf.](#) [il.](#) [tab.](#)

Dissertação (mestrado) - Observatório Nacional - Rio de
Janeiro, 2026.

1. estruturas. 2. densidade. 3. flutuação. 4. crescimento.
I. Observatório Nacional. II. Título.

CDU 000.000.000

“ESTUDO DE MODELOS DE GRAVIDADE MODIFICADA USANDO DADOS
COSMOLÓGICOS DE AGLOMERAÇÃO DE MATÉRIA”

MANOEL VICENTE DE SOUZA FILHO

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ASTRONOMIA DO OBSERVATÓRIO NACIONAL COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ASTRONOMIA.

Aprovada por:

Dr. Armando Bernui – Observatório Nacional
(Orientador)

Dr. Júlio Fabris – Universidade Federal do Espírito Santo

Dr. Fábio Cabral – Universidade do Estado do Rio Grande do Norte

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
29 DE JANEIRO DE 2026

*Este trabalho é dedicado com
profundo carinho e gratidão aos
meus pais e aos demais membros
da minha família.*

Agradecimentos

Meus profundos agradecimentos, inicialmente, reverenciam aquele que é responsável pelo sopro da vida: Deus. Sem Ele, indubitavelmente, não alcançaria o patamar atual, e sou imensamente grato por todas as oportunidades que me tem proporcionado.

Expresso minha gratidão aos meus pais, Manoel e Glauce, que não apenas apoiaram minhas decisões, mas também impulsionaram meus sonhos, tornando-os realidade. Reconheço plenamente o empenho que dedicaram a mim, com minha mãe me alfabetizando em casa devido às dificuldades enfrentadas na escola durante a infância, e meu pai, figura paterna que não apenas nos sustentou, mas também proporcionou segurança e estabilidade.

Estendo meus agradecimentos à minha tia Deise, que, ao chegar à minha graduação, prontamente se dispôs a apoiar financeiramente minha estadia em Volta Redonda, custeando integralmente meus aluguéis por quase três anos. Sem sua generosidade, seria impossível residir na cidade onde obtive meu bacharelado. Assim, serei eternamente grato por sua solicitude e apoio ao longo desses anos.

Tenho plena consciência de que, se há uma trajetória acadêmica a ser contada, ela é, inegavelmente, marcada pela presença marcante dos meus pais e da minha tia.

Agradeço sinceramente aos meus colegas do grupo de pesquisa em Cosmologia Computacional e Observacional do Observatório Nacional: Fernanda, Camila, Maria Eduarda, Maria Vitoria, Débora e Felipe, que não mediram esforços para me apoiar e oferecer valioso auxílio acadêmico ao longo desta jornada.

Não posso deixar de expressar minha profunda gratidão ao meu orientador, Armando Bernui, por aceitar-me como aluno, demonstrar paciência, compartilhar conhecimentos valiosos e fornecer conselhos essenciais para o desenvolvimento da minha carreira acadêmica. Sua orientação foi fundamental para o sucesso da nossa pesquisa.

Meus agradecimentos se estendem a CAPES, que, por meio do auxílio financeiro, fomentou o desenvolvimento da nossa pesquisa ao longo de 2 anos.

Por fim, agradeço a todos que, de forma direta e indireta, contribuíram para a conclusão deste trabalho.

ESTUDO DE MODELOS DE GRAVIDADE MODIFICADA USANDO DADOS
COSMOLÓGICOS DE AGLOMERAÇÃO DE MATÉRIA

RESUMO

Estudamos o crescimento das estruturas cósmicas por meio dos observáveis cosmológicos $f(z)$ e $\sigma_8(z)$. Utilizamos reconstruções não paramétricas, via Processos Gaussianos, combinadas com análises estatísticas MCMC para analisar os conjuntos de dados $\{f(z)\}$ e $\{\sigma_8(z)\}$. Comparamos o modelo plano- Λ CDM, extensões baseadas na Relatividade Geral e modelos de gravitação modificada do tipo $F(R)$, avaliando desempenho estatístico, consistência física e a tensão associada ao parâmetro S_8 em relação aos resultados da colaboração *Planck*-2018. Os nossos resultados indicam que, embora o modelo Λ CDM permaneça consistente com dados atuais, apresenta desvios no regime de altos redshifts. Entre os modelos fisicamente viáveis, o Hu–Sawicki ($n = 1$) destaca-se como a alternativa mais robusta, conciliando boa concordância com os dados observacionais e compatibilidade com testes locais de gravidade, enquanto o modelo de Starobinsky ($n = 2$) surge como um cenário competitivo ao aliviar moderadamente a tensão em S_8 .

STUDY OF MODIFIED GRAVITY MODELS USING COSMOLOGICAL MATTER
CLUSTERING DATA

ABSTRACT

The growth of cosmic structures is investigated through the analyses of $f(z)$ and $\sigma_8(z)$ cosmic observables data, using non-parametric Gaussian Process reconstructions combined with MCMC statistical analyses. The standard flat- Λ CDM model, General Relativity-based extensions, and $F(R)$ modified gravity scenarios are systematically compared in terms of statistical performance, physical consistency, and the level of tension in the S_8 parameter relative to the *Planck*-2018 benchmark. Our results show that, while Λ CDM remains consistent with current data, it exhibits deviations at high redshifts. Among physically viable alternatives, the Hu–Sawicki ($n = 1$) model emerges as the most robust scenario, providing good agreement with observational data and compatibility with local gravity tests, while the Starobinsky ($n = 2$) model appears as a competitive alternative by moderately alleviating the S_8 tension.

Lista de Figuras

2.1	Imagem que descreve o comportamento do fator de escala. Fonte: http://people.virginia.edu/~dmw8f/astr5630/Topic16/t16_scale_factor.html	10
2.2	Tipos de curvatura do 3-esp��o. O Universo pode ser fechado (acima), aberto (meio), ou plano (abaixo). Fonte: <i>NASA/WMAP</i>	10
2.3	Evolu��o das componentes do Universo. Fonte: o autor.	16
2.4	Par��metro q para (a) $\ddot{a} = 0$; (b) $\ddot{a} > 0$ e (c) $\ddot{a} < 0$. Fonte: o autor.	19
2.5	Representa��o do feito do alongamento do comprimento de onda da radia��o ao se propagar atrav��s de um espa��o em expans��o. Fonte: http://www2.astro.psu.edu/users/cpalma/astro1h/class28.html	21
6.1	Compara��o entre a reconstru��o por Processos Gaussianos da taxa de crescimento $f(z)$ e modelos de Gravita��o Modificada.	52
6.2	Compara��o entre a reconstru��o por Processos Gaussianos da amplitude de aglomera��o $\sigma_8(z)$ e modelos de Gravita��o Modificada.	52
6.3	Compara��o entre a reconstru��o por Processos Gaussianos de $f(z)$ e modelos do tipo Λ CDM.	53
6.4	Compara��o entre a reconstru��o por Processos Gaussianos de $\sigma_8(z)$ e modelos do tipo Λ CDM.	54
6.5	Evolu��o com o redshift do acoplamento gravitacional efetivo normalizado, $\mu(z) = G_{\text{eff}}(z)/G_N$, para os modelos cosmol��gicos analisados.	56

Lista de Tabelas

6.1	Resultados da análise MCMC com incertezas assimétricas (incluindo S_8). As incertezas em S_8 foram propagadas de forma assimétrica, avaliando-se a expressão nos limites superior e inferior de Ω_{m0} e σ_8 . Os critérios de informação AIC e BIC também são apresentados.	55
6.2	Valores atuais do acoplamento gravitacional efetivo, $G_{\text{eff},0}$, para os diferentes modelos cosmológicos analisados. Adota-se $G_N = 6.67430 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ como o valor da constante gravitacional de Newton.	56
6.3	Valores do parâmetro S_8 para cada modelo cosmológico analisado e a correspondente tensão estatística T em relação ao valor de referência do <i>Planck</i> 2018 ($S_8 = 0.832 \pm 0.013$).	59

Sumário

Lista de Figuras	xv
Lista de Tabelas	xvii
1 Introdução	1
2 Modelo Padrão da Cosmologia	5
2.1 Teoria da Relatividade Geral	6
2.2 O Parâmetro de Hubble	12
2.3 A Evolução do Universo	12
2.3.1 Matéria	13
2.3.2 Radiação	14
2.3.3 Matéria e Radiação	15
2.4 Densidade Crítica	16
2.5 Parâmetro de Densidade	17
2.6 Parâmetro de Desaceleração	18
2.7 O Desvio para o Vermelho	20
3 Teoria das Perturbações Cosmológicas	23
3.1 Perturbações Relativísticas	24
3.2 Perturbações Invariantes no Calibre Conforme	26
3.3 Descrição Newtoniana das Perturbações	28
3.3.1 Perturbações Relativísticas em $F(R)$	32
4 Revisão dos Modelos Alternativos	39
4.1 Modelos Cosmológicos Alternativos Baseados na Relatividade Geral	40
4.1.1 Modelo ω CDM	40
4.1.2 Parametrização CPL (Chevallier-Polarski-Linder)	40
4.1.3 Modelo Ω_k CDM (Universo Não-Plano)	41
4.2 Modelos de Gravidade Modificada: Teorias $F(R)$	41
4.2.1 Modelo de Hu-Sawicki	42
4.2.2 Modelo de Starobinsky	42

4.2.3	Modelo R^2 -Corrigido de Appleby-Battye	43
5	Métodos Estatísticos e Inferência Cosmológica	45
5.1	Cadeias de Markov Monte Carlo (MCMC)	46
5.2	Critérios de Informação: AIC e BIC	48
5.3	Processos Gaussianos	49
6	Resultados e Discussões	51
6.1	Reconstrução da taxa de crescimento $f(z)$	51
6.2	Reconstrução da amplitude de aglomeração $\sigma_8(z)$	52
6.3	Modelos baseados na Relatividade Geral	53
6.4	Análise estatística e comparação entre modelos	54
6.5	Comportamento dinâmico da gravidade e acoplamento gravitacional efetivo	55
6.6	Análise comparativa do parâmetro S_8	57
7	Conclusões	61
	Referências Bibliográficas	63

Capítulo 1

Introdução

O modelo padrão da cosmologia, o Λ CDM (*Lambda Cold Dark Matter*) plano, tem se revelado bem sucedido na tarefa de descrever o Universo observado. Esse modelo não apenas oferece uma descrição satisfatória da atual fase de aceleração cósmica que nosso Universo atravessa, como também explica corretamente a dinâmica da formação das estruturas em grande escala reveladas pelos dados observacionais (DODELSON *et al.*, 1996). Apesar de suas virtudes, o cenário Λ CDM pressupõe a existência de duas componentes materiais exóticas cuja natureza permanece desconhecida: a energia escura e a matéria escura. Ambas desempenham papéis fundamentais dentro do modelo: enquanto a energia escura é responsável pela aceleração cósmica, a matéria escura governa o processo de formação de estruturas no Universo.

Para entendermos o significado da sigla Λ CDM, lembremos que, nesse cenário, a energia escura é representada por um termo presente nas equações de campo da Relatividade Geral (RG) (EINSTEIN, 1915), a constante cosmológica *Lambda*, denotada por Λ . Além disso, para que seja eficiente na tarefa de conduzir o processo de formação de estruturas, a matéria escura deve ser não relativística, aproximadamente sem pressão, as vezes apelidada de *fria*, de onde deriva o termo *Cold Dark Matter* (CDM).

A natureza física desses dois constituintes *escuros* é ainda desconhecida, o que tem motivado tentativas de reformular o paradigma padrão por meio de extensões simples, como os modelos tipo- Λ CDM, incluindo, por exemplo, o modelo ω CDM e suas generalizações, bem como propostas mais profundas envolvendo a modificação da teoria da gravidade, nas quais a RG é interpretada como limite de uma teoria gravitacional mais geral.

Nos últimos anos, a robustez do modelo padrão tem sido fortemente testada por levantamentos observacionais de alta precisão. Em particular, análises recentes das medidas de oscilações acústicas de bárions (OAB) obtidas pelo DESI, combinadas com dados de radiação cósmica de fundo (RCF) e catálogos de supernovas do Tipo Ia, indicam que o modelo cosmológico de concordância, o Λ CDM plano, é menos favorecido que um modelo

com energia escura evolutiva, o $\omega_0\omega_a$ CDM (LODHA *et al.*, 2025). Esses resultados têm motivado uma série de estudos dedicados à investigação de modelos alternativos, desde extensões simples do Λ CDM até cenários envolvendo gravidade modificada (GM), por meio de comparações estatísticas com dados cosmológicos atuais (KOYAMA, 2016; LAZARIN e ET AL., 2026a; LOPES e ET AL., 2026a,b; NUNES e BERNUI, 2020; NUNES *et al.*, 2020; OLIVEIRA *et al.*, 2025a; SABOGAL *et al.*, 2025).

O objetivo central deste trabalho é comparar modelos cosmológicos alternativos com o modelo de concordância Λ CDM plano. Para tanto, analisaremos a evolução temporal das perturbações de matéria e a confrontaremos com os dados cosmológicos mais recentes, que abrangem uma ampla faixa de redshifts. Em particular, o estudo da taxa de crescimento das estruturas, $f(z)$, e da amplitude das flutuações de densidade de matéria na escala de $8h^{-1}$ Mpc, $\sigma_8(z)$, constitui uma ferramenta poderosa para testar a consistência do modelo padrão e suas extensões. A utilização simultânea de $f(z)$ e $\sigma_8(z)$ permite ainda quebrar a degenerescência presente no parâmetro combinado $[f\sigma_8](z)$, oferecendo uma avaliação mais detalhada dos mecanismos que impulsionam a formação das estruturas cósmicas (BAUMANN, 2022; COLES, 1996; DODELSON, 2003; FRANCO *et al.*, 2025c).

Segundo a teoria linear de perturbações, esses observáveis dependem tanto da história de expansão do Universo quanto da teoria gravitacional subjacente (LINDER, 2005). Assim, diferentes modelos cosmológicos, desde extensões simples, como o modelo ω CDM (PLANCK COLLABORATION *et al.*, 2020), até cenários mais complexos de GM, como os modelos $F(R)$ das classes de Starobinsky (STAROBINSKY, 2007) e Hu–Sawicki (HU e SAWICKI, 2007), preveem evoluções distintas para $f(z)$ e $\sigma_8(z)$. Tais diferenças podem ser confrontadas com dados astronômicos atuais, com o intuito de investigar se a tensão entre resultados da RCF e observações de estruturas em larga escala pode ser interpretada como uma possível assinatura de nova física (MACAULAY *et al.*, 2013).

Neste contexto, conduziremos uma análise comparativa entre o modelo padrão Λ CDM e diversas propostas alternativas, utilizando medidas recentes do fator de crescimento $f(z)$ e da amplitude das flutuações de matéria $\sigma_8(z)$ obtidas por diferentes traçadores cosmológicos, como distorções no espaço de redshift e levantamentos espectroscópicos de grande escala (ALAM *et al.*, 2017; AVILA *et al.*, 2022a; BEUTLER *et al.*, 2014; BLAKE e ET AL., 2011; FRANCO *et al.*, 2025c). Para isso, resolveremos numericamente as equações de evolução das perturbações lineares para cada modelo cosmológico considerado, confrontando suas previsões com conjuntos de dados observacionais compilados na literatura, incluindo medições de $f\sigma_8$ e resultados do satélite Planck (KOYAMA, 2016; NESSERIS e GARCÍA-BELLIDO, 2018; PLANCK COLLABORATION *et al.*, 2020). Nosso propósito é identificar possíveis desvios em relação ao modelo padrão e contribuir

para o debate em curso sobre a robustez do paradigma cosmológico vigente, investigando se determinadas classes de teorias de Gravitação Modificada (GM) podem descrever adequadamente o Universo observado (ISHAK, 2019; JOYCE *et al.*, 2015; RIBEIRO *et al.*, 2024).

Por fim, buscamos determinar quais modelos de GM, ou ainda quais extensões do tipo Λ CDM, podem ser considerados competidores sérios ao modelo Λ CDM plano na tarefa de descrever o Universo observável (BAUMANN, 2022; COLES, 1996; DODELSON, 2003; PLANCK COLLABORATION *et al.*, 2020).

Esta dissertação está organizada da seguinte forma. No Capítulo 2 são apresentados os fundamentos da cosmologia contemporânea. O Capítulo 3 aborda a formação e a evolução das estruturas em grande escala. No Capítulo 4, discutem-se extensões ao modelo padrão, com ênfase em cenários de gravidade modificada. O Capítulo 5 descreve os procedimentos metodológicos e estatísticos utilizados neste estudo. Os resultados e suas discussões são apresentados no Capítulo 6, enquanto as conclusões finais são reunidas no Capítulo 7.

Capítulo 2

Modelo Padrão da Cosmologia

A Cosmologia Moderna teve sua origem no cenário científico após a publicação da Teoria da RG por Albert Einstein em 1915 (EINSTEIN, 1915). Este marco revolucionário na física foi o estopim para o desenvolvimento do modelo do Big Bang, que é o cenário que melhor descreve a dinâmica cosmológica em larga escala. Em conjunto com a hipótese inflacionária, essas ideias permitiram a consolidação do Modelo Cosmológico Padrão, o Λ CDM plano, o qual apresenta excelente concordância com observações da radiação cósmica de fundo, das oscilações acústicas de bárions, da estrutura em larga escala e da expansão acelerada do Universo (ALBRECHT e STEINHARDT, 1982; AVILA *et al.*, 2025b; GAMOW, 1948; GUTH, 1981; LINDE, 1982; PEEBLES, 1984; PLANCK COLLABORATION *et al.*, 2020; RIBEIRO *et al.*, 2025). Este modelo, por sua vez, é sustentado por alicerces teóricos ancorados no Princípio Cosmológico e na teoria da RG, cujo arcabouço científico está observacionalmente respaldado na expansão do Universo (AVILA *et al.*, 2023; HUBBLE, 1929; LOPES *et al.*, 2024), nucleossíntese primordial, RCF (AVILA *et al.*, 2025c; BERNUI e REBOUÇAS, 2009, 2010; BERNUI *et al.*, 2007a; MOKEDDEM *et al.*, 2026; NOVAES *et al.*, 2015, 2016), e formação de grandes estruturas no Universo, tal como galáxias e aglomerados (AVILA *et al.*, 2022a,b; AVILA *et al.*, 2024, 2025a; COLES, 1996; DE CARVALHO *et al.*, 2021; FRANCO *et al.*, 2025a,b,c; KAISER, 1987; MARQUES e BERNUI, 2020; MARQUES *et al.*, 2019; PEEBLES, 1980).

O Princípio Cosmológico, um dos fundamentos da cosmologia contemporânea (ABRAMO *et al.*, 2006; AKRAMI *et al.*, 2020; AVILA *et al.*, 2019, 2021, 2018; BERNUI e HIPÓLITO-RICALDI, 2008; BERNUI *et al.*, 2006, 2007b, 2014; BERNUI, 2008, 2009; BERNUI *et al.*, 2018; DIAS *et al.*, 2023; FRANCO *et al.*, 2024; KESTER *et al.*, 2024; LOPES *et al.*, 2025; MAARTENS, 2011; MARQUES *et al.*, 2018; MOKEDDEM *et al.*, 2023, 2026), assume que em uma escala suficientemente ampla (tipicamente, para escalas acima de 100 Mpc (DIAS *et al.*, 2023)¹) o Universo exibe características uniformes independentemente de sua localização. Essa concepção de ausência de direções

¹A unidade de distância Mpc é uma medida de distâncias astronômicas que vale, aproximadamente, 3,26 milhões de anos-luz.

privilegiadas e pontos centrais foi pioneiramente introduzida por Nicolau Copérnico, um heliocentrista que desafiou a teoria predominante da época, o geocentrismo. Com base em suas observações, Copérnico argumentou que a Terra não ocupava uma posição central no sistema solar e, portanto, não desfrutava de um status privilegiado no espaço.

No contexto do Princípio Cosmológico, a isotropia e a homogeneidade emergem como características fundamentais do espaço-tempo. A isotropia implica a ausência de direções preferenciais no espaço cósmico, ou seja, todas as direções são igualmente significantes e estão regidas pelas mesmas leis físicas e propriedades do Universo. Já a homogeneidade diz respeito à ausência de posições preferenciais no espaço. Assim, desde qualquer ponto de observação, o Universo apresenta características similares às observações desde outros pontos.

2.1 Teoria da Relatividade Geral

Cerca de uma década após a publicação da Teoria da Relatividade Especial (RE) em 1905, que consolidou os conceitos de espaço e tempo em uma entidade unificada conhecida como *contínuo espaço-tempo*, assim como os conceitos de massa e energia, Einstein desenvolveu uma extensão de sua teoria. Essa expansão incorporou de maneira mais abrangente os efeitos gravitacionais, aprimorando assim a compreensão da interação entre a geometria do espaço-tempo e a presença de matéria e energia (EINSTEIN, 1915).

Quando foi postulada, a teoria da gravitação de Einstein era uma teoria totalmente nova, na qual a gravidade é um efeito geométrico do espaço-tempo ocasionado pela distribuição de matéria e energia presentes nele. A motivação de Einstein para desenvolver a RG é dada pelo fato de haver um desacordo entre a interação instantânea descrita pela gravitação Newtoniana e a RE, pois, até o momento, a teoria clássica da gravitação não havia apresentado conflitos entre as previsões e as observações (CATTANI, 1998), exceto o fato de ter falhado ao explicar as irregularidades na órbita do planeta Mercúrio ².

Em contrapartida, a RG alcançou sucesso notável ao abordar não apenas a órbita de Mercúrio (ARTHURY *et al.*, 2012), mas também em enfrentar com êxito outros testes clássicos. Esse desempenho consolidou a RG como a teoria física mais consistente em comparação com a teoria Newtoniana da gravitação.

A teoria da RE de Einstein possui elemento de linha descrito pela métrica de Minkowski para o espaço-tempo plano:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2.1)$$

em que pode ser, compactamente, reescrita como (BUSTI (2009)):

²O planeta Mercúrio avança cerca de 43'' de arco por século, nunca completando totalmente a elipse da sua órbita.

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.2)$$

em que $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-c, 1, 1, 1)$ é a métrica do espaço-tempo plano, x^μ são as coordenadas espaço-temporais e c representa a velocidade de luz, e a quantidade ds^2 é um invariante para qualquer sistema de coordenadas.

Para incorporar os efeitos gravitacionais à métrica, é imprescindível utilizar uma métrica que revele as propriedades intrínsecas do espaço-tempo. Esse foi o ponto de partida de Einstein, que postulou que, ao considerar esses efeitos gravitacionais, o espaço-tempo é intrinsecamente curvo em quatro dimensões de acordo com a geometria riemanniana. Dessa forma, o elemento de linha para o espaço-tempo pode ser expresso da seguinte maneira (CATTANI, 1998):

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.3)$$

sendo o elemento de linha, neste caso, também chamado de *métrica de Riemann*, $g_{\mu\nu}$ o tensor métrico e $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ (correspondendo, nessa ordem, a uma coordenada temporal e três espaciais). Além disso, a equação (2.2) é um caso particular da (2.3).

Deve-se notar que, quando considerado o espaço-tempo plano, o tensor métrico assume valores diagonais do tipo $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$. Considerando casos mais gerais de espaços-tempos, o tensor métrico vai ter uma forma mais geral (por exemplo, não necessariamente será diagonal).

A partir de $g_{\mu\nu}$, é possível escrever os símbolos de Christoffel³ denotados como

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} (\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}). \quad (2.4)$$

Assim, o tensor de Riemann ou tensor de curvatura pode ser expresso em termos dos símbolos de Christoffel da seguinte maneira

$$R_{\beta\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu \Gamma_{\beta\nu}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\beta\mu}^\alpha + \Gamma_{\tau\mu}^\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\tau - \Gamma_{\tau\nu}^\alpha \Gamma_{\beta\mu}^\tau. \quad (2.5)$$

Por outro lado, o tensor de Ricci, empregado nas equações de campo da RG, é obtido por meio da contração do tensor de Riemann, conforme expresso por

$$R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\mu\alpha\beta\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^\alpha, \quad (2.6)$$

que resulta na seguinte expressão

$$R_{\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\beta\nu}^\beta - \partial_\beta \Gamma_{\mu\nu}^\beta + \Gamma_{\tau\mu}^\beta \Gamma_{\beta\nu}^\tau - \Gamma_{\tau\nu}^\beta \Gamma_{\beta\mu}^\tau, \quad (2.7)$$

³Os símbolos de Christoffel não possuem caráter tensorial.

com o escalar de Ricci dado por

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.8)$$

Através das considerações citadas e do princípio da covariância, que estabelece que as leis físicas devem ter a mesma forma em todos os sistemas de referência possíveis (HENNEAUX e TEITELBOIM, 1989), Einstein chegou a equação de campo que descreve a relação entre a geometria espaço-temporal com o conteúdo de matéria-energia

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \xi T_{\mu\nu}, \quad (2.9)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é tensor de Einstein, $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Riemann, $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico, R é o escalar de Ricci e $\xi = \frac{8\pi G}{c^4}$ é a constante de Einstein e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento.

Temos também que a lei de conservação do tensor energia-momento dada segundo a identidade de Bianchi é

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.10)$$

Na equação (2.9), o lado esquerdo está relacionado à geometria do espaço-tempo, enquanto que o direito ao conteúdo de matéria e energia. Portanto, pode-se inferir que a presença de matéria e energia modifica a geometria espaço-temporal.

Com base nas suas equações de campo e considerando as consequências do Princípio Cosmológico, Einstein obteve um modelo cosmológico cujo o Universo não poderia ser estático, ou seja, haveria de ter um colapso gravitacional ou uma expansão. Dessa forma, a teoria da RG mostrava que modelos contendo matéria não poderiam ser estáticos. Por não haver, até então, evidências observacionais que sugerissem um Universo não-estático, ele adicionou em suas equações de campo um termo que teria ação oposta à gravidade, denominada de constante cosmológica, Λ , o que possibilita a anulação dos efeitos gravitacionais que afetam a instabilidade do Universo (DELBEM, 2010).

Se esta constante fosse diferente de zero, o Universo estático contendo matéria não colapsaria sob sua própria gravidade, fornecendo soluções cosmológicas estáticas mais estáveis (DELBEM, 2010). Contudo, em 1929, as observações conduzidas por E. Hubble indicaram que o Universo estava, na verdade, em expansão. Este resultado foi antecipado de forma independente por Friedmann em 1922, quando aplicou as equações da RG à cosmologia, prevendo um Universo em expansão (FRIEDMANN, 1924). Portanto, as observações de Hubble forneceram uma confirmação empírica crucial para a ideia de um Universo dinâmico, marcando um momento significativo na compreensão da cosmologia, que introduziu a hoje conhecida da **Lei de Hubble-Lemaître**, que será discutida mas a frente.

A partir de 1998, com a observação de supernovas do tipo Ia (SN Ia) pelos grupos liderados por A. Riess (RIESS *et al.*, 1998) e S. Perlmutter (SUPERNOVA COSMOLOGY PROJECT COLLABORATION, 1999), a constante cosmológica passou a ser referenciada

como o parâmetro que quantifica a presença de uma componente misteriosa no Universo, denominada *Energia Escura*. Esta entidade é reconhecida como responsável por essa expansão acelerada do Universo, redefinindo nossa compreensão fundamental da dinâmica cósmica. Com o emprego dessa constante cosmológica, a equação (2.9) fica:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \xi T_{\mu\nu}. \quad (2.11)$$

Um desafio ainda não solucionado na cosmologia refere-se à constante cosmológica Λ , que é conceptualizada como a energia do vácuo (BOUSSO, 2008). Contudo, uma discrepância substancial surge ao confrontarmos os valores derivados da Teoria Quântica de Campos com aqueles deduzidos a partir de dados cosmológicos. Neste contexto, uma disparidade de ordens de magnitude se manifesta, caracterizando o dilema amplamente conhecido como o *problema da constante cosmológica* (WEINBERG, 1989). Este enigma representa um desafio significativo na compreensão da natureza fundamental da energia do vácuo e destaca a necessidade premente de uma reconciliação mais profunda entre a teoria quântica e a cosmologia observacional.

Entretanto, desde o final da década de 1920, é reconhecido que o Universo está em expansão, com as propriedades de homogeneidade e isotropia estatísticas (DUPRE, 2000).

Com base no que já foi exposto, para desenvolver um modelo cosmológico coerente, é essencial adotar a premissa de que o Universo é espacialmente homogêneo, isotrópico e em expansão. Isso nos permite fazer o uso de outro sistema de coordenadas chamado de coordenadas comóveis. Essas coordenadas, por sua vez, são mantidas durante o processo de expansão. Assim, como a expansão do Universo é uniforme, podemos relacionar uma distância real $\vec{r}$ com a distância comóvel $\vec{x}$ pela relação

$$\vec{r} = a(t) \vec{x}, \quad (2.12)$$

onde a homogeneidade foi empregada para assegurar que $a(t)$ seja exclusivamente uma função do tempo t . O termo $a(t)$ é designado como fator de escala e descreve o modo como as distâncias físicas se aumentam com o tempo, considerando que o valor de $\vec{x}$ permanece, por definição, constante⁴. Pode-se observar, por exemplo na figura 2.1 as distâncias na grade comóvel permanecem as mesmas, sendo reguladas pelo fator de escala, enquanto que se percebe o aumento na grade das coordenadas físicas.

Dessa forma, ao aplicar a Equação de Campo em uma escala cósmica, ou seja, ao descrever o Universo como um todo, é necessário empregar a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), que atende a esses princípios. Essa métrica define a geometria de um Universo com tais características, caracterizando-se por uma expansão contínua. Consequentemente, para descrever adequadamente a evolução do Universo, a métrica FLRW é utilizada, conforme destacado por (FABRIS e VELTEN, 2013). O

⁴ $|\vec{x}|$ tem unidades de distância, enquanto $a(t)$ é uma função adimensional

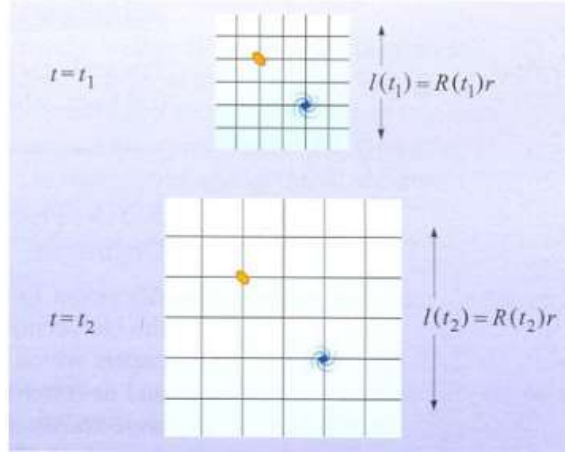


Figura 2.1: Imagem que descreve o comportamento do fator de escala. Fonte: http://people.virginia.edu/~dmw8f/astr5630/Topic16/t16_scale_factor.html

elemento de linha dessa métrica é expresso por

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - \kappa \frac{r^2}{R_0^2}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right]. \quad (2.13)$$

em que r , θ , ϕ são coordenadas esféricas comóveis, κ/R_0^2 é a curvatura Gaussiana 3D, e a constante κ é o escalar de curvatura normalizado, que pode assumir os valores $\kappa = +1$ (geometria esférica), $\kappa = -1$ (geometria hiperbólica) e $\kappa = 0$ (geometria Euclideana), como ilustra a figura 2.2 para o caso 2D.

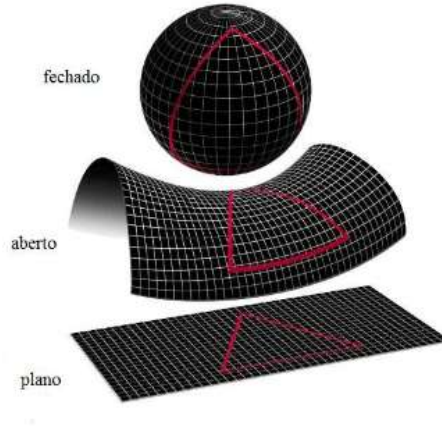


Figura 2.2: Tipos de curvatura do 3-espaco. O Universo pode ser fechado (acima), aberto (meio), ou plano (abaixo). Fonte: NASA/WMAP

Por outro lado,

$$dx^0 = dt; dx^1 = dr; dx^2 = d\theta; dx^3 = d\phi. \quad (2.14)$$

Comparando a equação (2.2) com a (2.13), e adotando $g_{\mu\nu} = 0$ para $\mu \neq \nu$ e $g_{\mu\mu} \neq 0$, é possível determinar a matriz $g_{\mu\nu}$, que é dada pela seguinte forma:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{1 - \kappa \frac{r^2}{R_0^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Nota-se que a parte espacial da métrica varia temporalmente seguindo a variação do fator de escala $a = a(t)$. Além disso, o Princípio Cosmológico recomenda considerarmos que, em grande escala, todo o conteúdo de matéria do Universo possa ser descrito em termos de um fluido perfeito ⁵, cujo tensor energia-momento é dado por:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + \frac{p}{c^2})u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}, \quad (2.16)$$

em que p , ρ e u^μ são a pressão, a densidade de energia e a quadri-velocidade adimensional do fluido, respectivamente (WEINBERG, 2008).

Para elucidar a dinâmica do Universo, é imperativo compreender a variação temporal do fator de escala $a(t)$ e outras grandezas associadas. A **equação de Friedmann** deriva-se das Equações de Einstein (2.11), aplicada à FLRW (esta também justificada pelo Princípio Cosmológico), tendo em vista um fluido perfeito para o tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$, como mostra a seguir

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa c^2}{a^2 R_0^2} + \frac{c^2 \Lambda}{3}, \quad (2.17)$$

onde $\dot{}$ representa a derivada com relação ao tempo cósmico. Substituindo (2.16) em (2.10) obtemos a *equação da continuidade*, escrita como

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0. \quad (2.18)$$

Combinando (2.17) e (2.18) obtemos a *equação da aceleração* dada por

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + 3\frac{p}{c^2}\right). \quad (2.19)$$

Ao analisarmos a equação (2.19), é possível perceber que a aceleração só é positiva e não-nula (i.e., $\ddot{a} > 0$) para $p < -c^2\rho/3$. Observa-se também que, na presença de uma pressão positiva ($p > 0$) no material em avaliação, a magnitude do termo à direita da equação aumenta em relação ao caso em que a pressão é nula ($p = 0$), resultando em um valor mais negativo. Isso, por sua vez, implica na desaceleração do processo de expansão.

⁵Considera-se que este fluido pode ser completamente descrito pela densidade relativista de matéria-energia, ρ , e pressão, p , ambos compartilhando as propriedades de homogeneidade e isotropia do espaço 3D.

2.2 O Parâmetro de Hubble

A Lei de Hubble - Lemâitre descreve uma relação proporcional entre a velocidade de recessão ($v = dr/dt$) de objetos celestes, como galáxias, e sua distância em relação ao observador. Essa lei é fundamental para compreender a expansão do Universo. Ao aplicarmos a distância comóvel, conforme expressa a equação (2.1), a esse conceito, estamos considerando as coordenadas cosmológicas da distância que levam em conta o fator de escala do Universo. Isso proporciona uma compreensão mais abrangente e precisa da relação entre a velocidade de afastamento dos objetos cósmicos e sua distância em um contexto cosmológico mais amplo, dando-nos a seguinte expressão

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{|\dot{\vec{r}}|}{|\vec{r}|} \vec{r} = \frac{\dot{a}}{a} \vec{r}, \quad (2.20)$$

cuja forma mais conhecida é

$$v = H r, \quad (2.21)$$

em que $H = H(t)$ é conhecido como **Parâmetro de Hubble**, relacionado com a taxa de expansão do Universo, e definido como

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (2.22)$$

Nota-se que, ao usarmos o resultado da equação do parâmetro de Hubble (2.22) na equação de Friedmann (2.17), é possível obter uma notação mais compacta que fornece a evolução de $H(t)$

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2}. \quad (2.23)$$

2.3 A Evolução do Universo

A equação de estado constitui um alicerce fundamental na cosmologia, delineando a interdependência entre a densidade ρ e a pressão p das componentes específicas do Universo que estamos investigando em sua evolução temporal. Assim, a compreensão da dinâmica evolutiva dessas componentes cósmicas requer não apenas a familiarização com a equação de estado, mas também uma apreciação mais ampla das propriedades físicas e comportamentais associadas a essas entidades no contexto da cosmologia. Assim, a equação de estado é caracterizada pelo parâmetro w conforme a equação

$$w = \frac{p}{c^2 \rho}. \quad (2.24)$$

Nas subseções a seguir, iremos melhor compreender o que consiste cada componente do Universo e seu respectivo comportamento evolutivo. Para cada caso desses, será consi-

derado um Universo de curvatura dada por $\kappa = 0$, isto é, plano, conforme indicam as observações.

2.3.1 Matéria

Na cosmologia, o termo *matéria* refere-se à *matéria não-relativística*, cuja pressão exercida no fluido é desprezível. Tal substância é responsável por compor o Universo em suas diversas formas, incluindo partículas subatômicas, átomos, moléculas, e estruturas maiores, como estrelas, galáxias e aglomerados de galáxias, desempenhando um papel crucial na evolução e estrutura do cosmos. Para tanto, ao analisarmos a equação (2.24), temos, para esse caso, $w = 0$ implica que $p_m = 0$, em que o subscrito m indica a componente material.

A equação de estado onde o parâmetro $w \approx 0$, caracteriza a matéria não-relativista, comumente chamada de poeira. Essa terminologia é geralmente aplicada para simplificar a dinâmica da matéria em larga escala no contexto cosmológico, poucas partículas num dado volume e que não exercem pressão. Este grupo é primariamente composto por duas entidades distintas: a *matéria escura fria* e a *matéria bariônica*.

A Matéria Escura Fria, ou no inglês *Cold Dark Matter* refere-se a uma forma de matéria hipotética que não interage diretamente com a luz e outras formas de radiação eletromagnética, tornando-se virtualmente invisível aos métodos observacionais tradicionais. Sua presença é inferida a partir dos efeitos gravitacionais que exerce sobre a matéria visível, como galáxias e aglomerados de galáxias.

Por outro lado, a matéria bariônica constitui a matéria convencional, ou seja, composta por bárions, incluindo prótons, elétrons e nêutrons, que formam átomos e, por conseguinte, estruturas mais complexas no Universo observável, como estrelas, planetas e galáxias.

Dessa maneira, ao considerarmos um Universo composto somente por poeira, teremos a pressão $p_m = 0$, que na equação do fluido (2.18)

$$\dot{\rho}_m + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_m = 0 \Rightarrow \frac{1}{a^3}\frac{d}{dt}(\rho_m a^3) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\rho_m a^3) = 0, \quad (2.25)$$

que, a partir da integração do último termo da equação, retorna

$$\rho_m \propto \frac{1}{a^3}, \quad (2.26)$$

o que representa o decaimento da pressão da componente material com o volume.

Como é possível reescalar $a(t)$ da seguinte forma $a(t_0) = a_0 = 1$, e levando em consideração $\frac{d}{dt}(\rho_m a^3) = 0$, então obtém-se

$$\rho_m = \frac{\rho_{m0}}{a^3}, \quad (2.27)$$

que, ao substituir na equação de Friedmann (2.17), com $\kappa = 0$, obtemos

$$a\dot{a}^2 = \frac{8\pi G\rho_{m0}}{3}. \quad (2.28)$$

Integrando a expressão anterior, o resultado expressa uma relação de proporcionalidade do fator de escala com o tempo cósmico da forma $a \propto t^{2/3}$, tal que com $a(t_0) = 1$, podemos escrever

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}; \quad \rho_m(t) = \frac{\rho_{m0}}{a^3} = \frac{\rho_{m0}t_0^2}{t^2}. \quad (2.29)$$

Esse cenário é conhecido como **Universo de Einstein de-Sitter**, um modelo que consiste exclusivamente de matéria. Este Universo é caracterizado por uma geometria plana ($\kappa = 0$) e uma expansão que perdura infinitamente ao longo do tempo, porém tende a zero conforme se vê na expressão do parâmetro de Hubble, ($H(t)$) no Universo predominantemente dominado por essa componente

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3t}. \quad (2.30)$$

2.3.2 Radiação

O conceito de radiação transcende não apenas a radiação em si, mas abrange toda a **matéria ultra-relativística**, incluindo os constituintes materiais presentes nos estágios iniciais do Universo. Sua equação de estado é expressa como $w = 1/3$, resultando em uma relação entre pressão (p_r) e densidade de energia (ρ_r), representada pela fórmula $p_r = \rho_r c^2/3$, sendo o subscrito r associado à radiação. Essa configuração é então aplicada à equação de estado (2.18), proporcionando uma descrição refinada das interações fundamentais no contexto cósmico

$$\dot{\rho}_r + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho_r + \frac{p_r}{c^2}\right) = 0 \Rightarrow \dot{\rho}_r + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho_r = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\rho_r a^4) = 0. \quad (2.31)$$

De maneira análoga ao caso da matéria, o resultado da integral da última expressão da equação anterior nos dá

$$\rho_r \propto \frac{1}{a^4}, \quad (2.32)$$

e usando a mesma parametrização do fator de escala, temos

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2}; \quad \rho_r(t) = \frac{\rho_{r0}}{a^4} = \frac{\rho_{r0}t_0^2}{t^2}. \quad (2.33)$$

Dessa maneira, o parâmetro de Hubble pode ser escrito da seguinte forma

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{2t}, \quad (2.34)$$

para um Universo dominado predominantemente pela radiação. Observe-se que um Universo completamente dominado pela radiação exibe uma taxa de expansão mais lenta em comparação com um Universo totalmente dominado pela matéria. Essa disparidade resulta da influência da pressão exercida pela radiação na equação de aceleração, conforme expresso pela equação da aceleração (2.19). Importante notar que tal componente está ausente no caso da matéria, uma vez que a pressão de matéria (p_m) é nula. Esse fenômeno ilustra uma intrincada interação entre as diferentes formas de energia presentes no cosmos, conduzindo a distintos comportamentos dinâmicos na expansão do Universo (BAZEIA *et al.*, 2008).

2.3.3 Matéria e Radiação

Podemos também tratar de uma situação física mais próxima da realidade, cujo o Universo é dominado por mais de um elemento, isto é, um fluido feito por matéria e radiação simultaneamente, de tal forma que

$$\rho = \rho_m + \rho_r, \quad (2.35)$$

e onde as densidades evoluem na seguinte forma

$$\rho_m \propto \frac{1}{a^3}; \quad \rho_r \propto \frac{1}{a^4}, \quad (2.36)$$

ou equivalentemente

$$\rho_m = \rho_{m0} a^{-3}; \quad \rho_r = \rho_{r0} a^{-4}. \quad (2.37)$$

A complexidade inerente à descrição de $a(t)$ é agravada pela disparidade nas taxas de evolução entre diferentes componentes energéticas. Em situações iniciais, quando a radiação exerce domínio, emerge um intervalo temporal no qual as densidades de matéria e radiação são comparáveis, ou seja, $\rho_m = \rho_r$. Este intervalo específico é denominado como a *época da equivalência matéria-radiação*, uma fase crucial que será associada ao subscrito *eq*. Este período não apenas representa uma transição marcante nas condições do Universo, mas também tem implicações significativas na evolução dinâmica do cosmos, exigindo uma análise cuidadosa das interações entre matéria e radiação.

Nesse contexto, desenham-se distintamente dois períodos cruciais na evolução cósmica: o primeiro caracteriza-se como uma fase dominada pela radiação, na qual a dinâmica evolutiva é regida pela relação descrita pelo modelo de radiação. Por sua vez, o segundo período configura-se como uma era dominada pela presença de matéria, introduzindo uma transformação substantiva na evolução cósmica, cujas nuances são delineadas pela relação característica desse regime material.

Conhecidas as principais componentes do Universo, e sua relação com a evolução temporal, é possível analisarmos a figura 2.3 que ilustra cada componente dominante em

cada fase da evolução cósmica.

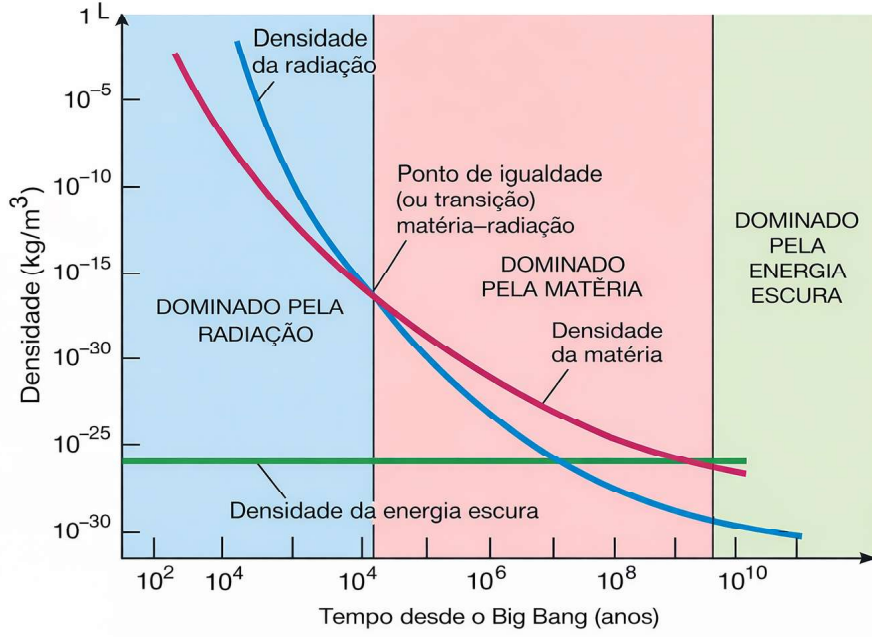


Figura 2.3: Evolução das componentes do Universo. Fonte: o autor.

2.4 Densidade Crítica

Um parâmetro importante para determinar a densidade de matéria no Universo é a chamada **densidade crítica** (ρ_c), que pode ser obtida a partir da equação de Friedmann (2.17). Para tanto, é conveniente reescrevê-la da seguinte forma

$$\frac{8\pi G\rho(t)}{3} = H(t)^2 + \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a(t)^2}. \quad (2.38)$$

Multiplicando ambos os membros de (2.38) por H^{-2} , obtemos

$$\frac{\kappa c^2}{H^2 a^2 R_0^2} = \frac{8\pi G\rho}{3H^2} - 1. \quad (2.39)$$

Quando o Universo é Euclideano, ou seja, $k = 0$, o parâmetro de densidade assume o seguinte valor

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (2.40)$$

Podemos escrever a equação anterior tomando, para ela, o tempo presente, retornando-nos o parâmetro de densidade crítica hoje, ρ_{c0} ,

$$\rho_{c0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1,878 \times 10^{-29} h^2 \frac{g}{cm^3}, \quad (2.41)$$

em que h é a constante de Hubble em unidades de 100 km/s/Mpc.

A constatação de que o valor do parâmetro de densidade crítica ρ_c está notavelmente próximo da densidade total atual ρ_0 do Universo introduz uma intrigante "coincidência", conhecida como o **problema da planicidade**. Este fenômeno levanta questões sobre a razão pela qual esses valores são tão próximos, o que tem sido um desafio para a cosmologia. A solução mais amplamente aceita entre os cosmólogos é abordada pela teoria da **Inflação Cósmica**, que postula um período de expansão exponencial do Universo em seus estágios iniciais. Esse conceito não apenas oferece uma explicação coerente para a coincidência observada, mas também resolve várias outras questões fundamentais, proporcionando uma estrutura robusta para a compreensão da evolução cósmica primordial.

Por conseguinte, a partir da equação (2.41) e conhecendo a densidade de matéria do Universo, é possível inferir se sua geometria é hiperbólica, esférica ou Euclídea.

2.5 Parâmetro de Densidade

Os resultados provenientes de projetos de pesquisa observacional frequentemente não são expressos diretamente em termos de densidade de energia (ρ), mas sim através do parâmetro de densidade (Ω). Esta abordagem representa uma reparametrização que utiliza um valor particular de densidade, concebido para garantir que a geometria do Universo seja plana ($k = 0$). A transição para o parâmetro Ω é uma estratégia que simplifica a análise, permitindo uma compreensão mais clara e concisa da dinâmica cósmica. Essa reparametrização é fundamental para conciliar observações empíricas com os princípios teóricos subjacentes, facilitando a interpretação e comparação dos resultados com as previsões da equação de Friedmann

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) - \frac{c^2 k}{R_0^2 a(t)^2}. \quad (2.42)$$

O parâmetro de densidade Ω_i : trata-se de uma quantidade adimensional que define a taxa de contribuição de uma dada componente i na composição do Universo, e sua relação é dada pela razão entre a densidade de energia ρ_i e a densidade crítica ρ_c

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_c}. \quad (2.43)$$

A partir das definições apresentadas, é possível reescrever a equação de Friedmann (2.17) da seguinte forma

$$H(t)^2 = H_0^2 \left[\Omega_{m0} \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^3 + \Omega_{r0} \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^4 + \Omega_\Lambda + \Omega_{\kappa 0} \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^2 \right], \quad (2.44)$$

em que o termo $\Omega_{\kappa 0} \equiv -\frac{c^2 \kappa}{R_0^2 a_0^2 H_0^2}$ é o parâmetro de curvatura para o tempo hoje. As observações atuais (PLANCK COLLABORATION *et al.*, 2020) indicam que o Universo é plano, o que nos permite fixar $\Omega_k \simeq 0$. Com isso, a equação (2.44) para o tempo presente, isto é, $H_0 = H(t = t_0)$ e $a_0 = a(t = t_0)$, é dada por

$$\Omega_{m0} + \Omega_{r0} + \Omega_{\Lambda} = 1. \quad (2.45)$$

É perceptível, ao observarmos os diferentes estágios da evolução do Universo, que diversos parâmetros assumem o controle do processo de expansão. Em fases iniciais, quando o fator de escala é diminuto, é a radiação que predomina, dirigindo a expansão cósmica. Posteriormente, à medida que a influência da radiação diminui, a matéria passa a ser a força dominante, seguida pela constante cosmológica. Essa sucessão de influências destaca a complexidade dinâmica do Universo ao longo do tempo cósmico, evidenciando a transição entre diferentes regimes de expansão regidos por parâmetros distintos.

No contexto do modelo padrão Λ CDM plano, a equação de Friedmann, utilizado os parâmetros de densidade normalizados para os valores das observações atuais, é escrita como

$$\frac{H(a)^2}{H_0^2} = \Omega_{r0} a^{-4} + \Omega_{m0} a^{-3} + \Omega_{\Lambda}. \quad (2.46)$$

Temos também que a contribuição da radiação no Universo atual não é significativa quando comparada com a contribuição de matéria e energia escura hoje. Portanto, para um Universo homogêneo, isotrópico e plano, a equação de Friedmann é dada pela seguinte forma

$$H(a) = H_0 \sqrt{\Omega_{m0} a^{-3} + \Omega_{\Lambda}}. \quad (2.47)$$

2.6 Parâmetro de Desaceleração

A investigação da variação temporal do fator de escala é uma questão primordial na cosmologia. Contudo, essa análise demanda um conhecimento abrangente de todas as componentes do Universo, bem como de suas densidades individuais, visto que o fator de escala não é uma quantidade diretamente observável. Através das equações de Friedmann, teríamos a capacidade de determinar com exatidão a forma funcional de $a(t)$. No entanto, a tarefa de obter informações precisas e acuradas sobre a contribuição de cada componente do Universo se revela extremamente desafiadora (TORIBIO, 2007).

Através do fator de escala hoje, medido empiricamente, é possível obter importantes informações sobre esta quantidade. Assim sendo, expandindo em série de potências em torno do tempo atual, temos

$$a(t) = a(t_0) + \left. \frac{da}{dt} \right|_{t=t_0} (t - t_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 a}{dt^2} \right|_{t=t_0} (t - t_0)^2 + \dots \quad (2.48)$$

A representação em série de Taylor mencionada anteriormente é capaz de reproduzir de forma exata o valor de $a(t)$, desde que todos os infinitos termos sejam levados em consideração. No entanto, é impraticável listar todos os termos da série, uma vez que uma forma aproximada já fornece valores bastante próximos da realidade. Isso se deve ao fato de que, ao adicionar mais termos conforme indicado em (2.48), esses termos adicionais tornam-se progressivamente menores. Dessa maneira, podemos desprezá-los, simplificando a representação sem perder significativamente a precisão.

Boa parte dos modelos cosmológicos preveem que o fator de escala não muda de forma abrupta com o tempo. Dessa forma, podemos considerar apenas os dois primeiros termos da série

$$a(t) \approx a(t_0) + \left. \frac{da}{dt} \right|_{t=t_0} (t - t_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2a}{dt^2} \right|_{t=t_0} (t - t_0)^2. \quad (2.49)$$

Utilizando-se da normalização $a(t_0) = 1$ e a definição do parâmetro H para o tempo atual, temos

$$a(t) \approx 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0H_0^2(t - t_0)^2, \quad (2.50)$$

em que o termo q_0 representa o parâmetro de desaceleração medido atualmente, cuja definição para um tempo qualquer t é

$$q(t) \equiv -\frac{\ddot{a}(t) a(t)}{\dot{a}(t)^2}. \quad (2.51)$$

Observamos, a partir da equação fornecida, que a expansão do Universo pode manifestar-se como constante, acelerada ou desacelerada, dependendo dos valores associados a $\ddot{a}$. É possível visualizar na figura 2.4 que o parâmetro q admite diferentes comportamentos para distintos valores de $\ddot{a}$, para os quais se adota o comportamento para $\ddot{a} = 0$, $\ddot{a} > 0$ e $\ddot{a} < 0$.

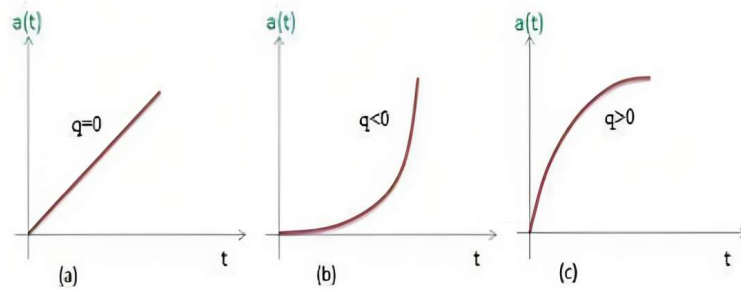


Figura 2.4: Parâmetro q para (a) $\ddot{a} = 0$; (b) $\ddot{a} > 0$ e (c) $\ddot{a} < 0$. Fonte: o autor.

Vale ressaltar na figura 2.4 que: (a) representa um comportamento constante de q , (b) indica uma aceleração, e (c) denota uma desaceleração.

Podemos usar (2.19) para expressar $q(t)$ em termos dos constituintes materiais do

Universo. Para isso, vamos escrever essa equação da seguinte maneira

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3}\rho(t)(1+3w). \quad (2.52)$$

De forma análoga, para um Universo tomado por diversas componentes, tem-se

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3} \sum_i \rho_i(t)(1+3w_i), \quad (2.53)$$

onde o subíndice i representa as possíveis diferentes componentes do Universo.

Dividindo (2.53) por H^2 , temos

$$\frac{\ddot{a}}{aH^2} = -\frac{1}{2} \frac{8\pi G}{3H^2} \sum_i \rho_i(1+3w_i) = -\frac{1}{2} \sum_i \Omega_i(t)(1+3w_i), \quad (2.54)$$

em que $\Omega_i(t)$ é dado por (2.43). Usando a definição do parâmetro de Hubble $H(t) \equiv \dot{a}(t)/a(t)$, temos

$$\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -\frac{1}{2} \frac{8\pi G}{3H^2} \sum_i \rho_i(1+3w_i) = -\frac{1}{2} \sum_i \Omega_i(1+3w_i). \quad (2.55)$$

Finalmente, da relação (2.51), obtemos

$$q(t) = \frac{1}{2} \sum_i \Omega_i(t)(1+3w_i). \quad (2.56)$$

Quando tomamos o tempo atual, a equação (2.56) resulta

$$q_0 = \frac{1}{2} \sum_i \Omega_{0,i}(1+3w_{0,i}). \quad (2.57)$$

2.7 O Desvio para o Vermelho

Em suas observações na década de 20 (mencionadas na seção 2.1) E. Hubble, em colaboração com Vesto Slipher e Milton Humason, fez uma descoberta notável relacionada ao comprimento de onda, λ_0 , das linhas de emissão de galáxias distantes. Eles observaram que esse comprimento de onda era maior do que o esperado para os elementos constituintes dessas galáxias, quando medidos em um referencial inercial. Essa discrepância pode ser explicada ao considerarmos a hipótese de que o Universo está em expansão, causando um esticamento proporcional ao fator de escala no comprimento de onda da radiação à medida que ela se desloca do ponto de emissão para o ponto de observação.

Esse fenômeno intrigante ficou conhecido como desvio para o vermelho cosmológico, ou *redshift* em inglês. Esse desvio para o vermelho ocorre devido à expansão do espaço entre

a fonte emissora e o observador, resultando em um aumento do comprimento de onda da luz. O *redshift* cosmológico, denotado por z , representa não apenas uma ferramenta observacional valiosa, mas também um indicativo crucial da dinâmica de expansão do Universo. Esse parâmetro é definido como

$$1 + z(t) \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda(t)}{\lambda(t)} = \frac{a_0}{a(t)}, \quad (2.58)$$

onde $z = 0$ se refere ao *redshift* correspondente ao tempo presente. Para um Universo em expansão, tem-se $a(t_0) > a(t)$ e $z > 0$, que representa um desvio para o vermelho, como mostra a figura 2.5. Em contrapartida, para um Universo em contração, tem-se $a(t_0) < a(t)$ e $z < 0$ ou seja, um desvio para o azul (AMENDOLA e TSUJIKAWA, 2010).

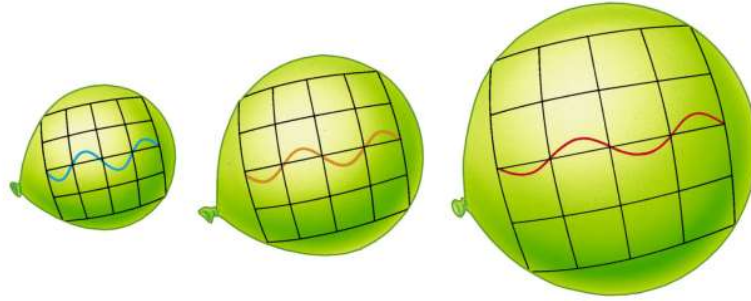


Figura 2.5: Representação do feito do alongamento do comprimento de onda da radiação ao se propagar através de um espaço em expansão. Fonte: <http://www2.astro.psu.edu/users/cpalma/astro1h/class28.html>.

Considerando o ajuste do fator de escala no presente, representado pela escala $a(t_0) = 1$, a equação (2.58) pode ser reescrita de maneira a destacar a relação intrínseca entre o fator de escala e o *redshift*

$$a(t) = \frac{1}{1 + z(t)}. \quad (2.59)$$

Diante desse contexto, a reconfiguração da equação de Friedmann em relação aos parâmetros de densidade (2.47) abre espaço para uma reformulação que se articula em torno do *redshift*. Essa reformulação proporciona uma descrição da expansão do Universo por meio de uma parametrização temporal que é amplamente empregada na cosmologia observacional. Segundo ela, a equação (2.47) poderá ser reescrita como

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}. \quad (2.60)$$

Capítulo 3

Teoria das Perturbações Cosmológicas

O Universo observável exibe uma rica variedade de estruturas desde pequenas galáxias até vastas redes cósmicas que não podem ser descritas apenas pelo modelo homogêneo e isotrópico de FLRW. Segundo o Modelo Cosmológico Padrão, essas estruturas evoluíram a partir de pequenas flutuações primordiais que se amplificam ao longo do tempo, e compreender sua evolução é essencial para utilizar observáveis cosmológicos capazes de discriminar entre diferentes modelos teóricos (BAUMANN, 2022; COLES, 1996; NOVAES *et al.*, 2016; SALES *et al.*, 2022, 2023).

As aglomerações observadas na distribuição de matéria em larga escala, assim como as flutuações de temperatura na RCF refletem as perturbações sobre o espaço-tempo de FLRW, chamado de espaço-tempo de *background* (MUKHANOV, 2005; WEINBERG, 2008). Quando estudadas no contexto da RG, essas perturbações fornecem previsões observacionais como o espectro de potência linear, a flutuação de densidade de matéria, o crescimento de estruturas, o efeito de lenteamento gravitacional fraco, e parâmetros derivados de oscilações acústicas, que servem como ferramentas importantes para testar a validade de um modelo cosmológico (BAUMANN, 2022; MA e BERTSCHINGER, 1995a).

Para descrever o Universo observado com aglomerações e vazios (AVILA *et al.*, 2018; DIAS *et al.*, 2023; FRANCO *et al.*, 2024), partimos da métrica de FLRW e consideremos o Universo preenchido por um fluido perfeito que representa o conteúdo médio do Universo (COLES, 1996). Em seguida, introduzimos pequenas perturbações na métrica e no tensor energia-momento. A análise é organizada de modo a construir variáveis invariantes por calibre, pois essas são diretamente interpretáveis fisicamente e se ligam de forma objetiva aos observáveis mencionados.

Grande parte da formalização mostrada segue as referências clássicas (BAUMANN, 2022; DODELSON, 2003; MUKHANOV, 2005; PADMANABHAN, 1993; PUGNO, 2017), mas aqui direcionamos o enfoque para a conexão entre teoria linear e inferência cosmológica.

3.1 Perturbações Relativísticas

Iniciamos com a métrica FLRW com assinatura $(-, +, +, +)$

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + a^2(t) \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (3.1)$$

onde γ_{ij} é a métrica 3-dimensional que caracteriza a geometria espacial de curvatura constante. Assumindo homogeneidade e isotropia em larga escala, a métrica espacial γ_{ij} é diagonal (MUKHANOV, 2005; WEINBERG, 2008).

A formulação torna-se mais prática ao utilizar o tempo conforme, definido por $d\eta = a^{-1}dt$, o que transforma a métrica em¹

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = a^2(\eta) [-d\eta^2 + \gamma_{ij} dx^i dx^j]. \quad (3.2)$$

O conteúdo material médio do Universo é modelado como um fluido perfeito, homogêneo e isotrópico em volumes (ou áreas) suficientemente grandes (AVILA *et al.*, 2019, 2018; DIAS *et al.*, 2023; FRANCO *et al.*, 2025a; MARQUES *et al.*, 2018), caracterizado por uma densidade e uma pressão médias de fundo. O tensor energia-momento assume então a forma

$$T_{\mu\nu}(x^\alpha) = [\bar{\rho}(\eta) + \bar{p}(\eta)] u_\mu u_\nu + \bar{p}(\eta) g_{\mu\nu}(x^\alpha), \quad (3.3)$$

onde $x^\alpha \equiv (\eta, x^i)$, com $i = 1, 2, 3$, u^μ é o quadrivetor velocidade do fluido, e $\bar{\rho}(\eta)$ e $\bar{p}(\eta)$ representam, respectivamente, a densidade média e a pressão média do espaço-tempo de fundo (DODELSON, 2003; PEEBLES, 1980).

Introduzimos então perturbações lineares

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}/\bar{g}_{\mu\nu}| \ll 1, \quad (3.4)$$

$$T_{\mu\nu} = \bar{T}_{\mu\nu} + \theta_{\mu\nu}, \quad |\theta_{\mu\nu}/\bar{\rho}| \ll 1, \quad (3.5)$$

permitindo decompor as perturbações segundo o formalismo escalar-vetor-tensor (EVT). Esse procedimento separa os modos dinamicamente independentes.

No espaço de Fourier, cada modo k se comporta como um grau de liberdade autônomo. As funções próprias do Laplaciano satisfazem a seguinte relação

$$\Delta Q^{(s,v,t)} = -k^2 Q^{(s,v,t)}, \quad (3.6)$$

em que o superíndice (s,v,t) denota perturbações escalares, vetoriais e tensoriais, respectivamente.

Para realizar a decomposição das perturbações em seus diferentes setores dinâmicos, começamos separando cada quantidade perturbada em componentes *escalares*, *vetoriais* e

¹De agora em diante adotamos $c = 1$.

tensoriais, de acordo com suas propriedades geométricas no espaço tridimensional maximamente simétrico associado à métrica de fundo FLRW. Em particular, é útil reescrever vetores e tensores simétricos de nível 2 em termos de quantidades derivadas de escalares, uma vez que, no regime linear, os três setores não se misturam e podem ser tratados independentemente. Daqui em diante, utilizaremos o superíndice (0) para denotar o setor escalar, em completa analogia aos setores vetorial (1) e tensorial (2).

Um vetor arbitrário Q_i pode sempre ser decomposto em uma parte sem divergência (vetorial pura) e uma parte que é o gradiente de um escalar. Assim, a componente escalar do vetor deve ser proporcional à derivada covariante de um escalar $Q^{(0)}$. Trabalhando no espaço de Fourier, em que derivadas espaciais introduzem fatores proporcionais ao número de onda k , a normalização natural leva à definição

$$Q_i^{(0)} = -k^{-1}Q_{|i}^{(0)}. \quad (3.7)$$

De forma análoga, um tensor simétrico de posto 2 pode ser decomposto em uma contribuição escalar construída a partir de segundas derivadas de um escalar, somada a um termo proporcional à métrica espacial γ_{ij} , que ajusta corretamente o traço do tensor. Esse procedimento produz a forma geral da parte escalar

$$Q_{ij}^{(0)} = k^{-2}Q_{|ij}^{(0)} + \frac{1}{3}\gamma_{ij}Q^{(0)}. \quad (3.8)$$

Essas definições estabelecem a decomposição escalar que será utilizada nas perturbações cosmológicas.

Com isso, a métrica perturbada assume

$$g_{00} = -a^2(\eta) [1 + A(\eta)Q^{(0)}], \quad (3.9)$$

$$g_{0i} = -a^2(\eta)B(\eta)Q_i^{(0)}, \quad (3.10)$$

$$g_{ij} = a^2(\eta) \left[(1 + 2H_L Q^{(0)})\gamma_{ij} + 2H_T Q_{ij}^{(0)} \right]. \quad (3.11)$$

A normalização $u^\mu u_\mu = -1$ implica

$$u^0 = \frac{1}{a} (1 - A Q^{(0)}), \quad u^i = \frac{1}{a} v Q^{(0)i}. \quad (3.12)$$

O tensor energia-momento perturbado torna-se

$$T_0^0 = -\bar{\rho}(1 + \delta Q^{(0)}), \quad (3.13)$$

$$T_j^i = \bar{p} \left[(1 + \pi_L Q^{(0)})\delta_j^i + \pi_T Q_j^{(0)i} \right], \quad (3.14)$$

$$T_i^0 = -(\bar{\rho} + \bar{p})(v - B)Q_i^{(0)}, \quad (3.15)$$

$$T_0^i = -(\bar{\rho} + \bar{p})vQ^{i(0)}. \quad (3.16)$$

Os parâmetros π_L e π_T possuem uma interpretação física bastante intuitiva: eles descrevem, respectivamente, as amplitudes das perturbações *isotrópicas* e *anisotrópicas* do fluido. Em termos mais precisos, π_L está associado às deformações que preservam a simetria esférica local, correspondendo às perturbações isotrópicas de pressão, enquanto π_T caracteriza distorções que quebram essa simetria, representando a parte anisotrópica do tensor de pressão (ou, equivalentemente, tensões de cisalhamento).

Essa interpretação torna-se particularmente clara quando consideramos o caso limite em que ambos os parâmetros se anulam, $\pi_L = \pi_T = 0$. Nessa situação, o tensor energia-momento perturbado reduz-se exatamente ao tensor energia-momento do background. A única contribuição perturbada remanescente é a densidade, descrita pela função $\delta\rho(\eta)$, a qual representa a flutuação escalar da densidade em torno de seu valor médio cosmológico.

Além das componentes escalares, o tensor energia-momento apresenta termos que se transformam como vetor (associados às perturbações da velocidade) e como o co-vetor correspondente. Esses componentes surgem ao traduzirmos a descrição física no referencial de repouso do fluido —inicialmente caracterizado por sua velocidade peculiar v_i — para o sistema de coordenadas adotado na métrica de fundo. É essa mudança de referencial que introduz as perturbações vetoriais no tensor energia-momento, completando sua decomposição nos setores escalar, vetorial e tensorial (BAUMANN, 2022; PADMANABHAN, 1993).

3.2 Perturbações Invariantes no Calibre Conforme

A covariância da RG implica que diferentes escolhas de coordenadas podem representar a mesma situação física. A escolha de um calibre fixa essa liberdade. Entretanto, combinações apropriadas das funções perturbadas podem ser construídas de modo a permanecer invariantes sob transformações de calibre, o que garante interpretação física direta.

A construção dos potenciais invariantes de Bardeen é um passo fundamental na teoria de perturbações cosmológicas, pois permite separar os efeitos físicos reais daqueles que surgem apenas de escolhas de coordenadas (BARDEEN, 1980). Para obter tais quantidades, combinações específicas das perturbações escalares da métrica são formadas de modo a permanecerem inalteradas sob transformações de calibre escalar (KODAMA e SASAKI, 1984). Considerando a decomposição usual da métrica em termos das variáveis escalares A , B , H_L e H_T , as combinações invariantes conhecidas como potenciais de Bardeen são definidas por

$$\Psi = A + \frac{1}{k}\dot{B} + \frac{\mathcal{H}}{k}B - \frac{1}{k^2}\left(\ddot{H}_T + \mathcal{H}\dot{H}_T\right), \quad (3.17)$$

$$\Phi = H_L + \frac{1}{3}H_T + \frac{\mathcal{H}}{k}B - \frac{\mathcal{H}}{k^2}\dot{H}_T. \quad (3.18)$$

Aqui, $\mathcal{H} \equiv a'/a$ denota o parâmetro de Hubble conforme, definido em termos do tempo conforme η , estando relacionado ao parâmetro de Hubble usual por $\mathcal{H} = aH$. Essas combinações são obtidas impondo-se que os termos que mudam sob uma transformação infinitesimal de coordenadas se cancelam mutuamente. O resultado são variáveis que capturam os efeitos físicos das perturbações gravitacionais: Ψ atua como potencial Newtoniano generalizado, enquanto Φ está ligada à curvatura espacial perturbada. Esses potenciais são diretamente observáveis, aparecendo em fenômenos como lenteamento gravitacional, deslocamento gravitacional de frequências e no crescimento das perturbações de matéria.

De forma análoga à métrica, as perturbações da matéria também podem ser combinadas de modo a formar quantidades invariantes. Em particular, a velocidade peculiar do fluido v e a perturbação da densidade δ podem ser ajustadas com termos apropriados que compensam a mudança de calibre associada a H_T . Isso leva às variáveis invariantes

$$V = v - \frac{1}{k} \dot{H}_T, \quad (3.19)$$

$$D_g = \delta - 3(1 + w)\Phi, \quad (3.20)$$

onde V representa a velocidade peculiar livre de efeitos de calibre e D_g é a perturbação de densidade na chamada *gauge comóvel generalizada*. Essas grandezas são úteis porque permitem expressar as equações dinâmicas do fluido e da geometria em termos exclusivamente físicos.

No calibre Newtoniano (ou longitudinal), definido pela escolha $B = H_T = 0$, a métrica perturbada adquire a forma diagonal

$$g_{\mu\nu}(x^\alpha) = a^2(\eta) \left[-(1 + 2\Psi)d\eta^2 + (1 - 2\Phi)\gamma_{ij}dx^i dx^j \right], \quad (3.21)$$

de modo que os potenciais de Bardeen passam a coincidir diretamente com as perturbações escalares da métrica. Essa forma simplificada permite derivar as equações lineares de Einstein de maneira transparente.

A partir das equações de Einstein linearizadas, relacionando as perturbações da métrica às do conteúdo material, obtemos três equações independentes. A primeira provém da componente (00) de Einstein, que liga a perturbação da densidade ao potencial Φ

$$4\pi G a^2 \bar{\rho} \left[D_g + 3(1 + w) \left(\Phi + \frac{\mathcal{H}}{k} V \right) \right] = (k^2 - 3\kappa)\Phi. \quad (3.22)$$

A segunda, derivada da componente mista (0i), relaciona o potencial Ψ com a velocidade peculiar

$$4\pi G a^2 (\bar{\rho} + \bar{p}) V = k(\dot{\Psi} + \mathcal{H}\Phi). \quad (3.23)$$

Já a diferença das componentes espaciais fornece a equação que mede a anisotropia do

estresse

$$k^2(\Phi - \Psi) = 8\pi G a^2 \Pi^{(s)}. \quad (3.24)$$

Em ausência de tensões anisotrópicas, $\Pi^{(s)} = 0$, os dois potenciais coincidem: $\Phi = \Psi$.

As equações de conservação $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, que são independentes das equações de Einstein, fornecem as equações de evolução para as perturbações da matéria. A conservação da componente temporal gera a equação de continuidade

$$\dot{D}_g + (3c_s^2 - w)\mathcal{H}D_g + (1 + w)kV + 3w\mathcal{H}\Gamma = 0, \quad (3.25)$$

enquanto a conservação das componentes espaciais leva à equação de Euler

$$\dot{V} + (1 - 3c_s^2)\mathcal{H}V = k(\Psi + c_s^2\Phi) + \frac{c_s^2 k}{1 + w}D_g + \frac{wk}{1 + w}\Gamma \left(1 - \frac{3\kappa}{k^2}\right) \Pi^{(s)}. \quad (3.26)$$

No caso espacialmente plano, i.e., $\kappa = 0$, a equação (3.22) se reduz a uma relação de Poisson relativística para Φ

$$\Phi = \frac{4\pi G \bar{\rho} a^2}{k^2} \left(\delta + \frac{\mathcal{H}}{k} V \right). \quad (3.27)$$

Finalmente, no regime sub-horizonte ($k \gg \mathcal{H}$), os termos dependentes de $\mathcal{H}/k$ tornam-se desprezíveis e recupera-se a forma Newtoniana clássica

$$\Phi = \frac{4\pi G \bar{\rho} a^2 \delta}{k^2}. \quad (3.28)$$

Essa aproximação é particularmente importante para o estudo da evolução de estruturas, pois conecta diretamente a dinâmica relativística das perturbações à formulação Newtoniana usada em simulações cosmológicas e na construção do espectro de potência da matéria.

3.3 Descrição Newtoniana das Perturbações

O comportamento temporal do contraste de densidade δ é fundamental para descrever a formação de estruturas no regime linear. Quando o comprimento de onda das perturbações é muito menor do que o tamanho do horizonte, a dinâmica prevista pela RG pode ser tratada, com excelente precisão, por meio do limite Newtoniano aplicado a um Universo em expansão. Esse resultado é discutido de forma detalhada em (DODELSON, 2003), onde se mostra que, no regime sub-horizonte, os potenciais gravitacionais variam lentamente e a equação de Poisson recupera sua forma usual.

Nesse contexto, torna-se conveniente reescrever as equações de evolução das perturbações em termos das variáveis gauge-invariantes D e V , que representam, respectivamente,

a perturbação de densidade e o campo de velocidade no espaço de Fourier. Essa abordagem segue o formalismo relativístico padrão apresentado em (MUKHANOV, 2005).

Considerando um fluido geral caracterizado pela equação de estado w , velocidade do som c_s e possíveis contribuições entrópicas e anisotrópicas dadas pelas equações (3.25) e (3.26), obtém-se o seguinte sistema de equações de evolução para D e V

$$\dot{D} - 3w\mathcal{H}D = - \left(1 - \frac{3K}{k^2}\right) [(1+w)kV + 2\mathcal{H}w\Pi], \quad (3.29a)$$

$$\dot{V} + \mathcal{H}V = k \left[\Psi + \frac{c_s^2}{1+w}D + \frac{w}{1+w}\Gamma - \frac{2}{3} \left(1 - \frac{3\kappa}{k^2}\right) \frac{w}{1+w}\Pi \right]. \quad (3.29b)$$

Essas equações descrevem a evolução linear das perturbações em densidade e velocidade em um cenário cosmológico homogêneo e isotrópico com curvatura espacial κ e fundo em expansão caracterizado por $\mathcal{H}$.

A variável D é definida por $D = D_g + 3(1+w) \left[\Phi + \frac{\mathcal{H}V}{k} \right]$. Após substituir essa definição nas equações perturbadas (3.29) e realizar as manipulações algébricas apropriadas, obtém-se a seguinte equação de evolução para D

$$\begin{aligned} \ddot{D} + (1 + 3c_s^2 - 6w) \mathcal{H}\dot{D} + \left[\left(\frac{9}{2}w^2 - 12w + 9c_s^2 - \frac{3}{2} \right) \mathcal{H}^2 + \frac{3}{2}(3w^2 - 1)\kappa + (k^2 - 3\kappa)c_s^2 \right] D \\ = -(k^2 - 3\kappa)w\Gamma - 2 \left(1 - \frac{3\kappa}{k^2} \right) \mathcal{H}w\dot{\Pi} \\ + 2(3w^2 + 3c_s^2 - 2w) \mathcal{H}^2\Pi + w(3w + 2)K\Pi + \left(\frac{k^2 - 3\kappa}{3} \right) w \left(1 - \frac{3\kappa}{k^2} \right) \Pi. \end{aligned} \quad (3.30)$$

As equações hidrodinâmicas Newtonianas constituem a base da descrição de fluidos autogravitantes no regime não relativístico. Elas fornecem uma descrição efetiva da evolução da matéria em escalas muito menores que o horizonte cosmológico, onde os efeitos relativísticos podem ser desprezados (BUCHERT, 1992; PEEBLES, 1980). Nesse regime, a densidade, o campo de velocidades, a pressão e o potencial gravitacional obedecem a um conjunto de relações que expressam a conservação da massa e do momento, além da relação gravitacional entre densidade e potencial. Para um fluido ideal sem dissipação, a entropia segue a corrente do fluido (BERNARDEAU *et al.*, 2002). Esse conjunto de relações forma um sistema de equações composto pela equação da continuidade, Euler,

Poisson e conservação da entropia, que são, respectivamente

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \phi = 0, \quad (3.32)$$

$$\nabla^2 \phi - 4\pi G \rho = 0, \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s = 0. \quad (3.34)$$

Para estudar a estabilidade do fluido e a evolução de perturbações gravitacionais, introduzimos pequenas variações de primeira ordem nas grandezas acima e substituímos no sistema. Esse procedimento, detalhado em referências como (MUKHANOV, 2005) e (DODELSON, 2003), permite isolar apenas os termos lineares em cada variável perturbada. Em seguida, aplicamos a transformada de Fourier, o que diagonaliza espacialmente o problema e leva a um conjunto de equações independentes para cada número de onda k . O resultado obtido é

$$\dot{D} + 3\frac{\dot{a}}{a}D + i\rho kV = 0, \quad (3.35)$$

$$\dot{V} + \frac{\dot{a}}{a}V + i\frac{k}{\rho}\left(v_s^2 D + \frac{\partial p}{\partial s}\Sigma\right) + ik\Phi = 0. \quad (3.36)$$

O ponto central da descrição do crescimento das estruturas no Universo é o contraste de densidade, grandeza que mede o desvio relativo da densidade local em relação ao valor médio cosmológico. Ele permite quantificar a presença de regiões de sobredensidade e subdensidade no fluido cósmico; o contraste de densidade da matéria é definido por

$$\delta(\mathbf{r}, a) \equiv \frac{\rho(\mathbf{r}, a) - \bar{\rho}(a)}{\bar{\rho}(a)}, \quad (3.37)$$

onde $\rho(\mathbf{r}, a)$ é a densidade na posição espacial $\mathbf{r}$ para um dado tempo cósmico t (e portanto um fator de escala $a(t)$), enquanto $\bar{\rho}(a)$ representa a densidade média do Universo na mesma época. Essa definição é fundamental na teoria de perturbações, pois δ é a variável que efetivamente controla a evolução linear das flutuações de matéria, embora o contraste de densidade não seja um observável cosmológico.

Ao restringirmos a análise ao regime adiabático, isto é, à situação em que não há variação de entropia ($\Sigma = 0$), as equações de perturbação se simplificam significativamente. Nesse caso, o sistema pode ser reduzido a uma única equação dinâmica para o próprio contraste δ , que governará toda a evolução linear das flutuações de densidade.

Nesse contexto, as equações lineares (3.35) e (3.36) podem ser escritas, no espaço de

Fourier, como

$$\dot{D} + 3\frac{\dot{a}}{a}D + i\rho k V = 0, \quad (3.38a)$$

$$\dot{V} + \frac{\dot{a}}{a}V + ik\left(v_s^2 k - \frac{4\pi G\rho}{k^2}\right)\frac{D}{\rho} = 0. \quad (3.38b)$$

Utilizando a relação $D = \rho\delta$, a equação de continuidade (3.38a) assume a forma

$$\rho\dot{\delta} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho\delta + i\rho k V = \dot{\delta} + ikV = 0, \quad (3.39)$$

na qual simplificamos por ρ e destacamos a combinação $\dot{\delta} + ikV$, que será útil para obter a equação final para δ .

Derivando (3.39) em relação ao tempo, e levando em conta que o número de onda físico satisfaz $k = k_0 a_0/a$, obtemos

$$\ddot{\delta} + ik\left(\dot{V} - \frac{\dot{a}}{a}V\right) = 0. \quad (3.40)$$

Substituindo $\dot{V}$ e V a partir de (3.38b) e eliminando a velocidade peculiar, chega-se a uma equação diferencial de segunda ordem apenas em δ . Reorganizando os termos, encontramos

$$\boxed{\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} + (v_s^2 k^2 - 4\pi G\rho)\delta = 0} \quad (3.41)$$

A equação (3.41) corresponde à equação de Jeans e resume a dinâmica fundamental do crescimento das perturbações no regime linear. O termo proporcional a $v_s^2 k^2$ representa o suporte devido à pressão, responsável por inibir a amplificação das flutuações em pequenas escalas, enquanto o termo gravitacional $-4\pi G\rho$ atua no sentido de amplificá-las. Por fim, o fator $2(\dot{a}/a)\dot{\delta}$ reflete o efeito dissipativo da expansão cósmica, que tende a amortecer a evolução das perturbações. Em conjunto, esses termos descrevem a competição entre pressão, gravidade e expansão na evolução do contraste de densidade em um Universo em expansão.

Essa equação aparece de forma bastante semelhante em tratamentos clássicos como (LIDDLE e LYTH, 2000). Retomemos agora a equação (3.25). Dentro da aproximação Newtoniana adotada até aqui, as quantidades adicionais da formulação relativística, como w , K , Γ e Π , são todas nulas. Isso corresponde fisicamente a um fluido de poeira fria, sem pressão, sem curvatura espacial, sem derivada entrópica e sem tensões anisotrópicas. Ao impor essas condições, a equação 3.25 simplifica-se substancialmente, reduzindo-se a

$$\ddot{D} + (1 + 3c_s^2) H \dot{D} + \left[\left(9c_s^2 - \frac{3}{2}\right) H^2 + k^2 c_s^2\right] D = 0. \quad (3.42)$$

Para relacionar essa expressão ao contraste de densidade δ , substituímos $c_s = v_s$ e utilizamos o resultado

$$4\pi G a^2 \rho (1 + w) = H^2 - \dot{H} + \kappa, \quad (3.43)$$

obtido a partir das equações de Friedmann (WEINBERG, 2008). Além disso, usamos a decomposição

$$D = \delta(\eta) + \frac{3H}{k} V, \quad (3.44)$$

que expressa a relação entre a variável de perturbação usada nas equações relativísticas e o contraste usual de densidade. Após essas substituições, obtemos

$$\ddot{\delta} + (1 + 3v_s^2) H \dot{\delta} + \left[v_s^2 k^2 + \left(9v_s^2 - \frac{3}{2} \right) 4\pi G a^2 \rho \right] \delta = 0, \quad (3.45)$$

que mantém a mesma estrutura geral da equação (3.41). Diferenças aparecem nos coeficientes, mas para escalas muito menores que o horizonte ($k \gg aH$) os termos relativísticos adicionais se tornam subdominantes.

As soluções de (3.41) ou (3.45) podem ser decompostas em um modo crescente δ_+ e um modo decrescente δ_- . O modo crescente é o fisicamente importante, pois ele domina a evolução tardia, que é correspondente a fase de aceleração cósmica atual, e governa a formação das estruturas cósmicas.

A partir da solução crescente, definimos o fator de crescimento $f(z)$, quantidade fundamental na cosmologia observacional,

$$f(z) \equiv \frac{d \ln \delta_+}{d \ln a},$$

onde $a = 1/(1+z)$. Em modelos além da Relatividade Geral, o fator de crescimento das perturbações de matéria pode adquirir dependência explícita na escala comóvel k , refletindo modificações na dinâmica gravitacional em regimes lineares e quase-lineares. Tal característica constitui um importante diagnóstico observacional para testar teorias alternativas da gravidade e cenários cosmológicos além do Λ CDM, uma vez que pode ser diretamente confrontada com dados de distorções no espaço de redshift e estrutura em larga escala (veja, e.g., BATISTA *et al.* (2012); BESSA *et al.* (2022); BRONNIKOV *et al.* (2017); CARAMÊS *et al.* (2014); HIPÓLITO-RICALDI *et al.* (2025); KOYAMA (2016); OLIVEIRA e ET AL. (2026); OLIVEIRA *et al.* (2024, 2025b); RIBEIRO *et al.* (2024)).

3.3.1 Perturbações Relativísticas em $F(R)$

Para que possamos utilizar corretamente os observáveis cosmológicos baseados na teoria de perturbações ao comparar distintos cenários de gravitação, é necessário esclarecer de que modo as equações perturbadas se modificam quando abandonamos a RG em favor de um modelo do tipo $F(R)$. Conforme discutido anteriormente, diversos observáveis

dependem exclusivamente da dinâmica de fundo descrita pela métrica FLRW e, por essa razão, apresentam comportamento praticamente idêntico tanto na RG quanto nas teorias modificadas consideradas (DE FELICE e TSUJIKAWA, 2010).

Entretanto, ao analisarmos a evolução das perturbações, surgem diferenças substanciais. Em particular, as relações que acoplam o potencial gravitacional à distribuição de matéria sofrem alterações devido à presença dos termos adicionais oriundos da modificação das equações de campo. Esses acréscimos efetivamente modificam a intensidade da interação gravitacional, de modo que a constante de Newton deixa de ser tratada como um parâmetro fixo e passa a se comportar como uma quantidade dependente do tempo e da escala. Essa nova quantidade é usualmente identificada como a constante gravitacional efetiva G_{eff} (TSUJIKAWA, 2007).

Nosso objetivo, neste ponto, é justamente estabelecer a forma explícita de G_{eff} , pois ela é crucial para resolver o conjunto de equações perturbadas das quais derivamos os observáveis cosmológicos relevantes. O entendimento claro dessa constante efetiva permitirá conectar diretamente o modelo $F(R)$ às quantidades observacionais utilizadas para testar gravitação em larga escala.

No que diz respeito ao procedimento perturbativo, grande parte da construção formal segue de perto o tratamento padrão empregado na Relatividade Geral (RG), porém com adaptações cruciais para a teoria $F(R)$. Adotamos o Frame de Jordan, uma escolha que permite manter o acoplamento mínimo padrão entre o setor de matéria e a métrica, preservando a forma usual das equações de conservação. Em consonância com essa abordagem, empregamos o calibre Newtoniano Conformal (ou longitudinal), trabalhando com a métrica expandida linearmente e sua forma diagonal perturbada, seguindo a formulação clássica apresentada em (MA e BERTSCHINGER, 1995b). Esta seleção de calibre é particularmente vantajosa para o estudo do limite Newtoniano, pois facilita a interpretação física dos potenciais gravitacionais como generalizações do potencial de Newton, onde as perturbações do campo escalar extra (o escalon) introduzem uma diferença entre os potenciais Φ e Ψ .

Devido à similaridade metodológica com a RG, não repetiremos toda a dedução, mas apresentaremos as equações de campo modificadas no regime linear, conforme fornecidas em (TSUJIKAWA, 2007). A partir dessas expressões, e considerando o limite de sub-horizonte ($k/a \gg H$), onde as flutuações de pequena escala dominam a dinâmica, será possível extrair a forma final de G_{eff} . Neste contexto, o limite não-relativístico é recuperado quando as velocidades das partículas são desprezíveis e o campo gravitacional é fraco, e o comportamento de G_{eff} é governado pela massa do escalon. A análise revelará como G_{eff} varia em grandes e pequenas escalas, refletindo a influência da quinta força mediada pelo grau de liberdade escalar da teoria $F(R)$.

Iniciamos nossa análise tomando como ponto de partida o conjunto de equações de campo linearizadas da teoria $F(R)$. Essas relações governam o comportamento das per-

turbações métricas e de matéria no regime escalar, e podem ser expressas por

$$3H(\dot{\Psi} + H\Phi) + \frac{k^2}{a^2}\Psi + \frac{1}{2F}\left[-3H\delta\dot{F} + (3H^2 + 3\dot{H} - \frac{k^2}{a^2})\delta F + 3\dot{F}(\dot{\Psi} + H\Phi) + 3H\dot{F}\Phi + \delta\rho\right] = 0, \quad (3.46)$$

além da relação entre os potenciais

$$\Psi = \Phi + \frac{\delta F}{F}, \quad (3.47)$$

e das equações de conservação perturbadas

$$\dot{\delta\rho}_m + 3H\delta\rho_m = \rho\left(3\dot{\Psi} - \frac{k^2}{a^2}v\right), \quad (3.48)$$

$$\dot{v} + Hv = \frac{1}{a}\Phi. \quad (3.49)$$

Para avançarmos de forma mais conveniente, introduzimos a variável perturbativa

$$\delta \equiv \frac{\delta\rho}{\rho} + 3Ha v_m, \quad (3.50)$$

que é invariante por calibre e coincide com a definição apresentada na equação (3.20). Utilizando essa grandeza, podemos reescrever o conjunto de equações anteriores na forma mais apropriada ao estudo da evolução das perturbações, a qual apresentaremos a seguir.

A partir das expressões já obtidas (3.48, 3.49 e 3.50), podemos reorganizar as quantidades perturbadas de modo a escrever

$$\dot{\delta} = -\frac{k^2}{a^2}v + 3(\dot{\Psi} + 3Hav), \quad (3.51)$$

$$(av_m)^\cdot = \Phi, \quad (3.52)$$

as quais possuem a mesma estrutura formal encontrada em (3.29a) e (3.29b). Aplicando o mesmo procedimento algébrico que foi usado para chegar à equação (3.41), podemos reorganizar o sistema de forma que

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} + \frac{k^2}{a^2}\Phi = 3\dot{B} + 6HB, \quad (3.53)$$

onde introduzimos a combinação $B \equiv \Psi + Hav$.

Na aproximação de sub-horizonte, empregada ao longo de toda a análise, os termos proporcionais a k^2 e δ são dominantes. Assim, torna-se possível ignorar as contribuições menores presentes em B , como discutido em (TSUJIKAWA, 2008). Sob essa suposição,

a equação (3.53) assume a forma simplificada

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} + \frac{k^2}{a^2}\Phi = 0. \quad (3.54)$$

Tomando agora as expressões (3.46) e (3.47) e aplicando a chamada *aproximação quase-estática*, na qual $\dot{F} \approx 0$ e $\dot{H} \approx 0$, podemos escrever

$$\frac{k^2}{a^2}\Phi = -\frac{k^2}{2a^2}\frac{\delta F}{F} - \frac{1}{2F}\delta\rho_m. \quad (3.55)$$

Além disso, expandindo as perturbações da função gravitacional em termos da curvatura escalar, tem-se

$$\delta F = F_{,R}\delta R, \quad (3.56)$$

onde $F_{,R} \equiv dF/dR$. Seguindo a construção apresentada em (TSUJIKAWA, 2008) no regime sub-horizonte, obtemos finalmente a forma desejada

$$\Phi = -\frac{a^2}{k^2}\frac{\rho}{2F}\frac{1 + \frac{4k^2}{a^2}\frac{F_{,R}}{F}}{1 + \frac{3k^2}{a^2}\frac{F_{,R}}{F}}, \quad (3.57)$$

e substituindo esse resultado na equação (3.54), chega-se à forma modificada da equação de evolução das perturbações no contexto de teorias $F(R)$

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - 4\pi G_{\text{eff}}\rho\delta = 0. \quad (3.58)$$

Dessa forma, fica evidente como a dinâmica do potencial gravitacional se afasta da RG padrão devido aos termos associados a F e à sua derivada, os quais se manifestam por meio de uma constante gravitacional efetiva, G_{eff} . Esta é definida, no regime linear, sub-horizonte e quase-estático, por

$$G_{\text{eff}}(k, a) \equiv \frac{G_N}{F_{,R}}\frac{1 + \frac{4k^2}{a^2}\frac{F_{,R}}{F}}{1 + \frac{3k^2}{a^2}\frac{F_{,R}}{F}}, \quad (3.59)$$

onde G_N representa a constante gravitacional de Newton empregada ao longo de toda a análise e $F_{,R} \equiv \partial F/\partial R$ a derivada de F em relação ao escalar de Ricci, R .

Ao introduzirmos o parâmetro

$$m \equiv \frac{R F_{,R}}{F}, \quad (3.60)$$

passamos a dispor de uma medida prática do quanto a teoria $F(R)$ se afasta do comportamento do modelo Λ CDM.

Observe que, no limite da RG (RIBEIRO *et al.*, 2024),

$$F(R) = R - 2\Lambda, \quad (3.61)$$

tem-se

$$F_{,R} = 1 \quad \text{e} \quad m = \frac{R}{R - 2\Lambda}, \quad (3.62)$$

de modo que a recuperação do comportamento da RG ocorre quando as correções dinâmicas associadas à razão $F_{,R}/F$ tornam-se desprezíveis. Nesse regime, a constante gravitacional efetiva reduz-se à constante de Newton,

$$G_{\text{eff}} \simeq G_N, \quad (3.63)$$

e as equações de perturbação coincidem com aquelas da RG padrão, garantindo a consistência com o modelo Λ CDM no nível linear ($G_{\text{eff}} = G_N$).

Com a nova variável m , a expressão anteriormente dada na equação (3.59) pode ser reescrita de maneira mais compacta como

$$G_{\text{eff}} = \frac{G_N}{F_{,R}} \frac{1 + \frac{4k^2}{a^2 R} m}{1 + \frac{3k^2}{a^2 R} m}, \quad (3.64)$$

o que facilita a análise dos regimes em que nossa teoria passa a diferir significativamente do modelo padrão Λ CDM.

Uma vez estabelecida a forma explícita de G_{eff} e seu papel na dinâmica das perturbações de matéria, é natural introduzir observáveis diretamente associados ao crescimento dessas perturbações. No regime linear, a variável fundamental utilizada para caracterizar esse crescimento é o contraste de densidade $\delta(a)$, o qual depende apenas do tempo. A partir dessa quantidade, define-se a taxa de crescimento das estruturas cósmicas como

$$f(a) \equiv \frac{d \ln \delta(a)}{d \ln a}. \quad (3.65)$$

Essa função mede a velocidade com que as flutuações de matéria evoluem e desempenha papel central na comparação entre modelos de gravitação modificada e o cenário padrão Λ CDM.

Uma forma amplamente empregada de parametrizar $f(a)$ é dada por (LINDER, 2005)

$$f(a) = \Omega_m^\gamma(a), \quad (3.66)$$

onde γ é o índice de crescimento. No modelo Λ CDM, esse parâmetro assume valor praticamente constante, $\gamma = 6/11 \simeq 0.55$. Em teorias modificadas de gravitação, tal como

nos modelos $F(R)$ considerados nesta análise, o valor de γ pode apresentar dependência temporal ou desvio significativo em relação ao limite padrão (LINDER e CAHN, 2007), tornando-se um importante discriminante observacional.

Convém notar que a parametrização acima é rigorosamente válida apenas em um Universo euclidiano. Em cenários com curvatura espacial não nula, a expressão correta é (YUNGUI *et al.*)

$$f(a) = \Omega_m^\gamma(a) + \left(\gamma - \frac{4}{7}\right) \Omega_k(a), \quad (3.67)$$

onde $\Omega_k(a)$ é o parâmetro de densidade associado à curvatura espacial.

Outro observável essencial é a amplitude das flutuações de matéria na escala de 8 Mpc/ h , denotada por $\sigma_8(a)$ e definida por (RIBEIRO *et al.*, 2024)

$$\sigma_8(a) \equiv \sigma_{8,0} \left[\frac{\delta(a)}{\bar{\delta}(1)} \right], \quad (3.68)$$

em que $\sigma_{8,0}$ representa o valor presente da amplitude das perturbações e $\bar{\delta}_m(1)$ atua como fator de normalização compatível com as medidas de Planck.

Uma forma complementar de caracterizar possíveis desvios da RG na evolução das perturbações é por meio do acoplamento gravitacional efetivo adimensional

$$\mu(a) \equiv \frac{G_{\text{eff}}(a)}{G_N}. \quad (3.69)$$

Como G_{eff} modifica diretamente o termo fonte na equação de evolução de δ , torna-se possível reescrever a equação para a taxa de crescimento de estruturas a partir da relação

$$f(z) = -(1+z) \frac{d \ln \sigma_8(z)}{dz}, \quad (3.70)$$

e da definição dada na equação (3.65). Dessa forma, obtém-se a equação diferencial

$$\frac{df}{d \ln a} + f^2 + \left(2 + \frac{d \ln H}{d \ln a}\right) f = \frac{3}{2} \Omega_m(a) \mu(a), \quad (3.71)$$

a qual permite relacionar diretamente $f(a)$ às quantidades dinâmicas do modelo.

Por fim, resolvendo a equação (3.71) em termos de $\mu(a)$, chegamos à expressão

$$\mu(a) = \frac{2}{3 \Omega_m(a)} \left[f^2 + \left(2 + \frac{d \ln H}{d \ln a}\right) f + \frac{df}{d \ln a} \right], \quad (3.72)$$

que relaciona os observáveis do crescimento de estruturas —como $f(z)$ e $\sigma_8(z)$ — a possíveis modificações na interação gravitacional. Assim, a partir de dados observacionais da evolução das perturbações, torna-se possível testar de forma quantitativa a validade do

modelo $F(R)$ em estudo frente ao cenário padrão da RG.

Capítulo 4

Revisão dos Modelos Alternativos

É notável o sucesso do modelo cosmológico padrão, o Λ CDM plano, em descrever adequadamente uma vasta gama de observáveis cosmológicos, como a expansão acelerada do Universo e as anisotropias da radiação cósmica de fundo (PERLMUTTER *et al.*, 1999; PLANCK COLLABORATION *et al.*, 2020). No entanto, a natureza física da energia escura, representada nas equações de Friedmann pela constante cosmológica Λ , levanta questões conceituais profundas que motivam a exploração de modelos cosmológicos alternativos, nos quais a energia escura emerge como um efeito gravitacional ou dinâmico, consequência de uma gravidade modificada ou de novos campos fundamentais (BATISTA *et al.*, 2012; CARAMÊS *et al.*, 2014; PADMANABHAN, 2003; SILVA *et al.*, 2013).

Estes modelos alternativos são cruciais para testar a robustez da teoria da Relatividade Geral em escalas cosmológicas e para investigar a dinâmica da expansão acelerada do Universo, fornecendo previsões distintas para a evolução das perturbações e do crescimento de estruturas (BATISTA *et al.*, 2012; FABRIS *et al.*, 2012b; ISHAK, 2019; JOYCE *et al.*, 2015). Tais cenários são primariamente confrontados com observações da aglomeração de matéria e do crescimento de estruturas em grande escala, uma vez que modificações na gravidade afetam diretamente o fator de crescimento e sua possível dependência em escala (BESSA *et al.*, 2022; BRONNIKOV *et al.*, 2016, 2017; KOYAMA, 2016).

De forma geral, os modelos cosmológicos alternativos ao modelo padrão se enquadram em duas categorias principais: (i) extensões ou variações de modelos baseados na Relatividade Geral, incluindo campos escalares e fluidos efetivos (HERRERA *et al.*, 2016; OLIVEIRA *et al.*, 2025a; ZUÑIGA *et al.*, 2012), e (ii) teorias de Gravitação Modificada, que alteram explicitamente a dinâmica gravitacional em escalas cosmológicas (BATISTA *et al.*, 2001; CARAMÊS *et al.*, 2014; NOJIRI e ODINTSOV, 2011).

4.1 Modelos Cosmológicos Alternativos Baseados na Relatividade Geral

Estes modelos preservam a estrutura central da Relatividade Geral (RG), mas introduzem modificações na equação de estado da energia escura ou na geometria espacial do Universo (COPELAND *et al.*, 2006; PEEBLES e RATRA, 2003). A fase de expansão acelerada é ainda atribuída à presença de um componente de energia escura, mas com propriedades dinâmicas ou geométricas mais complexas do que a constante cosmológica Λ (CALDWELL *et al.*, 1998; PADMANABHAN, 2003).

4.1.1 Modelo ω CDM

O modelo ω CDM representa a extensão mais direta do Λ CDM (TURNER e WHITE, 1997). Nele, a energia escura é tratada como um fluido perfeito com uma equação de estado constante, $p = \omega c^2 \rho$, onde ω é o parâmetro da equação de estado (CALDWELL *et al.*, 1998). Ao contrário do Λ CDM, onde $\omega = -1$ (o caso da constante cosmológica), o ω CDM permite que ω seja um parâmetro livre, com $\omega \neq -1$ (COPELAND *et al.*, 2006).

Neste cenário, a densidade de energia escura (ρ_{DE}) evolui com o fator de escala (a) como $\rho_{\text{DE}} \propto a^{-3(1+\omega)}$. A taxa de expansão de Hubble, $H(a)$, é modificada para incluir esta evolução dinâmica, sendo dada por:

$$H(a) = H_0 \sqrt{\Omega_{m0} a^{-3} + \Omega_{\text{DE}0} a^{-3(1+\omega)}}, \quad (4.1)$$

onde H_0 é a constante de Hubble, Ω_{m0} e $\Omega_{\text{DE}0}$ são os parâmetros de densidade de matéria e energia escura no tempo presente, respectivamente. A restrição observacional $\omega < -1/3$ é necessária para que a energia escura cause a aceleração cósmica.

4.1.2 Parametrização CPL (Chevallier-Polarski-Linder)

A parametrização CPL, proposta por Chevallier, Polarski e Linder, oferece uma abordagem mais flexível ao permitir que o parâmetro da equação de estado da energia escura varie com o fator de escala a (CHEVALLIER e POLARSKI, 2001; LINDER, 2003). Esta variação é modelada linearmente como

$$\omega(a) = \omega_0 + \omega_a(1 - a). \quad (4.2)$$

Aqui, ω_0 representa o valor da equação de estado no presente ($a = 1$), e ω_a quantifica a taxa de variação. O caso Λ CDM é recuperado quando $\omega_0 = -1$ e $\omega_a = 0$. Esta parametrização é essencial para testar desvios do caso da constante cosmológica e para impor restrições na dinâmica da energia escura.

A densidade de energia escura neste modelo é dada por

$$\rho_{\text{DE}}(a) = \rho_{\text{DE}0} a^{-3(1+\omega_0+\omega_a)} e^{3\omega_a(a-1)}, \quad (4.3)$$

consequentemente, a taxa de expansão de Hubble é expressa como

$$H(a) = H_0 \sqrt{\Omega_{m0} a^{-3} + \Omega_{\text{DE}0} a^{-3(1+\omega_0+\omega_a)} e^{3\omega_a(a-1)}}. \quad (4.4)$$

A parametrização CPL é amplamente utilizada devido à sua simplicidade e capacidade de capturar a maior parte da dinâmica da energia escura em um intervalo de redshift relevante para as observações atuais.

4.1.3 Modelo Ω_k CDM (Universo Não-Plano)

O modelo Ω_k CDM relaxa a suposição de um Universo espacialmente plano (Euclidiano), que é uma das premissas do Λ CDM padrão (CLARKSON *et al.*, 2011; WEINBERG, 2008). A curvatura espacial é introduzida através do parâmetro de densidade de curvatura Ω_{k0} (PLANCK COLLABORATION *et al.*, 2020).

A inclusão da curvatura modifica a primeira equação de Friedmann, adicionando um termo que escala com o fator de escala como a^{-2} . A taxa de expansão de Hubble é então dada por

$$H(a) = H_0 \sqrt{\Omega_{m0} a^{-3} + \Omega_{k0} a^{-2} + \Omega_{\Lambda 0}}, \quad (4.5)$$

onde $\Omega_{\Lambda 0}$ é o parâmetro de densidade da constante cosmológica. Os parâmetros de densidade satisfazem o vínculo

$$\Omega_{m0} + \Omega_{k0} + \Omega_{\Lambda 0} = 1. \quad (4.6)$$

Um valor de $\Omega_{k0} > 0$ indica um Universo com geometria hiperbólica, enquanto $\Omega_{k0} < 0$ indica um Universo com geometria esférica. A determinação precisa de Ω_{k0} é um objetivo fundamental da cosmologia observacional; dados recentes sugerem uma curvatura muito próxima de zero (PLANCK COLLABORATION *et al.*, 2020).

4.2 Modelos de Gravidade Modificada: Teorias $F(R)$

As teorias de GM buscam explicar a aceleração cósmica alterando a lei da gravitação em grandes escalas, potencialmente eliminando a necessidade de um componente exótico de energia escura. A gravidade $F(R)$ é uma das extensões mais proeminentes da RG, onde o Lagrangiano de Einstein–Hilbert, $\mathcal{L} \propto R$ (com R sendo o escalar de Ricci), é substituído por uma função arbitrária de R , $\mathcal{L} \propto F(R)$ (CAPOZZIELLO e DE LAURENTIS, 2011; COLISTETE JR *et al.*, 2007; KOYAMA, 2016). Modelos $F(R)$ viáveis devem satisfazer restrições rigorosas, como a recuperação da RG em ambientes de alta curvatura (para

passar nos testes do Sistema Solar) e a garantia da estabilidade do vácuo de de Sitter, além de apresentarem uma evolução cosmológica consistente com a formação de estruturas e a expansão acelerada observada (BRONNIKOV *et al.*, 2011; FABRIS *et al.*, 2012a).

4.2.1 Modelo de Hu-Sawicki

O modelo de Hu-Sawicki (HS) (HU e SAWICKI, 2007) é um dos modelos $F(R)$ mais estudados, especificamente concebido para satisfazer as restrições de viabilidade e imitar o comportamento do Λ CDM na história de expansão. Sua forma funcional é dada por

$$F_{\text{HS}}(R) = R - m^2 \frac{c_1(R/m^2)^n}{c_2(R/m^2)^n + 1}, \quad (4.7)$$

onde $m^2 \equiv H_0^2 \Omega_{m0}$ é uma escala de curvatura de referência. Os parâmetros do modelo são c_1 , c_2 e n .

O limite da RG é recuperado quando $c_1/c_2 \rightarrow 0$, mantendo a razão c_1/c_2 fixa. Neste limite, o modelo efetivamente introduz uma constante cosmológica Λ_{eff} dada por

$$\Lambda_{\text{eff}} = \frac{m^2 c_1}{2c_2}. \quad (4.8)$$

Ao impor que esta constante cosmológica efetiva reproduza a densidade de energia escura do Λ CDM, $\Lambda = 3H_0^2(1 - \Omega_{m0})$, os parâmetros c_1 e c_2 são relacionados por

$$c_1 = 6c_2 \frac{1 - \Omega_{m0}}{\Omega_{m0}}. \quad (4.9)$$

Desta forma, o modelo HS é reduzido a apenas dois parâmetros livres: o expoente n e o parâmetro de escala c_2 . O expoente n controla o desvio da RG, sendo os casos $n = 1$ e $n = 2$ frequentemente investigados por representarem as modificações de lei de potência não-triviais mais simples, oferecendo previsões distintas para o crescimento de estruturas cósmicas (BESSA *et al.*, 2022; NUNES *et al.*, 2017).

$$F_{\text{HS}}(R) = R - 2\Lambda_{\text{eff}} \quad (4.10)$$

4.2.2 Modelo de Starobinsky

O modelo de Starobinsky (STAROBINSKY, 2007) é uma forma generalizada e viável do modelo original $R + R^2$, que foi inicialmente proposto para a inflação cósmica. Sua forma funcional é

$$F_{\text{S}}(R) = R + \lambda_s R_s \left[\left(1 + \frac{R^2}{R_s^2} \right)^{-n} - 1 \right], \quad (4.11)$$

onde R_s , λ_s e $n > 0$ são os parâmetros do modelo.

No limite de alta curvatura, $R \gg R_s$, o modelo se aproxima de uma constante cosmológica efetiva Λ_{eff} dada por

$$\Lambda_{\text{eff}} \equiv \lambda_s R_s / 2. \quad (4.12)$$

A escala de curvatura atual R_s está conectada ao parâmetro λ_s através da relação

$$R_s = \frac{6H_0^2(1 - \Omega_{m0})}{\lambda_s}. \quad (4.13)$$

O parâmetro n está relacionado à estabilidade da solução de de Sitter, e valores específicos de n (como $n = 1$ e $n = 2$) são frequentemente estudados, deixando λ_s como o único parâmetro livre adicional em relação ao Λ CDM (BESSA *et al.*, 2022; FABRIS *et al.*, 2023).

4.2.3 Modelo R^2 -Corrigido de Appleby-Battye

O modelo R^2 -corrigido de Appleby-Battye (R^2 -AB) (APPLEBY e BATTYE, 2007; APPLEBY *et al.*, 2010) foi construído para reproduzir a história de expansão do Λ CDM e, simultaneamente, satisfazer as restrições de gravidade local. A forma funcional é complexa e governada por dois parâmetros livres, ϵ_{AB} e b

$$F_{AB}(R) = \frac{R}{2} + \frac{\epsilon_{AB}}{2} \ln \left[\frac{\cosh((R/\epsilon_{AB}) - b)}{\cosh b} + \frac{R^2}{6M^2} \right], \quad (4.14)$$

onde M é uma escala de massa.

Os parâmetros ϵ_{AB} e b estão relacionados através da condição de vácuo de de Sitter

$$\epsilon_{AB} = \frac{R_{\text{vac}}}{b + \ln(2 \cosh b)}, \quad (4.15)$$

sendo $R_{\text{vac}} \equiv 12H_0^2$ o escalar de Ricci no vácuo. Para que o modelo descreva a aceleração cósmica atual, é imposta a condição $b \geq 1.6$ (APPLEBY *et al.*, 2010). Após a aplicação das restrições de vácuo, esta estrutura se destaca por introduzir apenas um parâmetro livre adicional em comparação com o modelo Λ CDM plano padrão (RUIZ *et al.*, 2020).

Capítulo 5

Métodos Estatísticos e Inferência Cosmológica

A confrontação entre modelos cosmológicos e dados observacionais exige o uso de métodos estatísticos robustos, capazes de lidar com incertezas observacionais, correlações entre observáveis cosmológicos e espaços de parâmetros de alta dimensionalidade (TEGMARK *et al.*, 1997; TROTTA, 2008). Em particular, a cosmologia moderna baseia-se fortemente em técnicas de inferência estatística para a estimação dos parâmetros dos modelos em estudo, e para a avaliação da viabilidade de diferentes cenários teóricos à luz de dados provenientes de múltiplos observáveis cosmológicos (VERDE, 2010).

Neste contexto, a inferência bayesiana fornece um arcabouço matemático natural para a análise estatística em cosmologia, permitindo a incorporação sistemática de informações a priori e a obtenção de distribuições posteriores completas para os parâmetros de interesse (JAYNES, 2003; TROTTA, 2007). No entanto, a complexidade das funções de verossimilhança e a dimensionalidade típica dos espaços de parâmetros tornam inviável a avaliação analítica direta dessas distribuições, tornando necessária a utilização de métodos numéricos eficientes (LEWIS e BRIDLE, 2002).

Este capítulo é dedicado à descrição das ferramentas estatísticas empregadas para a inferência cosmológica. Em particular, são apresentados os métodos de Cadeias de Markov Monte Carlo (MCMC), amplamente utilizados para a amostragem de distribuições posteriores e estimação de parâmetros cosmológicos (HASTINGS, 1970; METROPOLIS *et al.*, 1953; NEAL, 1993), bem como a técnica de Processos Gaussianos (GP), que permite a reconstrução não paramétrica e independente de modelo de funções cosmológicas a partir de dados observacionais discretos (AVILA *et al.*, 2025b,c; RASMUSSEN e WILLIAMS, 2006; SEIKEL *et al.*, 2012).

5.1 Cadeias de Markov Monte Carlo (MCMC)

A técnica de Cadeias de Markov Monte Carlo (Markov Chain Monte Carlo – MCMC) é amplamente empregada em análises estatísticas de modelos físicos e cosmológicos, sobretudo em problemas de inferência de parâmetros e comparação de modelos à luz de dados observacionais (PADILLA *et al.*, 2019). O objetivo fundamental desse método é gerar uma sequência de amostras no espaço de parâmetros de tal forma que a distribuição dessas amostras reproduza a distribuição de probabilidade posterior desejada, construída a partir de dados observacionais e informações a priori (GELMAN *et al.*; GILKS *et al.*).

O método MCMC combina dois conceitos centrais: (i) cadeias de Markov, que descrevem processos estocásticos nos quais o estado futuro depende apenas do estado presente, sendo independente do histórico anterior, e (ii) técnicas de amostragem Monte Carlo, baseadas em processos aleatórios para explorar distribuições de probabilidade complexas. Essa combinação torna o MCMC particularmente eficiente para investigar espaços de parâmetros de alta dimensionalidade, nos quais métodos determinísticos tradicionais se tornam computacionalmente inviáveis.

Na literatura contemporânea, o MCMC é extensivamente utilizado tanto para a estimação de parâmetros cosmológicos quanto para a comparação estatística entre diferentes modelos teóricos (GELMAN *et al.*; GILKS *et al.*). Uma de suas principais vantagens reside no fato de que o número de amostras necessárias para atingir a convergência da cadeia cresce aproximadamente de forma linear com o número de parâmetros livres do modelo, o que o torna adequado para análises multidimensionais complexas (OLIVEIRA *et al.*, 2025b).

De acordo com o teorema de Bayes, dado um conjunto de dados observacionais D e informações a priori α , a distribuição posterior dos parâmetros do modelo, representados pelo vetor ϑ , pode ser expressa como

$$P(\vartheta|D, \alpha) \propto \mathcal{L}(D|\vartheta, \alpha) p(\vartheta, \alpha), \quad (5.1)$$

onde $\mathcal{L}(D|\vartheta, \alpha)$ denota a função de verossimilhança (*likelihood* em inglês) e $p(\vartheta, \alpha)$ representa a distribuição a priori associada aos parâmetros do modelo.

Assume-se uma distribuição a priori uniforme (i.e., flat prior) para todos os parâmetros livres, de modo que toda a informação estatística relevante seja codificada na função de verossimilhança. Sob a hipótese de erros gaussianos, a verossimilhança é definida em termos da estatística chi-quadrado,

$$\mathcal{L} \propto \exp\left(-\frac{\chi^2}{2}\right), \quad (5.2)$$

em que

$$\chi^2 = \sum_{ij} \Delta E_i C_{ij}^{-1} \Delta E_j, \quad (5.3)$$

e

$$\Delta E_i = E_i(\vartheta|\alpha) - D_i. \quad (5.4)$$

Aqui, $E_i(\vartheta|\alpha)$ corresponde à predição teórica do i -ésimo observável cosmológico, D_i representa o valor observado, e C_{ij} é a matriz de covariância associada ao conjunto de dados, incorporando tanto incertezas estatísticas quanto sistemáticas.

Com o intuito de obter vínculos mais restritivos sobre os parâmetros do modelo, realiza-se uma análise de verossimilhança conjunta combinando diferentes observáveis cosmológicos. Em particular, consideram-se a taxa de crescimento das estruturas, $f(z)$, e a amplitude das flutuações da densidade de matéria na escala de 8 Mpc/ h , denotada por $\sigma_8(z)$. Nesse caso, o qui-quadrado total é dado por

$$\chi_{\text{total}}^2 = \chi_f^2 + \chi_{\sigma_8}^2. \quad (5.5)$$

Essa abordagem conjunta permite uma estimativa consistente dos parâmetros cosmológicos e fornece um teste robusto da compatibilidade entre diferentes conjuntos de dados observacionais.

Na prática, o processo de amostragem MCMC tem como objetivo explorar o espaço de parâmetros de maneira eficiente, identificando as regiões que maximizam a verossimilhança total, ou, de forma equivalente, minimizam o valor do qui-quadrado total. Dessa forma, é possível determinar os valores mais prováveis dos parâmetros cosmológicos, bem como suas respectivas incertezas estatísticas.

Por fim, a verossimilhança total associada à análise combinada pode ser expressa como

$$\mathcal{L}_{\text{total}} = \mathcal{L}_f \times \mathcal{L}_{\sigma_8}, \quad (5.6)$$

formulação que permite o tratamento estatístico unificado de diferentes observáveis cosmológicos dentro de um mesmo arcabouço bayesiano.

Além da inferência de parâmetros, a metodologia adotada possibilita a comparação quantitativa entre os modelos cosmológicos considerados por meio de critérios de informação, como o Critério de Informação de Akaike (AIC) (AKAIKE, 1974) e o Critério de Informação Bayesiano (BIC) (SCHWARZ, 1978), os quais penalizam modelos excessivamente complexos (i.e., com muitos parâmetros) e auxiliam na avaliação do equilíbrio entre qualidade de ajuste e número de parâmetros livres.

5.2 Critérios de Informação: AIC e BIC

Além da estimação dos parâmetros cosmológicos, a análise estatística de modelos requer ferramentas que permitam comparar quantitativamente diferentes cenários teóricos à luz dos dados observacionais disponíveis. Em particular, modelos com maior número de parâmetros tendem a apresentar melhor ajuste aos dados, ainda que esse ganho possa não ser estatisticamente significativo. Nesse contexto, os critérios de informação fornecem uma maneira objetiva de balancear a qualidade do ajuste com a complexidade do modelo.

No presente trabalho, empregam-se o Critério de Informação de Akaike (Akaike Information Criterion – AIC) (AKAIKE, 1974) e o Critério de Informação Bayesiano (Bayesian Information Criterion – BIC) (SCHWARZ, 1978), amplamente utilizados em análises cosmológicas para a comparação entre modelos concorrentes.

O critério AIC é definido como

$$\text{AIC} = \chi_{\min}^2 + 2k, \quad (5.7)$$

onde $\chi_{\min}^2$ é o valor mínimo da estatística qui-quadrado obtido no ajuste aos dados, e k representa o número de parâmetros livres do modelo. O termo $2k$ atua como uma penalização para modelos excessivamente complexos, favorecendo aqueles que oferecem um bom ajuste com um número reduzido de parâmetros.

Por sua vez, o critério BIC é dado por

$$\text{BIC} = \chi_{\min}^2 + k \ln N, \quad (5.8)$$

em que N denota o número total de pontos de dados utilizados na análise. Em comparação com o AIC, o BIC impõe uma penalização mais severa a modelos com maior número de parâmetros, especialmente quando o conjunto de dados é grande, sendo frequentemente interpretado como uma aproximação ao fator de evidência bayesiana em determinadas condições.

Na prática, a comparação entre dois modelos é realizada por meio das diferenças

$$\Delta\text{AIC} = \text{AIC}_{\text{modelo}} - \text{AIC}_{\text{ref}}, \quad (5.9)$$

$$\Delta\text{BIC} = \text{BIC}_{\text{modelo}} - \text{BIC}_{\text{ref}}, \quad (5.10)$$

onde o modelo de referência é, em geral, aquele com menor valor do critério considerado. Valores de ΔAIC ou ΔBIC positivos indicam preferência estatística pelo modelo de referência, enquanto valores negativos favorecem o modelo em análise.

De forma qualitativa, diferenças $\Delta\text{AIC} \gtrsim 2$ já sugerem evidência moderada contra o modelo com maior valor de AIC, enquanto $\Delta\text{AIC} \gtrsim 6$ indicam forte evidência. Para o BIC, valores de $\Delta\text{BIC} \gtrsim 2$ e $\gtrsim 6$ são usualmente interpretados como evidência positiva e

forte, respectivamente, contra o modelo penalizado.

No contexto deste trabalho, os critérios AIC e BIC são utilizados de maneira complementar à análise MCMC. Enquanto o MCMC fornece as distribuições posteriores dos parâmetros cosmológicos e permite a estimação de seus valores mais prováveis, os critérios de informação possibilitam uma avaliação quantitativa da performance relativa dos modelos cosmológicos considerados, levando em conta tanto a qualidade do ajuste aos dados quanto a complexidade de cada cenário teórico.

5.3 Processos Gaussianos

Com o objetivo de obter reconstruções independentes de modelo para funções cosmológicas, emprega-se neste trabalho o método de Processos Gaussianos (Gaussian Processes – GP), conforme desenvolvido em (SEIKEL *et al.*, 2012). Trata-se de uma abordagem totalmente bayesiana e não paramétrica, que permite reconstruir funções contínuas a partir de conjuntos discretos de dados observacionais sem a necessidade de assumir uma parametrização específica para sua evolução no tempo. (SEIKEL e CLARKSON, 2013).

Na presente análise, essa técnica é aplicada à reconstrução da dependência em redshift da taxa de crescimento das estruturas, $f(z)$, e da amplitude das flutuações da densidade de matéria, $\sigma_8(z)$, diretamente a partir de dados observacionais (AVILA *et al.*, 2022b). Tal procedimento permite uma comparação direta e livre de vieses paramétricos entre os dados e as previsões teóricas dos modelos cosmológicos considerados.

Os Processos Gaussianos generalizam a distribuição de probabilidade gaussiana usual para o espaço de funções (VANHATALO *et al.*, 2012). Em particular, o valor de uma função q avaliada em um ponto x é tratado como uma variável aleatória gaussiana, caracterizada por uma função média $\phi(x)$. Os valores da função em pontos distintos, x e $\tilde{x}$, são, em geral, correlacionados, sendo essa correlação descrita por uma função de covariância $k(x, \tilde{x})$, definida como

$$\phi(x) = \mathbb{E}[q(x)], \quad (5.11)$$

$$k(x, \tilde{x}) = \mathbb{E}[(q(x) - \phi(x))(q(\tilde{x}) - \phi(\tilde{x}))], \quad (5.12)$$

onde $\mathbb{E}$ denota o valor esperado.

Dessa forma, um Processo Gaussiano pode ser representado simbolicamente por

$$q(x) \sim \mathcal{GP}(\phi(x), k(x, \tilde{x})), \quad (5.13)$$

em que $\phi(x)$ define a função média do processo e $k(x, \tilde{x})$ codifica a estrutura de correlação entre os valores da função em diferentes pontos do domínio.

Adota-se a função de covariância do tipo exponencial quadrática (squared exponen-

tial), que garante suavidade e diferenciabilidade das funções reconstruídas,

$$k(x, \tilde{x}) = \sigma_f^2 \exp \left[-\frac{(x - \tilde{x})^2}{2\ell^2} \right], \quad (5.14)$$

onde σ_f^2 representa a amplitude típica das flutuações do processo, enquanto ℓ define o comprimento da correlação, associado à escala de suavidade da reconstrução. Esses parâmetros, conhecidos como hiperparâmetros do GP, são determinados por meio da maximização da verossimilhança marginal.

Estudos recentes indicam que a escolha específica da função de covariância não afeta de maneira significativa os resultados das reconstruções, desde que funções razoáveis sejam consideradas (HWANG *et al.*, 2023). Isso reforça a robustez do método e sua adequação para análises cosmológicas independentes de modelo.

Seguindo o procedimento descrito em (SEIKEL *et al.*, 2012), aplica-se a técnica de Processos Gaussianos aos conjuntos de dados $\{f(z)\}$ e $\{\sigma_8(z)\}$, obtendo-se reconstruções suaves e independentes de modelo para a evolução dessas grandezas com o redshift, juntamente com suas respectivas regiões de confiança. Essas reconstruções são então utilizadas para a comparação direta com as previsões teóricas dos modelos cosmológicos analisados neste trabalho.

Capítulo 6

Resultados e Discussões

Neste capítulo são apresentados e discutidos os principais resultados obtidos nesta dissertação para a taxa de crescimento das estruturas, $f(z)$, e para a amplitude de aglomeração da matéria, $\sigma_8(z)$. Essas grandezas foram reconstruídas de forma não paramétrica por meio da técnica de Processos Gaussianos (GP), aplicada aos dados observacionais atuais, e comparadas com as previsões teóricas de modelos de Gravitação Modificada (MG) e de cosmologias baseadas na RG.

A reconstrução por GP fornece uma descrição contínua e independente de modelo para a evolução dessas funções, permitindo avaliar de maneira direta a capacidade dos diferentes cenários cosmológicos em reproduzir o crescimento das estruturas ao longo da história do Universo.

6.1 Reconstrução da taxa de crescimento $f(z)$

A Figura 6.1 apresenta a reconstrução por GP da função $f(z)$, representada pela linha azul tracejada, juntamente com as previsões dos modelos de Gravitação Modificada analisados, incluindo os cenários de Starobinsky, R^2 -AB e Hu–Sawicki. Observa-se que a reconstrução não paramétrica captura de forma adequada a tendência observacional em baixos e médios redshifts, fornecendo uma descrição suave e estatisticamente consistente da evolução da taxa de crescimento.

De modo geral, a maioria dos modelos de MG permanece dentro da banda de incerteza do GP, indicando compatibilidade com os dados. Em particular, o modelo de Hu–Sawicki com $n = 1$ apresenta excelente concordância com a reconstrução, reproduzindo com precisão a evolução de $f(z)$ em todo o intervalo de redshift considerado. Este resultado indica um padrão de crescimento de estruturas condizente com as previsões do modelo padrão. Contudo, torna-se necessária a realização de um estudo estatístico rigoroso para fundamentar uma comparação mais detalhada entre os cenários.

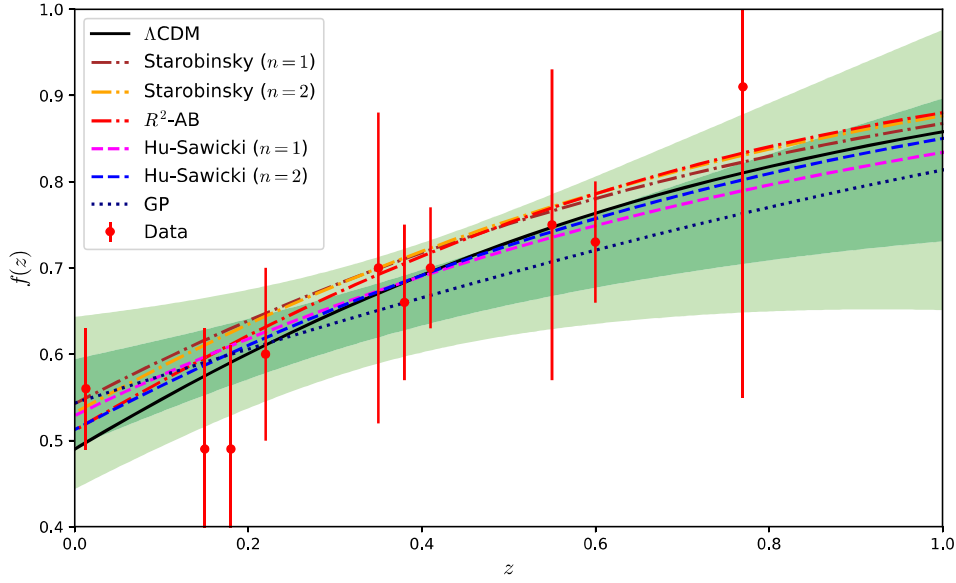


Figura 6.1: Comparação entre a reconstrução por Processos Gaussianos da taxa de crescimento $f(z)$ e modelos de Gravitação Modificada.

6.2 Reconstrução da amplitude de aglomeração $\sigma_8(z)$

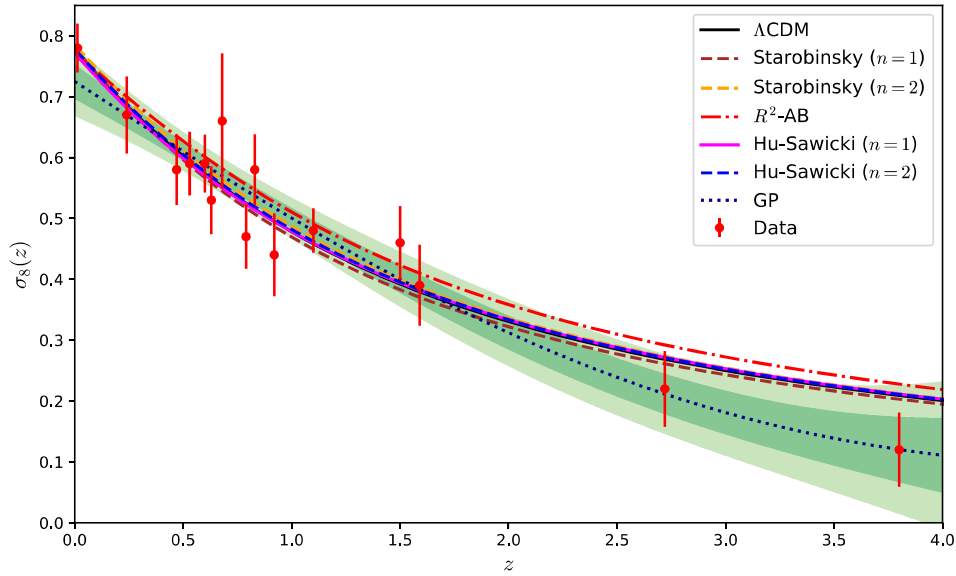


Figura 6.2: Comparação entre a reconstrução por Processos Gaussianos da amplitude de aglomeração $\sigma_8(z)$ e modelos de Gravitação Modificada.

A Figura 6.2 mostra a reconstrução por GP da função $\sigma_8(z)$ e sua comparação com os modelos de GM. O comportamento observado é consistente com aquele encontrado para $f(z)$. Os modelos de MG acompanham adequadamente a reconstrução por GP e permanecem, em sua maioria, dentro das regiões de incerteza ao longo de todo o intervalo de redshift analisado.

Por outro lado, o modelo Λ CDM apresenta discrepâncias mais pronunciadas. Em particular, observa-se que esse cenário prevê uma amplitude de flutuações menor no intervalo $0.5 \lesssim z \lesssim 1.5$ e uma superestimação da amplitude para $z \gtrsim 2$, aproximando-se da ri. Essas diferenças indicam uma discrepância tanto no momento quanto na intensidade da formação de estruturas quando comparado aos cenários alternativos, sugerindo limitações do modelo padrão na descrição detalhada da evolução da aglomeração da matéria.

6.3 Modelos baseados na Relatividade Geral

A Figura 6.3 apresenta a comparação entre a reconstrução por GP da taxa de crescimento $f(z)$ e as previsões dos modelos baseados em RG: Λ CDM, ω CDM, $\omega_0\omega_a$ CDM e Ω_k CDM. Em baixos redshifts, observa-se excelente concordância entre todos os modelos e a reconstrução por GP.

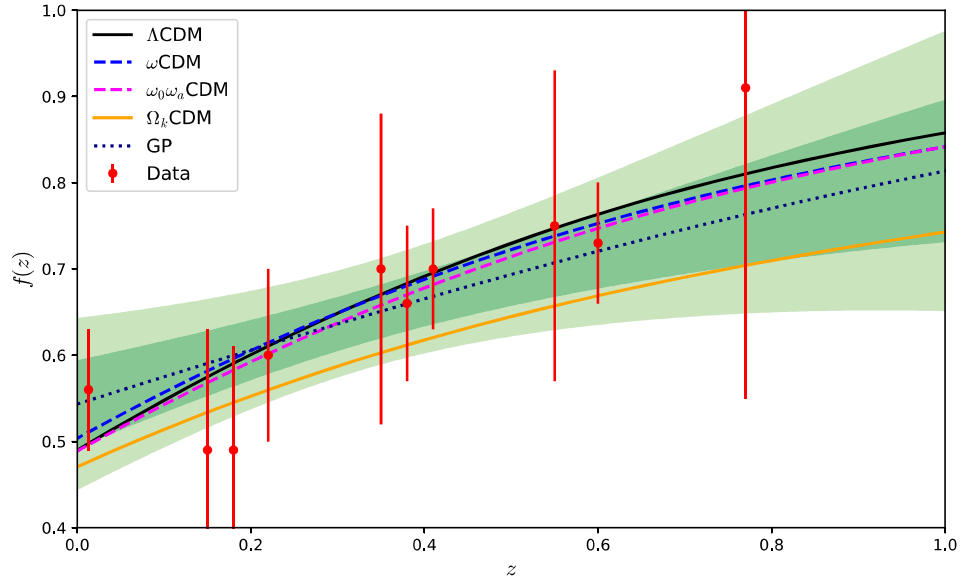


Figura 6.3: Comparação entre a reconstrução por Processos Gaussianos de $f(z)$ e modelos do tipo Λ CDM.

Entretanto, em redshifts intermediários, o modelo Ω_k CDM tende a superestimar levemente a taxa de crescimento. De forma consistente com as análises anteriores, o modelo padrão Λ CDM apresenta a maior taxa de crescimento em altos redshifts, reforçando sua tendência de superestimar a formação de estruturas nesse regime.

A reconstrução de $\sigma_8(z)$ para os modelos baseados em RG, apresentada na Figura 6.4, indica que o modelo Λ CDM está em bom acordo com o GP até $z \sim 1$, sendo ligeiramente superior para $z < 0.4$. Os modelos ω CDM e $\omega_0\omega_a$ CDM exibem apenas variações suaves, permanecendo confortavelmente dentro da banda de incerteza de 1σ do GP. Em contraste, o modelo Ω_k CDM apresenta desvios mais significativos em altos redshifts.

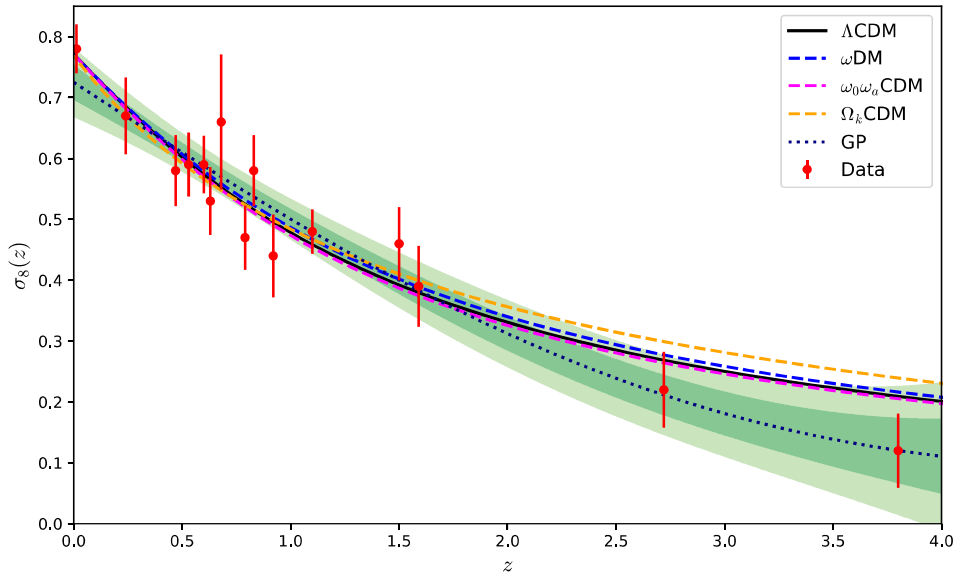


Figura 6.4: Comparação entre a reconstrução por Processos Gaussianos de $\sigma_8(z)$ e modelos do tipo Λ CDM.

Esses resultados evidenciam a sensibilidade das previsões de crescimento de estruturas a variações nos parâmetros associados à energia escura e à curvatura espacial.

6.4 Análise estatística e comparação entre modelos

De forma geral, a reconstrução por Processos Gaussianos demonstra ser uma ferramenta robusta para capturar as tendências dos dados observacionais e avaliar modelos cosmológicos concorrentes. Tanto os cenários de Gravitação Modificada quanto os baseados em RG reproduzem, em grande parte, o comportamento reconstruído pelo GP. No entanto, o modelo padrão Λ CDM apresenta desvios mais pronunciados em $f(z)$ e $\sigma_8(z)$, especialmente em altos redshifts, o que reforça a motivação para investigar extensões do modelo padrão.

As curvas teóricas apresentadas nas Figuras 6.1–6.4 correspondem às previsões obtidas a partir dos melhores ajustes determinados pela análise MCMC descrita na Seção 5.1. Os valores dos parâmetros cosmológicos estimados, bem como suas incertezas assimétricas, estão resumidos na Tabela 6.4, juntamente com os critérios de informação AIC e BIC, cuja definição e interpretação foram apresentadas na seção metodológica anterior.

A análise dos critérios de informação indica que o modelo de Starobinsky com $n = 1$ apresenta o melhor desempenho estatístico. No entanto, esse cenário é fortemente tensionado por testes locais de gravidade, como restrições do Sistema Solar, o que compromete sua viabilidade física. Ao excluir esse modelo por razões teóricas, o cenário R^2 -AB surge como a alternativa estatisticamente mais competitiva, exibindo boa concordância com a reconstrução por GP.

Modelo	H_0	Ω_{m0}	σ_8	S_8	Parâmetro do modelo	$\chi^2_{\min}$	χ^2_{ν}	AIC	BIC
Λ CDM	$69.98^{+6.91}_{-6.81}$	$0.2767^{+0.0330}_{-0.0304}$	$0.7716^{+0.0220}_{-0.0218}$	$0.741^{+0.065}_{-0.062}$	—	11.64	0.50	17.64	21.53
ω CDM	$70.02^{+6.76}_{-6.85}$	$0.3133^{+0.1058}_{-0.1059}$	$0.7708^{+0.0218}_{-0.0214}$	$0.788^{+0.149}_{-0.165}$	$-0.885^{+0.265}_{-0.341}$	11.67	0.53	19.67	24.85
$\omega_0\omega_a$ CDM	$70.02^{+6.79}_{-6.87}$	$0.2949^{+0.0944}_{-0.0967}$	$0.7712^{+0.0216}_{-0.0218}$	$0.765^{+0.139}_{-0.155}$	$-0.891^{+0.388}_{-0.510}, -0.212^{+1.243}_{-1.063}$	11.83	0.56	21.83	28.31
Ω_k CDM	$70.28^{+6.68}_{-6.98}$	$0.3569^{+0.0499}_{-0.0477}$	$0.7689^{+0.0218}_{-0.0217}$	$0.839^{+0.082}_{-0.080}$	$0.347^{+0.112}_{-0.212}$	16.55	0.75	24.55	29.74
Starobinsky ($n = 1$)	$70.34^{+6.62}_{-6.91}$	$0.3379^{+0.0994}_{-0.0997}$	$0.7802^{+0.0288}_{-0.0317}$	$0.828^{+0.149}_{-0.161}$	$0.802^{+0.474}_{-0.482}$	9.25	0.42	17.25	22.43
Starobinsky ($n = 2$)	$70.1^{+6.82}_{-6.71}$	$0.3044^{+0.1342}_{-0.1387}$	$0.7711^{+0.0206}_{-0.0206}$	$0.777^{+0.181}_{-0.219}$	$1.295^{+0.506}_{-0.512}$	11.36	0.52	19.36	24.54
Hu-Sawicki ($n = 1$)	$70.00^{+6.82}_{-6.77}$	$0.2709^{+0.0373}_{-0.0336}$	$0.7719^{+0.0221}_{-0.0221}$	$0.734^{+0.071}_{-0.067}$	$109.94^{+57.91}_{-64.31}$	11.21	0.51	19.21	24.40
Hu-Sawicki ($n = 2$)	$69.77^{+6.87}_{-6.69}$	$0.3007^{+0.0502}_{-0.0405}$	$0.7706^{+0.0223}_{-0.0215}$	$0.771^{+0.086}_{-0.074}$	$120.03^{+56.33}_{-71.44}$	11.44	0.52	19.44	24.63
R^2 -AB	$67.47^{+5.13}_{-5.14}$	$0.2051^{+0.0285}_{-0.0240}$	$0.7723^{+0.0218}_{-0.0219}$	$0.638^{+0.062}_{-0.056}$	$1.626^{+1.268}_{-0.870}$	10.84	0.49	18.84	24.02

Tabela 6.1: Resultados da análise MCMC com incertezas assimétricas (incluindo S_8). As incertezas em S_8 foram propagadas de forma assimétrica, avaliando-se a expressão nos limites superior e inferior de Ω_{m0} e σ_8 . Os critérios de informação AIC e BIC também são apresentados.

Ainda assim, as diferenças estatísticas entre os demais modelos são pequenas, não sendo suficientes para estabelecer uma preferência inequívoca apenas com base em AIC e BIC. Dessa forma, torna-se essencial complementar a análise estatística com considerações físicas adicionais, em particular relacionadas ao comportamento da constante gravitacional efetiva e ao impacto dessas modificações na formação das estruturas cósmicas, conforme será discutido na próxima subseção.

6.5 Comportamento dinâmico da gravidade e acoplamento gravitacional efetivo

Além dos diagnósticos estatísticos baseados nos critérios de informação, é igualmente relevante investigar o comportamento dinâmico da gravidade previsto por cada modelo cosmológico analisado. Em cenários de GM, a formação e a evolução das estruturas cósmicas não dependem apenas do conteúdo energético do Universo, mas também de possíveis variações efetivas na intensidade da interação gravitacional em escalas cosmológicas.

Nesse contexto, o acoplamento gravitacional efetivo, denotado por G_{eff} , descreve como a gravidade se propaga e atua no crescimento das perturbações de matéria. O seu valor atual, $G_{\text{eff},0}$, constitui uma ferramenta complementar fundamental para distinguir entre modelos baseados na RG com energia escura padrão e cenários de GM, nos quais a dinâmica gravitacional pode sofrer alterações em regimes de baixa curvatura.

A Figura 6.5 apresenta a evolução do acoplamento gravitacional efetivo normalizado, $\mu(z)$, para todos os modelos considerados. Observa-se que, para extensões baseadas na RG, como Λ CDM, ω CDM, $\omega_0\omega_a$ CDM e Ω_k CDM, o parâmetro $\mu(z)$ permanece essencialmente constante e igual à unidade ao longo de todo o intervalo de redshift. Esse

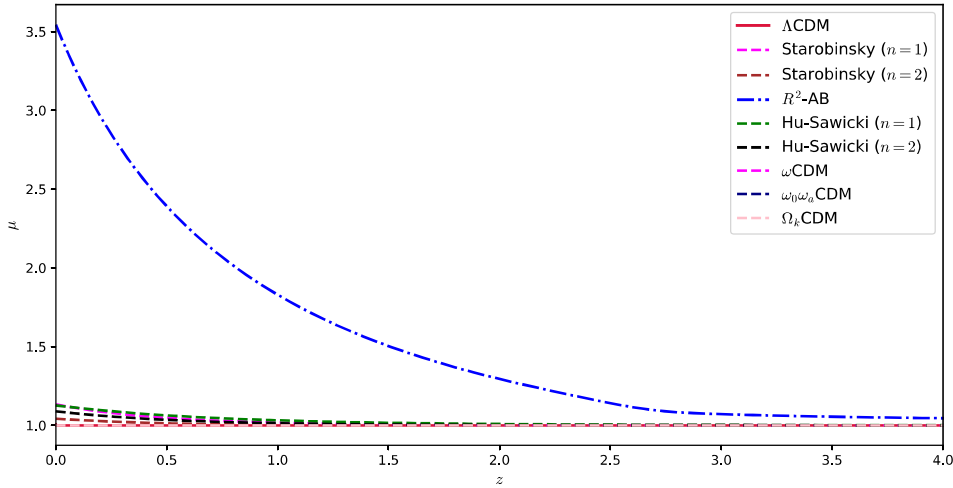


Figura 6.5: Evolução com o redshift do acoplamento gravitacional efetivo normalizado, $\mu(z) = G_{\text{eff}}(z)/G_N$, para os modelos cosmológicos analisados.

comportamento é exatamente o esperado para modelos que não introduzem modificações na dinâmica gravitacional subjacente.

Em contraste, os modelos de GM exibem pequenas, porém não desprezíveis, variações em $\mu(z)$ em baixos redshifts, particularmente em $z \approx 0$. Essas variações refletem desvios tardios na intensidade efetiva da gravidade e são características de cenários de MG capazes de explicar a aceleração cósmica sem a necessidade de uma constante cosmológica explícita (POGOSIAN e SILVESTRI, 2017). Importante ressaltar que tais desvios permanecem controlados e compatíveis com observações cosmológicas, desde que suficientemente pequenos.

Modelo	$\mu(z=0)$	$G_{\text{eff},0} [\text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}]$
ΛCDM	1.00	6.6743×10^{-11}
ωCDM	1.00	6.6743×10^{-11}
$\omega_0\omega_a\text{CDM}$	1.00	6.6743×10^{-11}
$\Omega_k\text{CDM}$	1.00	6.6743×10^{-11}
Starobinsky ($n=1$)	1.13	7.5679×10^{-11}
Starobinsky ($n=2$)	1.04	6.9551×10^{-11}
Hu-Sawicki ($n=1$)	1.13	7.5190×10^{-11}
Hu-Sawicki ($n=2$)	1.09	7.2720×10^{-11}
$R^2\text{-AB}$	3.54	2.36534×10^{-10}

Tabela 6.2: Valores atuais do acoplamento gravitacional efetivo, $G_{\text{eff},0}$, para os diferentes modelos cosmológicos analisados. Adota-se $G_N = 6.67430 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ como o valor da constante gravitacional de Newton.

A Tabela 6.5 complementa a análise ao apresentar os valores atuais de $\mu(z=0)$ e do correspondente $G_{\text{eff},0}$. Conforme indicado pelas curvas da Figura 6.5, todos os modelos baseados na RG preservam $\mu(z=0) = 1$, implicando $G_{\text{eff},0} = G_N$, o que confirma a

ausência de qualquer modificação gravitacional em tempos tardios.

Por outro lado, os cenários de GM apresentam apenas desvios moderados em $z = 0$. Para os modelos de Starobinsky ($n = 2$) e Hu–Sawicki ($n = 1, 2$), os valores de $\mu(z = 0)$ situam-se no intervalo $1.04 \lesssim \mu(z = 0) \lesssim 1.13$, correspondendo a um aumento de apenas alguns por cento na intensidade efetiva da gravidade. Esse comportamento é típico de modelos viáveis de $F(R)$, nos quais G_{eff} cresce levemente em regimes de baixa curvatura, permanecendo próximo a G_N em redshifts elevados.

A principal exceção é o modelo R^2 –AB, que apresenta $\mu(z = 0) \simeq 3.54$, resultando em um valor de $G_{\text{eff},0}$ mais de três vezes superior ao valor newtoniano. Tal amplificação gravitacional é fortemente incompatível tanto com testes locais da gravidade quanto com a história observada do crescimento das estruturas, tornando esse cenário fisicamente desfavorável, apesar de seu desempenho estatístico relativamente competitivo.

Ao combinar essa caracterização física com os resultados estatísticos discutidos anteriormente, emerge um quadro coerente: após o modelo Λ CDM, o cenário de Hu–Sawicki com $n = 1$ destaca-se como a alternativa mais equilibrada do ponto de vista físico e estatístico. Seu pequeno desvio em $G_{\text{eff},0}$, aliado à boa concordância com a reconstrução não paramétrica do crescimento das estruturas, indica que um modelo de gravidade levemente modificada pode reproduzir o agrupamento da matéria observado sem recorrer a uma amplificação gravitacional excessiva, configurando-se como uma alternativa consistente ao paradigma padrão.

Com o objetivo de aprofundar essa análise e avaliar de forma quantitativa a relação entre o crescimento das estruturas e a densidade total de matéria, realiza-se a seguir uma comparação complementar baseada no parâmetro S_8 . Esse parâmetro fornece um teste direto da compatibilidade de cada modelo com o valor de referência obtido pelo *Planck* 2018 (PLANCK COLLABORATION *et al.*, 2020), permitindo investigar se extensões do modelo padrão podem aliviar as tensões observacionais existentes.

6.6 Análise comparativa do parâmetro S_8

Os valores iniciais do parâmetro S_8 estimados para cada um dos modelos cosmológicos analisados são apresentados na Tabela 6.3. Com base nesses resultados, foi realizada uma avaliação sistemática da tensão entre as previsões de cada modelo e o valor de referência obtido pela colaboração *Planck* 2018, $S_8 = 0.832 \pm 0.013$ (PLANCK COLLABORATION *et al.*, 2020). Essa análise permite investigar de forma quantitativa a capacidade de diferentes extensões do modelo padrão em reproduzir o crescimento observado das estruturas cósmicas.

Para cada modelo, a incerteza associada ao parâmetro S_8 foi caracterizada por meio

da média aritmética entre os limites superior e inferior do intervalo de confiança estimado,

$$\sigma_{\text{model}} = \frac{\sigma_+ + \sigma_-}{2}. \quad (6.1)$$

Essa definição fornece uma estimativa efetiva da incerteza típica associada ao valor central de S_8 para cada cenário cosmológico considerado.

Em seguida, a incerteza combinada foi obtida pela soma em quadratura da incerteza do modelo com a incerteza da medida do *Planck*,

$$\sigma_{\text{comb}} = \sqrt{\sigma_{\text{model}}^2 + \sigma_{\text{Planck}}^2}, \quad (6.2)$$

onde σ_{Planck} corresponde à incerteza reportada pela colaboração *Planck* 2018. Esse procedimento permite uma comparação estatística consistente entre as previsões teóricas e o valor observacional de referência.

A tensão estatística T foi então definida como a diferença absoluta entre o valor de S_8 previsto por cada modelo e o valor do *Planck*, normalizada pela incerteza combinada,

$$T = \frac{|S_8^{\text{model}} - S_8^{\text{Planck}}|}{\sigma_{\text{comb}}}. \quad (6.3)$$

Essa quantidade fornece uma medida direta do nível de discrepância, expressa em unidades de σ , entre as previsões dos modelos cosmológicos e as restrições observacionais. Valores de $T \lesssim 1\sigma$ indicam boa concordância com os resultados do *Planck*, enquanto valores mais elevados sugerem possíveis tensões ou inadequações do modelo em descrever o crescimento das estruturas.

Os valores obtidos de S_8 e as correspondentes tensões estatísticas T estão sumarizados na Tabela 6.3. Observa-se que alguns modelos estendidos, como o Ω_k CDM e o modelo de Starobinsky com $n = 1$, apresentam excelente concordância com o valor de referência, com tensões inferiores a 0.1σ . Outros cenários, como o ω CDM, o $\omega_0\omega_a$ CDM e o Starobinsky com $n = 2$, exibem tensões moderadas, mas ainda compatíveis com os dados do *Planck* dentro de 1σ .

Por outro lado, o modelo Λ CDM e o Hu–Sawicki com $n = 1$ apresentam tensões da ordem de 1.4σ , refletindo a conhecida discrepância associada ao parâmetro S_8 no contexto do modelo padrão. O caso extremo é o modelo R^2 -AB (APPLEBY *et al.*, 2010), que exibe uma tensão superior a 3σ , indicando forte incompatibilidade com as observações do crescimento das estruturas e reforçando as conclusões obtidas a partir da análise do acoplamento gravitacional efetivo.

Em conjunto, essa análise baseada no parâmetro S_8 complementa de maneira consis-

Modelo	S_8	$T [\sigma]$
Λ CDM	0.741	1.41
ω CDM	0.788	0.28
$\omega_0\omega_a$ CDM	0.765	0.45
Ω_k CDM	0.839	0.04
Starobinsky ($n = 1$)	0.828	0.03
Starobinsky ($n = 2$)	0.777	0.28
Hu–Sawicki ($n = 1$)	0.734	1.41
Hu–Sawicki ($n = 2$)	0.771	0.76
R^2 -AB	0.638	3.20

Tabela 6.3: Valores do parâmetro S_8 para cada modelo cosmológico analisado e a correspondente tensão estatística T em relação ao valor de referência do *Planck* 2018 ($S_8 = 0.832 \pm 0.013$).

tente os resultados estatísticos e físicos apresentados anteriormente, fornecendo um critério adicional para discriminar entre os modelos cosmológicos investigados e reforçando a viabilidade apenas daqueles cenários capazes de reproduzir simultaneamente a expansão cósmica e o crescimento observado das estruturas.

Capítulo 7

Conclusões

Foi realizada uma análise abrangente do crescimento das estruturas cósmicas por meio da reconstrução não paramétrica, baseada em Processos Gaussianos (GP), das funções taxa de crescimento $f(z)$ e amplitude de aglomeração $\sigma_8(z)$ a partir de dados observacionais atuais. Essa abordagem permitiu estabelecer um arcabouço robusto e independente de modelo para a avaliação comparativa de diferentes cenários cosmológicos, contemplando tanto o modelo padrão quanto extensões e teorias de gravitação modificada.

A análise concentrou-se na comparação entre o modelo cosmológico padrão Λ CDM, suas extensões dinâmicas e geométricas, tais como ω CDM, $\omega_0\omega_a$ CDM e Ω_k CDM, e modelos de gravitação modificada do tipo $F(R)$, incluindo os modelos de Starobinsky, Hu–Sawicki e R^2 –AB. Essa diversidade de cenários possibilitou investigar, de forma sistemática, os impactos de modificações na dinâmica do Universo e na lei gravitacional sobre o crescimento das estruturas em larga escala.

Os resultados obtidos a partir da reconstrução via GP indicam que o modelo Λ CDM apresenta desvios relevantes em relação à tendência observacional, particularmente em altos redshifts. Nesse regime, o modelo padrão tende a prever valores maiores tanto em $f(z)$ como em $\sigma_8(z)$ quando comparado tanto com a reconstrução não paramétrica dos dados quanto com alguns dos modelos alternativos estudados. Essas diferenças evidenciam a importância de se explorar cenários cosmológicos alternativos capazes de fornecer uma descrição mais acurada do processo de formação de estruturas cósmicas.

A avaliação dos modelos foi conduzida por meio de uma análise combinada que levou em conta critérios estatísticos de informação (AIC e BIC), a viabilidade física frente a testes locais da RG, a consistência dinâmica associada à constante gravitacional efetiva e o nível de tensão estatística do parâmetro S_8 em relação ao valor de referência obtido pela Colaboração *Planck* (PLANCK COLLABORATION *et al.*, 2020). Essa abordagem integrada permitiu não apenas comparar o ajuste estatístico dos modelos, mas também avaliar sua plausibilidade física e compatibilidade com observações independentes.

O modelo Λ CDM permanece como o referencial cosmológico padrão, apresentando elevada coerência física e um ajuste estatístico sólido ($\chi^2_{\min} = 11.64$, AIC = 17.64, BIC

$= 21.53$). Ainda assim, ele exibe uma tensão moderada no parâmetro S_8 ($S_8 \simeq 0.741$), o que reforça o interesse em investigar extensões ou alternativas que possam aliviar essas discrepâncias observacionais.

Entre os modelos alternativos, o modelo de Starobinsky com $n = 1$ apresentou o melhor desempenho estatístico global ($\chi^2_{\min} = 9.25$, AIC = 17.25, BIC = 22.43), além de um valor de S_8 praticamente coincidente com o de referência do *Planck*, resultando em uma tensão desprezível ($T \simeq 0.03 \sigma$). No entanto, a incapacidade desse modelo em satisfazer testes locais da RG compromete sua viabilidade física, inviabilizando-o como uma alternativa realista ao modelo padrão. De forma semelhante, o modelo Ω_k CDM também reduz significativamente a tensão em S_8 ($T \simeq 0.04 \sigma$), mas é estatisticamente desfavorecido devido ao seu ajuste global insatisfatório ($\chi^2_{\min} = 16.55$, AIC = 24.55, BIC = 29.74).

Ao restringir a análise aos modelos que satisfazem simultaneamente critérios estatísticos e testes locais de gravitação, o modelo Hu–Sawicki ($n = 1$) destaca-se como o cenário mais bem testado. Esse modelo apresenta um mecanismo camaleão eficiente, garantindo compatibilidade com experimentos locais, além de um ajuste estatístico aceitável ($\chi^2_{\min} = 11.21$, AIC = 19.21, BIC = 24.40). O modelo de Starobinsky com $n = 2$ também emerge como um cenário estatisticamente competitivo, exibindo critérios de informação favoráveis ($\chi^2_{\min} = 11.36$, AIC = 19.36, BIC = 24.54) e uma redução significativa da tensão em S_8 ($T \simeq 0.28 \sigma$), o que fortalece sua viabilidade física e observacional.

Por outro lado, o modelo R^2 –AB, apesar de apresentar um bom ajuste estatístico global ($\chi^2_{\min} = 10.84$, AIC = 18.84, BIC = 24.02), é fortemente desfavorecido do ponto de vista cosmológico. Seu valor muito baixo de S_8 ($S_8 \simeq 0.638$) implica uma tensão elevada ($T \simeq 3.2 \sigma$) em relação ao *Planck* 2018, indicando uma inconsistência significativa com as observações do crescimento das estruturas e com restrições independentes sobre a aglomeração de matéria.

Em síntese, os resultados obtidos reforçam a robustez do modelo Λ CDM como o cenário cosmológico mais consistente à luz dos dados atuais. Entretanto, entre os modelos de gravitação modificada fisicamente viáveis, o modelo Hu–Sawicki ($n = 1$) se apresenta como a alternativa mais promissora, oferecendo um equilíbrio favorável entre viabilidade física e compatibilidade observacional. Em conjunto, o modelo de Starobinsky ($n = 2$) também se destaca, principalmente por sua capacidade de aliviar moderadamente a tensão em S_8 sem comprometer a dinâmica gravitacional reconstruída. Esses resultados ressaltam a importância de investigações futuras, tanto observacionais quanto teóricas, com o objetivo de refinar as restrições sobre modelos alternativos e aprofundar a compreensão das possíveis extensões do paradigma cosmológico padrão.

Os resultados das análises formam parte de um manuscrito que está sendo redigido como artigo científico para submissão à revista EPJC (VICENTE e ET AL., 2026).

Referências Bibliográficas

- ABRAMO, L. R., BERNUI, A., FERREIRA, I. S., et al., 2006, “Alignment tests for low CMB multipoles”, *Phys. Rev. D*, 74(6):063506. doi: 10.1103/PhysRevD.74.063506.
- AKAIKE, H., 1974, “A New Look at the Statistical Model Identification”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 19 (jan.), pp. 716–723. doi: 10.1109/TAC.1974.1100705.
- AKRAMI, Y., OTHERS, 2020, “Planck 2018 results. VII. Isotropy and Statistics of the CMB”, *Astron. Astrophys.*, v. 641, pp. A7. doi: 10.1051/0004-6361/201935201.
- ALAM, S., OTHERS, 2017, “The clustering of galaxies in the completed SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 470, pp. 2617–2652.
- ALBRECHT, A., STEINHARDT, P. J., 1982, “Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking”, *Physical Review Letters*, v. 48, pp. 1220–1223.
- AMENDOLA, L., TSUJIKAWA, S., 2010, *Dark energy: theory and observations*. Cambridge University Press.
- APPLEBY, S., BATTYE, R., 2007, “Do consistent $F(R)$ models mimic general relativity plus Λ ?” *Physics Letters B*, v. 654, n. 1-2, pp. 7–12. doi: 10.1016/j.physletb.2007.08.037.
- APPLEBY, S. A., BATTYE, R. A., STAROBINSKY, A. A., 2010, “Curing singularities in cosmological evolution of $F(R)$ gravity”, *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 2010 (6):005. doi: 10.1088/1475-7516/2010/06/005.
- ARTHURY, L. H. M., OTHERS, 2012, “A cosmologia moderna à luz dos elementos da epistemologia de Lakatos”, .
- AVILA, F., NOVAES, C. P., BERNUI, A., et al., 2019, “The angular scale of homogeneity in the local Universe with the SDSS blue galaxies”, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 488, n. 1 (set.), pp. 1481–1487. doi: 10.1093/mnras/stz1765.

- AVILA, F., BERNUI, A., DE CARVALHO, E., et al., 2021, “The growth rate of cosmic structures in the local Universe with the ALFALFA survey”, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 505, n. 3 (ago.), pp. 3404–3413. doi: 10.1093/mnras/stab1488.
- AVILA, F., NOVAES, C. P., BERNUI, A., et al., 2018, “The scale of homogeneity in the local Universe with the ALFALFA catalogue”, *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 12(12):041. doi: 10.1088/1475-7516/2018/12/041.
- AVILA, F., BERNUI, A., BONILLA, A., et al., 2022a, “Inferring $S_8(z)$ and $\gamma(z)$ with cosmic growth rate measurements using machine learning”, *The European Physical Journal C*, v. 82, n. 7, pp. 594.
- AVILA, F., BERNUI, A., NUNES, R. C., et al., 2022b, “The homogeneity scale and the growth rate of cosmic structures”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 509, n. 2, pp. 2994–3003.
- AVILA, F., OLIVEIRA, J., DIAS, M. L. S., et al., 2023, “The bulk flow motion and the Hubble-Lemaître law in the Local Universe with the ALFALFA survey”, *Brazilian Journal of Physics*, 53:49. doi: 10.1007/s13538-023-01259-z.
- AVILA, F., DE CARVALHO, E., BERNUI, A., et al., 2024, “Baryon acoustic scale at $z_{eff} = 0.166$ with the SDSS blue galaxies”, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 529, n. 4 (abr.), pp. 4980–4992. doi: 10.1093/mnras/stae867.
- AVILA, F., BERNUI, A., SABOGAL, M. A., et al., 2025a, “Transverse BAO scale measurement at $z_{eff} = 1.725$ with the SDSS quasars catalog”, *arXiv e-prints*, art. arXiv:2510.15650. doi: 10.48550/arXiv.2510.15650.
- AVILA, F., OLIVEIRA, F., FRANCO, C., et al., 2025b, “Probing the Cosmic Distance Duality Relation via Non-Parametric Reconstruction for High Redshifts”, *Universe*, 11(9):307. doi: 10.3390/universe11090307.
- AVILA, F., RIVERA, A. B., NUNES, R. C., et al., 2025c, “Revisiting the temperature evolution law of the CMB with Gaussian processes”, *Physics Letters B*, 867: 139606. doi: 10.1016/j.physletb.2025.139606.
- BARDEEN, J. M., 1980, “Gauge-invariant cosmological perturbations”, *Physical Review D*, v. 22, n. 8, pp. 1882–1905. doi: 10.1103/PhysRevD.22.1882.
- BATISTA, A., FABRIS, J., DE SA RIBEIRO, R., 2001, “A remark on Brans-Dicke Cosmological dust solutions with negative ω ”, *General Relativity and Gravitation*, v. 33, pp. 1237–1244.
- BATISTA, C. E., DAOUDA, M. H., FABRIS, J. C., et al., 2012, “Rastall cosmology and the Λ CDM model”, *Physical review D*, v. 85, n. 8, pp. 084008.

- BAUMANN, D., 2022, *Cosmology*. doi: 10.1017/9781108937092.
- BAZEIA, D., LOSANO, L., RODRIGUES, J., et al., 2008, “First-order formalism for dark energy and dust”, *The European Physical Journal C*, v. 55, pp. 113–117.
- BERNARDEAU, F., COLOMBI, S., GAZTAÑAGA, E., et al., 2002, “Large-scale structure of the Universe and cosmological perturbation theory”, *Physics Reports*, v. 367, n. 1, pp. 1–248. doi: 10.1016/S0370-1573(02)00135-7.
- BERNUI, A., HIPÓLITO-RICALDI, W. S., 2008, “Can a primordial magnetic field originate large-scale anomalies in WMAP data?” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 389, n. 3 (set.), pp. 1453–1460. doi: 10.1111/j.1365-2966.2008.13683.x.
- BERNUI, A., REBOUÇAS, M. J., 2009, “Searching for non-Gaussianity in the WMAP data”, *Phys. Rev. D*, 79(6):063528. doi: 10.1103/PhysRevD.79.063528.
- BERNUI, A., REBOUÇAS, M. J., 2010, “Non-Gaussianity in the foreground-reduced CMB maps”, *Phys. Rev. D*, 81(6):063533. doi: 10.1103/PhysRevD.81.063533.
- BERNUI, A., VILLELA, T., WUENSCHÉ, C. A., et al., 2006, “On the cosmic microwave background large-scale angular correlations”, *Astron. Astrophys.*, v. 454, n. 2 (ago.), pp. 409–414. doi: 10.1051/0004-6361:20054243.
- BERNUI, A., MOTA, B., REBOUÇAS, M. J., et al., 2007a, “a Note on the Large-Angle Anisotropies in the Wmap Cut-Sky Maps”, *International Journal of Modern Physics D*, v. 16, n. 2-03 (jan.), pp. 411–420. doi: 10.1142/S0218271807010195.
- BERNUI, A., MOTA, B., REBOUÇAS, M. J., et al., 2007b, “Mapping the large-scale anisotropy in the WMAP data”, *Astron. Astrophys.*, v. 464, n. 2 (mar.), pp. 479–485. doi: 10.1051/0004-6361:20065585.
- BERNUI, A., OLIVEIRA, A. F., PEREIRA, T. S., 2014, “North-South non-Gaussian asymmetry in Planck CMB maps”, *J. Cosmology Astropart. Phys.*, v. 10, n. 10 (out.), pp. 041–041. doi: 10.1088/1475-7516/2014/10/041.
- BERNUI, A., 2008, “Anomalous CMB north-south asymmetry”, *Phys. Rev. D*, 78(6):063531. doi: 10.1103/PhysRevD.78.063531.
- BERNUI, A., 2009, “Is the cold spot responsible for the CMB North-South asymmetry?” *Phys. Rev. D*, 80(12):123010. doi: 10.1103/PhysRevD.80.123010.
- BERNUI, A., NOVAES, C. P., PEREIRA, T. S., et al., 2018, “Topology and the suppression of CMB large-angle correlations”, *arXiv e-prints*, art. arXiv:1809.05924. doi: 10.48550/arXiv.1809.05924.

- BESSA, P., CAMPISTA, M., BERNUI, A., 2022, “Observational constraints on Starobinsky $f(R)$ cosmology from cosmic expansion and structure growth data”, *European Physical Journal C*, 82(6):506. doi: 10.1140/epjc/s10052-022-10457-z.
- BEUTLER, F., OTHERS, 2014, “The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 443, pp. 1065–1089.
- BLAKE, C., ET AL., 2011, “The WiggleZ Dark Energy Survey: the growth rate of cosmic structure since redshift $z=0.9$ ”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 415, n. 3, pp. 2876–2891. doi: 10.1111/j.1365-2966.2011.18903.x.
- BOUSSO, R., 2008, “The cosmological constant”, *General Relativity and Gravitation*, v. 40, pp. 607–637.
- BRONNIKOV, K. A., FABRIS, J. C., PIATTELLA, O. F., et al., 2016, “Static, spherically symmetric solutions with a scalar field in Rastall gravity”, *General Relativity and Gravitation*, v. 48, pp. 1–15.
- BRONNIKOV, K. A., FABRIS, J. C., ZHIDENKO, A., 2011, “On the stability of scalar-vacuum space-times”, *The European Physical Journal C*, v. 71, n. 11, pp. 1791.
- BRONNIKOV, K. A., FABRIS, J. C., PIATTELLA, O. F., et al., 2017, “Duality between k -essence and Rastall gravity”, *European Physical Journal C*, v. 77, pp. 1–9.
- BUCHERT, T., 1992, “Lagrangian theory of gravitational instability of Friedman–Lemaître cosmologies”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 254, pp. 729–737.
- BUSTI, V. C., 2009, *Quantificando as inomogeneidades da matéria com Supernovas e Gamma-Ray Bursts*. Tese de Mestrado, Universidade de São Paulo.
- CALDWELL, R. R., DAVE, R., STEINHARDT, P. J., 1998, “Cosmological Imprint of an Energy Component with General Equation of State”, *Physical Review Letters*, v. 80, pp. 1582–1585. doi: 10.1103/PhysRevLett.80.1582.
- CAPOZZIELLO, S., DE LAURENTIS, M., 2011, “Extended Theories of Gravity”, *Physics Reports*, v. 509, n. 4, pp. 167–321. doi: 10.1016/j.physrep.2011.09.003.
- CARAMÊS, T. R., DAOUDA, M. H., FABRIS, J. C., et al., 2014, “The Brans-Dicke-Rastall Theory”, *The European Physical Journal C*, v. 74, n. 11, pp. 3145.
- CATTANI, M., 1998, “Dedução das Equações da Teoria de Gravitação de Einstein em um Curso de Graduação”, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 20, n. 1.

- CHEVALLIER, M., POLARSKI, D., 2001, “Accelerating Universes with Scaling Dark Matter”, *International Journal of Modern Physics D*, v. 10, pp. 213–224. doi: 10.1142/S0218271801000822.
- CLARKSON, C., ELLIS, G. F. R., LARENA, J., et al., 2011, “Does the Growth of Structure Affect Our Dynamical Models of the Universe? The Averaging, Backreaction and Fitting Problems in Cosmology”, *Reports on Progress in Physics*, v. 74, pp. 112901. doi: 10.1088/0034-4885/74/11/112901.
- COLES, P., 1996, “The large-scale structure of the Universe.” *Contemporary Physics*, v. 37, n. 6 (dez.), pp. 429–440. doi: 10.1080/00107519608217534.
- COLISTETE JR, R., FABRIS, J. C., TOSSA, J., et al., 2007, “Bulk viscous cosmology”, *Physical Review D*, v. 76, n. 10, pp. 103516.
- COPELAND, E. J., SAMI, M., TSUJIKAWA, S., 2006, “Dynamics of Dark Energy”, *International Journal of Modern Physics D*, v. 15, pp. 1753–1936. doi: 10.1142/S021827180600942X.
- DE CARVALHO, E., BERNUI, A., AVILA, F., et al., 2021, “BAO angular scale at $z_{eff} = 0.11$ with the SDSS blue galaxies”, *Astron. Astrophys.*, 649:A20. doi: 10.1051/0004-6361/202039936.
- DE FELICE, A., TSUJIKAWA, S., 2010, “f(R) theories”, *Living Reviews in Relativity*, v. 13, n. 3.
- DELBEM, N. F., 2010, “Introdução matemática aos modelos cosmológicos”, .
- DIAS, B. L., AVILA, F., BERNUI, A., 2023, “Probing cosmic homogeneity in the Local Universe”, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 526, n. 3 (dez.), pp. 3219–3229. doi: 10.1093/mnras/stad2980.
- DODELSON, S., 2003, *Modern Cosmology*. San Diego, Academic Press.
- DODELSON, S., GATES, E. I., TURNER, M. S., 1996, “Cold dark matter”, *Science*, v. 274, n. 5284, pp. 69–75.
- DUPRE, D., 2000, “Expansion of the Universe”, *Ephemeris, the Undergraduate Journal of Philosophy*, v. 1, n. 1, pp. 3.
- EINSTEIN, A., 1915, “Die Feldgleichungen der Gravitation”, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, pp. 844–847.
- FABRIS, J. C., VELTEN, H., ZIMDAHL, W., 2012a, “Matter density perturbations in modified gravity models”, *Physical Review D*, v. 85, pp. 123522.

- FABRIS, J., VELTEN, H., 2013, “Cosmologia neo-newtoniana: um passo intermediário em direção à relatividade geral”, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 34, pp. 4302.
- FABRIS, J. C., PIATTELLA, O. F., RODRIGUES, D. C., et al., 2012b, “Rastall cosmology”. In: *International Journal of Modern Physics: Conference Series*, v. 18, pp. 67–76. World Scientific, b.
- FABRIS, J. C., ALVARENGA, M. H., VELTEN, H., 2023, “Using Cosmological Perturbation Theory to Distinguish between GR and Unimodular Gravity”, *Symmetry*, v. 15, n. 7, pp. 1392.
- FRANCO, C., AVILA, F., BERNUI, A., 2024, “Probing cosmic isotropy in the Local Universe”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 527, n. 3, pp. 7400–7413. doi: 10.1093/mnras/stad3616.
- FRANCO, C., AVILA, F., BERNUI, A., 2025a, “Probing Large-scale Structures with the Two-point Function and the Power Spectrum: Insights into Cosmic Clustering Evolution”, *Astrophys. J.*, 993(1):133. doi: 10.3847/1538-4357/ae0a32.
- FRANCO, C., AVILA, F., BERNUI, A., et al., 2025b, “The homogeneity scale in the Local Universe: model-independent estimate from S-PLUS DR4 blue galaxies”, *arXiv e-prints*, art. arXiv:2511.12532. doi: 10.48550/arXiv.2511.12532.
- FRANCO, C., OLIVEIRA, J., LOPES, M., et al., 2025c, “Measuring the matter fluctuations in the Local Universe with the ALFALFA catalogue”, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 537, n. 2 (fev.), pp. 897–908. doi: 10.1093/mnras/staf088.
- FRIEDMANN, A., 1924, “Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes”, *Zeitschrift für Physik*, v. 21, n. 1, pp. 326–332.
- GAMOW, G., 1948, “The Origin of Elements and the Separation of Galaxies”, *Physical Review*, v. 74, pp. 505–506.
- GELMAN, A., CARLIN, J. B., STERN, H. S., et al., *Bayesian Data Analysis*. Chapman and Hall/CRC.
- GILKS, W. R., RICHARDSON, S., SPIEGELHALTER, D., *Markov Chain Monte Carlo in Practice*. Chapman and Hall/CRC.
- GUTH, A. H., 1981, “Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems”, *Physical Review D*, v. 23, pp. 347–356.

- HASTINGS, W. K., 1970, “Monte Carlo Sampling Methods Using Markov Chains and Their Applications”, *Biometrika*, v. 57, pp. 97–109. doi: 10.1093/biomet/57.1.97.
- HENNEAUX, M., TEITELBOIM, C., 1989, “The cosmological constant and general covariance”, *Physics Letters B*, v. 222, n. 2, pp. 195–199.
- HERRERA, R., HIPÓLITO-RICALDI, W. S., VIDELA, N., 2016, “Instability in interacting dark sector: an appropriate holographic Ricci dark energy model”, *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 08(8):065. doi: 10.1088/1475-7516/2016/08/065.
- HIPÓLITO-RICALDI, W. S., VON MARTTENS, R., DE MELO-SANTOS, F., et al., 2025, “Scale-dependent and background-preserving gravity from an action: cosmological tests”, *European Physical Journal C*, 85(5):599. doi: 10.1140/epjc/s10052-025-14208-8.
- HU, W., SAWICKI, I., 2007, “Models of $f(R)$ cosmic acceleration that evade solar system tests”, *Physical Review D*, v. 76, n. 6, pp. 064004. doi: 10.1103/PhysRevD.76.064004.
- HUBBLE, E., 1929, “A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae”, *Proceedings of the national academy of sciences*, v. 15, n. 3, pp. 168–173.
- HWANG, S.-G., L’HUIILLIER, B., KEELEY, R. E., et al., 2023, “How to use GP: effects of the mean function and hyperparameter selection on Gaussian process regression”, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2023, n. 02, pp. 014. doi: 10.1088/1475-7516/2023/02/014.
- ISHAK, M., 2019, “Testing General Relativity in cosmology”, *Living Reviews in Relativity*, v. 22, pp. 1.
- JAYNES, E. T., 2003, *Probability Theory: The Logic of Science*. Cambridge, Cambridge University Press. ISBN: 9780521592710.
- JOYCE, A., JAIN, B., KHOURY, J., et al., 2015, “Beyond the Cosmological Standard Model”, *Physics Reports*, v. 568, pp. 1–98. doi: 10.1016/j.physrep.2014.12.002.
- KAISER, N., 1987, “Clustering in real space and in redshift space”, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 227 (jul.), pp. 1–21. doi: 10.1093/mnras/227.1.1.
- KESTER, C. E., BERNUI, A., HIPÓLITO-RICALDI, W. S., 2024, “Probing the statistical isotropy of the universe with Planck data of the cosmic microwave background”, *Astron. Astrophys.*, 683:A176. doi: 10.1051/0004-6361/202348160.

- KODAMA, H., SASAKI, M., 1984, “Cosmological Perturbation Theory”, *Progress of Theoretical Physics Supplement*, v. 78, pp. 1–166.
- KOYAMA, K., 2016, “Cosmological tests of modified gravity”, *Reports on Progress in Physics*, 79(4):046902. doi: 10.1088/0034-4885/79/4/046902.
- LAZARIN, M., ET AL., 2026a, *in preparation*.
- LEWIS, A., BRIDLE, S., 2002, “Cosmological Parameters from CMB and Other Data: A Monte Carlo Approach”, *Physical Review D*, v. 66, pp. 103511. doi: 10.1103/PhysRevD.66.103511.
- LIDDLE, A. R., LYTH, D. H., 2000, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*. Cambridge, Cambridge University Press. ISBN: 9780521660228.
- LINDE, A. D., 1982, “A New Inflationary Universe Scenario”, *Physics Letters B*, v. 108, pp. 389–393.
- LINDER, E. V., 2003, “Exploring the Expansion History of the Universe”, *Physical Review Letters*, v. 90, pp. 091301. doi: 10.1103/PhysRevLett.90.091301.
- LINDER, E. V., 2005, “Cosmic growth history and expansion history”, *Physical Review D*, v. 72, n. 4, pp. 043529. doi: 10.1103/PhysRevD.72.043529.
- LINDER, E. V., CAHN, R. N., 2007, “Parameterized beyond-Einstein growth”, *Astroparticle Physics*, v. 28, n. 4-5, pp. 481–488.
- LODHA, K., CALDERON, R., MATTHEWSON, W., et al., 2025, “Extended Dark Energy analysis using DESI DR2 BAO measurements”, *Physical Review D*, v. 112, n. 8, pp. 083511.
- LOPES, M., ET AL., 2026a, “Baryon Acoustic Oscillations detection in the angular power spectrum analyses of the S-PLUS Quasar catalog”, *in preparation*.
- LOPES, M., ET AL., 2026b, “Transverse BAO measurement in the S-PLUS Quasars with the 2-point angular correlation function”, *in preparation*.
- LOPES, M., BERNUI, A., FRANCO, C., et al., 2024, “Bulk Flow Motion Detection in the Local Universe with Pantheon+ Type Ia Supernovae”, *Astrophys. J.*, 967(1):47. doi: 10.3847/1538-4357/ad3735.
- LOPES, M., BERNUI, A., HIPÓLITO-RICALDI, W. S., et al., 2025, “Dipolar fluence distribution of statistically isotropic FERMI gamma-ray bursts”, *Astron. Astrophys.*, 694:A77. doi: 10.1051/0004-6361/202452181.

- MA, C.-P., BERTSCHINGER, E., 1995a, “Cosmological Perturbation Theory in the Synchronous and Conformal Newtonian Gauges”, *The Astrophysical Journal*, v. 455, pp. 7–25.
- MA, C.-P., BERTSCHINGER, E., 1995b, “Cosmological perturbation theory in the synchronous and conformal Newtonian gauges”, *Astrophysical Journal*, v. 455, pp. 7.
- MAARTENS, R., 2011, “Is the Universe homogeneous?” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, v. 369, n. 1957 (dez.), pp. 5115–5137. doi: 10.1098/rsta.2011.0289.
- MACAULAY, E., WEHUS, I. K., ERIKSEN, H. K., 2013, “Lower Growth Rate from Recent Redshift Space Distortion Measurements than Expected from Planck”, *Phys. Rev. Lett.*, 111(16):161301. doi: 10.1103/PhysRevLett.111.161301.
- MARQUES, G. A., NOVAES, C. P., BERNUI, A., et al., 2018, “Isotropy analyses of the Planck convergence map”, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 473, n. 1 (jan.), pp. 165–172. doi: 10.1093/mnras/stx2240.
- MARQUES, G. A., BERNUI, A., 2020, “Tomographic analyses of the CMB lensing and galaxy clustering to probe the linear structure growth”, *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 05(5):052. doi: 10.1088/1475-7516/2020/05/052.
- MARQUES, G. A., LIU, J., ZORRILLA MATILLA, J. M., et al., 2019, “Constraining neutrino mass with weak lensing Minkowski Functionals”, *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 06(6):019. doi: 10.1088/1475-7516/2019/06/019.
- METROPOLIS, N., ROSENBLUTH, A. W., ROSENBLUTH, M. N., et al., 1953, “Equation of State Calculations by Fast Computing Machines”, *Journal of Chemical Physics*, v. 21, pp. 1087–1092. doi: 10.1063/1.1699114.
- MOKEDDEM, R., HIPÓLITO-RICALDI, W. S., BERNUI, A., 2023, “Excess of lensing amplitude in the Planck CMB power spectrum”, *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 01(1):017. doi: 10.1088/1475-7516/2023/01/017.
- MOKEDDEM, R., LOPES, M., AVILA, F., et al., 2026, “Probing cosmic isotropy: Hubble constant and matter density large-angle variations with the Pantheon+SH0ES data”, *Physics of the Dark Universe*, 51:102185. doi: 10.1016/j.dark.2025.102185.
- MUKHANOV, V., 2005, *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge, Cambridge University Press.

- NEAL, R. M., 1993, *Probabilistic Inference Using Markov Chain Monte Carlo Methods*. Tese de Mestrado, University of Toronto.
- NESSERIS, S., GARCÍA-BELLIDO, J., 2018, “Growth of matter perturbations in modified gravity”, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2018, n. 08, pp. 036.
- NOJIRI, S., ODINTSOV, S. D., 2011, “Unified Cosmic History in Modified Gravity: from $F(R)$ Theory to Lorentz Non-Invariant Models”, *Physics Reports*, v. 505, pp. 59–144. doi: 10.1016/j.physrep.2011.04.001.
- NOVAES, C. P., BERNUI, A., FERREIRA, I. S., et al., 2015, “A neural-network based estimator to search for primordial non-Gaussianity in Planck CMB maps”, *J. Cosmology Astropart. Phys.*, v. 09, n. 9 (set.), pp. 064–064. doi: 10.1088/1475-7516/2015/09/064.
- NOVAES, C. P., BERNUI, A., MARQUES, G. A., et al., 2016, “Local analyses of Planck maps with Minkowski functionals”, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 461, n. 2 (set.), pp. 1363–1373. doi: 10.1093/mnras/stw1427.
- NUNES, R. C., BERNUI, A., 2020, “BAO signatures in the 2-point angular correlations and the Hubble tension”, *European Physical Journal C*, 80(11):1025. doi: 10.1140/epjc/s10052-020-08601-8.
- NUNES, R. C., PAN, S., SARIDAKIS, E. N., et al., 2017, “New observational constraints on $f(R)$ gravity from cosmic chronometers”, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2017, n. 01, pp. 005. doi: 10.1088/1475-7516/2017/01/005.
- NUNES, R. C., YADAV, S. K., JESUS, J. F., et al., 2020, “Cosmological parameter analyses using transversal BAO data”, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 497, n. 2 (set.), pp. 2133–2141. doi: 10.1093/mnras/staa2036.
- OLIVEIRA, F., ET AL., 2026, *in preparation*.
- OLIVEIRA, F., AVILA, F., BERNUI, A., et al., 2024, “Reconstructing the growth index γ with Gaussian processes”, *European Physical Journal C*, 84(6):636. doi: 10.1140/epjc/s10052-024-12953-w.
- OLIVEIRA, F., AVILA, F., FRANCO, C., et al., 2025a, “Is $\omega_0\omega_a$ CDM a good model for the clumpy Universe?” *Physics of the Dark Universe*, 49:101996. doi: 10.1016/j.dark.2025.101996.
- OLIVEIRA, F., RIBEIRO, B., HIPÓLITO-RICALDI, W. S., et al., 2025b, “Viability of general relativity and modified gravity cosmologies using high-redshift cosmic

- probes”, *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 12(12):007. doi: 10.1088/1475-7516/2025/12/007.
- PADILLA, L. E., TELLEZ, L. O., ESCAMILLA, L. A., et al., 2019, “Cosmological parameter inference with Bayesian statistics”, *arXiv e-prints*, art. arXiv:1903.11127. doi: 10.48550/arXiv.1903.11127.
- PADMANABHAN, T., 1993, *Structure Formation in the Universe*.
- PADMANABHAN, T., 2003, “Cosmological Constant — the Weight of the Vacuum”, *Physics Reports*, v. 380, pp. 235–320. doi: 10.1016/S0370-1573(03)00120-0.
- PEEBLES, P. J. E., 1980, *The Large-Scale Structure of the Universe*. Princeton, NJ, Princeton University Press. ISBN: 9780691082400.
- PEEBLES, P. J. E., 1984, “Dark matter and the origin of galaxies and globular star clusters”, *Astrophysical Journal*, v. 284, pp. 439–444.
- PEEBLES, P. J. E., RATRA, B., 2003, “The Cosmological Constant and Dark Energy”, *Reviews of Modern Physics*, v. 75, pp. 559–606. doi: 10.1103/RevModPhys.75.559.
- PERLMUTTER, S., OTHERS, 1999, “Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae”, *Astrophysical Journal*, v. 517, pp. 565–586. doi: 10.1086/307221.
- PLANCK COLLABORATION, AGHANIM, N., AKRAMI, Y., et al., 2020, “Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters”, *Astron. Astrophys.*, 641:A6. doi: 10.1051/0004-6361/201833910.
- POGOSIAN, L., SILVESTRI, A., 2017, “What can cosmology tell us about gravity? Constraining modified gravity with cosmological data”, *Physics Letters B*, v. 772, pp. 192–203. doi: 10.1016/j.physletb.2017.06.048.
- PUGNO, A., 2017, *Gauge transformations and gauge-invariant cosmological perturbations*. Phd thesis, Università degli Studi di Padova.
- RASMUSSEN, C. E., WILLIAMS, C. K. I., 2006, *Gaussian Processes for Machine Learning*. Cambridge, MA, MIT Press. ISBN: 9780262182539.
- RIBEIRO, B., BERNUI, A., CAMPISTA, M., 2024, “Cosmological constraints on the R^2 -corrected Appleby–Battye model”, *European Physical Journal C*, v. 84, n. 2, pp. 114. doi: 10.1140/epjc/s10052-024-12437-x.

- RIBEIRO, U., AVILA, F., BOM, C. R., et al., 2025, “A cosmology weakly dependent measurement of 2D Baryon Acoustic Oscillations scale from the Southern Photometric Local Universe Survey”, *arXiv e-prints*, art. arXiv:2506.08288. doi: 10.48550/arXiv.2506.08288.
- RIESS, A. G., FILIPPENKO, A. V., CHALLIS, P., et al., 1998, “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant”, *The astronomical journal*, v. 116, n. 3, pp. 1009.
- RUIZ, J. A. A., FABRIS, J. C., VELASQUEZ-TORIBIO, A. M., et al., 2020, “Constraints from observational data for a running cosmological constant and warm dark matter with curvature”, *Gravitation and Cosmology*, v. 26, n. 4, pp. 316–325.
- SABOGAL, M. A., NUNES, R. C., AVILA, F., et al., 2025, “Updated Cosmological Constraints from 2D BAO Measurements: A New Compilation and Comparison with DESI DR2”, *arXiv e-prints*, art. arXiv:2510.16141. doi: 10.48550/arXiv.2510.16141.
- SALES, L. L., CARVALHO, F. C., BENTO, E. P., et al., 2022, “Non-Gaussian effects of the Saha’s ionization in the early universe”, *European Physical Journal C*, 82 (1):54. doi: 10.1140/epjc/s10052-022-10003-x.
- SALES, L. L., CARVALHO, F. C., SOUZA, H. T. C. M., 2023, “Constraint on the chemical potentials of hydrogen and proton in recombination”, *European Physical Journal C*, 83(6):466. doi: 10.1140/epjc/s10052-023-11671-z.
- SCHWARZ, G., 1978, “**Estimating the Dimension of a Model**”, *The Annals of Statistics*, v. 6, n. 2, pp. 461 – 464. doi: 10.1214/aos/1176344136.
- SEIKEL, M., CLARKSON, C., 2013, “Optimising Gaussian processes for reconstructing dark energy dynamics from supernovae”, *arXiv preprint arXiv:1311.6678*.
- SEIKEL, M., CLARKSON, C., SMITH, M., 2012, “Reconstruction of dark energy and expansion dynamics using Gaussian processes”, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2012, n. 06, pp. 036.
- SILVA, G. F., PIATTELLA, O. F., FABRIS, J. C., et al., 2013, “Bouncing solutions in Rastall’s theory with a barotropic fluid”, *Gravitation and Cosmology*, v. 19, pp. 156–162.
- STAROBINSKY, A. A., 2007, “Disappearing cosmological constant in $f(R)$ gravity”, *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, v. 86, n. 3, pp. 157–163. doi: 10.1134/S0021364007150027.

- SUPERNOVA COSMOLOGY PROJECT COLLABORATION, S. P. E. A., 1999, “Measurements of Ω and Λ from 42 high redshift supernovae”, *Astrophys. J.*, v. 517, n. 2, pp. 565.
- TEGMARK, M., TAYLOR, A. N., HEAVENS, A. F., 1997, “Karhunen–Loève Eigenvalue Problems in Cosmology: How Should We Tackle Large Data Sets?” *Astrophysical Journal*, v. 480, pp. 22–35. doi: 10.1086/303939.
- TORIBIO, A. M. V., 2007, *Análise de Modelos Cosmológicos de Unificação da Matéria e Energia Escuras no Universo*. Tese de Mestrado, tese de Doutorado, 33, UFRJ.
- TROTТА, R., 2007, “Applications of Bayesian Model Selection to Cosmological Parameters”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 378, pp. 72–82. doi: 10.1111/j.1365-2966.2007.11752.x.
- TROTТА, R., 2008, “Bayes in the Sky: Bayesian Inference and Model Selection in Cosmology”, *Contemporary Physics*, v. 49, pp. 71–104. doi: 10.1080/00107510802066753.
- TSUJIKAWA, S., 2008, “Observational signatures of $f(R)$ dark energy models that satisfy cosmological and local gravity constraints”, *Physical Review D*, v. 77, n. 2, pp. 023507. doi: 10.1103/PhysRevD.77.023507.
- TSUJIKAWA, S., 2007, “Matter density perturbations and effective gravitational constant in modified gravity models of dark energy”, *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, v. 76, n. 2, pp. 023514.
- TURNER, M. S., WHITE, M., 1997, “CDM Models with a Smooth Component”, *Physical Review D*, v. 56, pp. 4439–4449. doi: 10.1103/PhysRevD.56.4439.
- VANHATALO, J., RIIHIMÄKI, J., HARTIKAINEN, J., et al., 2012, “Bayesian Modeling with Gaussian Processes using the GPstuff Toolbox”, *arXiv preprint arXiv:1206.5754*.
- VERDE, L., 2010, “Statistical Methods in Cosmology”, *Lectures at the Physics of the Early Universe*.
- VICENTE, M., ET AL., 2026, *in preparation*.
- WEINBERG, S., 2008, *Cosmology*. Oxford, Oxford University Press.
- WEINBERG, S., 1989, “The cosmological constant problem”, *Reviews of modern physics*, v. 61, n. 1, pp. 1.

YUNGUI, G., MUSTAPHA, I., ANZHONG, W., “**Growth factor parametrization in curved space**”, *PRD*, 80(2):023002. doi: 10.1103/PhysRevD.80.023002.

ZUÑIGA, C., HIPÓLITO-RICALDI, W. S., ZIMDAHL, W., 2012, “Perturbations for transient acceleration”, *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 04(4):032. doi: 10.1088/1475-7516/2012/04/032.