

CAMADAS EQUIVALENTES RÁPIDAS PARA O PROCESSAMENTO DE
DADOS DE CAMPOS POTENCIAIS

Larissa da Silva Piauilino

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Geofísica do Observatório Nacional, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Geofísica.

Orientador(a): Dra. Valéria Cristina
Ferreira Barbosa

Co-orientador(a): Dr. Vanderlei Coelho de
Oliveira Junior

Rio de Janeiro
Dezembro de 2023

Agradecimentos

Gostaria de expressar minha gratidão aos meus orientadores, Valéria e Vanderlei, pelo apoio e dedicação ao longo desses anos. Eles não apenas me guiaram com maestria, mas também se tornaram grandes amigos.

Também quero agradecer aos amigos da geofísica e da astronomia do Observatório Nacional: Amanda, André, Bijani, Bitá, Carol, Diego, Flora, Luiz, Mário, Matias, Miquelutti, Pillar, Plícida e Shay.

Sou imensamente grato aos meus pais e madrinha por todo o apoio em todos os momentos da minha vida e por sempre me incentivarem a estudar. Meu agradecimento especial ao meu marido, também meu ex-colega de pós-graduação, pelo apoio constante e companheirismo.

Quero estender meu reconhecimento aos membros da banca examinadora - Douglas Santos, Cosme, Leonardo Uieda e Saulo Pomponet - pelas valiosas contribuições. Agradeço também à CAPES pelo financiamento do meu trabalho, sem o qual a realização deste projeto não seria possível.

Por fim, expresso minha gratidão aos funcionários do Observatório Nacional, desde a secretaria até a equipe de segurança e limpeza, pelo suporte contínuo ao longo deste percurso.

“CAMADAS EQUIVALENTES RÁPIDAS PARA O PROCESSAMENTO DE
DADOS DE CAMPOS POTENCIAIS”

Larissa da Silva Piauilino

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA DO OBSERVATÓRIO NACIONAL COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTORA EM GEOFÍSICA.

Aprovada por:



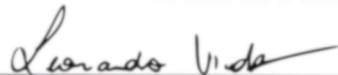
Dra. Valeria Cristina Ferreira Barbosa - (Orientadora)
- (ON)



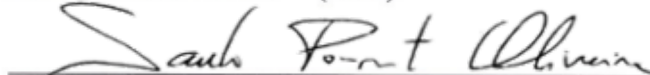
Dr. Douglas Santos Rodrigues Ferreira- (IFRJ)



Dr. Cosme Ferreira da Ponte Neto- (ON))



Dr. Leonardo Uieda - (USP)



Dr. Saulo Pomponet Oliveira- (UFPR)

RIO DE JANEIRO – BRASIL

15 DE DEZEMBRO DE 2023

Resumo da Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Observatório Nacional como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Doutor em Geofísica.

CAMADAS EQUIVALENTES RÁPIDAS PARA O PROCESSAMENTO DE DADOS DE CAMPOS POTENCIAIS

Larissa da Silva Piauilino

Dezembro/2023

Neste estudo são propostas duas abordagens rápidas de camada equivalente para processar grandes conjuntos de dados de gradiente de gravidade e dados magnéticos. Com base no princípio da camada equivalente, pressupõe-se que os dados de campos potenciais produzidos por fontes geológicas arbitrárias podem ser aproximados por uma combinação linear de funções harmônicas definidas por uma distribuição de propriedade física fictícia em uma camada plana. A eficiência computacional desses métodos é alcançada pela estrutura em Toeplitz simétrica, de blocos também simétricos, das matrizes de sensibilidade quando se considera uma malha regular de dados. Embora o processamento de dados de gradiente de gravidade, usando a técnica da camada equivalente clássica, permita uma maneira conveniente de manter a consistência física entre as componentes do gradiente de gravidade, ela requer uma inversão linear computacionalmente custosa. Consequentemente, isso restringe a aplicabilidade da técnica clássica para processar as componentes do gradiente de gravidade usando muitos dados. Para superar esse problema, foi desenvolvido um método rápido de camada equivalente para processar esses tipos de dados. Esse método envolve a estimativa de uma única camada equivalente que reproduz todas as componentes do gradiente de gravidade, permitindo também a utilização de dados de diferentes sistemas de aquisição. No caso do processamento de dados magnéticos, a primeira etapa consiste em empregar uma abordagem iterativa rápida para reproduzir dados de anomalia de campo total, mesmo quando eles estão distribuídos de maneira não uniforme sobre uma superfície irregular. Na segunda etapa, a distribuição obtida pela abordagem iterativa é transformada em uma distribuição de momento magnético, permitindo a realização de transformações com mudança de fase. Em comparação com a abordagem clássica, esses métodos são capazes de reduzir significativamente o número total de operações matemáticas necessárias para

estimar a distribuição de propriedade física na camada equivalente. Aplicações em conjuntos de dados sintéticos e reais demonstram que esses métodos são uma alternativa computacionalmente eficiente, mesmo quando os dados não estão dispostos de forma regular em um plano horizontal.

Abstract of the Thesis presented to the National Observatory's Graduate Program in Geophysics as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor in Geophysics.

FAST EQUIVALENT-LAYER TECHNIQUES FOR POTENTIAL-FIELD DATA PROCESSING

Larissa da Silva Piauilino

December/2023

We propose two fast equivalent-layer techniques for processing large gravity gradient and magnetic datasets. Based on the equivalent-layer principle, we assume that potential-field data produced by arbitrary geological sources can be approximated by a linear combination of harmonic functions defined by a fictitious physical-property distribution on a planar layer. The computational efficiency of our methods are attained by the symmetric structure in block-Toeplitz Toeplitz-block (BTTB) of the sensitivity matrices when we use a regular grid of data. Although processing gravity-gradient data using the classical equivalent-layer technique allows a convenient way to maintain the physical consistency among the gravity-gradient components, it requires a computationally costly linear inversion. Hence, this restricts the applicability of the classical technique for processing the gravity gradient components from large datasets. To overcome this problem, we have developed a fast equivalent-layer method for processing gravity-gradient data. Our method consists in estimating a single equivalent layer that reproduces all the gravity gradient components. Additionally, this methodology allows the use of data from different acquisition systems. For processing magnetic data, the first step consists in using a rapid iterative approach to reproduce total-field anomaly data that may be irregularly disposed on an uneven surface. In the second step, we transform the estimated distribution obtained by the iterative approach into a magnetic moment distribution to perform transformations with phase change. Our methods are able to reduce by orders of magnitude the total number of floating-point operations to estimate the physical property distribution on the equivalent layer if compared with the classical approach. Applications to synthetic and real data show that our methods are computationally efficient alternative to deal with large data sets.

Sumário

1	Introdução	1
2	Fundamentação Teórica	5
2.1	Terceira identidade de Green	5
2.1.1	Problema de Dirichlet	8
2.1.2	Problema de Neumann	9
2.2	Dados de Campos Potenciais	10
2.2.1	Dados de gradiente de gravidade	11
2.2.2	Dados magnéticos	13
2.3	Problemas inversos da técnica da camada equivalente	15
2.3.1	Técnica da camada equivalente clássica	15
2.3.2	Método do gradiente conjugado para problemas de mínimos quadrados	15
2.3.3	Técnica da camada equivalente rápida	16
2.4	Estrutura das matrizes de sensibilidade para malhas regulares	17
2.4.1	Estrutura da matriz de derivada vertical de primeira ordem	17
2.4.2	Estrutura das matrizes de derivada de segunda ordem	18
2.5	Convolução discreta 2D rápida	23
3	Metodologia	26
3.1	Camada equivalente convolucional para o processamento de dados de gradiente de gravidade	26
3.1.1	Camada equivalente convolucional em coordenadas rotacionadas	26
3.1.2	Critério de seleção da profundidade da camada	28
3.1.3	Interpolação dos dados	28
3.1.4	Desempenho computacional	30
3.2	Camada equivalente rápida para o processamento de dados magnéticos	32
3.2.1	Estimativa da distribuição de momento magnético	32
3.2.2	Análise de estabilidade	34
3.2.3	Procedimentos práticos	35
3.2.4	Desempenho computacional	36

4	Aplicação a dados sintéticos	38
4.1	Dados sintéticos de gradiente de gravidade	38
4.1.1	Teste sintético do sistema AGG-Falcon	39
4.1.2	Teste sintético do sistema FTG	40
4.2	Dados sintéticos magnéticos	43
4.2.1	Teste sintético	43
4.2.2	Teste de estabilidade	45
5	Aplicação a dados reais	50
5.1	Dados reais de gradiente de gravidade	50
5.1.1	Dados AGG-Falcon sobre o local de teste em Kauring, Austrália	50
5.1.2	Dados FTG sobre o domo de sal Vinton, EUA	51
5.2	Dados reais magnéticos do complexo de Anitápolis, Brasil	53
6	Considerações finais	60
	Referências Bibliográficas	62

Capítulo 1

Introdução

O progresso dos aerolevantamentos de gradiometria e magnetometria possibilitaram a utilização de dados de gradiente de gravidade e dados magnéticos para aprimorar a interpretação de fontes gravimétricas e magnéticas em ambientes de mineração e exploração de hidrocarbonetos. Exemplos de trabalhos que utilizam dados de gradiente de gravidade, incluem as pesquisas conduzidas por UIEDA e BARBOSA (2012), OLIVEIRA JR e BARBOSA (2013), CARLOS *et al.* (2014, 2016), MARTINEZ e LI (2016), ZHDANOV e LIN (2017) e MAAG-CAPRIOTTI e LI (2021). Já no caso de dados magnéticos, destacam-se os trabalhos de OLIVEIRA JR *et al.* (2015), HIDALGO-GATO e BARBOSA (2019), HIDALGO-GATO *et al.* (2021), REIS *et al.* (2020), MELO e BARBOSA (2020, 2021), VITAL *et al.* (2021) e GONZALEZ *et al.* (2022). As técnicas de camada equivalente e Transformada Rápida de Fourier (FFT - *Fast Fourier Transform*) são consideradas abordagens viáveis para o processamento desses dados. Em comparação com o processamento de dados de campos potenciais utilizando a FFT (GUNN, 1975), a técnica de camada equivalente apresenta diversas vantagens. Por exemplo, não é necessário extrapolar os dados para além do intervalo de observações; os dados não precisam ser igualmente espaçados, e tampouco é mandatório que sejam medidos em um plano com altitude constante. No entanto, uma desvantagem significativa da aplicação da técnica clássica da camada equivalente é o custo computacional elevado.

A camada equivalente é um método amplamente conhecido baseado na teoria do potencial. De acordo com essa teoria, é possível reproduzir um conjunto de dados de campo potencial gerado por uma fonte tridimensional por meio de uma camada bidimensional infinita. Na prática, DAMPNEY (1969) mostrou que essa camada pode ser representada por uma distribuição finita e discreta de propriedade física (por exemplo, massas pontuais e dipolos magnéticos com volume unitário). A abordagem clássica consiste em estimar a distribuição de propriedade física resolvendo um sistema linear sujeito a ajustar os dados observados. No entanto, ao lidar com grandes volumes de dados, a utilização dessa técnica torna-se computacionalmente

impraticável. Essa limitação surge devido à necessidade de resolver sistemas lineares e realizar operações matriciais. Consequentemente, alguns pesquisadores têm explorado alternativas para aprimorar a eficiência computacional do método da camada equivalente, por exemplo, LEÃO e SILVA (1989), XIA e SPROWL (1991), CORDELL (1992), MENDONÇA e SILVA (1994), DRANSFIELD e LEE (2004), GUSPÍ e NOVARA (2009), LI e OLDENBURG (2010), BARNES e LUMLEY (2011), DAVIS e LI (2011), OLIVEIRA JR. *et al.* (2013), MARTINEZ e LI (2016), SIQUEIRA *et al.* (2017), JIRIGALATU e EBBING (2019), MENDONÇA (2020), TAKAHASHI *et al.* (2020), SOLER e UIEDA (2021), TAKAHASHI *et al.* (2022).

Dentre os autores citados previamente, que empregaram a técnica da camada equivalente, somente alguns deles abordaram o processamento de dados de gradiente de gravidade. DRANSFIELD e LEE (2004) foram os primeiros a usar a técnica de camada equivalente para processar esses tipos de dados. BARNES e LUMLEY (2011) compararam a FFT e a técnica da camada equivalente para processar dados aerotransportados do tensor de gradiente de gravidade. MARTINEZ e LI (2016) usaram a técnica de camada equivalente para remoção de ruído de dados de gradiente de gravidade e estimar os erros associados aos dados sem ruído. JIRIGALATU e EBBING (2019) combinaram o método Gauss-FFT com a iteração de Landweber para propor uma técnica de camada equivalente rápida para processar duas componentes dos dados de gradiente de gravidade simultaneamente. Contudo, até o momento, não há conhecimento do uso da técnica da camada equivalente para o processamento simultâneo de mais de duas componentes. Uma revisão recente sobre os aspectos computacionais da camada equivalente pode ser encontrada em OLIVEIRA JR *et al.* (2023).

Para reduzir o custo computacional da técnica da camada equivalente, LEÃO e SILVA (1989) utilizaram duas janelas móveis, uma para os dados observados e outra para as fontes equivalentes. Essas janelas varrem todo o conjunto de dados, mas os dados preditos são computados apenas no centro da janela de dados. XIA e SPROWL (1991) desenvolveram um esquema iterativo para estimar a distribuição de propriedade física dentro da camada no domínio do espaço. Por sua vez, XIA *et al.* (1993) implementaram um esquema iterativo semelhante, entretanto, no domínio do número de onda. O método introduzido por CORDELL (1992) e subsequentemente generalizado por GUSPÍ e NOVARA (2009) não estima a distribuição de propriedade física dentro da camada equivalente por meio da resolução de um sistema linear. Em vez disso, a propriedade física das fontes equivalentes, localizadas abaixo de cada ponto do dado de campo potencial, são atualizadas iterativamente através de um procedimento que reduz o resíduo máximo entre os dados observados e os dados preditos. O número total de operações matemáticas exigidas por esses métodos iterativos para estimar a distribuição de propriedade física dentro da camada

equivalente depende do número total de iterações, que geralmente é muito menor do que o necessário para resolver um sistema linear de grande escala. Normalmente, a etapa computacional mais exigente em cada iteração desses métodos é o problema direto de calcular os dados de campo potencial gerados pela camada equivalente. LI e OLDENBURG (2010) usaram uma *wavelet* para comprimir os sistemas lineares associados à resolução da técnica de camada equivalente. OLIVEIRA JR. *et al.* (2013) utilizaram janelas de fontes equivalentes com distribuição de propriedade física aproximadas por uma função polinomial, reduzindo o número de equações a serem resolvidas nos sistemas lineares. SIQUEIRA *et al.* (2017) propuseram um esquema iterativo para processar dados gravimétricos. Essa abordagem envolve a atualização iterativa da distribuição de propriedade física na camada até que um ajuste aceitável dos dados seja alcançado, sem a necessidade de resolver sistemas lineares. SOLER e UIEDA (2021) combinaram duas estratégias para interpolar grande conjunto de dados utilizando a camada equivalente. A primeira estratégia envolve a redução da quantidade de fontes equivalentes realizando uma média da localização das fontes por blocos. A segunda estratégia visa reduzir o tamanho do sistema linear a ser resolvido, dividindo o problema inverso em conjuntos menores de fontes equivalentes definidas por janelas sobrepostas, utilizando a técnica *gradient boosting*.

Recentemente, TAKAHASHI *et al.* (2020, 2021) desenvolveram técnicas de camadas equivalentes eficientes e rápidas para processar dados de gravidade e magnéticos, modificando o cálculo do problema direto de métodos iterativos para estimar a distribuição de propriedade física por meio de uma convolução discreta 2D. Esses métodos tiram proveito da estrutura em Toeplitz simétrica de blocos também simétricos (BTTB - *Block-Toeplitz Toeplitz-block*) das matrizes de sensibilidade, o que possibilita o cálculo dessas matrizes com base apenas na sua primeira coluna. Ambos os trabalhos apresentados nesta tese exploram as invariâncias translacionais das matrizes, o que possibilita o cálculo eficiente do produto matriz-vetor por meio de uma convolução 2D usando a FFT.

Na primeira parte deste trabalho, apresenta-se uma técnica eficiente de camada equivalente para processar simultaneamente dados de gradiente de gravidade. Aproveita-se a estrutura BTTB das matrizes de sensibilidade e combina-se o algoritmo de mínimos quadrados de gradiente conjugado (CGLS - *Conjugate Gradient Least Square*) com a 2D FFT, conforme também mencionado em TAKAHASHI *et al.* (2022). Ao estimar uma única camada equivalente, esse método é capaz de lidar com todas as componentes de gradiente de gravidade presentes em um conjunto de dados, mesmo quando as linhas de voo não estão alinhadas com as direções norte-sul e leste-oeste, e quando os dados estão distribuídos em superfícies de observação não uniformes. Essa metodologia foi aplicada tanto em dados sintéticos quanto em da-

dos reais adquiridos na Austrália e nos EUA, com o objetivo de demonstrar que o método proposto representa uma alternativa computacionalmente eficaz para o processamento de grandes conjuntos de dados de gradiente de gravidade provenientes de diferentes sistemas de aquisição.

Na segunda parte, propõe-se uma técnica de camada equivalente rápida para o processamento de dados magnéticos que admite dados irregularmente espaçados sobre uma superfície irregular. Considerando que os dados magnéticos observados são uma combinação linear de funções harmônicas, foi empregado o método iterativo rápido desenvolvido por SIQUEIRA *et al.* (2017). Partindo do pressuposto de que esse método consiste na resolução matemática da integral de continuação para cima, uma camada equivalente é estimada para reproduzir os dados de anomalia do campo total. Em seguida, o algoritmo 2D FFT é aplicado à solução estimada por meio da camada equivalente iterativa rápida de SIQUEIRA *et al.* (2017). Quando se tratam de fontes equivalentes espaçadas de forma irregular, a solução estimada é reparametrizada em uma malha regular. Posteriormente, é realizada a 2D FFT para transformar a distribuição regularmente espaçada em uma distribuição de momento magnético que também seja capaz de reproduzir a anomalia do campo total observada. Com o objetivo de avaliar a eficiência computacional desse método, foram realizados testes utilizando conjuntos de dados sintéticos e dados reais coletados em Anitápolis, situado no sul do Brasil.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

2.1 Terceira identidade de Green

Considere uma função escalar $U(x, y, z)$ que satisfaça três condições importantes: (i) é contínua em todos os pontos de uma região tridimensional v , incluindo sua fronteira definida por uma superfície fechada S (Figura 2.1); (ii) suas derivadas de segunda ordem são contínuas em todo o interior de v ; e (iii) ela é regular no infinito. Nesse contexto, a terceira identidade de Green, conforme definida por KELLOGG (1929), estabelece que:

$$U(x_i, y_i, z_i) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_v \frac{1}{r} \nabla^2 U(x, y, z) dv - \frac{1}{4\pi} \iint_S U(x, y, z) \partial_n \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \partial_n U(x, y, z) dS \quad (2.1)$$

em que as variáveis x_i, y_i e z_i representam as coordenadas cartesianas de um ponto arbitrário dentro da região v . É importante observar que a integral de volume é considerada como convergente se a região v for infinita. Na equação 2.1, as diferenciações e integrações são realizadas em relação às variáveis x, y e z e a função $\frac{1}{r}$ é dada por:

$$\frac{1}{r} = [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.2)$$

em que r é a distância entre o ponto (x_i, y_i, z_i) ao ponto de integração (x, y, z) . O Laplaciano da função $U(x, y, z)$ é definido da seguinte forma

$$\nabla^2 U(x, y, z) = \partial_{xx}^2 U(x, y, z) + \partial_{yy}^2 U(x, y, z) + \partial_{zz}^2 U(x, y, z), \quad (2.3)$$

em que $\partial_{\alpha\beta}^2 U(x, y, z) \equiv \frac{\partial^2 U(x, y, z)}{\partial\alpha\partial\beta}$, $\alpha, \beta = x, y, z$, e as derivadas normais na equação 2.1 são

$$\partial_n \frac{1}{r} \equiv \nabla \frac{1}{r} \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (2.4)$$

e

$$\partial_n U(x, y, z) \equiv \nabla U(x, y, z)^\top \hat{\mathbf{n}}. \quad (2.5)$$

Nas equações 2.4 e 2.5, o símbolo $^\top$ representa transposição, $\hat{\mathbf{n}}$ representa a normal que aponta para fora da superfície S no ponto (x, y, z) , e $\nabla \frac{1}{r}$ e $\nabla U(x, y, z)$ representam, respectivamente, o gradiente das funções $\frac{1}{r}$ (equação 2.2) e $U(x, y, z)$, ambas com relação às variáveis x, y e z .

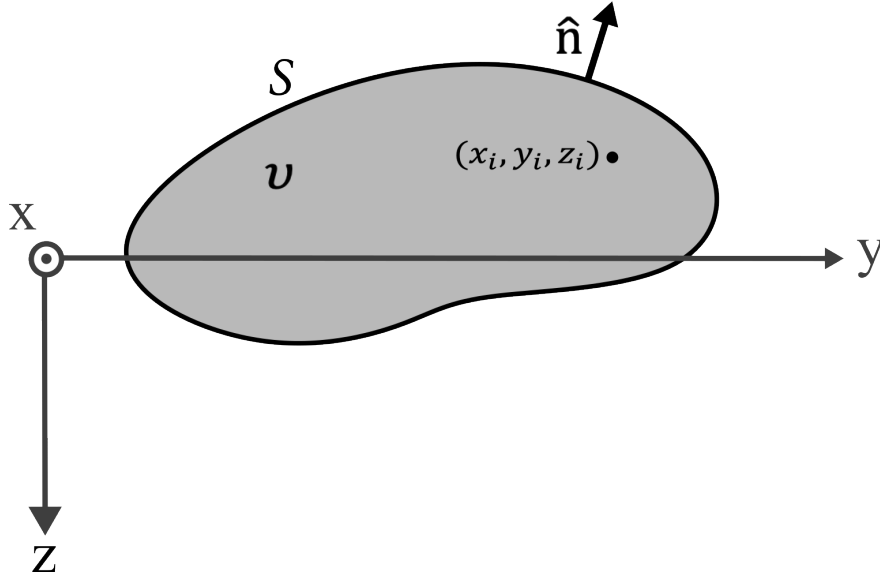


Figura 2.1: Representação 2D de uma região regular 3D com volume v delimitada por uma superfície regular S . As coordenadas (x_i, y_i, z_i) representam a localização de um ponto dentro de v . Essas coordenadas são referenciadas a um sistema Cartesiano, em que o eixo x aponta para fora da página, o eixo y aponta para leste, e o eixo z aponta para baixo.

Considerando que a função U é harmônica e continuamente diferenciável em todos os pontos (x_i, y_i, z_i) dentro de v , ou seja, $\nabla^2 U$ (equação 2.3) é nulo, pode-se simplificar a terceira identidade de Green da seguinte forma:

$$U(x_i, y_i, z_i) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S U(x, y, z) \partial_n \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \partial_n U(x, y, z) dS, \quad (2.6)$$

em que x, y, z representam as coordenadas cartesianas de um ponto arbitrário sobre a superfície S . Em resumo, a equação 2.6 expressa o campo potencial $U(x_i, y_i, z_i)$ em um ponto (x_i, y_i, z_i) dentro da região v , baseando-se nos valores e na derivada normal sobre a superfície limitante, sendo a única condição para sua validade a ausência de fontes na região v . Para calcular $U(x_i, y_i, z_i)$ a partir da equação 2.6 é necessário o conhecimento apenas de $U(x, y, z)$ ou de $\partial_n U(x, y, z)$ na fronteira de S .

O problema de encontrar uma função harmônica $U(x_i, y_i, z_i)$ em uma região fechada v , com valores iguais para uma determinada função $U(x, y, z)$ na superfície

limite S é conhecido como problema de Dirichlet ou o primeiro problema de valor de contorno da teoria do potencial. O teorema que afirma a existência de uma solução para esse problema é conhecido como o primeiro teorema fundamental da existência da teoria do potencial. Por outro lado, o problema de encontrar uma função harmônica $U(x_i, y_i, z_i)$ na região v , tendo derivadas normais $\partial_n U(x, y, z)$ iguais para uma determinada função na fronteira S é conhecido como problema de Neumann ou o segundo problema de valor de contorno da teoria do potencial. O teorema que afirma a existência de uma solução para este problema é conhecido como o segundo teorema fundamental da existência da teoria do potencial (KELLOGG, 1929).

Considere que a superfície fechada S pode ser dividida em duas superfícies S_0 e S_1 , sendo a superfície S_0 um plano horizontal infinito com coordenada vertical constante $z = z_0$ e S_1 uma semi-esfera com raio infinito (Figura 2.2). Dessa forma, o termo da integral da equação 2.6 referente a S_1 tende a zero e podemos reduzir a superfície S ao plano S_0 , ou seja, $S = S_0$.

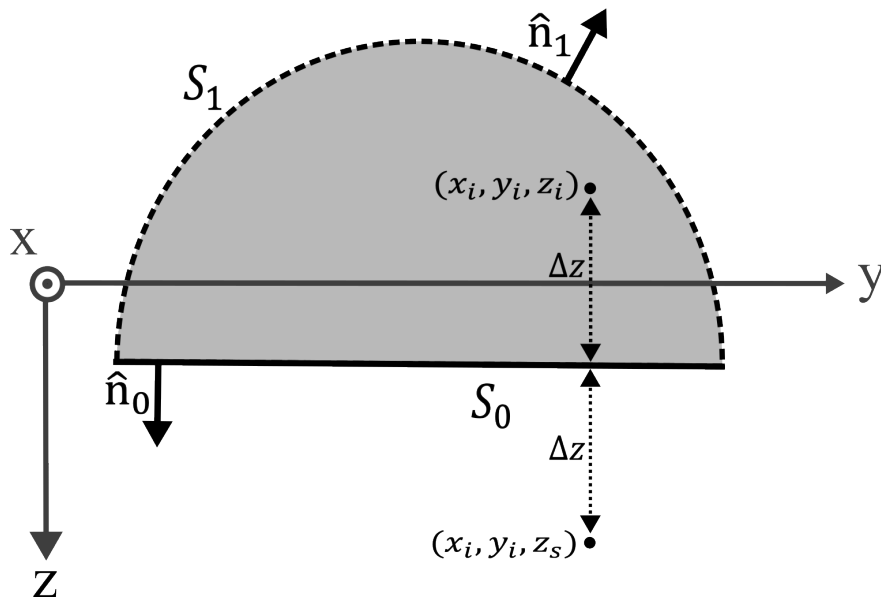


Figura 2.2: Representação 2D de uma região regular 3D delimitada por um plano horizontal S_0 e uma semi-esfera S_1 com raio infinito. As coordenadas (x_i, y_i, z_i) e (x_i, y_i, z_s) , em que $z_s = z_0 + \Delta z$, representam a localização de pontos dentro e fora da região 3D, respectivamente. Esses pontos estão simetricamente posicionados à uma distância Δz em relação ao plano $z = z_0$. Essas coordenadas são referenciadas a um sistema Cartesiano, em que o eixo x aponta para fora da página, o eixo y aponta para leste, e o eixo z aponta para baixo.

Seja V uma função harmônica arbitrária que admite uma derivada normal bem definida em S_0 , tal que

$$V \equiv V(x, y, z_0, x_i, y_i, z_i) = \frac{1}{\ell}, \quad (2.7)$$

em que

$$\frac{1}{\ell} \equiv \frac{1}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_0 + \Delta z)^2}} \quad (2.8)$$

representa o inverso da distância entre um ponto (x_i, y_i, z_s) , em que $z_s = z_0 + \Delta z$, e um ponto arbitrário sobre S_0 (Figura 2.2).

Aplicando a segunda identidade de Green (KELLOGG, 1929), tem-se que

$$\frac{1}{4\pi} \iint_{S_0} \frac{1}{\ell} \partial_{n_0} U(x, y, z_0) - U(x, y, z_0) \partial_{n_0} \frac{1}{\ell} dS_0 = 0. \quad (2.9)$$

Admita que S_0 , em que $dS_0 = dx dy$, é um plano infinito cujo a normal aponta para direção positiva de z , ou seja, $\partial_{n_0} = \partial_{z_0}$. Subtraindo ou adicionando a equação 2.9 com a terceira identidade de Green (equação 2.6), obtém-se:

$$U(x_i, y_i, z_i) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{r} \pm V \right) \partial_{z_0} U(x, y, z_0) - U(x, y, z_0) \left(\partial_{z_0} \frac{1}{r} \pm \partial_{z_0} V \right) dx dy. \quad (2.10)$$

Dependendo de como se manipula a equação 2.10, é possível estabelecer a equação que resolve o problema de valor de contorno de Dirichlet ou Neumann.

2.1.1 Problema de Dirichlet

Para definir a equação que resolve o problema de Dirichlet, considere o caso em que V (equação 2.7) é subtraída na equação 2.10. Dessa forma, tem-se que:

$$U(x_i, y_i, z_i) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{r} - V \right) \partial_{z_0} U(x, y, z_0) - U(x, y, z_0) \left(\partial_{z_0} \frac{1}{r} - \partial_{z_0} V \right) dx dy, \quad (2.11)$$

em que, para o caso de um plano, $z = z_0$ na equação 2.2. Os pontos (x_i, y_i, z_i) e (x_i, y_i, z_s) estão equidistantes do plano S_0 , o que implica que $\frac{1}{r} = \frac{1}{\ell}$ e $\partial_{z_0} \frac{1}{r} = -\partial_{z_0} \frac{1}{\ell}$. Nesse caso, a integral pode ser reescrita da seguinte forma:

$$U(x_i, y_i, z_i) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, y, z_0) \partial_{z_0} \frac{1}{r} dx dy. \quad (2.12)$$

ou calculando $\partial_{z_0} \frac{1}{r}$ na equação 2.12, para obtê-la na sua forma mais clássica, tem-se:

$$U(x_i, y_i, z_i) = \frac{z_0 - z_i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{U(x, y, z_0)}{r^3} dx dy, \quad z_0 > z_i. \quad (2.13)$$

A equação 2.12, que descreve a solução do problema de Dirichlet para o caso específico de um plano, é comumente denominada como integral de continuação para cima (HENDERSON e ZIETZ, 1949; HENDERSON, 1970). Essa equação afirma que os valores de uma função harmônica $U(x_i, y_i, z_i)$ em qualquer ponto (x_i, y_i, z_i) , $z_i < z_0$, podem ser reproduzidos exatamente pela convolução de seus valores e a derivada vertical da função $\frac{1}{r}$, ambos avaliados no plano horizontal S_0 . Os dados de campos potenciais aplicados a essa equação podem representar qualquer função harmônica, por exemplo, o distúrbio de gravidade, alguma componente do gradiente de gravidade ou a anomalia de campo total produzidos por fontes arbitrárias cujo topo está localizado a uma profundidade superior a z_0 . O potencial $U(x, y, z_0)$ causado por fontes arbitrárias é indistinguível de uma camada equivalente plana sobre qualquer uma das suas superfícies equipotenciais. Essa camada fictícia é comumente chamada de camada equivalente (BLAKELY, 1996).

2.1.2 Problema de Neumann

Para definir a equação que resolve o problema de Neumann, considere o caso em que V (equação 2.7) é adicionada na equação 2.10:

$$U(x_i, y_i, z_i) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{r} + V \right) \partial_{z_0} U(x, y, z_0) - U(x, y, z_0) \left(\partial_{z_0} \frac{1}{r} + \partial_{z_0} V \right) dx dy . \quad (2.14)$$

Nesse caso, a integral pode ser reescrita da seguinte forma:

$$U(x_i, y_i, z_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_{z_0} U(x, y, z_0) \frac{1}{r} dx dy , \quad (2.15)$$

em que $\partial_{z_0} U(x, y, z_0)$ representa a primeira derivada da função $\frac{1}{r}$ (equação 2.2) em relação à variável z_0 , avaliada na camada equivalente. Nessa equação o produto de uma constante positiva $\frac{1}{2\pi}$ e a função $\partial_{z_0} U(x, y, z_0)$ descreve uma distribuição de propriedades físicas $p(x, y, z_0)$ em todos os pontos (x, y, z_0) da camada equivalente. Essa propriedade física $p(x, y, z_0)$ assume a seguinte forma:

$$p(x, y, z_0) = \frac{\partial_{z_0} U(x, y, z_0)}{2\pi} . \quad (2.16)$$

Substituindo a equação 2.16 na equação 2.15, tem-se que:

$$U(x_i, y_i, z_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y, z_0) \frac{1}{r} dx dy , \quad (2.17)$$

A equação 2.17, que descreve a solução do problema de Neumann para o caso específico de um plano, também pode ser utilizada para qualquer função harmônica (distúrbio de gravidade, componentes do gradiente de gravidade ou a anomalia de campo total) produzida por fontes arbitrárias cuja profundidade do topo é maior que z_0 . As componentes do gradiente de gravidade podem ser obtidas derivando os dois lados da equação 2.15 da seguinte forma:

$$\partial_{\alpha_i \beta_i} U(x_i, y_i, z_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y, z_0) \partial_{\alpha_i \beta_i} \frac{1}{r} dx dy, \quad (2.18)$$

em que $\alpha_i, \beta_i = x_i, y_i, z_i$. Essa equação também demonstra a viabilidade de reproduzir todas as componentes do gradiente de gravidade, produzidas por fontes arbitrárias, através de uma camada equivalente única com propriedade física $p(x, y, z_0)$.

2.2 Dados de Campos Potenciais

Considere um sistema de coordenadas cartesianas com eixos x e y definindo o plano horizontal e eixo z apontando verticalmente para baixo. Seja $U(x, y, z_0)$ um campo potencial medido no plano horizontal com coordenada vertical $z = z_0$, que satisfaz a equação de Laplace e portanto, é harmônico na região livre de fonte acima do plano. De acordo com a integral de continuação para cima (equação 2.12), é possível calcular o campo potencial $d_i \equiv U(x_i, y_i, z_i)$ em qualquer ponto (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, \dots, N$, acima da superfície plana (ou seja, $z_0 > z_i$). Para fins práticos, aproxima-se essa superfície plana a um conjunto finito de M fontes pontuais (x_j, y_j, z_0) , $j = 1, \dots, M$. Assim, essa integral na sua forma discreta torna-se:

$$d_i = \sum_{j=1}^M p_j^c a_{ij}^c, i = 1, \dots, N, \quad (2.19)$$

com p_j^c representando os coeficientes, dados por:

$$p_j^c = \frac{d_j \Delta s_j}{2\pi}, j = 1, \dots, M, \quad (2.20)$$

em que $d_j \equiv U(x_j, y_j, z_0)$ representa os dados de campo potencial no j -ésimo ponto com coordenada (x_j, y_j, z_0) , Δs_j é o j -ésimo elemento de área centrado em (x_j, y_j, z_0) e os elementos a_{ij}^c são dados por

$$a_{ij}^c = h_{ij}^z = \frac{(z_0 - z_i)}{r_{ij}^3}, \quad (2.21)$$

em que

$$\frac{1}{r_{ij}} = [(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_0 - z_i)^2]^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.22)$$

e h_{ij}^z são as derivadas verticais da função $\frac{1}{r_{ij}}$ (equação 2.22).

Em notação matricial, a equação 2.19 pode ser definida da seguinte forma

$$\mathbf{d}(\mathbf{p}_c) = \mathbf{A}_c \mathbf{p}_c, \quad (2.23)$$

em que $\mathbf{d}(\mathbf{p}_c)$ é um vetor de dados preditos $N \times 1$, \mathbf{p}_c é um vetor de parâmetros $M \times 1$ e \mathbf{A}_c é a matriz de sensibilidade $N \times M$, cujo ij -ésimo elemento a_{ij}^c é dado pela equação 2.21.

2.2.1 Dados de gradiente de gravidade

Dados de gradiente de gravidade são comumente definidos em termos de segunda derivada $g_i^{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta \in \{x, y, z\}$, do potencial gravitacional produzido por fontes gravimétricas no i -ésimo ponto de observação (x_i, y_i, z_i) , $i \in \{1, \dots, N\}$. Em regiões livres de fontes, essas segundas derivadas formam um tensor de gradiente de gravidade 3×3 simétrico dado por

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} g_i^{xx} & g_i^{xy} & g_i^{xz} \\ g_i^{xy} & g_i^{yy} & g_i^{yz} \\ g_i^{xz} & g_i^{yz} & g_i^{zz} \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

com traço igual a zero, ou seja, $g_i^{xx} + g_i^{yy} + g_i^{zz} = 0$, devido à equação de Laplace. Isso significa que existem cinco componentes linearmente independentes g_i^{xx} , g_i^{xy} , g_i^{xz} , g_i^{yy} e g_i^{yz} (PEDERSEN e RASMUSSEN, 1990).

Os dois sistemas aerotransportados mais comuns que podem fornecer dados de gradiente de gravidade são o sistema *Full Tensor Gradiometry* (FTG - MURPHY, 2004) e o sistema *Falcon airborne gravity gradiometer* (AGG - VAN LEEUWEN, 2000). O sistema FTG mede cinco componentes linearmente independentes do tensor de gradiente de gravidade, ou seja, g_i^{xx} , g_i^{xy} , g_i^{xz} , g_i^{yy} e g_i^{yz} . O sistema Falcon AGG mede os dois gradientes de curvatura diferencial horizontal g_i^{xy} e $g_i^{uv} = (g_i^{yy} - g_i^{xx})/2$ (DRANSFIELD e MILKEREIT, 2007).

Seja $\mathbf{g}^{\alpha\beta}$ um vetor $N \times 1$ cujo i -ésimo elemento é a componente $\alpha\beta$ medida do gradiente de gravidade $g_i^{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta \in \{x, y, z\}$, no ponto de observação (x_i, y_i, z_i) , $i \in \{1, \dots, N\}$. Segundo o princípio da camada equivalente, as componentes medidas $g_i^{\alpha\beta}$ podem ser reproduzidas por um conjunto de M massas pontuais (x_j, y_j, z_0) sobre uma camada equivalente fictícia. Essa componente $d_i^{\alpha\beta}$ predita em cada ponto de

observação (x_i, y_i, z_i) pode ser aproximada por

$$d_i^{\alpha\beta} = \sum_{j=1}^M p_j^g a_{ij}^{g\alpha\beta}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.25)$$

em que $\alpha, \beta = \{x, y, z\}$ e os elementos $a_{ij}^{g\alpha\beta}$ da matriz sensibilidade são dados por

$$a_{ij}^{g\alpha\beta} = c_g \gamma h_{ij}^{\alpha\beta}, \quad (2.26)$$

sendo $c_g = 10^9$ uma constante de transformação de $1/s^2$ para eotvos, γ a constante gravitacional em $m^3/(kg s^2)$ e h_{ij} é uma matriz $N \times M$ cujo o elemento ij é definido como

$$h_{ij}^{\alpha\beta} = \begin{cases} \frac{3(\alpha_i - \alpha_j)^2 - r_{ij}^2}{r_{ij}^5} & \text{se } \alpha = \beta \\ \frac{3(\alpha_i - \alpha_j)(\beta_i - \beta_j)}{r_{ij}^5} & \text{se } \alpha \neq \beta \end{cases}. \quad (2.27)$$

Em notação matricial a componente $d_i^{\alpha\beta}$ predita pode ser aproximada por

$$\mathbf{d}^{\alpha\beta}(\mathbf{p}_g) = \mathbf{A}_g^{\alpha\beta} \mathbf{p}_g, \quad \alpha, \beta \in \{x, y, z\}, \quad (2.28)$$

em que $\mathbf{d}^{\alpha\beta}(\mathbf{p}_g)$ é o vetor de dados preditos do gradiente de gravidade $N \times 1$, \mathbf{p}_g é um vetor de parâmetros $M \times 1$ que contém os pontos de massa localizados abaixo dos pontos de observação, nas coordenadas (x_j, y_j, z_0) , $j \in \{1, \dots, M\}$, em um plano horizontal com coordenada vertical constante $z_0 > z_i, \forall i \in \{1, \dots, N\}$ e $\mathbf{A}_g^{\alpha\beta}$ é uma matriz $N \times M$ cujo ij -ésimo elemento $a_{ij}^{g\alpha\beta}$ é dado pela equação 2.26).

Considerando que existe uma camada única que reproduz todas as componentes do gradiente de gravidade, pode-se agrupar as componentes de um determinado sistema de aquisição em um único vetor de dados, assim como as respectivas matrizes de sensibilidade. Por exemplo, ao considerar dados de gradiente de gravidade medidos pelo sistema FTG, \mathbf{g}^o é um vetor $N_t \times 1$ dado por

$$\mathbf{g}^o = \begin{bmatrix} \mathbf{g}^{xx} \\ \mathbf{g}^{xy} \\ \mathbf{g}^{xz} \\ \mathbf{g}^{yy} \\ \mathbf{g}^{yz} \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

e \mathbf{A}_g é a matriz $N_t \times M$ composta pelas sub-matrizes $\mathbf{A}_g^{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta \in \{x, y, z\}$, (equa-

ção 2.26)

$$\mathbf{A}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_g^{xx} \\ \mathbf{A}_g^{xy} \\ \mathbf{A}_g^{xz} \\ \mathbf{A}_g^{yy} \\ \mathbf{A}_g^{yz} \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

em que $N_t = 5N$. No entanto, ao considerar as duas componentes medidas pelo sistema Falcon AGG, \mathbf{g}^o é um vetor $N_t \times 1$ dado por

$$\mathbf{g}^o = \begin{bmatrix} \mathbf{g}^{xy} \\ \mathbf{g}^{uv} \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

e \mathbf{A}_g é a matriz $N_t \times M$

$$\mathbf{A}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_g^{xy} \\ \mathbf{A}_g^{uv} \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

em que $N_t = 2N$ e

$$\mathbf{A}_g^{uv} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}_g^{yy} - \mathbf{A}_g^{xx}). \quad (2.33)$$

2.2.2 Dados magnéticos

Considere o caso em que o vetor de dados observados $\Delta\mathbf{T}^o$ representa um conjunto de dados de anomalia de campo total produzidos por fontes magnéticas arbitrárias em subsuperfície. Considere também que o campo geomagnético principal tem direção constante na área de estudo. Assim, o vetor de campo geomagnético principal \mathbf{F}_0 pode ser representado por

$$\mathbf{F}_0 = \|\mathbf{F}_0\| \hat{\mathbf{F}}, \quad (2.34)$$

em que $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana e

$$\hat{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_x \\ \mathbf{F}_y \\ \mathbf{F}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(I_0) \cos(D_0) \\ \cos(I_0) \sin(D_0) \\ \sin(I_0) \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

trata-se de um vetor unitário do campo geomagnético principal com inclinação I_0 e declinação D_0 constantes. Sob essa premissa, a anomalia de campo total d_i predita em cada ponto de observação (x_i, y_i, z_i) pode ser expressa como uma combinação linear de funções harmônicas a_{ij}^m com os coeficientes p_j^m , $j = 1, \dots, M$, ou seja:

$$d_i^m = \sum_{j=1}^M p_j^m a_{ij}^m, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.36)$$

em que os coeficientes p_j^m representam dipolos magnéticos com volume unitário sobre a camada equivalente. Os elementos a_{ij}^m da matriz sensibilidade são dados por

$$a_{ij}^m = c_m \frac{\mu_0}{4\pi} \hat{\mathbf{F}}^\top \mathbf{H} \hat{\mathbf{u}}, \quad (2.37)$$

em que $c_m = 10^9$ e $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{H/m}$ são uma constante de transformação de Tesla para nanotesla e a permeabilidade magnética no vácuo, respectivamente. O vetor unitário $\hat{\mathbf{u}}$ contém a inclinação I e a declinação D atribuídas às fontes equivalentes

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_x \\ \mathbf{u}_y \\ \mathbf{u}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(I) \cos(D) \\ \cos(I) \sin(D) \\ \sin(I) \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

e \mathbf{H} é uma matriz 3×3 dada por

$$\mathbf{H}_{ij} = \begin{bmatrix} h_{ij}^{xx} & h_{ij}^{xy} & h_{ij}^{xz} \\ h_{ij}^{xy} & h_{ij}^{yy} & h_{ij}^{yz} \\ h_{ij}^{xz} & h_{ij}^{yz} & h_{ij}^{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

em que os elementos $h_{ij}^{\alpha\beta}$ são definidos pela equação 2.27.

A anomalia de campo total predita pela camada equivalente em N pontos de observação (equação 2.36) pode ser reescrita em notação de matricial como

$$\mathbf{d}(\mathbf{p}_m) = \mathbf{A}_m \mathbf{p}_m, \quad (2.40)$$

em que $\mathbf{d}(\mathbf{p}_m)$ é um vetor de dados de anomalia de campo total predito $N \times 1$, \mathbf{p}_m é um vetor de parâmetros $M \times 1$ que contém a distribuição do momento magnético sobre a camada equivalente, e \mathbf{A}_m é uma matriz $N \times M$ cujo ij -ésimo elemento a_{ij}^m é dado pela equação 2.37.

Ao reescrever a matriz \mathbf{A}_m (Equação 2.40) em termos de seus componentes direcionais, obtém-se:

$$\mathbf{A}_m = \mathbf{A}_m^{xx} + \mathbf{A}_m^{xy} + \mathbf{A}_m^{xz} + \mathbf{A}_m^{yy} + \mathbf{A}_m^{yz} + \mathbf{A}_m^{zz}, \quad (2.41)$$

em que $\mathbf{A}_m^{\alpha\beta}$ são matrizes $N \times M$, cujos elementos $a_{ij}^{m\alpha\beta}$ (equação 2.37) são dados por

$$a_{ij}^{m\alpha\beta} = \begin{cases} c_m \frac{\mu_0}{4\pi} (F_\alpha u_\beta) h_{ij}^{\alpha\beta} & , \text{ se } \alpha = \beta \\ c_m \frac{\mu_0}{4\pi} (F_\alpha u_\beta + F_\beta u_\alpha) h_{ij}^{\alpha\beta} & , \text{ se } \alpha \neq \beta \end{cases}, \alpha, \beta = x, y, z. \quad (2.42)$$

sendo F_α e u_α os α -componentes de $\hat{\mathbf{F}}$ e $\hat{\mathbf{u}}$ dados pelas equações 2.35 e 2.38, respec-

tivamente.

2.3 Problemas inversos da técnica da camada equivalente

2.3.1 Técnica da camada equivalente clássica

A técnica da camada equivalente clássica consiste em estimar o vetor de parâmetros $\hat{\mathbf{p}}$, que contém a distribuição de propriedade física sobre a camada, minimizando a função de ajuste dos dados

$$\Phi(\mathbf{p}) = \frac{1}{N_t} \|\mathbf{d}^\circ - \mathbf{A} \mathbf{p}\|_2^2, \quad (2.43)$$

submetido a alguma restrição, em que N_t é o número total de observações, $\|\cdot\|_2$ representa a norma euclidiana, \mathbf{d}° é um vetor de dados de campo potencial observado e \mathbf{A} é uma matriz de sensibilidade genérica cujos elementos são funções harmônicas que dependerá do dado de campo potencial utilizado.

A distribuição de propriedade física estimada $\hat{\mathbf{p}}$, minimizando a função de ajuste dos dados $\Phi(\mathbf{p})$ (equação 2.43) sem qualquer vínculo, pode ser obtida resolvendo as equações normais

$$(\mathbf{A}^\top \mathbf{A}) \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{A}^\top \mathbf{d}^\circ. \quad (2.44)$$

Essa inversão linear também pode ser integrada a uma função de regularização para produzir um vetor de parâmetros estável $\hat{\mathbf{p}}$ (ASTER *et al.*, 2018):

$$\hat{\mathbf{p}} = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A} + \mu \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A}^\top \mathbf{d}^\circ, \quad (2.45)$$

em que μ representa o parâmetro de regularização e \mathbf{I} representa uma matriz identidade de ordem M . A estimativa de um vetor de parâmetros estável resolvendo um sistema linear normalmente envolve cálculos matriciais em grande escala, o que pode tornar a abordagem de camada equivalente tradicional computacionalmente inviável.

2.3.2 Método do gradiente conjugado para problemas de mínimos quadrados

O método do gradiente conjugado para problemas de mínimos quadrados, também conhecido como CGLS (*Conjugate Gradient Least Square*), é uma abordagem eficiente para minimizar a função de ajuste (expressa pela equação 2.43) ao construir uma base para o espaço R^n que resolve as equações normais (equação 2.44).

No Algoritmo 1, uma base de vetores conjugados $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{N-1}$ é construída no espaço de busca. Esta base é utilizada para alcançar o mínimo da função de forma mais eficiente do que métodos de busca mais simples.

A ideia fundamental desse método é encontrar iterativamente uma sequência de soluções que se aproximam do mínimo da função, estimando a propriedade física $\hat{\mathbf{p}}$. Em cada iteração, é selecionada uma direção de busca conjugada à direção anterior, facilitando uma rápida convergência em direção ao mínimo. Essa abordagem é particularmente vantajosa em problemas de grande dimensão, nos quais métodos diretos podem ser computacionalmente custosos.

Algoritmo 1 Pseudocódigo CGLS padrão (ASTER *et al.* (2018) p. 166)

Entrada: \mathbf{A} , \mathbf{d}^o e a quantidade máxima de iteração $itmax$.

Saída: Distribuição de propriedade física estimada $\hat{\mathbf{p}}$.

Definir $it = 0$, $\hat{\mathbf{p}}^{(it)} = \mathbf{0}$, $\mathbf{c}^{(it-1)} = \mathbf{0}$, $\beta^{(it)} = 0$, $\mathbf{s}^{(it)} = \mathbf{d}^o$ e $\mathbf{r}^{(it)} = \mathbf{A}^\top \mathbf{s}^{(it)}$.

$$1 - \text{Se } it > 0, \beta^{(it)} = \frac{\|\mathbf{r}^{(it)}\|_2^2}{\|\mathbf{r}^{(it-1)}\|_2^2}$$

$$2 - \mathbf{c}^{(it)} = \mathbf{r}^{(it)} + \beta^{(it)} \mathbf{c}^{(it-1)}$$

$$3 - \alpha^{(it)} = \frac{\|\mathbf{r}^{(it)}\|_2^2}{\|\mathbf{A} \mathbf{c}^{(it)}\|_2^2}$$

$$4 - \hat{\mathbf{p}}^{(it+1)} = \hat{\mathbf{p}}^{(it)} + \alpha^{(it)} \mathbf{c}^{(it)}$$

$$5 - \mathbf{s}^{(it+1)} = \mathbf{s}^{(it)} - \alpha^{(it)} \mathbf{A} \mathbf{c}^{(it)}$$

$$6 - \mathbf{r}^{(it+1)} = \mathbf{A}^\top \mathbf{s}^{(it+1)}$$

$$7 - it = it + 1$$

$$8 - \text{Pare se } \delta = \frac{\|\mathbf{r}^{(it+1)} - \mathbf{r}^{(it)}\|}{N_t} \leq 10^{-3} \text{ ou } it > itmax .$$

2.3.3 Técnica da camada equivalente rápida

Embora o método de SIQUEIRA *et al.* (2017) tenha sido utilizado para processar grandes conjuntos de dados de gravidade, esse método pode ser aplicado a qualquer função harmônica, tendo em vista que ele envolve a resolução numérica da integral de continuação para cima (equação 2.13). Essa abordagem consiste em um método iterativo rápido para estimar o vetor de parâmetros $\hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{c}}$ (equação 2.23), transformando o problema linear em um problema não linear através da aplicação do método de Gauss-Newton e aproximando a matriz de sensibilidade $\mathbf{A}_{\mathbf{c}}$ (equação 2.23), por uma matriz diagonal $\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{c}}$ no cálculo da correção do parâmetro $\Delta \hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{c}}$. No Algoritmo 2 proposto por SIQUEIRA *et al.* (2017), um conjunto discreto de fontes equivalentes com volume unitário está posicionado diretamente abaixo de cada ponto de observação. A matriz diagonal $\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{c}}$ de ordem $N \times N$ é dada por

$$\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{c}} = 2\pi \Delta \mathbf{S}^{-1}, \quad (2.46)$$

e $\Delta \mathbf{S}$ também é uma matriz diagonal $N \times N$, que contém elementos área Δs_j centrados nas j -ésimas coordenadas horizontais (x_j, y_j) , $j = 1, \dots, M$. Para o caso de dados irregularmente espaçados, é calculado um valor médio do elemento de área com base na área total do levantamento e na quantidade de dados observados.

Algoritmo 2 Pseudocódigo da camada equivalente rápida desenvolvida por SIQUEIRA *et al.* (2017)

Entrada: $\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{c}}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{c}}$, \mathbf{d}^o e a quantidade máxima de iteração $itmax$.

Saída: Vetor de parâmetros estimado $\hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{c}}$.

Definir $it = 0$, $\hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{c}(it)} = \tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{c}}^{-1} \mathbf{d}^o$.

1 - Se $it > 0$, $\mathbf{r}(it) = \mathbf{d}^o - \mathbf{A}_{\mathbf{c}} \hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{c}(it)}$

2 - $\Delta \hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{c}(it)} = \tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{c}}^{-1} \mathbf{r}(it)$

3 - $\hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{c}(it+1)} = \hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{c}(it)} + \Delta \hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{c}(it)}$

4 - $it = it + 1$

5 - Pare se $\delta = \frac{\|\mathbf{r}(it+1) - \mathbf{r}(it)\|}{N_t} \leq 10^{-3}$ ou $it > itmax$.

2.4 Estrutura das matrizes de sensibilidade para malhas regulares

As matrizes de sensibilidade $\mathbf{A}_{\mathbf{c}}$, $\mathbf{A}_{\mathbf{m}}$ e $\mathbf{A}_{\mathbf{g}}^{\alpha\beta}$ são definidas em relação às matrizes de derivadas parciais de primeira ordem \mathbf{H}^z e de segunda ordem $\mathbf{H}^{\alpha\beta}$, em que $\alpha, \beta = x, y, z$. Os elementos das matrizes de derivadas de segunda ordem $h_{ij}^{\alpha\beta}$ são especificados pela equação 2.27. Essas derivadas estão relacionadas à função inverso da distância (equação 2.22) entre os pontos de observação (x_i, y_i, z_i) e à j -ésima fonte equivalente em (x_j, y_j, z_0) . TAKAHASHI *et al.* (2020, 2022) mostraram que essas matrizes, quando consideram-se malhas regulares, possuem estruturas simétricas em blocos e são denominadas matrizes *Block-Toeplitz Toeplitz-Block* (BTTB).

2.4.1 Estrutura da matriz de derivada vertical de primeira ordem

Seja \mathbf{H}^z uma matriz *symmetric-Block-Toeplitz symmetric-Toeplitz-Block*. Essa matriz pode ser representada como uma malha de blocos \mathbf{H}_q^z de ordem $Q \times Q$,

$q = 0, \dots, Q - 1$ da seguinte maneira:

$$\mathbf{H}^z = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0^z & \mathbf{H}_1^z & \dots & \mathbf{H}_{Q-1}^z \\ \mathbf{H}_1^z & \mathbf{H}_0^z & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{H}_1^z \\ \mathbf{H}_{Q-1}^z & \dots & \mathbf{H}_1^z & \mathbf{H}_0^z \end{bmatrix}_{N \times N}, \quad (2.47)$$

em que cada bloco é formado por elementos h_{qp}^z de ordem $P \times P$, $p = 0, \dots, P - 1$, ou seja,

$$\mathbf{H}_q^z = \begin{bmatrix} h_{q0}^z & h_{q1}^z & \dots & h_{q(P-1)}^z \\ h_{q1}^z & h_{q0}^z & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & h_{q(-1)}^z \\ h_{q(P-1)}^z & \dots & h_{q1}^z & h_{q0}^z \end{bmatrix}_{P \times P}, \quad (2.48)$$

considerando uma malha regular de $N_x \times N_y$ pontos de observação espaçados por Δx e Δy ao longo, respectivamente, das direções x e y . Q é o número de blocos \mathbf{H}_q^z , $q = 0, \dots, Q - 1$, e P é o número de elementos dentro de cada bloco. A matriz \mathbf{H}^z é Toeplitz em bloco para malhas orientadas na direção x (Figura 2.3) e orientadas na direção y (Figura 2.4), ou seja, todos os blocos que compõem a mesma diagonal de blocos são iguais entre si. Em outras palavras, isso significa organizar os pontos de observação e fontes equivalentes de sul para norte (malhas orientadas na direção x) ou de oeste para leste (malhas orientadas na direção y). Além disso, os blocos localizados acima e abaixo da diagonal principal são iguais e cada bloco possui uma estrutura *symmetric-Block-Toeplitz symmetric-Toeplitz-Block*. Portanto, toda a matriz pode ser reconstruída usando os elementos da primeira coluna. Isso significa que o efeito de todos os dados de campo potencial pode ser reproduzido usando apenas uma fonte equivalente (TAKAHASHI *et al.*, 2020).

2.4.2 Estrutura das matrizes de derivada de segunda ordem

Sejam $\mathbf{H}^{\alpha\beta}$, com $\alpha, \beta = x, y, z$, matrizes com estruturas bem definidas chamadas *Block-Toeplitz Toeplitz-Block* (BTTB). TAKAHASHI *et al.* (2022) mostraram que essas matrizes compostas pelas segundas derivadas da função inverso da distância (equação 2.2) assumem uma forma geral

$$\mathbf{H}^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_0^{\alpha\beta} & \mathbf{H}_{-1}^{\alpha\beta} & \dots & \mathbf{H}_{-Q+1}^{\alpha\beta} \\ \mathbf{H}_1^{\alpha\beta} & \mathbf{H}_0^{\alpha\beta} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{H}_{-1}^{\alpha\beta} \\ \mathbf{H}_{Q-1}^{\alpha\beta} & \dots & \mathbf{H}_1^{\alpha\beta} & \mathbf{H}_0^{\alpha\beta} \end{bmatrix}_{N \times N}, \quad (2.49)$$

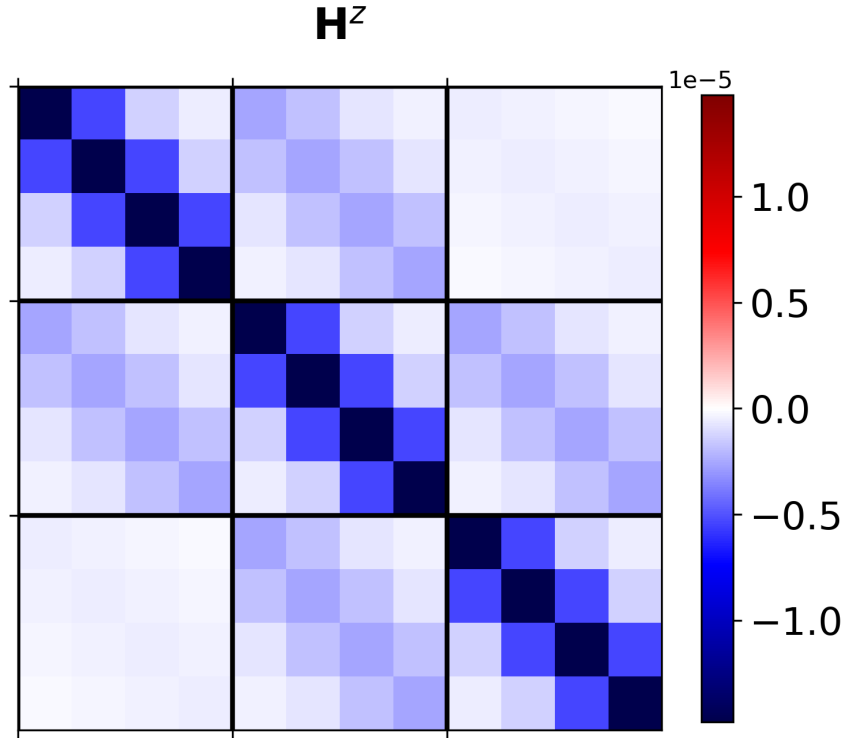


Figura 2.3: Estrutura da matriz BTTB \mathbf{H}^z considerando uma malha orientada na direção x com $N_x = 4$ e $N_y = 3$. A matriz, neste caso, é composta por 3×3 blocos com 4×4 elementos dentro de cada bloco.

em que cada bloco composto por elementos $h_{qp}^{\alpha\beta}$ de ordem $P \times P$, $p = -P+1, \dots, P-1$ é dado por

$$\mathbf{H}_q^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} h_{q0}^{\alpha\beta} & h_{q(-1)}^{\alpha\beta} & \cdots & h_{q(-P+1)}^{\alpha\beta} \\ h_{q1}^{\alpha\beta} & h_{q0}^{\alpha\beta} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & h_{q(-1)}^{\alpha\beta} \\ h_{q(P-1)}^{\alpha\beta} & \cdots & h_{q1}^{\alpha\beta} & h_{q0}^{\alpha\beta} \end{bmatrix}_{P \times P}, \quad (2.50)$$

em que Q é o número de blocos $\mathbf{H}_q^{\alpha\beta}$, $q = -Q + 1, \dots, Q - 1$, e P é o número de elementos dentro de cada bloco. O número de blocos $\mathbf{H}_q^{\alpha\beta}$ e de elementos $h_{qp}^{\alpha\beta}$ dentro de cada bloco estão relacionados com a orientação da malha na direção x (Figura 2.5) ou na direção y (Figura 2.6). Dependendo da orientação da malha regular $N_x \times N_y$ ao longo do eixo x ou eixo y , o número de blocos e elementos dentro de cada bloco pode mudar. Em malhas orientadas na direção y , por exemplo, $Q = N_x$ e $P = N_y$, e a quantidade de dados $N = N_x N_y$. Nas próximas seções, são apresentadas a particularidade de cada matriz $\mathbf{H}^{\alpha\beta}$, cujos nomes refletem a presença de simetria tanto entre os blocos quanto dentro de cada bloco.

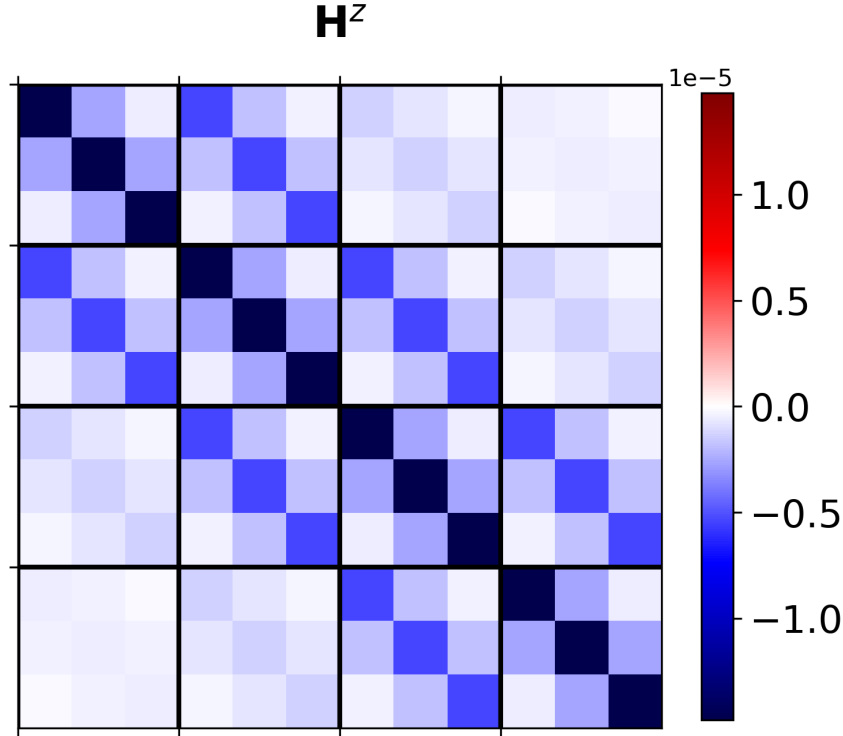


Figura 2.4: Estrutura da matriz BTTB \mathbf{H}^z considerando uma malha orientada na direção y com $N_x = 4$ e $N_y = 3$. A matriz, neste caso, é composta por 4×4 blocos com 3×3 elementos dentro de cada bloco.

Estrutura particular das matrizes \mathbf{H}^{xx} , \mathbf{H}^{yy} e \mathbf{H}^{zz}

As matrizes $\mathbf{H}^{\alpha\beta}$, quando $\alpha = \beta$, são *symmetric-Block-Toeplitz symmetric-Toeplitz-Block* para qualquer orientação da malha. Isso significa que os elementos dentro de cada bloco são simétricos, ou seja:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_q^{xx} &= \mathbf{H}_q^{xx\top} \\ \mathbf{H}_q^{yy} &= \mathbf{H}_q^{yy\top}, \\ \mathbf{H}_q^{zz} &= \mathbf{H}_q^{zz\top} \end{aligned} \quad (2.51)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_q^{xx} &= \mathbf{H}_{(-q)}^{xx} \\ \mathbf{H}_q^{yy} &= \mathbf{H}_{(-q)}^{yy} \\ \mathbf{H}_q^{zz} &= \mathbf{H}_{(-q)}^{zz} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Estrutura particular da matriz \mathbf{H}^{xy}

A matriz \mathbf{H}^{xy} é *skew symmetric-Block-Toeplitz skew symmetric-Toeplitz-Block* para qualquer orientação da malha. Isso significa que

$$\mathbf{H}_q^{xy} = -(\mathbf{H}_q^{xy})^\top, \quad (2.53)$$

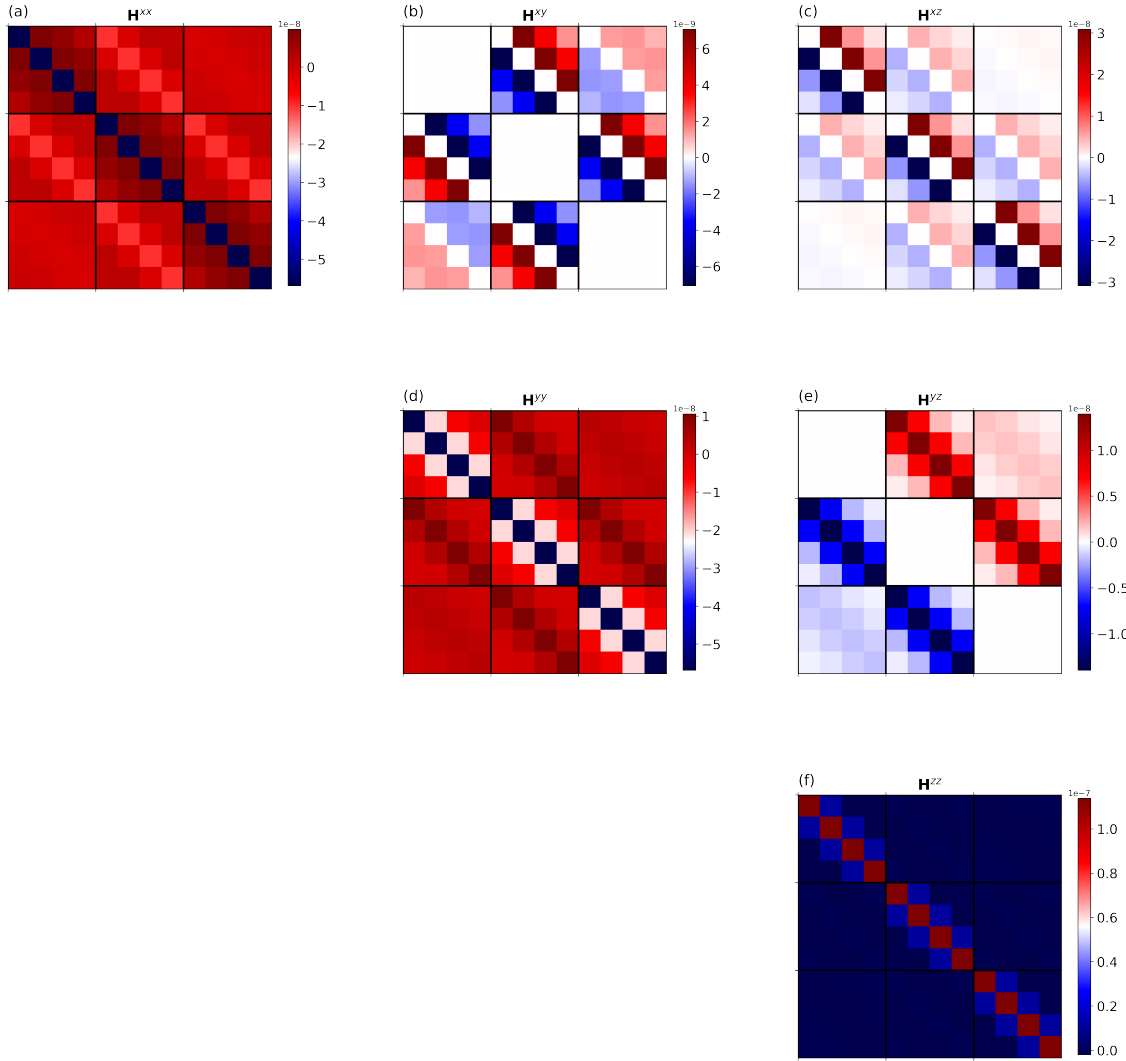


Figura 2.5: Estruturas de matrizes BTTB (a) \mathbf{H}^{xx} , (b) \mathbf{H}^{xy} , (c) \mathbf{H}^{xz} , (d) \mathbf{H}^{yy} , (e) \mathbf{H}^{yz} e (f) \mathbf{H}^{zz} considerando uma malha orientada na direção x com $N_x = 4$ e $N_y = 3$. As matrizes, nesse caso, são compostas por 3×3 blocos com 4×4 elementos dentro de cada bloco.

e

$$\mathbf{H}_q^{xy} = -\mathbf{H}_{(-q)}^{xy}. \quad (2.54)$$

Estrutura particular da matriz \mathbf{H}_{xz}

Para malhas orientadas na direção x , os elementos dentro de cada bloco são simétricos, ou seja:

$$\mathbf{H}_q^{xz} = -(\mathbf{H}_q^{xz})^\top, \quad (2.55)$$

e

$$\mathbf{H}_q^{xz} = \mathbf{H}_{(-q)}^{xz}, \quad (2.56)$$

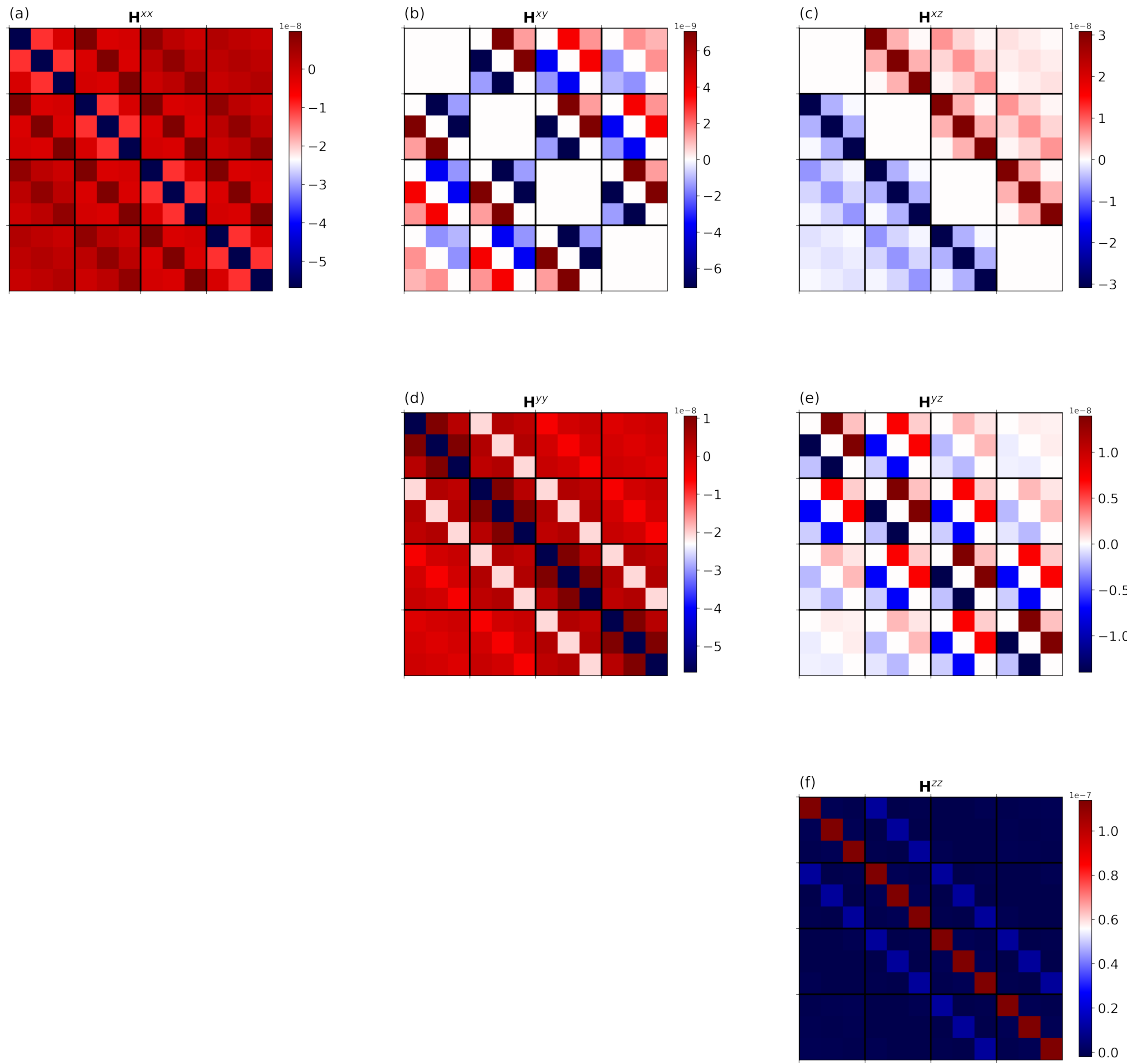


Figura 2.6: Estruturas de matrizes BTTB (a) \mathbf{H}^{xx} , (b) \mathbf{H}^{xy} , (c) \mathbf{H}^{xz} , (d) \mathbf{H}^{yy} , (e) \mathbf{H}^{yz} e (f) \mathbf{H}^{zz} considerando uma malha orientada na direção y com $N_x = 4$ e $N_y = 3$. As matrizes, nesse caso, são compostas por 4×4 blocos com 3×3 elementos dentro de cada bloco.

sendo a matriz \mathbf{H}^{xz} em que a malha é orientada na direção x chamada de *symmetric-Block-Toeplitz skew symmetric-Toeplitz-Block*.

Para malhas orientadas na direção y , a estrutura de cada bloco é simétrica, ou seja:

$$\mathbf{H}_q^{xz} = (\mathbf{H}_q^{xz})^\top, \quad (2.57)$$

e

$$\mathbf{H}_q^{xz} = -\mathbf{H}_{(-q)}^{xz}, \quad (2.58)$$

sendo a matriz \mathbf{H}^{xz} orientada na direção y chamada *skew symmetric-Block-Toeplitz symmetric-Toeplitz-Block*.

Estrutura particular da matriz \mathbf{H}^{yz}

Para malhas orientadas na direção x , a estrutura de cada bloco é simétrica, ou seja:

$$\mathbf{H}^{yz} = (\mathbf{H}^{yz})^\top, \quad (2.59)$$

e

$$\mathbf{H}_q^{yz} = -\mathbf{H}_{(-q)}^{yz}, \quad (2.60)$$

sendo a matriz \mathbf{H}^{yz} , em que a malha é orientada na direção x , chamada *skew symmetric-Block-Toeplitz symmetric-Toeplitz-Block*.

Para malhas orientadas na direção y , a estrutura de cada bloco é simétrica, ou seja:

$$\mathbf{H}_q^{yz} = -(\mathbf{H}_q^{yz})^\top, \quad (2.61)$$

e

$$\mathbf{H}_q^{yz} = \mathbf{H}_{(-q)}^{yz}, \quad (2.62)$$

sendo a matriz \mathbf{H}^{yz} , em que a malha é orientada na direção y , chamada *symmetric-Block-Toeplitz skew symmetric-Toeplitz-Block*.

2.5 Convolução discreta 2D rápida

Considere um produto matriz-vetor arbitrário

$$\mathbf{d}(\mathbf{p}) = \mathbf{A}\mathbf{p}, \quad (2.63)$$

em que \mathbf{A} é uma matriz BTTB genérica composta por $Q \times Q$ blocos com $P \times P$ elementos a_{qp} em cada bloco \mathbf{A}_q . O vetor de dados $\mathbf{d}(\mathbf{p})$ é dado por

$$\mathbf{d}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_0(\mathbf{p}) \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{Q-1}(\mathbf{p}) \end{bmatrix}_{N \times 1}, \quad (2.64)$$

e o vetor de parâmetros genérico \mathbf{p} pode ser escrito como:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{Q-1} \end{bmatrix}_{N \times 1}, \quad (2.65)$$

em que $\mathbf{d}_q(\mathbf{p})$ e \mathbf{p}_q são os vetores particionados $P \times 1$, cujo $q = 0, \dots, Q - 1$. Para calcular o produto matriz-vetor definido pela equação 2.63, ele será transformado

no produto matriz-vetor auxiliar dado por:

$$\mathbf{w} = \mathbf{C}\mathbf{v}, \quad (2.66)$$

em que \mathbf{C} é uma matriz Circulante de blocos simétricos $4N \times 4N$ com blocos circulares (*Block circulant with circulant blocks* - BCCB). O vetor \mathbf{w} é dado por

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{Q-1} \\ \mathbf{0}_{2N \times 1} \end{bmatrix}_{4N \times 1}, \quad (2.67)$$

com

$$\mathbf{w}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_q(\mathbf{t}) \\ \mathbf{0}_{P \times 1} \end{bmatrix}_{2P \times 1}, \quad (2.68)$$

e o vetor \mathbf{v} definido como

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{Q-1} \\ \mathbf{0}_{2N \times 1} \end{bmatrix}_{4N \times 1}, \quad (2.69)$$

com

$$\mathbf{v}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_q \\ \mathbf{0}_{P \times 1} \end{bmatrix}_{2P \times 1}. \quad (2.70)$$

em que $\mathbf{0}_{P \times 1}$ e $\mathbf{0}_{2N \times 1}$ são vetores nulos. A matriz \mathbf{C} na equação 2.66 é composta por blocos $2Q \times 2Q$, em que cada bloco possui uma estrutura circulante. Assim, a primeira coluna do bloco da matriz BCCB é dada por

$$[\mathbf{C}]_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{Q-1} \\ \mathbf{0}_{2P \times Q} \\ \mathbf{C}_{-Q+1} \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{-11} \end{bmatrix}_{4N \times 2P}, \quad (2.71)$$

sendo $\mathbf{0}$ uma matriz de zeros e \mathbf{C}_q uma matriz de blocos, cujo $q = 0, \dots, Q - 1$. Cada coluna do bloco \mathbf{C}_q pode ser obtida de sua coluna anterior por um *downshift* (DAVIS, 2013). Portanto, a matriz \mathbf{C} pode ser reconstruída usando apenas a primeira coluna

de todos os blocos

$$c_0^a = \begin{bmatrix} a_{q0} \\ \vdots \\ a_{q(P-1)} \\ 0 \\ a_{q(-P+1)} \\ \vdots \\ a_{q(-1)} \end{bmatrix}_{2P \times 1}, \quad (2.72)$$

em que a_{qp} , $p = -P + 1, \dots, P - 1$, são os elementos que compõe a matriz BTTB \mathbf{A} na equação 2.63.

A matriz \mathbf{C} é diagonalizada pela aplicação de uma Transformada de Fourier Discreta 2D (2D DFT - *2D Discrete Fourier Transform*) $\mathbf{F}_{2Q} \otimes \mathbf{F}_{2P}$, em que \otimes representa o produto de Kronecker. Esse produto combina cada elemento das matrizes \mathbf{F}_{2Q} e \mathbf{F}_{2P} , resultando em uma matriz expandida em blocos. As matrizes \mathbf{F}_{2Q} e \mathbf{F}_{2P} são matrizes unitárias normalizadas pelos fatores $\sqrt{2Q}$ e $\sqrt{2P}$, respectivamente. Utilizando essas características, o produto matriz-vetor auxiliar (equação 2.66), pode ser expresso como uma convolução discreta 2D:

$$\mathbf{L} \circ (\mathbf{F}_{2Q} \mathbf{V} \mathbf{F}_{2P}) = \mathbf{F}_{2Q} \mathbf{W} \mathbf{F}_{2Q}. \quad (2.73)$$

O símbolo “ \circ ” representa o produto de Hadamard, que implica na multiplicação elemento a elemento entre matrizes de mesma dimensão, como as matrizes \mathbf{L} e $\mathbf{F}_{2Q} \mathbf{V} \mathbf{F}_{2P}$. A matriz \mathbf{L} é uma matriz $Q \times P$ dada por (CHAN e JIN, 2007):

$$\mathbf{L} = \sqrt{4QP} \mathbf{F}_{2Q} \mathbf{R} \mathbf{F}_{2P}, \quad (2.74)$$

em que a matriz \mathbf{R} é obtida pela reorganização dos elementos da primeira coluna da matriz \mathbf{C} (equação 2.66).

Vale notar que a 2D-DFT da matriz \mathbf{W} , que contém os elementos do vetor \mathbf{w} (equação 2.66), é o produto de Hadamard da matriz \mathbf{L} , que contém os autovalores da matriz \mathbf{C} (equação 2.66), com a 2D-DFT da matriz \mathbf{V} , que contém os elementos do vetor \mathbf{v} (equação 2.69).

Capítulo 3

Metodologia

3.1 Camada equivalente convolucional para o processamento de dados de gradiente de gravidade

3.1.1 Camada equivalente convolucional em coordenadas rotacionadas

Considere que os dados de gradiente de gravidade observados estão dispostos em um plano horizontal com coordenada vertical constante $z = z_i, i = 1, \dots, N$, em uma malha com pontos regularmente espaçados ao longo dos eixos x e y do sistema cartesiano, que é convenientemente chamado de *sistema de dados*. Além disso, considere que os eixos horizontais x e y são rotacionados de um ângulo ψ em relação a um segundo sistema de coordenadas cartesianas com eixo \tilde{x} apontando para o norte e o eixo \tilde{y} para leste (Figura 3.1). Esse segundo sistema é chamado aqui de *sistema norte-leste* porque os dados de gradiente de gravidade geralmente são adquiridos com referência a esse sistema. O tensor gradiente de gravidade $\tilde{\mathbf{G}}$ definido no sistema norte-leste satisfaz

$$\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{RGR}^\top, \quad (3.1)$$

em que \mathbf{G} (equação 2.24) é o tensor de gradiente de gravidade definido no sistema de dados (Figura 3.1) e \mathbf{R} é uma matriz de rotação dada por

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

No caso específico dos dados de gradiente de gravidade AGG observados $\tilde{\mathbf{g}}^{xy}$ e $\tilde{\mathbf{g}}^{uv}$, referidos ao sistema norte-leste (equações 3.1 e 3.2), ambos satisfazem

$$\tilde{\mathbf{g}}^{xy} = (2 \sin \psi \cos \psi) \mathbf{g}^{uv} + (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi) \mathbf{g}^{xy} \quad (3.3)$$

e

$$\tilde{\mathbf{g}}^{uv} = (\cos^2 \psi - \sin^2 \psi) \mathbf{g}^{uv} - (2 \sin \psi \cos \psi) \mathbf{g}^{xy}, \quad (3.4)$$

em que \mathbf{g}^{xy} e \mathbf{g}^{uv} representam dados de gradiente de gravidade AGG definidos no sistema de dados.

Agora, considere uma camada equivalente localizada em um plano horizontal abaixo dos pontos de observações, com coordenada vertical constante $z_0 > z_i$, tendo um ponto de massa diretamente abaixo de cada ponto de observação, de modo que a quantidade de pontos de massa M é igual a quantidade de pontos de observação N . Nesse caso, TAKAHASHI *et al.* (2022) mostraram que as matrizes $\mathbf{A}_{\mathbf{g}}^{\alpha\beta}$ formadas pelos elementos $a_{ij}^{\alpha\beta}$ (equação 2.26), $\alpha, \beta \in \{x, y, z\}$, tem uma estrutura definida chamada *block-Toeplitz Toeplitz-block* (BTTB). Esses autores deixaram de mencionar, no entanto, que essa estrutura BTTB depende do sistema de coordenadas. Na verdade, esse padrão bem definido aparece quando as matrizes $\mathbf{A}_{\mathbf{g}}^{\alpha\beta}$ são definidas no sistema norte-leste (Figura 3.1). Para estimar a distribuição de massa $\hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{g}}$ (equação 2.28), resolve-se as equações normais (equação 2.44) iterativamente usando o método CGLS (Algoritmo 1).

Observe que o Algoritmo 1 requer três produtos matriz-vetor: um fora do *loop* e dois por iteração (nas etapas 3 e 6). Esses produtos podem ser escritos genericamente como

$$\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{A}_1\mathbf{p}_1 + \cdots + \mathbf{A}_L\mathbf{p}_L, \quad (3.5)$$

e

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{p} = \mathbf{A}_1^\top \mathbf{p}_1 + \cdots + \mathbf{A}_L^\top \mathbf{p}_L, \quad (3.6)$$

em termos de uma matriz particionada genérica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_L \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

e um vetor particionado genérico

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_L \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

Calcula-se cada produto matriz-vetor $\mathbf{A}_\ell \mathbf{p}_\ell$ ou $\mathbf{A}_\ell^\top \mathbf{p}_\ell$ nas equações 3.5 e 3.6, $\ell \in \{1, \dots, L\}$, usando a mesma abordagem de convolução discreta rápida proposta por TAKAHASHI *et al.* (2020, 2022). Observe que L (equações 3.5–3.8) define o número de componentes de gradiente de gravidade medidas. Se forem considerados os dados de gradiente de gravidade medidos pelo sistema FTG, por exemplo, a matriz genérica \mathbf{A} (equação 3.7) é definida com $L = 5$ submatrizes, de acordo com a equação 2.30. Caso contrário, esta matriz é definida em termos de $L = 2$ submatrizes, conforme equação 2.32, para o caso em que os dados são medidos pelo sistema AGG. O método de camada equivalente convolucional proposto pode ser esquematicamente definido da seguinte forma:

Algoritmo 3 Camada equivalente convolucional para dados de gradiente de gravidade.

Entrada: \mathbf{g}° (definido no sistema de dados), ângulo ψ (Figura 3.1).

- 1 - Transformar os dados observados do sistema de dados para o sistema norte-leste (equações 3.1-3.4).
 - 2 - Interpolar os dados girados para produzir um conjunto de dados mais próximo de uma malha regular (opcional).
 - 3 - Estimar a camada equivalente discreta a partir dos dados interpolados ou não, combinando o Algoritmo 1 e a abordagem de convolução discreta rápida.
 - 4 - Calcular os dados de gradiente de gravidade produzidos pela camada equivalente (dados preditos) nas mesmas coordenadas dos dados observados no sistema norte-leste, sem interpolação.
 - 5 - Transformar os dados observados e preditos do sistema norte-leste para o sistema de dados (equações 3.1-3.4).
-

3.1.2 Critério de seleção da profundidade da camada

Não existe um critério analítico estabelecido na literatura para a escolha da profundidade da camada equivalente. No presente estudo, a escolha da profundidade da camada foi fundamentada no trabalho de DAMPNEY (1969). De acordo com esse critério, a profundidade deve estar situada em um intervalo de 2,5 a 6 vezes o espaçamento entre os dados observados. A referência utilizada para a determinação da profundidade da camada foi aproximadamente 6 vezes o espaçamento entre as linhas de aquisição.

3.1.3 Interpolação dos dados

Os dados e as altitudes foram submetidos a um processo de interpolação, no qual foram calculados os seus valores médios em janelas retangulares de tamanho

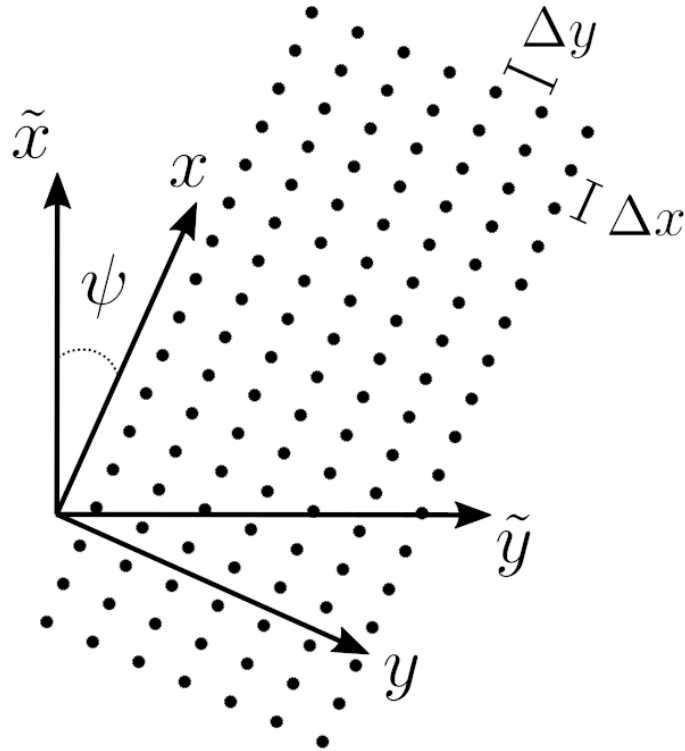


Figura 3.1: Representação esquemática de uma malha regular de dados de gradiente de gravidade (pontos pretos) medidos em um plano horizontal, com espaçamentos constantes Δx e Δy . Esses dados são alinhados com um sistema cartesiano com eixos x e y (sistema de dados). O sistema de dados, por sua vez, é girado por um ângulo ψ em relação ao sistema norte-leste com o eixo \tilde{x} apontando para o norte e o eixo \tilde{y} apontando para o leste. Ambos os sistemas têm o mesmo eixo z apontando verticalmente para baixo.

uniforme. Essas janelas foram posicionadas estrategicamente de forma a garantir que as linhas de aquisição estivessem aproximadamente centralizadas dentro delas (Figura 3.2a-c). Quando as janelas retangulares não continham pontos de dados, os tamanhos das janelas (retângulos vermelhos na Figura 3.2a-c) eram expandidos ao longo da direção perpendicular à linha de aquisição (Figura 3.2b-c). Para situações em que uma janela sem pontos de dados estava localizada no centro das malhas, eram considerados os pontos das janelas adjacentes (Figura 3.2b). Caso essa janela

estivesse na borda, eram considerados os pontos da janela adjacente no interior da malha (Figura 3.2c). As coordenadas horizontais (x_c, y_c) , que representam as coordenadas dos valores médios calculados, correspondem aos pontos centrais dessas janelas (Figura 3.2d). É importante ressaltar que, embora exista uma malha com espaçamento regular em coordenadas horizontais, há um desvio moderado em relação a um plano perfeitamente horizontal. No entanto, ao calcular o produto matriz-vetor por meio da convolução discreta rápida, apenas a primeira coluna da matriz de sensibilidade é considerada. Além disso, é fundamental destacar que os dados preditos não foram calculados nos pontos de dados submetidos à interpolação; em vez disso, foram calculados nos pontos observados originais para garantir a qualidade do ajuste dos dados.

3.1.4 Desempenho computacional

Para quantificar o desempenho computacional do método proposto para o processamento de dados de gradiente de gravidade, utiliza-se a quantidade total de pontos flutuantes (*flops* - *floating-point operations*) associados às operações matriciais realizadas (GOLUB e VAN LOAN (2013)). Inicialmente é estabelecido o número total de *flops* necessários para resolver as equações normais (equação 2.44) de acordo com a abordagem clássica via decomposição de Cholesky (GOLUB e VAN LOAN (2013)):

$$f_{classic} = \frac{5}{6}(NL)^3 + 4(NL)^2, \quad (3.9)$$

em que L é a quantidade de componentes de gradiente de gravidade medidas (equações 3.5–3.8) e N o número de pontos de observação de cada componente.

Para definir o número de *flops* associados ao CGLS padrão (Algoritmo 1) sem explorar a estrutura das matrizes $\mathbf{H}^{\alpha\beta}$, tem-se que (TAKAHASHI *et al.*, 2022):

$$f_{CGLS} = 2N^2L^2 + it(4N^2L + 12N)L, \quad (3.10)$$

em que “*it*” é o número de iterações. Definindo o número de *flops* associados ao método CGLS (Algoritmo 1), considerando que os produtos matriz-vetor são calculados de forma eficiente como convoluções discretas rápidas, obtém-se o número de *flops* associados ao método proposto:

$$f_{ours} = \kappa 12NL \log_2(4N) + 28NL + it(\kappa 12N \log_2(4N) + 64N)L, \quad (3.11)$$

em que $\kappa = 5$. É importante ressaltar que não são considerados os *flops* associados às transformações de dados (Algoritmo 3). A Figura 3.3 mostra o número de *flops* usando o método clássico (linha preta), o método CLGS padrão (linha vermelha)

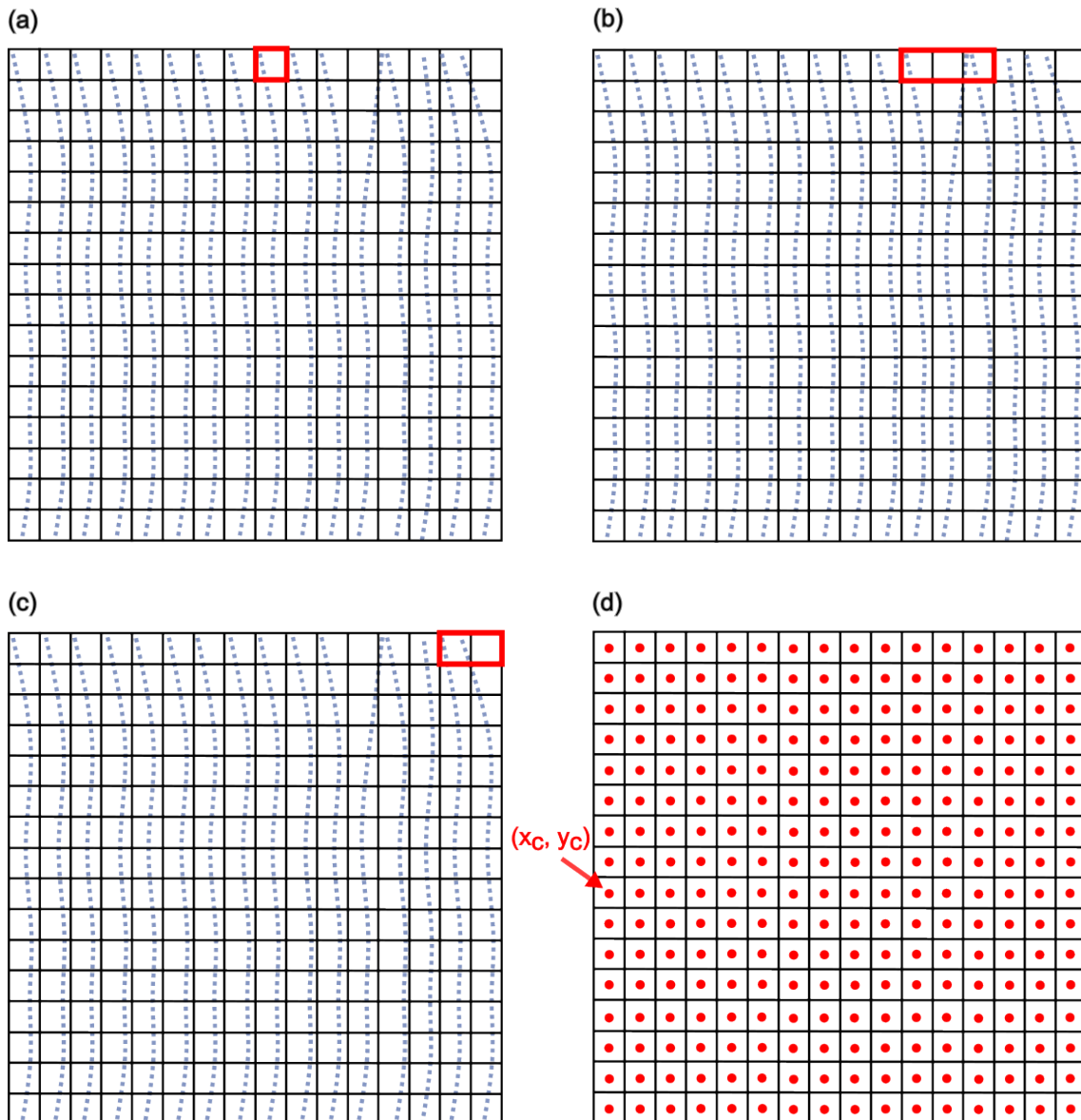


Figura 3.2: Representação esquemática do processo de interpolação dos dados em uma malha horizontal regular. Ilustrações de exemplos de interpolação das linhas de dados adquiridos (linhas tracejadas cinza). As situações consideradas incluem: (a) uma janela retangular (indicada em vermelho) que contém dados em seu interior, (b) expansão da janela (indicada em vermelho) localizada no centro da malha que não contém dados em seu interior e (c) expansão da janela posicionada na borda da malha que também não contém dados em seu interior. (d) Ilustração das coordenadas horizontais (x_c, y_c) dos valores médios calculados, correspondendo aos pontos centrais dessas janelas.

e o método proposto (linha azul). Os dois últimos métodos foram calculados considerando $it = 50$. Este resultado demonstra a excelente eficiência do método de camada equivalente convolucional para processar dados de gradiente de gravidade. Observe que o número de *flops* necessários para estimar a distribuição de massa por

esse método diminuiu em aproximadamente 8 ordens de grandeza em comparação com a abordagem clássica.

A Figura 3.4 mostra o tempo de processamento para resolver o sistema linear com o valor máximo de $N = 10.000$ pontos e $L = 5$ componentes, ou seja, 50.000 dados de gradiente de gravidade usando a camada equivalente clássica (linha preta), o método CGLS padrão (linha vermelha) e o método convolucional (linha Azul). A quantidade de dados para comparação de tempo de processamento é limitada pelo uso da técnica clássica de camada equivalente em um processador Intel(R) Core(TM) i9-9880H CPU @ 2,30GHz com 16 GB de memória RAM.

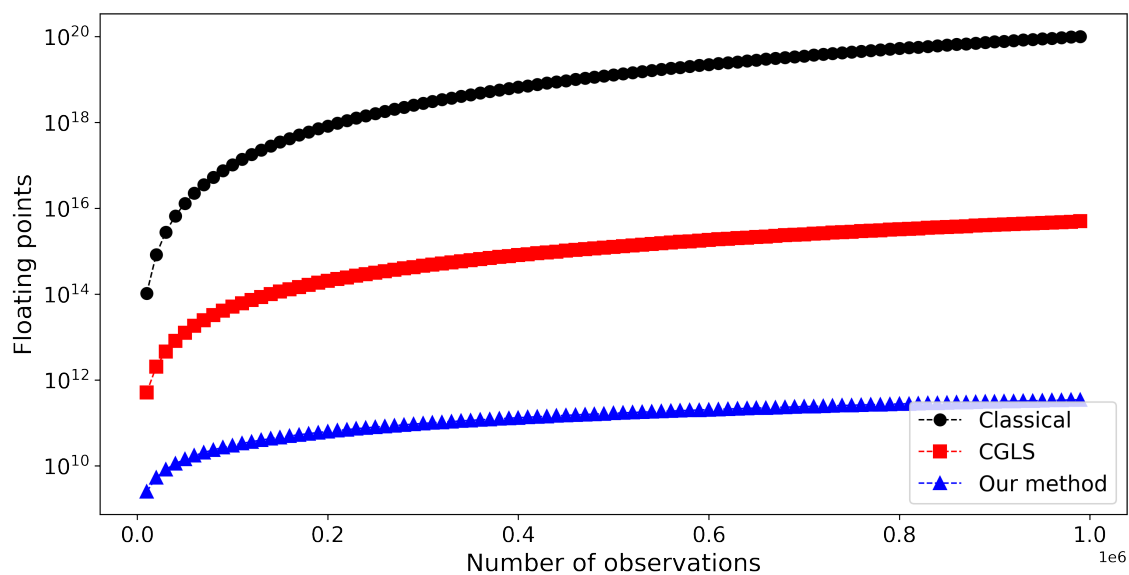


Figura 3.3: Gráfico comparando o número de *flops versus* o número de pontos de observação usando a técnica de camada equivalente clássica (linha preta), CGLS padrão (linha vermelha) e o método convolucional (linha azul) com $N_{it} = 50$ e $L = 5$ componentes.

3.2 Camada equivalente rápida para o processamento de dados magnéticos

3.2.1 Estimativa da distribuição de momento magnético

Conforme apresentado anteriormente, os dados de campos potenciais podem ser descritos por uma combinação linear de funções harmônicas. Portanto, pode-se reproduzir os dados de anomalia de campo total usando o esquema iterativo que resolve numericamente a integral de continuação para cima proposta por SIQUEIRA *et al.* (2017) (Algoritmo 2). Em SIQUEIRA *et al.* (2017), os dados observados \mathbf{d}°

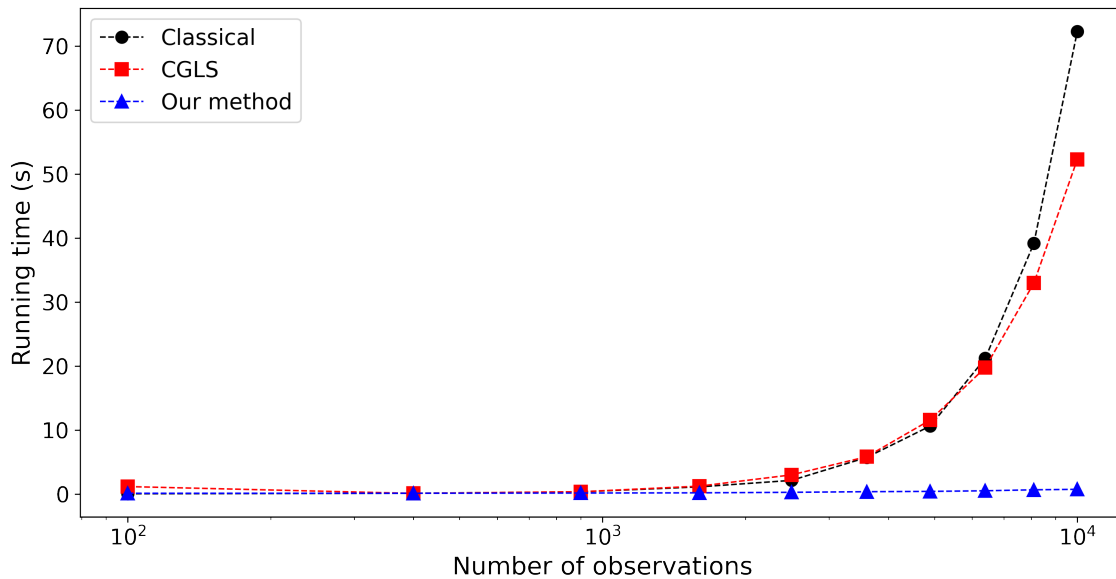


Figura 3.4: Gráfico comparando o tempo de execução *versus* o número de pontos de observação usando a técnica clássica de camada equivalente (linha preta), CGLS padrão (linha vermelha) e o método convolucional (linha azul) com $N_{it} = 50$ e $L = 5$ componentes.

consistem em dados gravimétricos, e o vetor de parâmetros estimados representa uma distribuição de massa sobre a camada. Contudo, é possível aplicar o método de SIQUEIRA *et al.* (2017) ao considerar os dados da anomalia de campo total como os dados observados \mathbf{d}° . Nesse cenário, o vetor de parâmetros estimado $\hat{\mathbf{p}}_c$ (equação 2.23), que ajusta os dados \mathbf{d}° , não reflete uma distribuição de momento magnético dentro da camada equivalente. No entanto, ele pode ser empregado com sucesso para calcular algumas transformações da anomalia de campo total, desde que a transformação não imponha uma mudança de fase a ela, como a continuação para cima ou para baixo e a interpolação. Vale ressaltar que o vetor de parâmetros estimado pelo método de SIQUEIRA *et al.* (2017) não pode ser utilizado para realizar transformações em dados magnéticos que resultem em mudanças de fase, como a redução ao polo.

Para realizar uma transformação de dados magnéticos que resulte em uma mudança de fase, é obrigatório ter a distribuição do momento magnético sobre a camada equivalente que se ajusta à anomalia de campo total observada. Neste trabalho, transforma-se o vetor de parâmetros estimados $\hat{\mathbf{p}}_c$ via SIQUEIRA *et al.* (2017) (algoritmo 2), em um vetor de distribuição de momento magnético $\hat{\mathbf{p}}_m$ (equação 2.40) que se ajusta à anomalia de campo total observada, sem resolver um sistema linear. Isso pode ser obtido substituindo a equação 2.23 na equação 2.40 usando o Teorema

Convolutacional de Fourier (BLAKELY, 1996) para convoluções discretas tal que

$$\hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{m}} = \mathcal{F}^* \left[\frac{\mathcal{F}\{\mathbf{A}_{\mathbf{c}}\} \mathcal{F}\{\hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{c}}\}}{\mathcal{F}\{\mathbf{A}_{\mathbf{m}}\}} \right], \quad (3.12)$$

em que os símbolos \mathcal{F} e \mathcal{F}^* representam, respectivamente, a 2D DFT e a transformada discreta inversa de Fourier 2D (2D IDFT - *2D Inverse DFT*) calculada via FFT 2D.

Uma maneira rápida e eficiente de realizar essa transformação é aproveitando a estrutura BTTB das matrizes de sensibilidade. Usando a abordagem desenvolvida por TAKAHASHI *et al.* (2020, 2022), pode-se reescrever a equação 3.12 da seguinte forma:

$$\mathbf{V}^{\mathbf{m}} = \mathbf{F}_{2Q}^* \left[\frac{\mathbf{L}^{\mathbf{c}} \circ (\mathbf{F}_{2Q} \mathbf{V}^{\mathbf{c}} \mathbf{F}_{2P})}{\mathbf{L}^{\mathbf{m}}} \right] \mathbf{F}_{2P}^*, \quad (3.13)$$

em que \mathbf{F}_{2Q} e \mathbf{F}_{2P} são as $2Q \times 2Q$ e $2P \times 2P$ matrizes DFT unitárias, sendo $QP = N$; “*” representa o complexo conjugado, ou seja, o lado direito é a Transformada Discreta de Fourier Inversa 2D (IDFT) de uma deconvolução discreta 2D; $\mathbf{V}^{\mathbf{m}}$ e $\mathbf{V}^{\mathbf{c}}$ são matrizes auxiliares que contêm, respectivamente, o vetor de distribuição de momento magnético desejado $\hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{m}}$ (equação 2.40) e o vetor de parâmetros $\hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{c}}$ (equação 2.23) estimado usando SIQUEIRA *et al.* (2017); $\mathbf{L}^{\mathbf{c}}$ e $\mathbf{L}^{\mathbf{m}}$ são matrizes $2Q \times 2P$ que contêm os autovalores das matrizes BCCB e são compostas por elementos da primeira coluna das matrizes de sensibilidade das equações $\mathbf{A}_{\mathbf{c}}$ (equação 2.23) e $\mathbf{A}_{\mathbf{m}}$ (equação 2.40), respectivamente.

3.2.2 Análise de estabilidade

A estabilidade da solução da camada equivalente magnética é avaliada seguindo o procedimento descrito em SIQUEIRA *et al.* (2017). Esse procedimento consiste na geração de conjuntos de dados $\mathbf{d}_{\ell}^{\circ}$ contaminados com ruído por meio da adição de L diferentes sequências de ruídos pseudoaleatórios com média zero. O objetivo é estimar uma distribuição de momento magnético $\hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{m}\ell}$ sobre a camada equivalente para cada conjunto de dados. Em seguida, são calculadas duas quantidades:

$$\delta d_{\ell} = \frac{\|\mathbf{d}_{\ell}^{\circ} - \mathbf{d}^{\circ}\|_2}{\|\mathbf{d}^{\circ}\|_2}, \ell = 1, \dots, L, \quad (3.14)$$

e

$$\delta p_{\ell}^m = \frac{\|\mathbf{P}_{\mathbf{m}\ell} - \mathbf{P}_{\mathbf{m}}\|_2}{\|\mathbf{P}_{\mathbf{m}}\|_2}, \ell = 1, \dots, L, \quad (3.15)$$

em que $\|\cdot\|_2$ representa a norma euclidiana. As quantidades δd_{ℓ} e δp_{ℓ}^m representam os resíduos relativos dos dados magnéticos e das distribuições de momento magnético, respectivamente. A estabilidade é avaliada a partir da seguinte inequação (ASTER

et al., 2018):

$$\delta p_\ell^m \leq k \delta d_\ell, \ell = 1, \dots, L, \quad (3.16)$$

em que o parâmetro k é o coeficiente angular da reta formada pelos pontos δp_ℓ^m e δd_ℓ , e representa o número de condição da matriz a ser invertida. Uma inclinação mais acentuada (valores maiores de k) indica um problema mal posto, uma vez que sua solução é instável, enquanto uma inclinação mais suave (valores menores de k) sugere uma solução estável.

3.2.3 Procedimentos práticos

As matrizes de sensibilidade são simétricas considerando uma malha regular em uma superfície plana. No entanto, a metodologia desenvolvida por SIQUEIRA *et al.* (2017) é robusta e permite dados espaçados irregularmente em uma superfície irregular para estimar o vetor de parâmetros. Em SIQUEIRA *et al.* (2017), as fontes equivalentes estão localizadas exatamente abaixo de cada ponto observado. Embora o método desenvolvido exija que as fontes equivalentes sejam dispostas em uma malha regular para estimar o vetor de distribuição de momento magnético, essa abordagem visa manter a robustez do método de SIQUEIRA *et al.* (2017) para processar dados magnéticos rapidamente. Portanto, reparametriza-se camada equivalente em uma malha regular. As fontes equivalentes regularmente espaçadas $\hat{p}_k^m \equiv \hat{p}^m(x_k, y_k, z_k)$, $k = 1, \dots, M_R$, podem ser obtidas usando a seguinte equação

$$\hat{p}_k^m = \sum_{j=1}^M \hat{p}_j^m \omega_{kj}, \quad (3.17)$$

em que M_R é o número de fontes equivalentes reparametrizadas e ω_{kj} é uma função harmônica dada por

$$\omega_{kj} = \frac{\Delta \bar{s}}{2\pi} \frac{z_k - z_0}{[(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2 + (z_k - z_0)^2]^{3/2}}. \quad (3.18)$$

em que $\Delta \bar{s}$ é um valor médio do elemento de área. Observe que as equações 3.17 e 3.18 são a versão discreta da integral de continuação para cima (HENDERSON, 1970) dada na equação 2.13.

Para obter uma camada equivalente de momento magnético a partir de dados espaçados irregularmente, segue-se estas etapas:

1. Estimar as fontes equivalentes espaçadas irregularmente ($\hat{p}_j^m \equiv \hat{p}^m(x_j, y_j, z_0)$, $j = 1, \dots, M$ e $M = N$) usando o método SIQUEIRA *et al.* (2017) (Figura 3.5a).

2. Reorganizar as fontes pontuais em uma malha regular com coordenadas (x_k, y_k, z_k) , em que $z_k = z_0 - \delta z$, $\delta z > 0$ e $k = 1, \dots, M_R$, para obter fontes equivalentes regularmente espaçadas conforme mostrado na Figura 3.5b.
3. Estimar as fontes pontuais de distribuição do momento magnético \hat{p}_k^m na mesma malha regular com coordenadas (x_k, y_k, z_k) , em que $z_k = z_0 - \delta z$, $\delta z > 0$ e $k = 1, \dots, M_R$.
4. Calcular o dado predito (anomalias de campo total/reduzida ao polo) nos pontos observados com coordenadas x_i, y_i e z_i .

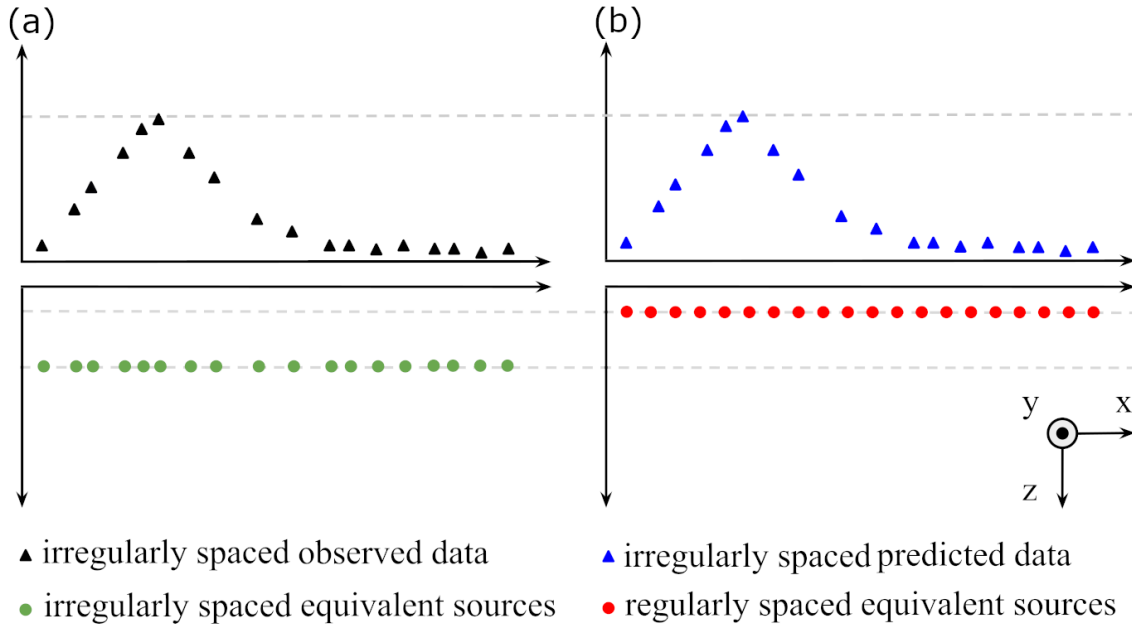


Figura 3.5: Esboços 2D de pontos observados e preditos e fontes equivalentes seguindo as etapas da seção 3.2.3 para obter uma camada equivalente de momento magnético a partir de dados irregularmente espaçados. a) Dados magnéticos nos pontos (x_i, y_i, z_i) (triângulos pretos) reproduzidos pelas fontes equivalentes irregularmente espaçadas nos pontos (x_j, y_j, z_0) (pontos verdes). b) Dados magnéticos nos pontos (x_i, y_i, z_i) (triângulos azuis) preditos pelas fontes equivalentes regularmente espaçadas nos pontos (x_k, y_k, z_k) (pontos vermelhos).

3.2.4 Desempenho computacional

O custo computacional para estimar o vetor momento magnético usando a camada equivalente clássica em termos de *flops* depende do número de multiplicações matriz-vetor, da solução de um sistema linear e do uso da regularização Tikhonov de ordem zero, ou seja:

$$f_{classical} = \frac{5}{6}N^3 + 4N^2 + N. \quad (3.19)$$

O número total de *flops* usando o método desenvolvido é dado por

$$f_{ours} = N^{it}(3N + 2N^2) + 16\kappa N \log_2(4N) + 2N^2 + 72N, \quad (3.20)$$

em que $\kappa = 5$ para o algoritmo radix-2 (VAN LOAN, 1992); $N^{it}(3N + 2N^2)$ é o número de *flops* necessários para aplicar a técnica de SIQUEIRA *et al.* (2017) (algoritmo 2); $2N^2$ é o número de *flops* necessários para reparametrização das fontes equivalentes em uma grade regular (equação 3.17); $\kappa 4N \log_2(4N)$ é o número de *flops* necessários para calcular a matriz \mathbf{L}^c na equação 3.13 via 2D FFT; $\kappa 4N \log_2(4N)$ é o número de *flops* necessários para calcular $\mathbf{F}_{2Q} \mathbf{V}^c \mathbf{F}_{2P}$; $24N$ é o número de *flops* para calcular o produto de Hadamard $\mathbf{L}^c \circ (\mathbf{F}_{2Q} \mathbf{V}^c \mathbf{F}_{2P})$; $\kappa 4N \log_2(4N)$ é o número de *flops* necessários para calcular a matriz \mathbf{L}^m na equação 3.13 via 2D FFT; $48N$ é o número de *flops* para calcular a deconvolução 2D da matriz \mathbf{L}^m ; $\kappa 4N \log_2(4N)$ é o número de *flops* para calcular o IDFT 2D de \mathbf{V}^m .

Capítulo 4

Aplicação a dados sintéticos

4.1 Dados sintéticos de gradiente de gravidade

Com o objetivo de evidenciar a eficácia do método proposto para o processamento conjunto das componentes do tensor de gradiente de gravidade, foram simulados dados dos sistemas AGG-Falcon (Figure 4.2) e FTG (Figure 4.6). Esses dados foram gerados a partir de modelos contendo dois corpos prismáticos com um contraste de densidade de $1,0 \text{ g/cm}^3$. O prisma menor está localizado a uma profundidade de 100 m e possui dimensões laterais de 2.000 m ao longo do eixo x , 1.000 m ao longo do eixo y e 300 m ao longo do eixo z . O prisma maior também está em uma profundidade de 100 m, porém tem dimensões de 5.000 m ao longo do eixo x , 2.000 m ao longo do eixo y e 300 m ao longo do eixo z . Assim como em TAKAHASHI *et al.* (2022), foi verificado que esse método também pode lidar com dados em superfícies de observação irregulares.

Ambos os conjuntos de dados simulados seguem o mesmo padrão de voo utilizado em um levantamento real de gradiometria aerotransportada sobre a área de teste em Kauring, Austrália (MARTINEZ e LI, 2012). É importante destacar que os pontos de observação estão dispostos de maneira moderadamente irregular em relação a uma malha regular no plano horizontal. Para simular erros experimentais, os conjuntos de dados foram contaminados com um ruído gaussiano pseudoaleatório com média zero e desvio padrão de 1,0 eotvos. As componentes sintéticas do tensor de gradiente de gravidade foram calculadas ao longo de 114 linhas de voo, abrangendo $N = 164.624$ pontos de observação a uma altitude variando entre -296 e -440 m (Figura 4.1). Posteriormente, o conjunto de dados foi interpolado (etapa 3 do Algoritmo 3) para obter 1275 pontos em cada uma das 114 linhas de voo, totalizando 145.350 pontos interpolados.

Este método foi aplicado aos dados simulados do sistema AGG-Falcon e FTG usando a mesma camada equivalente composta por uma fonte equivalente direta-

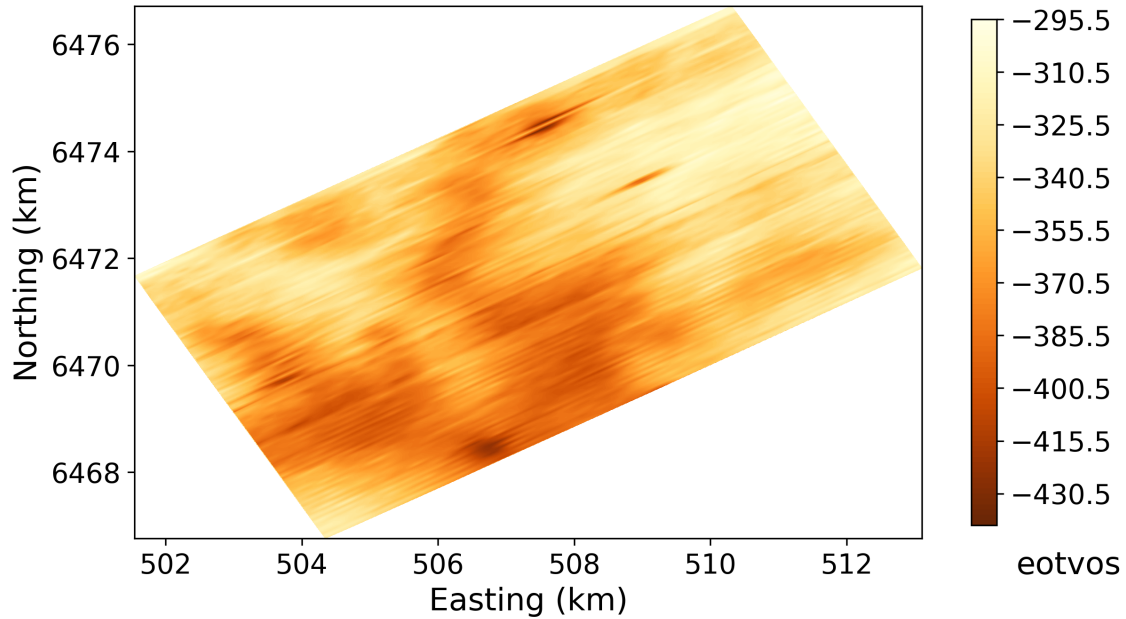


Figura 4.1: Altitude GPS referenciada para WGS84, sobre o local de teste em Kauring, Austrália.

mente abaixo de cada ponto de observação, em uma profundidade constante $z_0 = 0$ m. As transformações entre o sistema norte-leste e o sistema de dados (Figura 3.1 e passos 1 e 5 do Algoritmo 3) foram calculadas usando $\psi = 30^\circ$ e os dados simulados foram interpolados (etapa 2 do Algoritmo 3). Nestes testes sintéticos, que simulam dados obtidos utilizando os sistemas AGG-Falcon e FTG, os dados preditos não são computados nos pontos interpolados; em vez disso, eles são calculados nos pontos de observação originais para manter a precisão do ajuste dos dados.

As continuações para cima dos dados sintéticos foram realizadas em uma superfície com $z = -700$ m. Além disso, foram gerados dados simulados nessa mesma superfície para fins de comparação com os resultados da continuação para cima. Esses dados foram corrompidos com ruídos gaussianos pseudoaleatórios, com média zero e desvio padrão de 1,0 eotvos. Nesse contexto, o conjunto de dados simulados na superfície continuada é denominado "continuação para cima verdadeira", e a diferença entre a continuação para cima verdadeira e a continuação para cima calculada é identificada como "resíduos da continuação".

4.1.1 Teste sintético do sistema AGG-Falcon

As componentes simuladas do sistema AGG-Falcon \mathbf{g}_{xy} e \mathbf{g}_{uv} são mostradas na Figura 4.2. Cada componente possui $N = 164.624$ pontos de observação, totalizando $N_t = 329.248$ dados simulados. Depois de transformar os dados simulados para o sistema norte-leste (etapa 1 do Algoritmo 3), os dados foram interpolados (etapa 3

do Algoritmo 3) para obter um total de 290.700 dados interpolados. Posteriormente, os dados preditos foram calculados no sistema norte-leste (etapas 3 e 4 do Algoritmo 3) utilizando a distribuição de massa que foi estimada em 39,02 segundos. A Figura 4.3a e 4.3b exibe os resíduos entre o dado simulado (Figura 4.2) e o dado predito das duas componentes do sistema AGG-Falcon. Além disso, os histogramas dos resíduos são exibidos nos cantos superiores esquerdos. Os valores médios dos resíduos são de -0,03 e -0,07 eotvos, enquanto os desvios padrão são de 0,54 e 1,42 eotvos para as componentes \mathbf{g}_{xy} e \mathbf{g}_{uv} , respectivamente. Esses resultados confirmam um ajuste excelente dos dados.

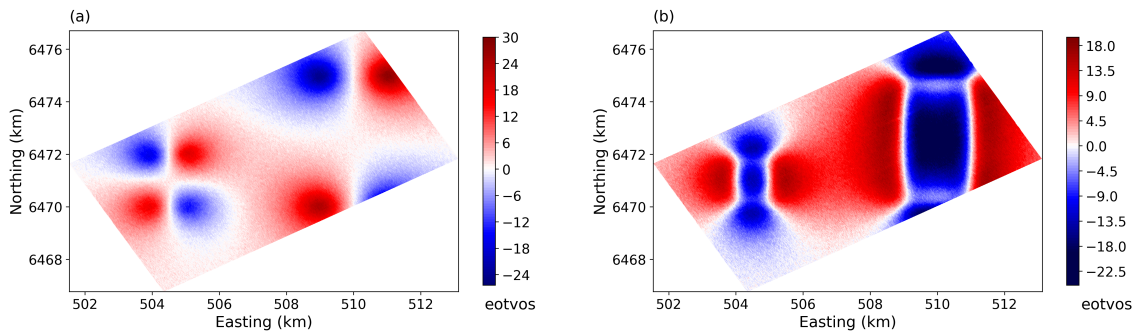


Figura 4.2: Dados sintéticos do sistema AGG-Falcon. Componentes simuladas (a) \mathbf{g}_{xy} e (b) \mathbf{g}_{uv} contaminadas com ruído em 164.624 pontos de observação.

Continuação para cima do dado sintético AGG-Falcon

Utilizando a camada equivalente estimada nos dados sintéticos AGG-Falcon, realizou-se o cálculo da continuação para cima das componentes \mathbf{g}_{xy} e \mathbf{g}_{uv} dos dados AGG-Falcon (conforme apresentado na Figura 4.4). Na Figura 4.5, são exibidos os resíduos da continuação. Notavelmente, os resíduos são mínimos, caracterizados por média e desvio padrão baixos. Esses resultados indicam que a profundidade selecionada para a camada equivalente, bem como a estimativa da mesma, com base nas duas componentes dos dados, são satisfatórias.

4.1.2 Teste sintético do sistema FTG

A Figura 4.6 apresenta as componentes FTG simuladas \mathbf{g}_{xx} , \mathbf{g}_{xy} , \mathbf{g}_{xz} , \mathbf{g}_{yy} , \mathbf{g}_{yz} e \mathbf{g}_{zz} . Cada componente possui um total de 164.624 pontos de observação, totalizando 987.744 dados simulados. Após a transformação dos dados simulados para o sistema norte-leste (etapa 1 do Algoritmo 3), esses dados foram interpolados para obter 1275 pontos interpolados por linha, totalizando 872.100 dados interpolados. Como somente 5 componentes são medidas no sistema FTG, ou seja, \mathbf{g}_{xx} , \mathbf{g}_{xy} , \mathbf{g}_{xz} e \mathbf{g}_{yy} , foram utilizados um total de $Nt = 726.750$ dados interpolados. Em seguida, os

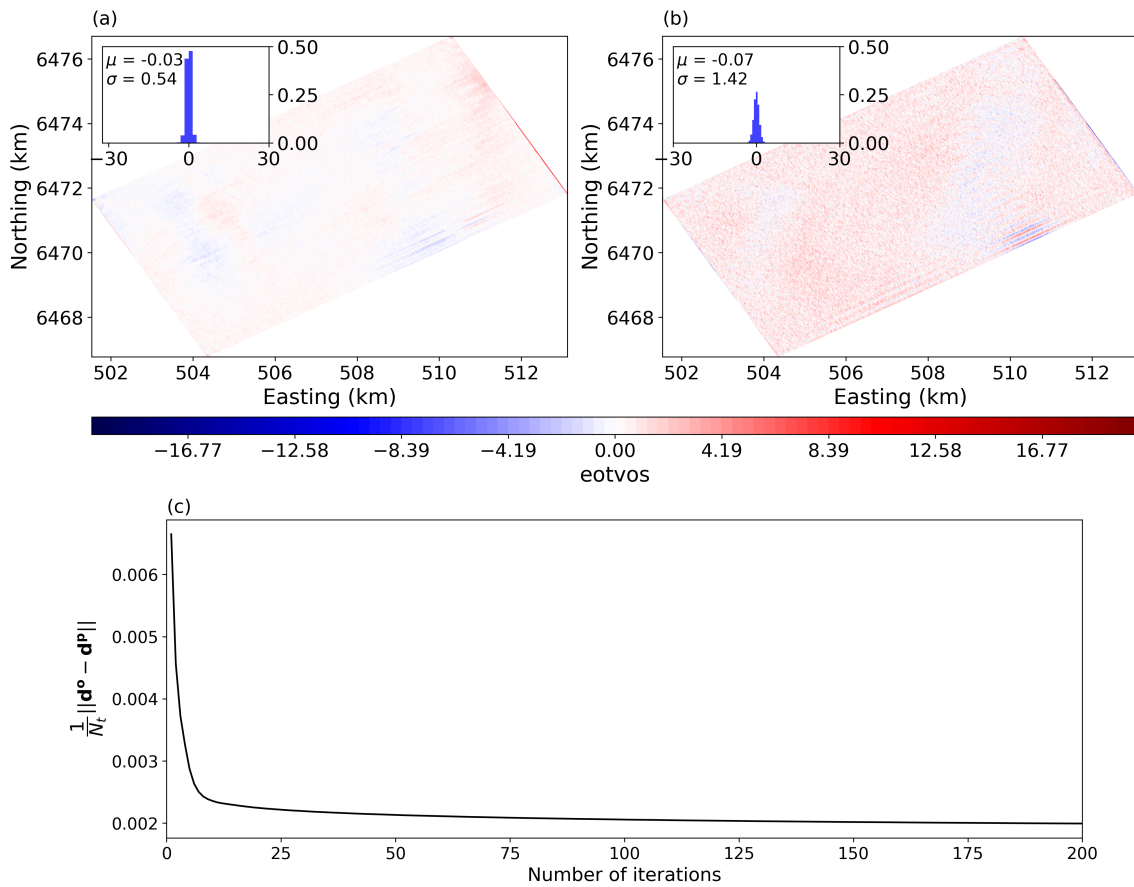


Figura 4.3: Dados Sintéticos do sistema AGG-Falcon. Resíduos e os histogramas dos resíduos entre o dado simulado (Figura 4.2a-b) e o correspondente dado predito (a) \mathbf{g}_{xy} e (b) \mathbf{g}_{uv} (em eotvos). A média μ e os desvios padrão σ (em eotvos) são apresentados em cada histograma. (c) Curva de convergência obtida ao aplicar a metodologia desenvolvida aos dados sintéticos do AGG-Falcon.

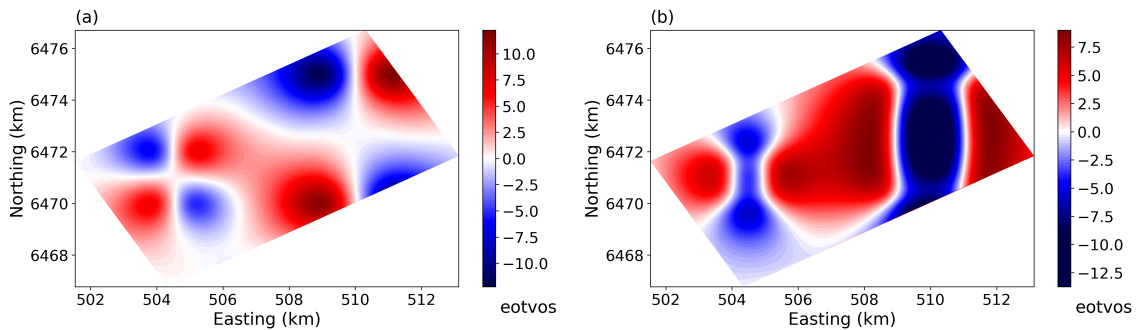


Figura 4.4: Continuação para cima dos dados sintéticos AGG-Falcon. Componentes (a) \mathbf{g}_{xy} e (b) \mathbf{g}_{uv} calculadas em $z = -700$ m.

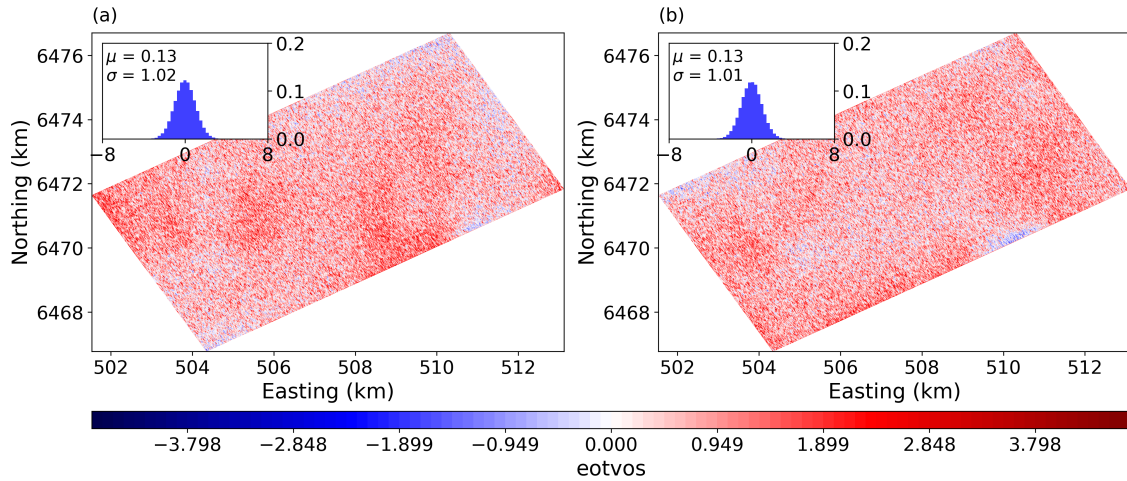


Figura 4.5: Continuação para cima dos dados sintéticos AGG-Falcon. Os resíduos e os histogramas dos resíduos são mostrados como inserções (a-b) entre a continuação para cima verdadeira e as correspondentes calculadas (Figura 4.4a-b) (a) \mathbf{g}_{xy} e (b) \mathbf{g}_{uv} . A média μ e os desvios padrão σ (em eotvos) são mostrados em cada histograma.

dados preditos foram calculados no sistema norte-leste (etapas 3 e 4 do Algoritmo 3) utilizando a distribuição de massa que foi estimada em 101,02 segundos. Essa distribuição de massa estimada resultou em dados preditos que se ajustam de maneira adequada as componentes simuladas do sistema FTG (Figura 4.6a-f). Essa conclusão é corroborada pela Figura 4.7a-f, que mostra os resíduos entre os dados FTG simulados (Figura 4.6a-f) e os dados FTG preditos no sistema de dados. Os histogramas dos resíduos, apresentados na Figura 4.7 como inserções, também confirmam a aceitabilidade do ajuste dos dados, com médias variando entre -0,16 e 0,23 eotvos, e desvios padrão variando entre 1,10 e 1,47 eotvos.

Continuação para cima do dado sintético FTG

Na Figura 4.8 é apresentada a continuação para cima calculada das componentes \mathbf{g}_{xx} , \mathbf{g}_{xy} , \mathbf{g}_{xz} , \mathbf{g}_{yy} , \mathbf{g}_{yz} e \mathbf{g}_{zz} do tensor de gradiente de gravidade. Os resíduos de continuação, que representam as diferenças entre os dados da continuação verdadeiros e os dados calculados (Figura 4.8a-f), estão ilustrados na Figura 4.9a-f. Mais uma vez, observa-se que o ajuste desses dados foi excelente, o que valida a eficácia de da abordagem desenvolvida na realização de transformações dos dados de gradiente de gravidade.

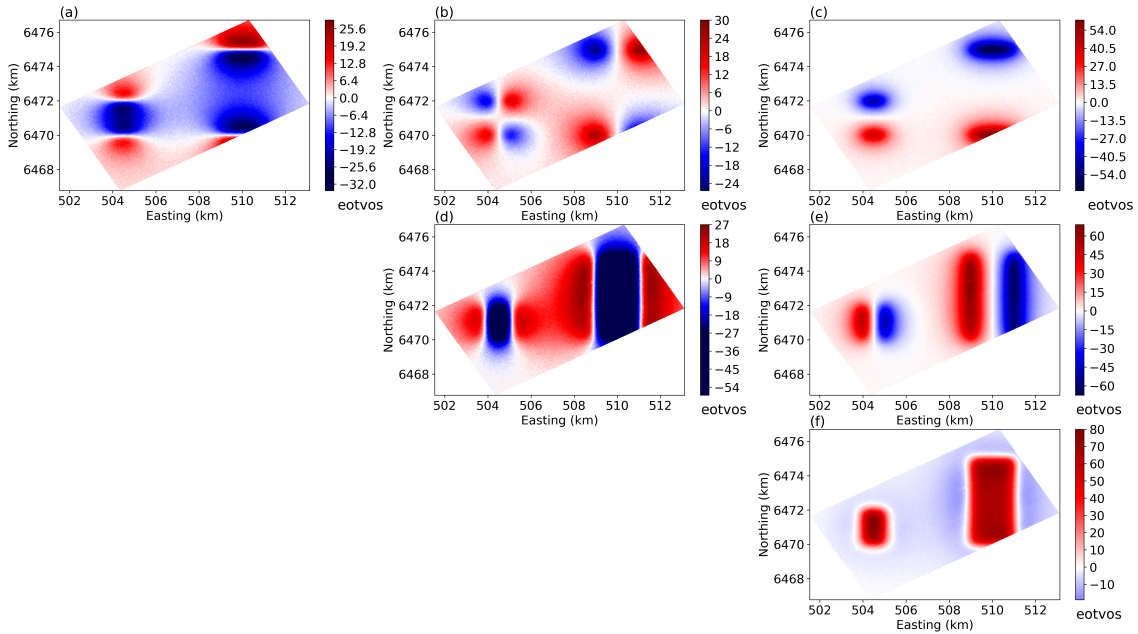


Figura 4.6: Dados sintéticos do sistema FTG. Componentes simuladas (a) g_{xx} , (b) g_{xy} , (c) g_{xz} , (d) g_{yy} , (e) g_{yz} e (f) g_{zz} contaminadas com ruídos em 164.624 pontos de observação.

4.2 Dados sintéticos magnéticos

4.2.1 Teste sintético

Foi conduzido um teste com dados sintéticos simulando uma fonte magnética isolada. O modelo simulado é um corpo prismático (projeção horizontal apresentada na Figura 4.10a) com intensidade de magnetização de 8 A/m, topo em 0,45 km de profundidade e base em 3 km. Foi empregada a mesma configuração do levantamento aéreo original, com altitudes variando de -0,6 a -1,5 km e linhas de voo separadas por 0,5 km. A direção de magnetização total da fonte simulada tem uma inclinação de -30° e uma declinação de -10° . O campo geomagnético foi simulado com -40° de inclinação e -20° de declinação. Os 24.000 pontos simulados de anomalia de campo total foram corrompidos com um ruído pseudoaleatório com média zero e 5 nT de desvio padrão.

Inicialmente, cada fonte equivalente foi colocada diretamente abaixo de cada ponto de observação, para utilizar o método de SIQUEIRA *et al.* (2017). Essas fontes foram colocadas em profundidade constante $z_0 = 0,4$ km considerando o critério de DAMPNEY (1969). Após 100 iterações, foi estimado um vetor de parâmetros $\hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{c}}$ que ajusta a anomalia de campo total com a norma dos resíduos apresentada na linha tracejada vermelha na Figura 4.11. Posteriormente, a camada equivalente foi reparametrizada em uma malha regular de 154×154 pontos (com um total de

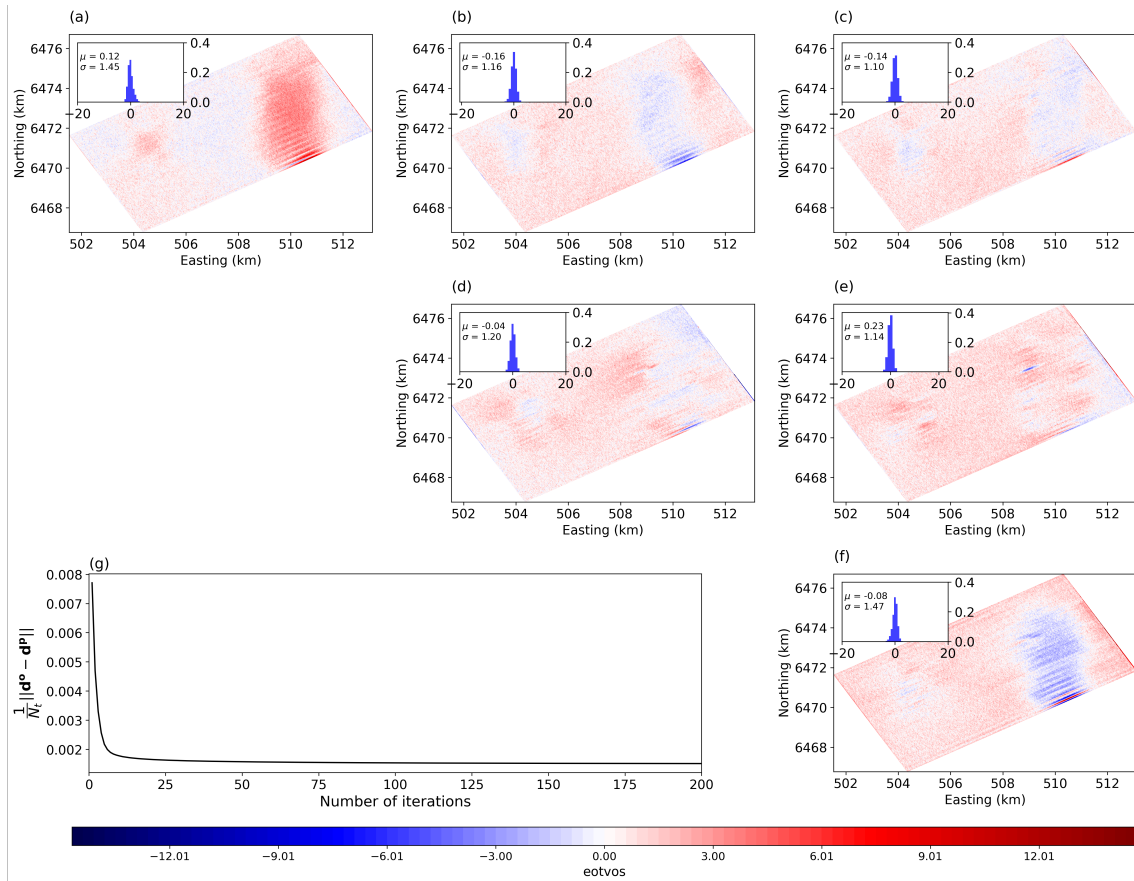


Figura 4.7: Resíduos, juntamente com os histogramas dos resíduos representados como inserções, entre as componentes (Figura 4.6a-f) e a correspondente componente predita (a) g_{xx} , (b) g_{xy} , (c) g_{xz} , (d) g_{yy} , (e) g_{yz} e (f) g_{zz} (em eotvos). Em cada histograma são apresentadas as médias μ e os desvios padrão σ (em eotvos). (g) Curva de convergência obtida ao aplicar a metodologia desenvolvida aos dados FTG sintéticos.

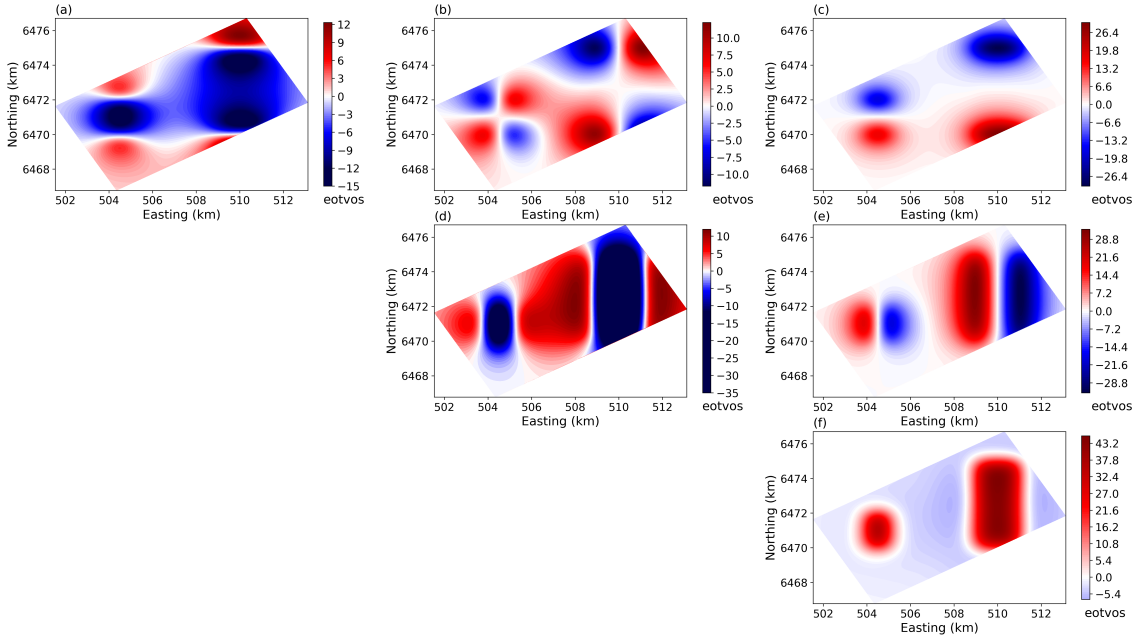


Figura 4.8: Continuação para cima dos dados sintéticos FTG. Componentes (a) \mathbf{g}_{xx} , (b) \mathbf{g}_{xy} , (c) \mathbf{g}_{xz} , (d) \mathbf{g}_{yy} , (e) \mathbf{g}_{yz} e (f) \mathbf{g}_{zz} calculadas em $z = -700$ m.

23.716 fontes equivalentes) em uma profundidade de $z_k = 0,2$ km (equação 3.17). Essa profundidade foi escolhida levando em consideração o gráfico da Figura 4.11, que mostra que a norma dos resíduos aumenta apenas para profundidades muito próximas à camada estimada via SIQUEIRA *et al.* (2017) ($z_0 > z_k$). Assim, foram iniciados os passos descritos na seção 3.2.3 para estimar a distribuição de momento magnético $\hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{m}}$ (Figura 4.10b). Essa distribuição de momento magnético $\hat{\mathbf{p}}_{\mathbf{m}}$ produz um ajuste de dados muito bom, corroborado tanto pelos resíduos (Figura 4.12b) entre a anomalia RTP verdadeira e a calculada (Figura 4.12a), quanto pelos resíduos (Figura 4.10d) entre o dado simulado (Figura 4.10a) e a anomalia de campo total predita (Figura 4.10b).

4.2.2 Teste de estabilidade

Nos testes de estabilidade realizados, a estimativa da distribuição do momento magnético foi obtida utilizando três abordagens: (1) a técnica proposta (equação 3.13), (2) a técnica clássica da camada equivalente sem regularização e (3) a técnica clássica da camada equivalente com regularização de Tikhonov de ordem zero. O modelo simulado consistia em um corpo prismático com uma intensidade de magnetização de 8 A/m, com o topo a 0,1 km de profundidade e a base a 0,2 km. As dimensões horizontais do prisma eram equivalentes as apresentadas na Figura 4.10a. Foram utilizados 50×50 pontos de observação dispostos em uma malha regular, com espaçamento de 0,2 km e altura de 0,3 km.

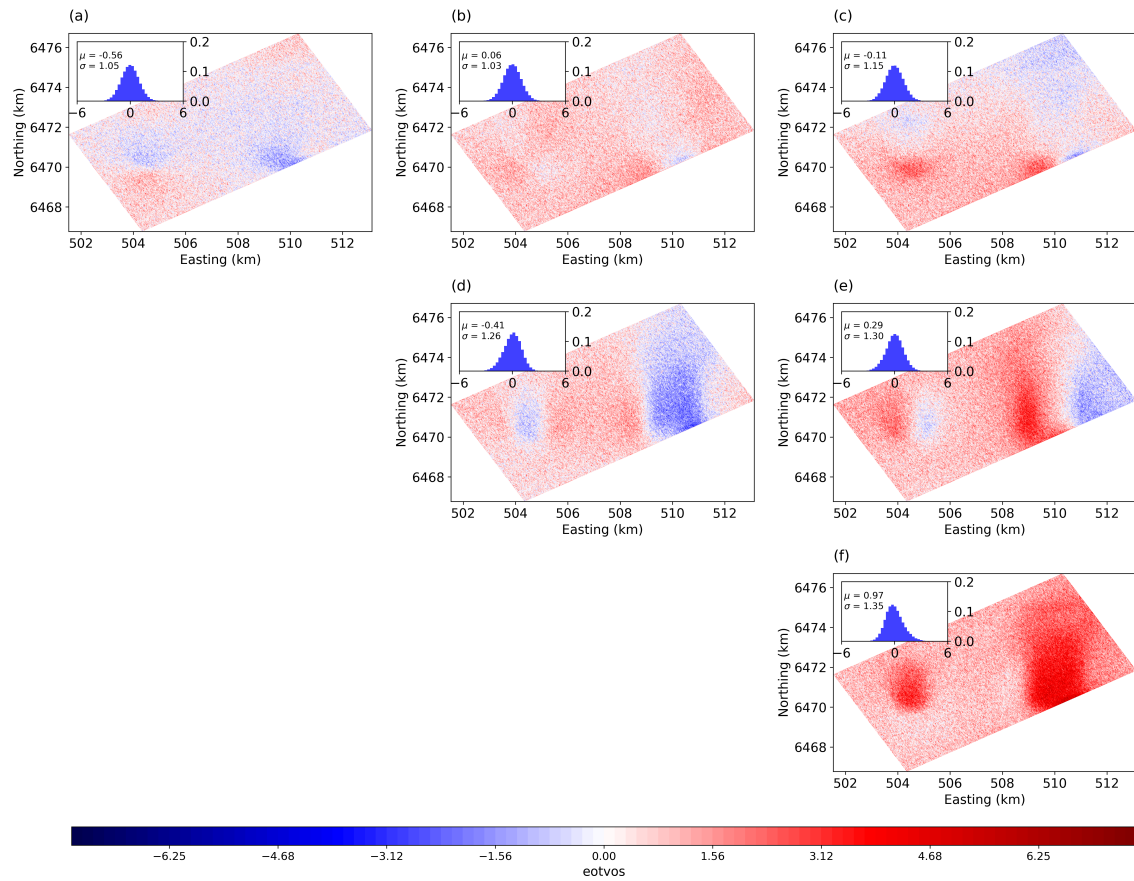


Figura 4.9: Continuação para cima dos dados sintéticos FTG. Os resíduos e os histogramas dos resíduos são mostrados como inserções (a-f) entre a continuação para cima verdadeira e as correspondentes calculadas (Figura 4.8a-f) (a) \mathbf{g}_{xx} , (b) \mathbf{g}_{xy} , (c) \mathbf{g}_{xz} , (d) \mathbf{g}_{yy} , (e) \mathbf{g}_{yz} e (f) \mathbf{g}_{zz} . A média μ e os desvios padrão σ (em eotvos) são mostrados em cada histograma.

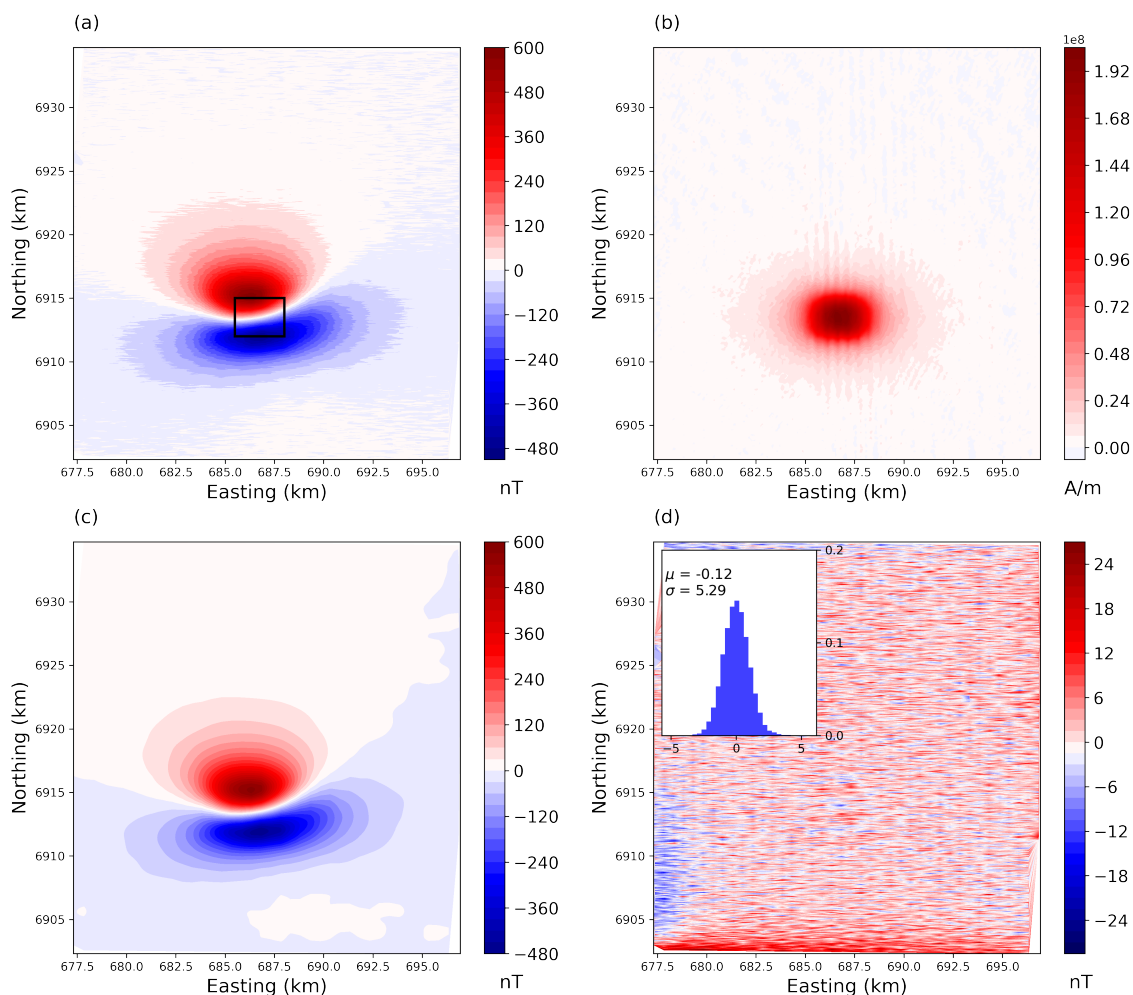


Figura 4.10: Aplicação a dados magnéticos sintéticos. (a) Anomalia de campo total produzida por uma fonte prismática (a projeção horizontal é mostrada no retângulo preto) e contaminada com ruído pseudoaleatório, (b) distribuição do momento magnético estimada pelo método magnético proposto, (c) Anomalia de campo total predita (d) Resíduos entre os dados de anomalia de campo total simulados (painel a) e os dados preditos (painel b) através da distribuição de momento magnético estimada. A inserção mostra o histograma dos resíduos com média μ e desvio padrão σ .

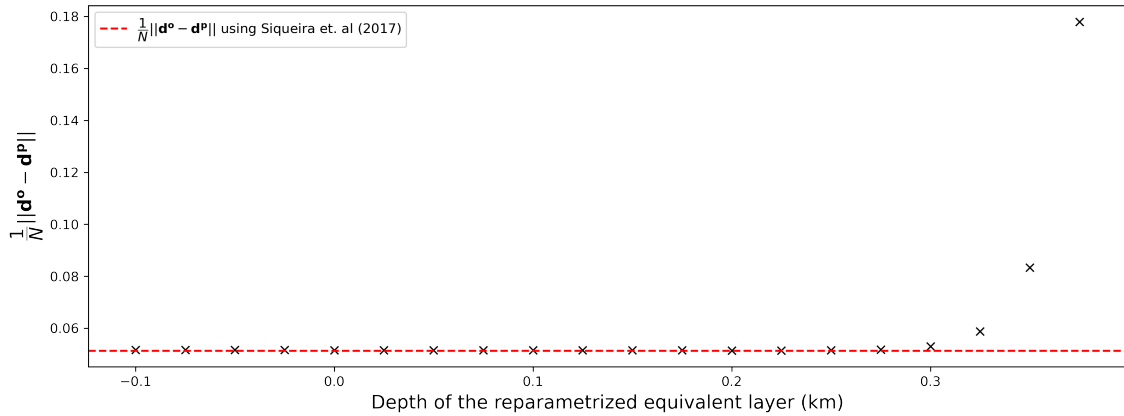


Figura 4.11: Aplicação a dados sintéticos. Gráficos da norma dos resíduos *versus* diferentes profundidades da camada equivalente reparametrizada usando a equação 3.17. A linha vermelha tracejada representa a norma dos resíduos entre a anomalia de campo total simulada e a anomalia de campo total predita pela camada equivalente estimada via SIQUEIRA *et al.* (2017).

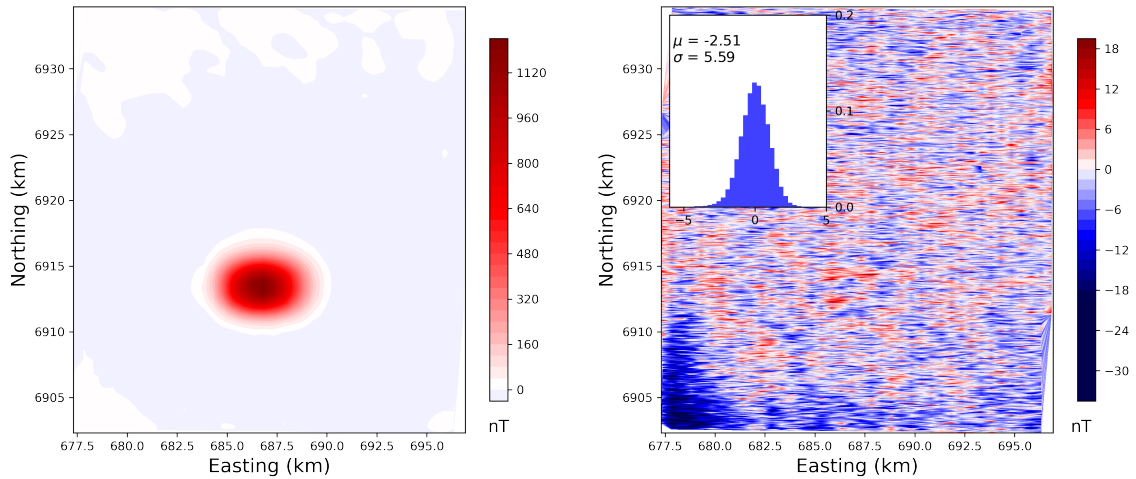


Figura 4.12: Aplicação a dados magnéticos sintéticos. (a) Anomalia RTP calculada usando a distribuição do momento magnético da Figura 4.10b e (b) Resíduos entre os dados de anomalia RTP verdadeira e anomalia RTP calculada (painel a). A inserção mostra o histograma dos resíduos com média μ e desvio padrão σ .

Foram geradas 50 sequências de ruído pseudoaleatório com média zero e desvio padrão variando entre 1 nT e 50 nT. Cada fonte equivalente foi posicionada diretamente abaixo de cada ponto de observação, em uma profundidade de 0,2 km. Foram realizados dois testes, considerando fontes com magnetização induzida em alta latitude (Figura 4.13a - inclinação de -60° e declinação de -10°) e em baixa latitude (Figura 4.13b - inclinação de -10° e declinação de -10°). A análise mostrou que em ambos os casos, o coeficiente angular k estimado por meio das soluções clássicas (linha rosa) foi significativamente maior do que aquela gerada tanto pelo método proposto (linha vermelha) quanto pela camada equivalente clássica com regularização de Tikhonov de ordem zero (linha verde). Essa evidência sugere fortemente que o método proposto produz uma solução estável.

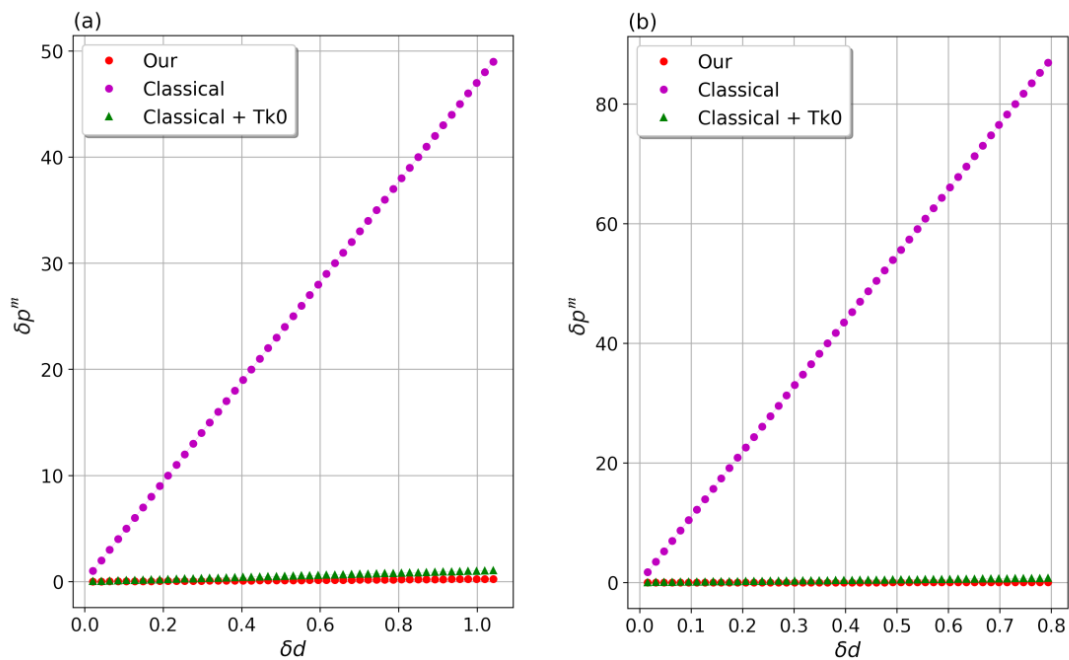


Figura 4.13: Teste de estabilidade. Gráficos de resíduos relativos dos dados magnéticos δd_ℓ versus resíduos relativos da distribuição de momento magnético δp_ℓ^m em (a) alta latitude (inclinação de -60° e declinação de -10°) e (b) baixa latitude (inclinação de -10° e declinação de -10°). As linhas coloridas representam as regressões lineares aplicadas aos 50 conjuntos de dados usando o método proposto (em vermelho), a técnica da camada equivalente clássica (em rosa) e técnica da camada equivalente clássica com regularização de Tikhonov de ordem zero (em verde).

Capítulo 5

Aplicação a dados reais

5.1 Dados reais de gradiente de gravidade

O método desenvolvido para processamento de dados de gradiente de gravidade foi aplicado aos dados AGG-Falcon sobre o local de teste em Kauring, Austrália (MARTINEZ e LI, 2012) e aos dados FTG sobre o domo de sal Vinton, Louisiana, EUA (ENNEN e HALL, 2011; OLIVEIRA JR e BARBOSA, 2013).

Os dados reais apresentam geometrias distintas, possibilitando a realização de continuação para cima em altitudes diferentes para cada situação. É relevante observar que, uma vez que se trata de dados reais, comparações diretas com uma continuação para cima verdadeira, como aquela realizada com os dados sintéticos, não são viáveis.

5.1.1 Dados AGG-Falcon sobre o local de teste em Kauring, Austrália

As componentes observadas \mathbf{g}_{xy} e \mathbf{g}_{uv} (Figura 5.1a-b) dos dados AGG-Falcon no local de teste em Kauring, Austrália, consistem em 114 linhas orientadas noroeste-sudeste com espaçamento entre linhas de 50 m, totalizando 164.624 pontos observados em uma altitude variando de -296 a -440 m (Figura 4.1). Esses dados foram transformados para o sistema norte-leste (etapa 1 do Algoritmo 3) usando o ângulo $\psi = 30^\circ$ descrito no relatório do aerolevantamento (equações 3.1-3.4). Em seguida, o conjunto de dados foi interpolado (etapa 3 do Algoritmo 3) para obter 1275 pontos em cada uma das 114 linhas de voo, o que corresponde a 145.350 pontos interpolados. Comparado ao conjunto de dados original, o dado interpolado está disposto em uma malha regular horizontal, mas ainda viola a premissa de pontos de observação distribuídos sobre uma superfície plana. Uma fonte equivalente foi posicionada diretamente abaixo de cada ponto interpolado, em uma profundidade constante de $z_0 = 0$ m. Após 500 iterações e 98,51 segundos (Figura 5.2c), foi estimada uma

distribuição de massa que reproduz as componentes a \mathbf{g}_{xy} e \mathbf{g}_{uv} no sistema norte-leste (passo 3 do Algoritmo 3). Em seguida, foram calculados os dados preditos e os resíduos no sistema norte-leste, conforme as etapas 4 e 5 do Algoritmo 3. A Figura 5.2 mostra os resíduos das duas componentes AGG no sistema de dados, bem como os histogramas dos resíduos (exibidos como inserção), com médias de 0,12 e -0,82 eotvos e desvios padrão de 4,42 e 3,92 eotvos para, respectivamente, as componentes \mathbf{g}_{xy} e \mathbf{g}_{uv} . Esses resultados corroboram um excelente ajuste dos dados.

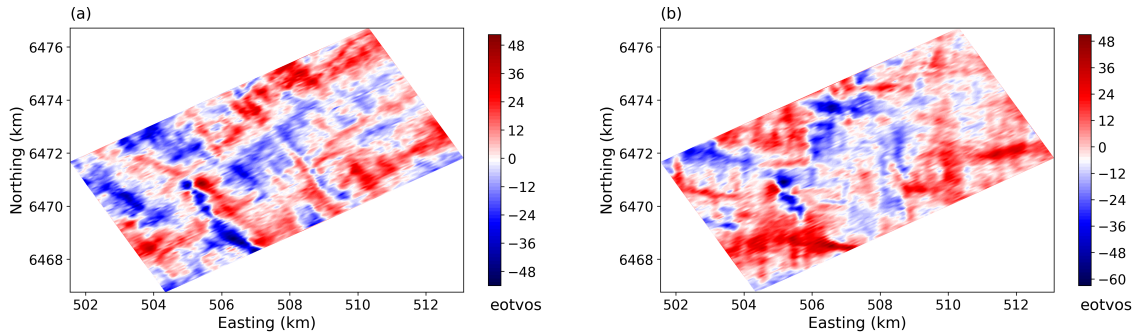


Figura 5.1: Dados reais sobre o local de teste em Kauring, Austrália. Componentes observadas (a) \mathbf{g}_{xy} e (b) \mathbf{g}_{uv} obtidas com o sistema AGG-Falcon em 164.624 pontos de observação.

Continuação para cima dos dados AGG-Falcon sobre o local de teste em Kauring, Austrália

Os dados reais do Falcon apresentam geometria idêntica à dos dados sintéticos. Portanto, foi realizada a continuação para cima na mesma altitude utilizada nos dados sintéticos, que é $z = -700$ m. Na Figura 5.3, é possível observar a continuação para cima das componentes \mathbf{g}_{xy} e \mathbf{g}_{uv} dos dados de Kauring. Conforme o esperado, as anomalias foram suavizadas por meio do processo de continuação para cima, como evidenciado nos resultados (Figura 5.3).

5.1.2 Dados FTG sobre o domo de sal Vinton, EUA

A Figura 5.4 mostra as componentes observadas \mathbf{g}_{xx} , \mathbf{g}_{xy} , \mathbf{g}_{xz} , \mathbf{g}_{yy} , \mathbf{g}_{yz} e \mathbf{g}_{zz} sobre o domo de sal de Vinton, EUA. O levantamento aéreo contém 2.692 pontos observados distribuídos ao longo de 16 linhas de voo orientadas norte-sul, com espaçamento entre linhas de 125 m em uma altitude variando de -60 a -580 m. Devido ao fato de as linhas de voo estarem alinhadas com a direção norte-sul, os sistemas de dados e os sistemas norte-leste coincidem, o que nos permite pular a etapa 1 do Algoritmo 3. As 16 linhas de voos foram interpoladas (passo 2 do Algoritmo 3) para obter 160 pontos por linha (totalizando 2.560 pontos interpolados). Novamente, o conjunto

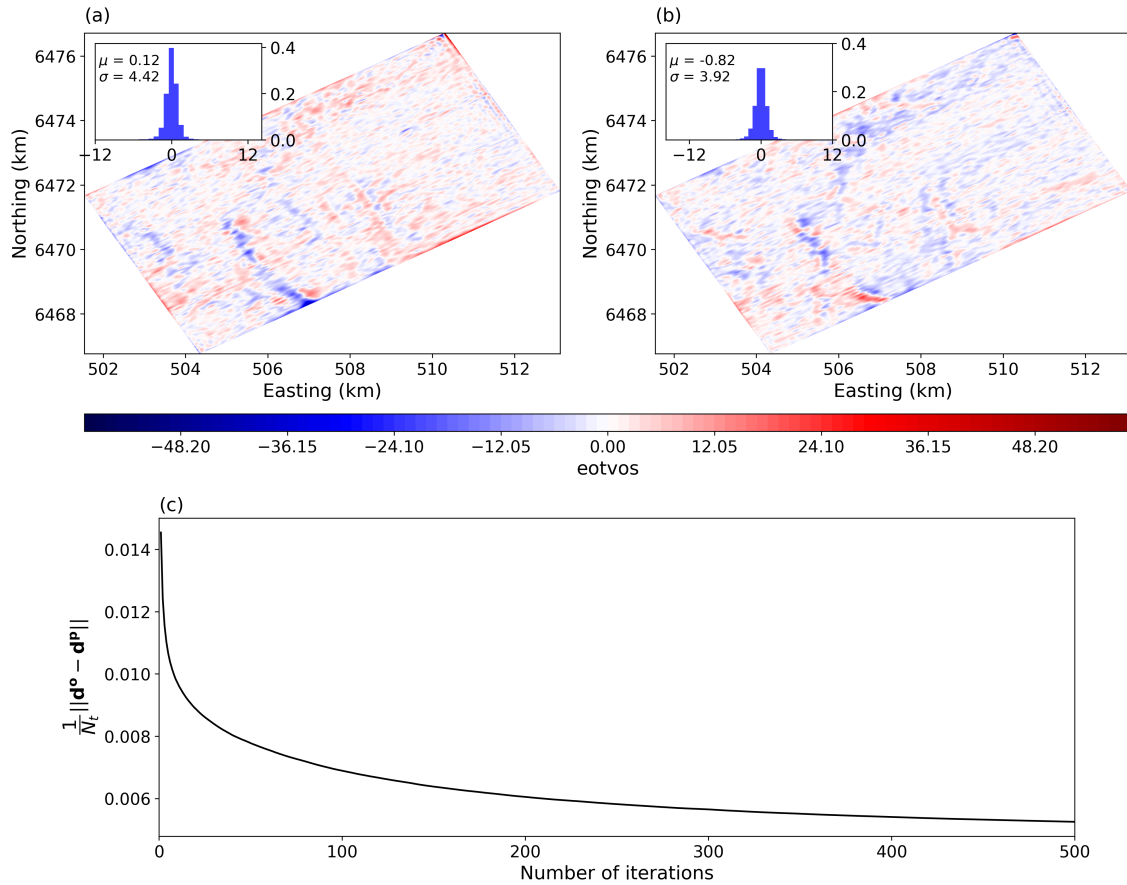


Figura 5.2: Dados reais sobre o local de teste em Kauring, Austrália. Os resíduos e os histogramas dos resíduos mostrados como inserções (a-b) entre a componente medida (Figura 5.1) e a componente predita (a) \mathbf{g}_{xy} e \mathbf{g}_{uv} (em eotvos) no sistema de dados. A média μ e os desvios padrão σ (em eotvos) são mostrados em cada histograma. (c) Curva de convergência obtida ao aplicar a metodologia desenvolvida aos dados reais do sistema AGG-Falcon.

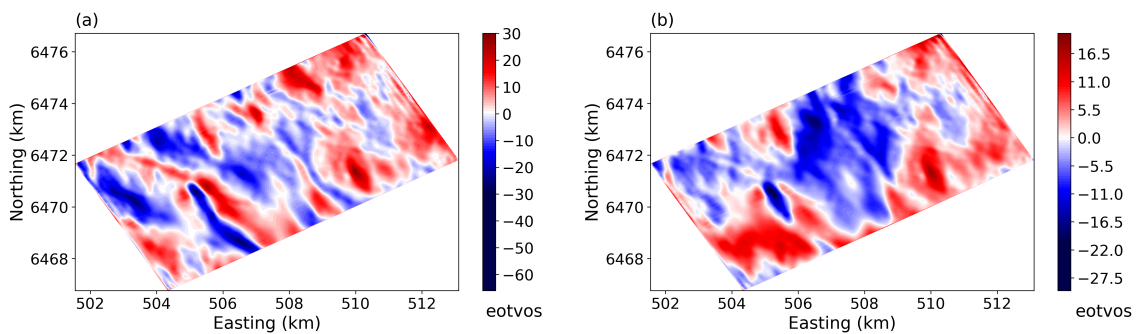


Figura 5.3: Continuação para cima dos dados reais sobre o local de teste Kauring, Austrália. Componentes (a) \mathbf{g}_{xy} e (b) \mathbf{g}_{uv} calculadas em $z = -700$ m.

de dados interpolados viola a premissa de pontos observados sobre um plano horizontal. Uma fonte equivalente foi posicionada diretamente abaixo de cada ponto

interpolado, em uma profundidade constante de $z_0 = 200$ m. Após 200 iterações (Figura 5.5c), foi estimada a distribuição de massa usando as componentes medidas, ou seja, as componentes \mathbf{g}_{xx} , \mathbf{g}_{xy} , \mathbf{g}_{xz} , \mathbf{g}_{yy} e \mathbf{g}_{yz} . A distribuição de massa estimada resultou em dados preditos que se ajustam de maneira aceitável às componentes FTG (Figura 5.4a-f). Isso é corroborado pela Figura 5.5a-f, que exhibe os resíduos entre os dados FTG observados (Figura 5.4a-f) e os dados preditos. Os histogramas dos resíduos, mostrados na Figura 5.5a-f como inserções, também confirmam um excelente ajuste dos dados, com médias variando entre -1,17 e 0,91 eotvos e desvios padrão variando entre 2,04 e 5,37 eotvos.

Continuação para cima dos dados FTG sobre o domo de sal Vinton, EUA

A Figura 5.6 apresenta a continuação para cima das componentes \mathbf{g}_{xx} , \mathbf{g}_{xy} , \mathbf{g}_{xz} , \mathbf{g}_{yy} , \mathbf{g}_{yz} e \mathbf{g}_{zz} em $z = -400$ m sobre o domo de sal Vinton, EUA. Também é evidente a suavização das anomalias de curto comprimento de onda nesse contexto.

5.2 Dados reais magnéticos do complexo de Anitápolis, Brasil

O método desenvolvido para o processamento de dados magnéticos foi empregado em dados magnéticos aéreos disponibilizados pelo Serviço Geológico do Brasil (CPRM) sobre uma intrusão alcalina situada em Anitápolis, no sul do Brasil. O Complexo Alcalino de Anitápolis é uma pequena intrusão nos leucogranitos do cinturão móvel Dom Feliciano (MELO e BARBOSA, 2020; SCHEIBE *et al.*, 2005; VITAL *et al.*, 2021). Antes do processamento, realizou-se a remoção da tendência regional, aproximadamente modelada por um polinômio de primeira ordem, nos 9.059 dados de anomalias de campo total (Figura 5.7a) obtidos na superfície de observação.

O campo geomagnético principal nesta área tem uma direção constante com inclinação de $-37,05^\circ$ e declinação de $-18,17^\circ$. As fontes equivalentes que compõem o vetor de parâmetro $\hat{\mathbf{p}}_c$ são espaçadas irregularmente e localizadas diretamente abaixo de cada ponto observado em uma profundidade constante $z_0 = 0,4$ km. Em seguida, as fontes equivalentes foram reparametrizadas para obter a camada equivalente regularmente espaçada de 95×95 pontos (com um total de 9.025 fontes equivalentes) e profundidade $z_k = 0,2$ km. A norma dos resíduos entre os dados observados e os dados preditos pelas fontes equivalentes reparametrizadas foi analisada para selecionar a profundidade adequada (Figura 5.8).

Também foi considerada a direção de magnetização obtida por REIS *et al.* (2019) para a intrusão de Anitápolis, com inclinação de -21° e declinação de -11° , a fim de estimar a distribuição do momento magnético $\hat{\mathbf{p}}_m$. A distribuição estimada

do momento magnético (Figura 5.7c) é considerada aceitável, uma vez que produz uma anomalia RTP predominantemente positiva (Figura 5.7c) e resíduos com média próxima de zero e um desvio padrão de 14,96 nT (Figura 5.7b). Isso sugere que a distribuição do momento magnético pode ser utilizada para realizar transformações de fase, como a redução ao polo.

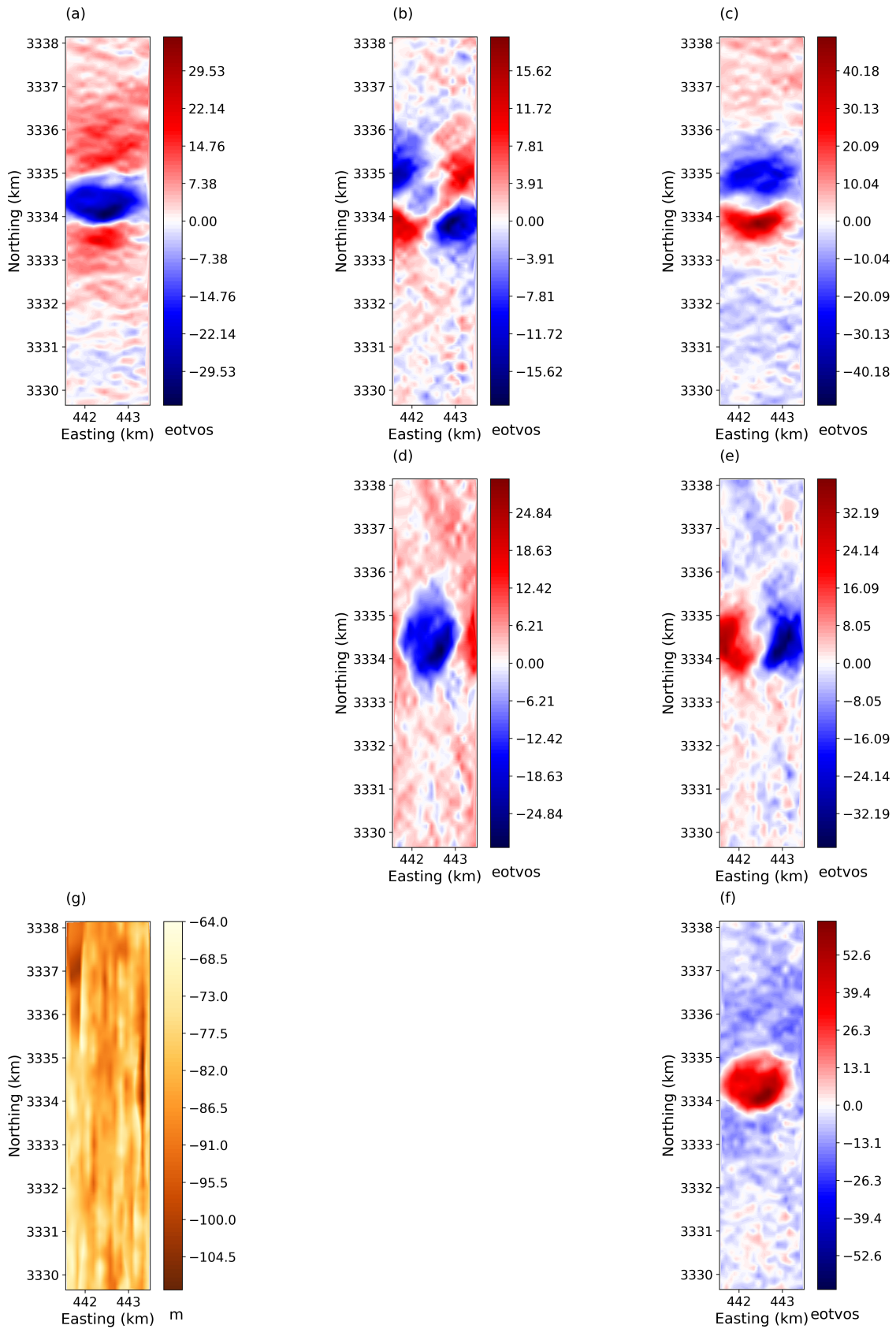


Figura 5.4: Dados reais sobre o domo de sal de Vinton, EUA. Componentes (a) g_{xx} , (b) g_{xy} , (c) g_{xz} , (d) g_{yy} , (e) g_{yz} e (f) g_{zz} obtidas com o sistema FTG em 2.692 pontos de observação. (g) Altitude GPS referenciada ao elipsoide WGS84.

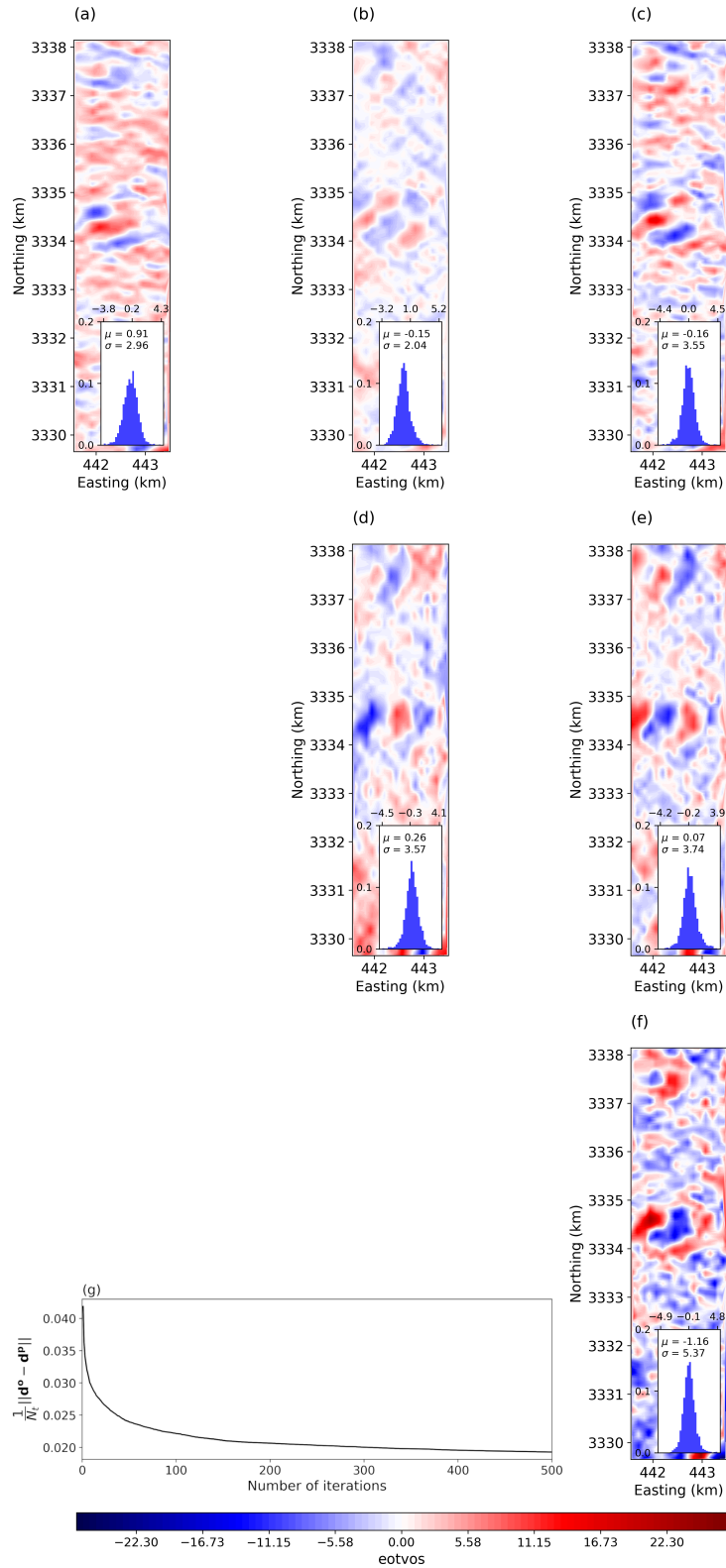


Figura 5.5: Dados reais sobre o domo de sal de Vinton, EUA. Os resíduos e os histogramas dos resíduos mostrados como inserções (a-f) entre a componente medida (Figura 5.4a-f) e a correspondente componente predita (a) \mathbf{g}_{xx} , (b) \mathbf{g}_{xy} , (c) \mathbf{g}_{xz} , (d) \mathbf{g}_{yy} , (e) \mathbf{g}_{yz} e (f) \mathbf{g}_{zz} (em eotvos). A média μ e os desvios padrão σ (em eotvos) são mostrados em cada histograma. (g) Curva de convergência obtida ao aplicar a metodologia desenvolvida aos dados reais do sistema FTG.

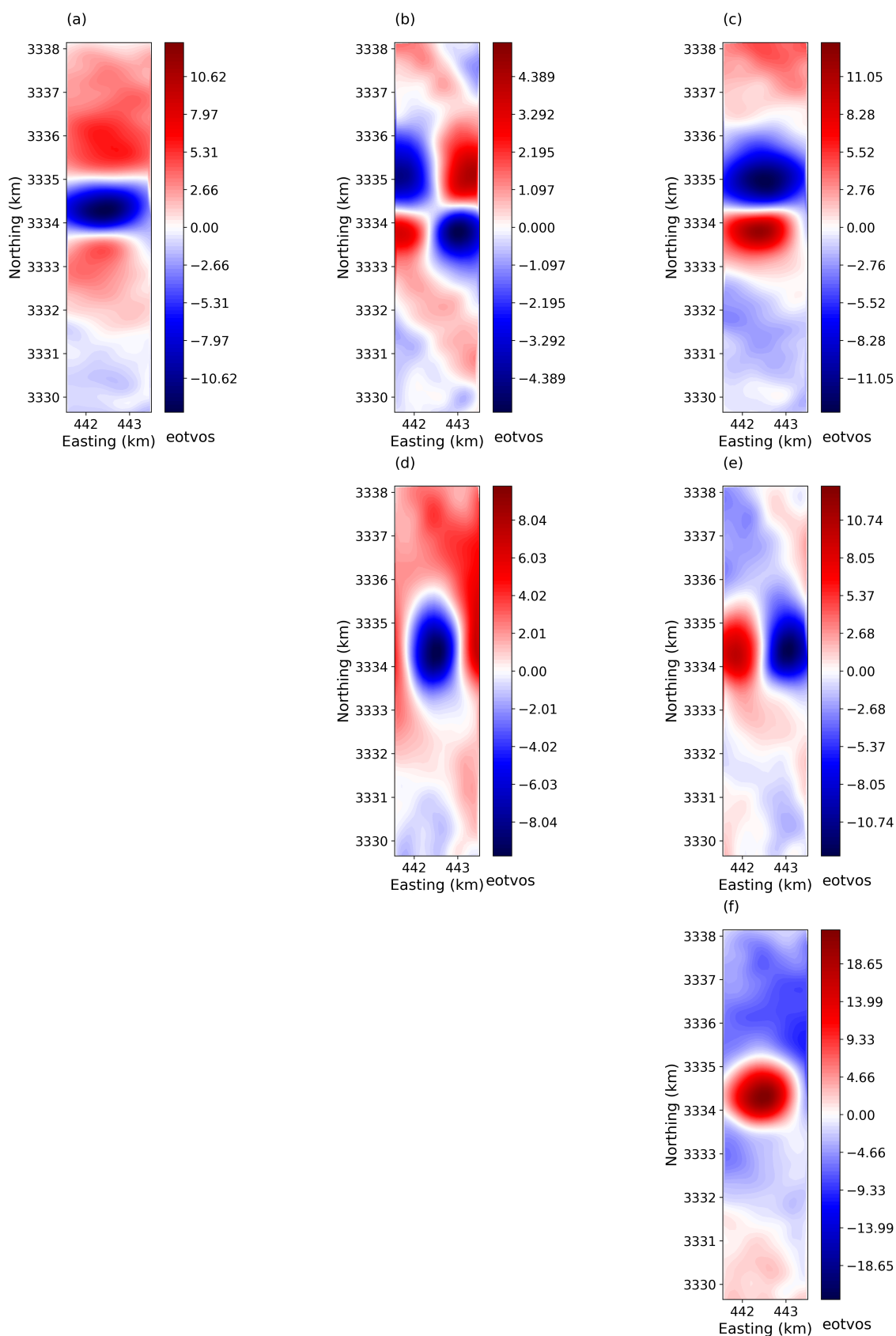


Figura 5.6: Continuação para cima dos dados reais sobre o domo de sal de Vinton, EUA. Componentes (a) g_{xx} , (b) g_{xy} , (c) g_{xz} , (d) g_{yy} , (e) g_{yz} e (f) g_{zz} calculadas em $z = -400$ m.

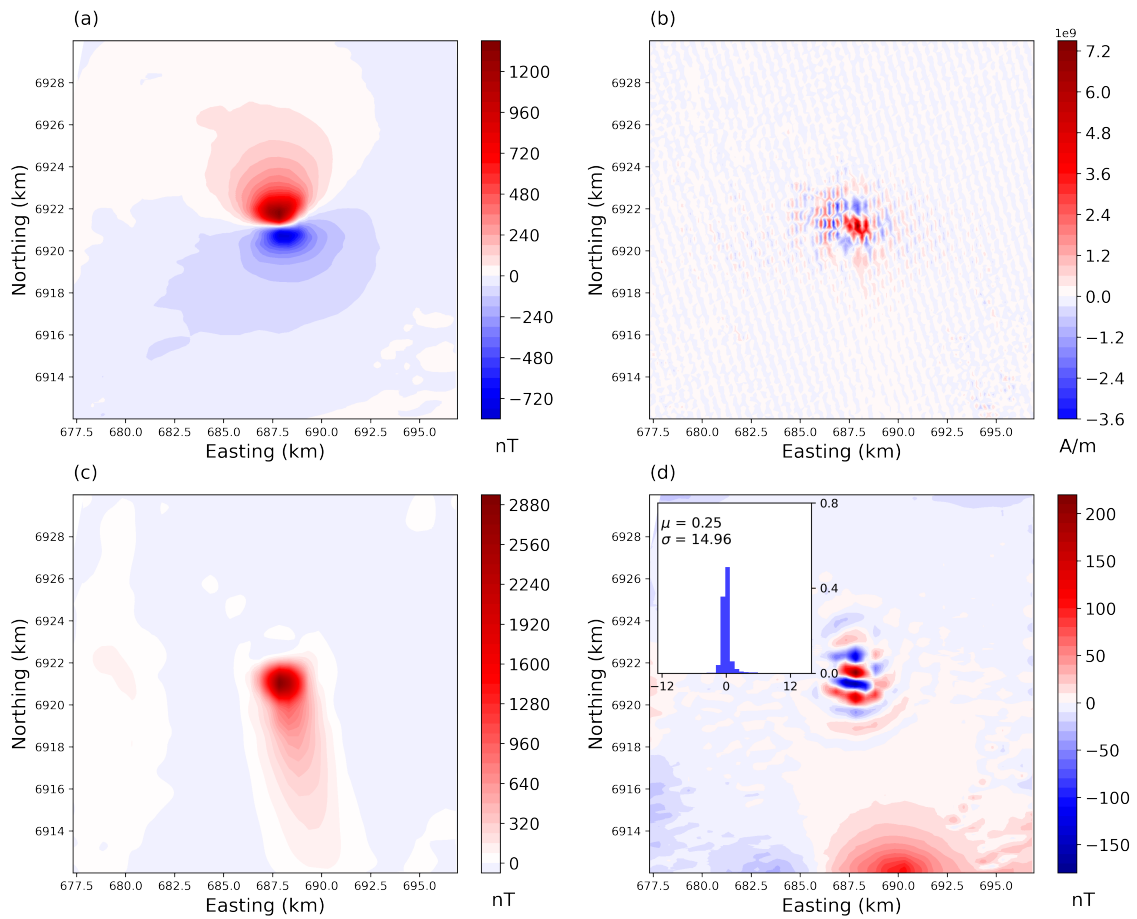


Figura 5.7: Aplicação a dados reais magnéticos da anomalia de Anitápolis, Brasil. (a) Anomalia de campo total observada, (b) distribuição do momento magnético estimada pelo método proposto, (c) anomalia RTP calculada usando a distribuição do momento magnético do painel b e (d) resíduos entre os dados observados (painel a) e o dados preditos. No painel (d), é apresentado, como um gráfico inserido, o histograma dos resíduos com média μ e desvio padrão σ .

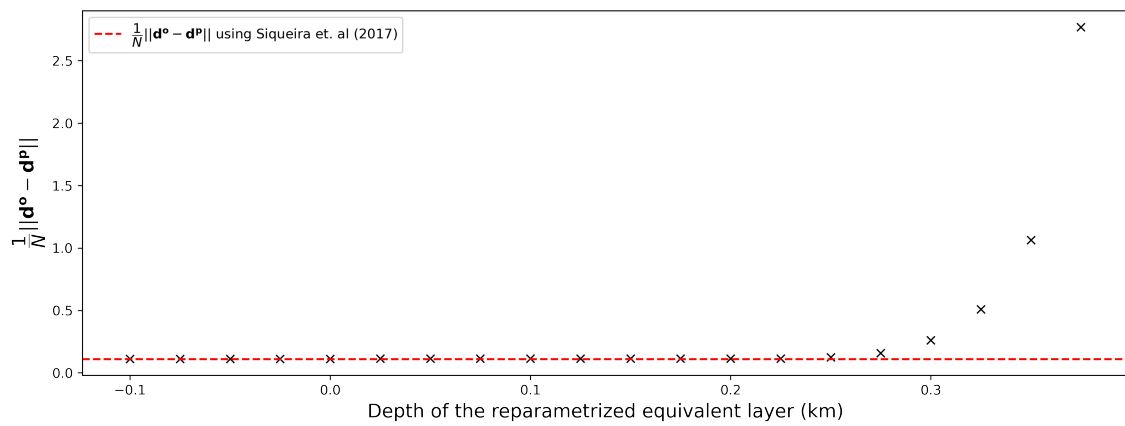


Figura 5.8: Aplicação a dados reais magnéticos da anomalia de Anitápolis, Brasil. Gráficos da norma dos resíduos *versus* diferentes profundidades da camada equivalente reparametrizada usando a equação 3.17. A linha vermelha tracejada representa a norma dos resíduos entre a anomalia de campo total observada e a anomalia prevista pela camada equivalente estimada via SIQUEIRA *et al.* (2017).

Capítulo 6

Considerações finais

Foram apresentadas duas novas abordagens de camadas equivalentes rápidas para processar dados de gradiente de gravidade e dados magnéticos. A eficiência computacional dos dois métodos se deve principalmente às estruturas BTTB das matrizes de sensibilidade para malhas regulares. Essas simetrias permitem a resolução eficiente de produtos matriz-vetor, necessários para a inversão linear, por meio da aplicação da 2D FFT.

Na primeira metodologia apresentada, essas estruturas possibilitaram a utilização de todas as componentes dos dados de gradiente de gravidade para estimar a distribuição de massa sobre uma camada equivalente única, mesmo quebrando a premissa de que os dados precisam estar dispostos sobre uma superfície plana. Isso permitiu o processamento simultâneo de até 6 componentes dos dados de gradiente de gravidade coletados em linhas de voo com orientações não alinhadas às direções norte-sul e leste-oeste, bem como de dados com pontos espaçados em superfícies de observação irregulares, provenientes de diferentes sistemas de aquisição, como sistemas AGG e FTG.

Na segunda metodologia apresentada, as estruturas das matrizes de sensibilidade permitiram a conversão da distribuição estimada sobre a camada equivalente, obtida por meio de um processo iterativo originalmente desenvolvido para processar dados de gravidade, em uma distribuição de momento magnético. Isso se deve ao fato de que os dados de campos potenciais podem ser expressos como uma combinação linear de funções harmônicas. Uma das vantagens dessa técnica iterativa é a sua robustez, o que a permite reproduzir os dados de campos potenciais de maneira eficaz, mesmo quando esses estão distribuídos de forma irregular. É importante notar que, embora a técnica iterativa originalmente utilizada para processar dados de gravidade possa ser aplicada para calcular outras transformações, como a continuação para cima e a interpolação, não é possível utilizá-la para calcular a anomalia reduzida ao polo. A conversão para distribuição de momento magnético foi realizada por meio da resolução da convolução discreta como um produto matriz-vetor usando a 2D FFT.

Em ambas as técnicas desenvolvidas, observou-se uma redução significativa no número de *flops* em comparação com as abordagens clássicas de camada equivalente. Pode-se observar também uma redução considerável no tempo de processamento na metodologia desenvolvida para o processamento de dados de gradiente de gravidade. Os resultados obtidos com dados de gradiente de gravidade reais, coletados no local de teste Kauring, Austrália, e no domo de sal Vinton, Louisiana, EUA, comprovaram a eficácia do método para processar eficientemente conjuntos de dados provenientes de diferentes sistemas de aquisição. Além disso, a adaptação do método para o processamento de conjunto de dados de gradiente de gravidade obtidos de diferentes sistemas de aquisição (por exemplo, sistemas AGG e FTG) na mesma área não apresenta desafios metodológicos significativos, exigindo apenas a coleta de dados AGG e FTG na mesma região. No que diz respeito ao tempo necessário para realizar as inversões, por exemplo, foram registrados 39,02 segundos para processar um total de 290.700 dados AGG e 101,02 segundos para processar 726.750 dados FTG. Os testes conduzidos com dados magnéticos sintéticos e os resultados obtidos com os dados reais de Anitápolis, Brasil, evidenciaram o potencial do método desenvolvido para processar grandes conjuntos de dados magnéticos de maneira eficiente. Todas as inversões foram executadas em um laptop equipado com CPU Intel(R) Core(TM) i9-9880H @ 2,30GHz com 16 GB de memória RAM.

Referências Bibliográficas

- ASTER, R. C., BORCHERS, B., THURBER, C. H., 2018, *Parameter estimation and inverse problems*. Elsevier.
- BARNES, G., LUMLEY, J., 2011, “Processing gravity gradient data”, *Geophysics*, v. 76, n. 2, pp. I33–I47. doi: 10.1190/1.3548548.
- BLAKELY, R. J., 1996, *Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications*. Cambridge University Press. ISBN: 0521575478.
- CARLOS, D. U., UIEDA, L., BARBOSA, V. C., 2014, “Imaging iron ore from the Quadrilátero Ferrífero (Brazil) using geophysical inversion and drill hole data”, *Ore Geology Reviews*, v. 61, pp. 268–285.
- CARLOS, D. U., UIEDA, L., BARBOSA, V. C., 2016, “How two gravity-gradient inversion methods can be used to reveal different geologic features of ore deposit—A case study from the Quadrilátero Ferrífero (Brazil)”, *Journal of Applied Geophysics*, v. 130, pp. 153–168.
- CHAN, R. H.-F., JIN, X.-Q., 2007, *An introduction to iterative Toeplitz solvers*. SIAM.
- CORDELL, L., 1992, “A scattered equivalent-source method for interpolation and gridding of potential-field data in three dimensions”, *GEOPHYSICS*, v. 57, n. 4, pp. 629–636. doi: 10.1190/1.1443275.
- DAMPNEY, C. N. G., 1969, “The equivalent source technique”, *Geophysics*, v. 34, n. 1, pp. 39–53. doi: 10.1190/1.1439996.
- DAVIS, K., LI, Y., 2011, “Fast solution of geophysical inversion using adaptive mesh, space-filling curves and wavelet compression”, *Geophysical Journal International*, v. 185, n. 1, pp. 157–166. doi: 10.1111/j.1365-246X.2011.04929.x.
- DAVIS, P., 2013, *Circulant Matrices*. AMS Chelsea Publishing Series. American Mathematical Society. ISBN: 9780821891650.

- DRANSFIELD, M., MILKEREIT, B., 2007, “Airborne gravity gradiometry in the search for mineral deposits”. In: *Proceedings of exploration*, v. 7, pp. 341–354.
- DRANSFIELD, M. H., LEE, J. B., 2004, “The FALCON airborne gravity gradiometer survey systems”, pp. 15–19.
- ENNEN, C., HALL, S., 2011, “Structural mapping of the Vinton salt dome, Louisiana, using gravity gradiometry data”. In: *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2011*, Society of Exploration Geophysicists, pp. 830–835.
- GOLUB, G. H., VAN LOAN, C. F., 2013, *Matrix computations*. JHU press.
- GONZALEZ, S. P., BARBOSA, V. C., OLIVEIRA JR, V. C., 2022, “Analyzing the Ambiguity of the Remanent-Magnetization Direction Separated Into Induced and Remanent Magnetic Sources”, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, v. 127, n. 6, pp. e2022JB024151.
- GUNN, P. J., 1975, “LINEAR TRANSFORMATIONS OF GRAVITY AND MAGNETIC FIELDS”, *Geophysical Prospecting*, v. 23, n. 2, pp. 300–312. doi: 10.1111/j.1365-2478.1975.tb01530.x.
- GUSPÍ, F., NOVARA, I., 2009, “Reduction to the pole and transformations of scattered magnetic data using Newtonian equivalent sources”, *GEOPHYSICS*, v. 74, n. 5, pp. L67–L73. doi: 10.1190/1.3170690.
- HENDERSON, R. G., 1970, “On the validity of the use of the upward continuation integral for total magnetic intensity data”, *Geophysics*, v. 35, n. 5, pp. 916–919. doi: 10.1190/1.1440137.
- HENDERSON, R. G., ZIETZ, I., 1949, “THE UPWARD CONTINUATION OF ANOMALIES IN TOTAL MAGNETIC INTENSITY FIELDS”, *GEOPHYSICS*, v. 14, n. 4, pp. 517–534. doi: 10.1190/1.1437560.
- HIDALGO-GATO, M. C., BARBOSA, V. C., 2019, “Fast 3D magnetic inversion of a surface relief in the space domain”, *Geophysics*, v. 84, n. 5, pp. J57–J67.
- HIDALGO-GATO, M. C., BARBOSA, V. C., OLIVEIRA JR, V. C., 2021, “Magnetic amplitude inversion for depth-to-basement and apparent magnetization-intensity estimates”, *Geophysics*, v. 86, n. 1, pp. J1–J11.
- JIRIGALATU, J., EBBING, 2019, “A fast equivalent source method for airborne gravity gradient data”, *Geophysics*, v. 84, n. 5, pp. G75–G82.

- KELLOGG, O. D., 1929, *Foundations of Potential Theory*. Frederick Ungar Publishing Company.
- LEÃO, J. W. D., SILVA, J. B. C., 1989, “Discrete linear transformations of potential field data”, *Geophysics*, v. 54, n. 4, pp. 497–507. doi: 10.1190/1.1442676.
- LI, Y., OLDENBURG, D. W., 2010, “Rapid construction of equivalent sources using wavelets”, *Geophysics*, v. 75, n. 3, pp. L51–L59. doi: 10.1190/1.3378764.
- MAAG-CAPRIOTTI, E., LI, Y., 2021, “Understanding the information content in gravity gradiometry data through constrained inversions for salt bodies”, *Geophysics*, v. 86, n. 4, pp. G35–G53.
- MARTINEZ, C., LI, Y., 2012, “Gravity gradiometry processing and interpretation at the Kauring Test Site”. In: *2012 SEG Annual Meeting*. OnePetro.
- MARTINEZ, C., LI, Y., 2016, “Denoising of gravity gradient data using an equivalent source technique”, *Geophysics*, v. 81, n. 4, pp. G67–G79.
- MELO, F. F., BARBOSA, V. C., 2020, “Reliable Euler deconvolution estimates throughout the vertical derivatives of the total-field anomaly”, *Computers & Geosciences*, v. 138, pp. 104436.
- MELO, F. F., GONZALEZ, S. P., BARBOSA, V. C., et al., 2021, “Amplitude of the magnetic anomaly vector in the interpretation of total-field anomaly at low magnetic latitudes”, *Journal of Applied Geophysics*, v. 190, pp. 104339.
- MENDONÇA, C. A., 2020, “Subspace method for solving large-scale equivalent layer and density mapping problems”, *Geophysics*, v. 85, n. 3, pp. G57–G68.
- MENDONÇA, C. A., SILVA, J. B. C., 1994, “The equivalent data concept applied to the interpolation of potential field data”, *Geophysics*, v. 59, n. 5, pp. 722–732. doi: 10.1190/1.1443630.
- MURPHY, C. A., 2004, “The Air-FTG airborne gravity gradiometer system”, *Airborne gravity*, pp. 7–14.
- OLIVEIRA JR., V. C., BARBOSA, V. C. F., UIEDA, L., 2013, “Polynomial equivalent layer”, *Geophysics*, v. 78, n. 1, pp. G1–G13. doi: 10.1190/geo2012-0196.1.
- OLIVEIRA JR., V. C., BARBOSA, V. C., 2013, “3-D radial gravity gradient inversion”, *Geophysical Journal International*, v. 195, n. 2, pp. 883–902.

- OLIVEIRA JR, V. C., TAKAHASHI, D., REIS, A. L., et al., 2023, “Computational aspects of the equivalent-layer technique”, *Frontiers in Earth Science*, v. 11, pp. 1253148.
- OLIVEIRA JR, V., SALES, D., BARBOSA, V., et al., 2015, “Estimation of the total magnetization direction of approximately spherical bodies”, *Nonlinear Processes in Geophysics*, v. 22, n. 2, pp. 215–232.
- PEDERSEN, L. B., RASMUSSEN, T. M., 1990, “The gradient tensor of potential field anomalies: Some implications on data collection and data processing of maps”, *Geophysics*, v. 55, n. 12, pp. 1558–1566.
- REIS, A. L. A., OLIVEIRA JR., V. C., BARBOSA, V. C. F., 2019, “Equivalent layer technique for estimating magnetization direction”. In: *SEG International Exposition and Annual Meeting*, Society of Exploration Geophysicists, pp. 1769–1773, San Antonio, TX.
- REIS, A. L., OLIVEIRA JR, V. C., BARBOSA, V. C., 2020, “Generalized positivity constraint on magnetic equivalent layers”, *Geophysics*, v. 85, n. 6, pp. J99–J110.
- SCHEIBE, L. F., FURTADO, S. M. D. A., GOMES, C. B., et al., 2005, “Cretaceous alkaline magmatism from Santa Catarina state, southern Brazil”, *Mesozoic to Cenozoic alkaline magmatism in the Brazilian Platform*, pp. 523–571.
- SIQUEIRA, F., OLIVEIRA JR., V. C., BARBOSA, V. C. F., 2017, “Fast iterative equivalent-layer technique for gravity data processing: A method grounded on excess mass constraint”, *Geophysics*, v. 82, n. 4, pp. G57–G69. doi: 10.1190/GEO2016-0332.1.
- SOLER, S. R., UIEDA, L., 2021, “Gradient-boosted equivalent sources”, *Geophysical Journal International*, v. 227, n. 3, pp. 1768–1783.
- TAKAHASHI, D., 2021. “Convolutional equivalent layer for potential data processing”. 9.
- TAKAHASHI, D., OLIVEIRA JR, V. C., BARBOSA, V. C., 2020, “Convolutional equivalent layer for gravity data processing”, *Geophysics*, v. 85, n. 6, pp. G129–G141.
- TAKAHASHI, D., OLIVEIRA, V. C., BARBOSA, V. C., 2022, “Convolutional equivalent layer for magnetic data processing”, *Geophysics*, v. 87, n. 5, pp. 1–59.

- UIEDA, L., BARBOSA, V. C., 2012, “Robust 3D gravity gradient inversion by planting anomalous densities”, *Geophysics*, v. 77, n. 4, pp. G55–G66.
- VAN LEEUWEN, E. H., 2000, “BHP develops airborne gravity gradiometer for mineral exploration”, *The Leading Edge*, v. 19, n. 12, pp. 1296–1297.
- VAN LOAN, C., 1992, *Computational frameworks for the fast Fourier transform*. SIAM.
- VITAL, L., OLIVEIRA JR, V., BARBOSA, V., 2021, “Magnetic radial inversion for 3-D source geometry estimation”, *Geophysical Journal International*, v. 226, n. 3, pp. 1824–1846.
- XIA, J., SPROWL, D. R., 1991, “Correction of topographic distortion in gravity data”, *Geophysics*, v. 56, n. 4, pp. 537–541.
- XIA, J., SPROWL, D. R., ADKINS-HELJESON, D., 1993, “Correction of topographic distortions in potential-field data; a fast and accurate approach”, *Geophysics*, v. 58, n. 4, pp. 515–523. doi: 10.1190/1.1443434.
- ZHDANOV, M. S., LIN, W., 2017, “Adaptive multinary inversion of gravity and gravity gradiometry data Adaptive multinary inversion of gravity data”, *Geophysics*, v. 82, n. 6, pp. G101–G114.