

SIMULAÇÃO DE ONDAS GRAVITACIONAIS APLICADAS A MODELOS DE
INTERAÇÃO NO SETOR ESCURO.

Gustavo Borges Ferreira Lima

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Astronomia do Observatório Nacional/MCTIC, como parte dos requisitos necessários à obtenção do Grau de Mestre em Astronomia.

Orientador: Rodrigo de Sousa Gonçalves

Co-orientador: Jailson Souza de Alcaniz

Rio de Janeiro
Agosto de 2021

SIMULAÇÃO DE ONDAS GRAVITACIONAIS APLICADAS A MODELOS DE
INTERAÇÃO NO SETOR ESCURO.

Gustavo Borges Ferreira Lima

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ASTRONOMIA DO OBSERVATÓRIO NACIONAL/MCTIC COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM ASTRONOMIA.

Examinada por:

Prof. Nome do Primeiro Examinador Sobrenome, D.Sc.

Prof. Nome do segundo Examinador Sobrenome, D.Sc.

Prof. Nome do terceiro examinador Sobrenome, D.Sc.

Dr. Nome do Quarto examinador Sobrenome, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
AGOSTO DE 2021

Borges Ferreira Lima, Gustavo

Simulação de Ondas gravitacionais aplicadas a modelos de interação no setor escuro./Gustavo Borges Ferreira Lima. – Rio de Janeiro: ON/MCTIC, 2021.

XVI, 85 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Rodrigo de Sousa Gonçalves

Co-orientador: Jailson Souza de Alcaniz

Dissertação (mestrado) – ON/MCTIC/Programa de Pós-graduação em Astronomia, 2021.

Referências Bibliográficas: p. 79 – 85.

1. Cosmologia. 2. Ondas Gravitacionais. 3. Modelos cosmológicos. 4. Interação no setor escuro. 5. Parâmetros Cosmológicos. I. Souza de Alcaniz, Jailson. II. Observatório Nacional/MCTIC, Programa de Pós-graduação em Astronomia. III. Título.

Agradecimentos

Fazer um mestrado em Astronomia logo após terminar uma faculdade de física, como nós físicos gostamos de falar, não é trivial. Não podemos desprezar todo o desgaste físico e emocional que se é gerado ao se tentar se adentrar em áreas ainda tão pouco exploradas pelo saber humano. Assim como não é desprezível toda a ajuda que foi nos dada ao longo desse caminho. Na verdade, essa ajuda, vai muito além do desprezível, ela é fundamental para conclusão da nossa jornada. Dito isso, gostaria de deixar meus mais sinceros agradecimentos a todos que me apoiaram nesse caminho. Gostaria de agradecer:

- Ao meu orientador, Rodrigo de Sousa Gonçalves, por toda ajuda, orientação e dedicação ao projeto, estando sempre presente e disponível. Além disso demonstrou, com sua juventude, uma renovação muito bem vinda na ciência.
- Ao Jailson Alcaniz por ter ajudado com a coorientação no começo do mestrado e por todo conhecimento e sabedoria compartilhados ao longo do tempo.
- Ao Rodrigo von Marttens e ao Uendert Andrade pela ajuda completamente altruísta com programas computacionais essenciais para a conclusão da dissertação.
- a todos os meus colegas e amigos do Observatório Nacional Thaís Lemos, Thaís Guerine, Felipe, José Victor, Eric e Alexandre.
- Gostaria de agradecer ao Observatório Nacional pela oportunidade de cursar o mestrado e ao CNPQ pela bolsa cujo qual seria impossível realizar o mestrado sem.

Durante esse tempo de mestrado, uma terrível pandemia atingiu nosso planeta, tornando muito limitada a locomoção e o contato humano durante esse período e gerando muita angústia e ansiedade entre todos. Diante desse cenário devastador, foi imprescindível o apoio das pessoas próximas. Por isso, gostaria de agradecer:

- Aos meus pais, Francisco de Assis e Maria Goreti, que sempre me ajudaram com tudo que fosse necessário.

- à minha tia, Maria Aparecida, que me ajudou a se locomover nas poucas vezes que tive que sair de casa além de estar sempre próxima em todos os momentos.
- à toda minha família, principalmente meus padrinhos José Luiz e Angelina Maria Barbosa por estarem sempre do meu lado e tudo que fizeram por mim.
- à minha namorada, Karyna Gimenez, que sempre esteve ao meu lado me incentivando, não me deixando desistir e me mostrando como sempre podemos melhorar e nos tornar a melhor versão de nós mesmo.
- Aos meus amigos Carlos Ferreira e Thayane Patusco, pelas conversas científicas, musicais e engraçadas muito produtivas.
- Aos meus amigos de longa data, Morgan Benevides, Douglas Souza, Aderson Maia e também novos que conheci de forma virtual, Wellinton, Roberto Farias, Rodrigo Oliveira, Thaís Maciel, Eloisa, Luan, Vicente e Rafael por todos os momentos de descontração promovidos mesmo à distância.
- e novamente ao Observatório Nacional e e também ao Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF) por se reestruturarem de forma online, permitindo aos alunos continuarem o mestrado sendo afetados da menor maneira possível.

Resumo da Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Astronomia do Observatório Nacional/MCTIC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Astronomia (M.Sc.)

SIMULAÇÃO DE ONDAS GRAVITACIONAIS APLICADAS A MODELOS DE INTERAÇÃO NO SETOR ESCURO.

Gustavo Borges Ferreira Lima

Agosto/2021

Orientador: Rodrigo de Sousa Gonçalves

Co-orientador: Jailson Souza de Alcaniz

Programa: Astronomia

Nós apresentamos neste trabalho uma abordagem prática de relatividade geral com o intuito de criar um conjunto de dados de distância de luminosidade d_L , advindos de simulações de ondas gravitacionais. Então nós utilizamos esses dados simulados, em conjunto com dados de supernovas do tipo Ia e oscilações acústica de bárions na restrição do espaço paramétrico de modelos cosmológicos através do método estatístico bayesiano e cadeias de Markov Monte Carlo.

Obtivemos resultados para cinco dos modelos estudados, dentre eles, o modelo padrão Λ CDM, modelos com a equação de estado da energia escura variável e modelos com interação no setor escuro. Um dos modelos com interação no setor escuro apresentou problemas de conversão, implicando em um espaço paramétrico pouco restritivo e não conseguimos restringir bem o espaço paramétrico.

No geral, as simulações foram bem sucedidas em diminuir os erros de todos os parâmetros. Podemos destacar os valores obtidos para a constante de Hubble $H_0 = 69,59 \pm 0,41 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, o parâmetro de densidade de matéria $\Omega_{m,0} = 0,3111 \pm 0,0095$ e o parâmetro $w_0 = -1,017 \pm 0,041$ em 68% de nível de credibilidade. Tais valores equivalem a uma precisão de $\varepsilon(H_0) = 0,58\%$, $\varepsilon(\Omega_{m,0}) = 3,05\%$ e $\varepsilon(w_0) = 4,03\%$, que é comparável a precisão do Planck 2018. Além disso, também obtivemos o parâmetro de interação no setor escuro $\xi = 0,0037 \pm 0,0057$ e $\alpha = 0,229 \pm 0,091$.

Isso mostra que, com a técnica de simulação de ondas gravitacionais devidamente aplicada, podemos restringir melhor a restrição de modelos com apenas dados

do Universo tardio, nos dando assim a oportunidade de realizarmos diversos tipos de trabalhos de prognóstico, até mesmo sem observáveis cosmológicos do Universo jovem.

Palavras-Chave: Cosmologia; Ondas Gravitacionais; Modelos Cosmológicos; Interação no Setor Escuro; Parâmetros Cosmológicos

Abstract of Dissertation presented to Observatório Nacional/MCTIC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Astronomy (M.Sc.)

Gustavo Borges Ferreira Lima

August/2021

Advisor: Rodrigo de Sousa Gonçalves

Co-advisor: Jailson Souza de Alcaniz

Department: Astronomy

We present in this work a practical general relativity approach in order to create a set of luminosity distance d_L dataset, coming from gravitational wave simulations. Then we use these simulated data, together with type Ia supernova and baryon acoustic oscillations datasets to constrain the parametric space of cosmological models using the Bayesian statistical and Markov Chains Monte Carlo method.

We obtained results for five of the studied models, among them, the standard model Λ CDM, models with variable dark energy equation of state and models with dark sector interaction. One of the models with interaction in the dark sector had convergence problems in the chains and we were not able to constrain the parametric space.

In general, the simulations were successful in decreasing the errors of all parameters. We can highlight the values obtained to Hubble constant $H_0 = 69.59 \pm 0.59 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, matter density parameter $\Omega_{m,0} = 0.3111 \pm 0.0095$ and $w_0 = -1.017 \pm 0.041$ at credibility level 68%. Such values are equivalent to a precision of $\varepsilon(H_0) = 0.58\%$, $\varepsilon(\Omega_{m,0}) = 3.05\%$ and $\varepsilon(w_0) = 4.03\%$, which is comparable to the accuracy of Planck 2018. In addition, we also get the dark sector interaction parameter $\xi = 0.0037 \pm 0.0057$ and $\alpha = 0.229 \pm 0.091$.

This shows that with the properly applied gravitational wave simulation technique we can restrict well known models with only late Universe data, thus giving us the opportunity to carry out different types of forecast works, even without data from early Universe.

Keywords: Cosmology; Gravitational Waves; Cosmological Models; Dark Sector Interaction; Cosmological Parameters

Sumário

Lista de Figuras	xii
Lista de Tabelas	xvi
1 Introdução	1
2 Ondas Gravitacionais	3
2.1 Teoria da Relatividade Geral	3
2.1.1 Definições	3
2.1.2 Equação da Geodésica	5
2.1.3 Equações de campos de Einstein	6
2.2 Teoria Linearizada	6
2.2.1 Calibre de Lorentz	7
2.2.2 Calibre de Traço Nulo Transverso (TT) e a Polaridade da Onda	9
2.3 Momento de Quadrupolo	12
2.3.1 Aproximação de campo fraco e limite não relativístico	13
2.3.2 Generalização do momento de massa de quadrupolo	18
2.4 Sistemas binários como emissores de ondas gravitacionais	20
2.4.1 Órbita circular	21
2.4.2 Diminuição do raio da órbita: o movimento quasi-circular	22
2.4.3 Circularização da Órbita	26
3 Modelo Cosmológico Padrão e alternativos	28
3.1 Equações de Friedmann	28
3.1.1 Princípio cosmológico	28
3.1.2 Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)	30
3.1.3 Solução das Equações de Einstein usando FLRW	31
3.2 Soluções da equação de Friedmann	32
3.2.1 Universo estático de Einstein	32
3.2.2 Universo de Einstein-de Sitter	32
3.2.3 Universo dominado por radiação	33
3.2.4 Universo dominado por energia escura	34

3.2.5	Densidade crítica	34
3.3	Distâncias cosmológicas	36
3.3.1	Distância Comóvel	36
3.3.2	Desvio para o vermelho	36
3.3.3	Distância de diâmetro angular e distância de luminosidade	38
3.3.4	Desvio para o vermelho em ondas gravitacionais	40
3.4	Da teoria às observações	42
3.4.1	Observáveis cosmológicos do Universo primordial	44
3.4.2	Observáveis cosmológicos do Universo tardio	47
3.4.3	Problemas do modelo padrão	49
3.5	Modelos cosmológicos alternativos	50
3.6	Modelos com energia escura variável	51
3.6.1	Modelo $wCDM$	51
3.6.2	Parametrização Chevallier-Linder-Polarski	52
3.7	Modelos com interação no setor escuro	52
3.7.1	Modelo 1	53
3.7.2	Modelo 2	53
3.7.3	Modelo 3	54
4	Análise estatística e resultados	55
4.1	Simulação	55
4.1.1	Distribuição de Eventos	58
4.1.2	Resultados da Simulação	60
4.2	Análise estatística	62
4.2.1	Estimativa de parâmetros	64
4.2.2	Resultado da análise estatística	66
5	Conclusões	76
	Referências Bibliográficas	79

Lista de Figuras

2.1	Anéis de partículas afetados por uma onda gravitacional. A primeira linha é o efeito causado pela polarização <i>cross</i> enquanto a segunda linha é o efeito causado pela polarização <i>plus</i> . Figura adaptada da referência: [1]	12
2.2	Esquema do sistema a ser integrado. Note que os vetores aqui estão sendo representados pelas letras em negrito. Fonte: [2]	15
2.3	Esquema de um sistema binário de massas m_1 e m_2 relacionado em relação a um sistema de coordenadas qualquer O'	20
2.4	Exemplo do sinal de gorjeio próximo à coalescência. Podemos ver como a frequência e a amplitude crescem de acordo com o passar do tempo. Fonte: [3]	25
3.1	Relação entre a velocidade de afastamento e a distância de objetos fora da Via Láctea encontrados por Hubble para dois grupos diferentes de dados. Os valores dos coeficiente angulares encontrados para cada reta foram $H(t_0) = 465 \pm 50$ e $H(t_0) = 513 \pm 60 \text{ km Mpc}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Fonte: [4].	29
3.2	As três possíveis curvaturas do espaço-tempo isotrópico e homogêneo. Adaptado da referência. Fonte: [5]	30
3.3	Gráfico logarítmico da evolução das densidades de matéria, radiação e energia escura. O fator de escala no ponto em que as curvas de matéria e radiação se cruzam é também conhecido como a_{eq} , que seria o fator de escala de equilíbrio. Neste gráfico foi utilizado $a_o = 1$, que é uma normalização do fator de escala comumente utilizada do fator de escala. Fonte: [6]	44
3.4	Radiação de corpo negro medida pelo FIRAS (Mather et al., 1994). Os pontos medidos e as barras de erro estão escondidas pela curva teórica, pois as suas incertezas são menores do que a espessura da curva. Fonte: [6]	45

3.5	Restrições na densidade de bárions advindas da BBN. As faixas horizontais representam as previsões teóricas em um alcance de 10 ordens de magnitude, para os elementos ^4He , Deutério, ^3He e Lítio. A faixa vertical é fixada pela medida do deutério primordial e as caixas são os limites impostos pelas observações. Fonte: [7]	46
3.6	Medidas de H_0 obtidas na literatura recente. A parte de cima do painel estão as medidas do Universo jovem e tardio, e a parte de baixo está a combinação de todos os conjuntos de dados de late time e alguns conjuntos estatisticamente não relacionados junto com suas respectivas discrepâncias relativa à medida do Planck. Fonte: [8]	50
4.1	Esquema da estrutura do Einstein Telescope. Podemos ver claramente na imagem os três interferômetros identificados pelas cores verde, azul e vermelho em um arranjo triangular. As siglas HF e LF são referentes a instrumentos do interferômetro específicos para captar altas frequências e baixas frequências respectivamente [9].	56
4.2	Distribuição de eventos normalizada encontrada para o modelo ΛCDM à esquerda e histograma feito com a quantidade total de eventos simulados à direita, onde o intervalo utilizado para o bin foi de 0,5.	59
4.3	Desvio das distribuições por redshift dos modelos alternativos relativo à distribuição do ΛCDM . A linha tracejada representa o próprio ΛCDM , onde não tem nenhum desvio. A linha azul e laranja representa o modelo $w\text{CDM}$ e ΛCDM respectivamente. Enquanto a linha verde, magenta e preta representam os modelos com interação nos setor escuro 1,2 e 3 respectivamente.	60
4.4	Pontos de distância de luminosidade simulados e seus respectivos erros para o modelo ΛCDM e para o modelo $w\text{CDM}$	61
4.5	Pontos de distância de luminosidade simulados e seus respectivos erros para a parametrização CPL e para o primeiro modelo de interação no setor escuro.	61
4.6	Pontos de distância de luminosidade simulados e seus respectivos erros para os modelos com interação no setor escuro 2 e 3.	61

4.7	Esquema dos níveis de credibilidade tanto para o ajuste de dois parâmetros (linha tracejada) quanto para o ajuste de um único parâmetro (linhas cheias). Os intervalos AA', BB' e CC' são referentes à 68,3%, 90% e 99% de probabilidade para o ajuste de um parâmetro. Enquanto a curva tracejada é referente a 68,3% dos dados normalmente distribuídos em um ajuste bidimensional. Fonte: [10].	65
4.8	Curvas de nível de credibilidade de 68,3% e 95,4% sendo respectivamente a região mais escura e a região mais clara e as posteriores unidimensionais encontradas para o modelo cosmológico padrão Λ CDM. Podemos ver as curvas criadas utilizando todos os conjuntos de dados Pantheon+BAO+GW em verde, a curva para o conjunto de dados simulados de ondas gravitacionais em vermelho e a curva para os dados de BAO e supernova do Pantheon em azul.	68
4.9	Curvas de nível de 68,3% e 95,4% sendo respectivamente a região mais escura e a região mais clara e as posteriores unidimensionais encontradas para o modelo w CDM. Podemos ver as curvas criadas utilizando todos os conjuntos de dados Pantheon+BAO+GW em verde, a curva para o conjunto de dados simulados de ondas gravitacionais em vermelho e a curva para os dados de BAO e supernova do Pantheon em azul.	69
4.10	Curvas de nível de 68,3% e 95,4% sendo respectivamente a região mais escura e a região mais clara e as posteriores unidimensionais encontradas para a parametrização CPL. Podemos ver as curvas criadas utilizando todos os conjuntos de dados Pantheon+BAO+GW em verde, a curva para o conjunto de dados simulados de ondas gravitacionais em vermelho e a curva para os dados de BAO e supernova do Pantheon em azul.	71
4.11	Curvas de nível de credibilidade de 68,3% e 95,4% sendo respectivamente a região mais escura e a região mais clara e as posteriores unidimensionais encontradas para o primeiro modelo de interação no setor escuro. Podemos ver as curvas criadas utilizando todos os conjuntos de dados Pantheon+BAO+GW em verde, a curva para o conjunto de dados simulados de ondas gravitacionais em vermelho e a curva para os dados de BAO e supernova do Pantheon em azul.	72

4.12	Curvas de nível de credibilidade de 68,3% e 95,4% sendo respectivamente a região mais escura e a região mais clara e as posteriores unidimensionais encontradas para o modelo 2 de interação no setor escuro. Podemos ver as curvas criadas utilizando todos os conjuntos de dados Pantheon+BAO+GW em verde, a curva para o conjunto de dados simulados de ondas gravitacionais em vermelho e a curva para os dados de BAO e supernova do Pantheon em azul.	73
4.13	Curvas de nível de credibilidade de 68,3% e 95,4% sendo respectivamente a região mais escura e a região mais clara e as posteriores unidimensionais encontradas para o modelo 3 de interação no setor escuro. Podemos ver as curvas criadas utilizando todos os conjuntos de dados Pantheon+BAO+GW em verde, a curva para o conjunto de dados simulados de ondas gravitacionais em vermelho e a curva para os dados de BAO e supernova do Pantheon em azul.	74

Lista de Tabelas

3.1	Estimativa de parâmetros obtidas pela colaboração Planck utilizando dados de TT,TE,EE,LowE+lensing [11] e obtidas no trabalho [12], onde utilizaram dados de SN Ia, junto com dados da radiação cósmica de fundo e um <i>prior</i> de H_0 obtido na referência [13]. Os erros estão em 68% de nível de confiança.	43
4.1	Valores dos parâmetros utilizados para os modelos fiduciais.	62
4.2	Tabela com o intervalo de priors uniformes selecionados para cada parâmetro.	67
4.3	Tabela com os melhores ajustes e erros em 1σ dos modelos Λ CDM, w CDM e CPL encontrados utilizando o conjunto de dados GW, Pantheon+BAO e Pantheon+BAO+GW.	70
4.4	Tabela com os melhores ajustes e erros em 1σ dos modelos de interação no setor escuro, onde foram utilizados o conjunto de dados GW, Pantheon+BAO e Pantheon+BAO+GW. Em alguns casos não foi possível encontrar o erro nem mesmo em 1σ , então deixamos apenas o melhor ajuste.	75

Capítulo 1

Introdução

No ano de 2015, pela primeira vez, foram medidas as “sirenes padrão”, termo pelo qual, do ponto de vista cosmológico ficaram conhecidas as ondas gravitacionais (OG) [14]. Em plena analogia às velas padronizáveis, as sirenes padrões também podem ser utilizadas para medir distâncias no Universo [15], porém elas não são compostas por radiação eletromagnética, e sim gravitacional. Desde então, há uma intensa busca pelas OG, devido à sua extrema importância para a cosmologia. Por serem fenômenos puramente ligados à relatividade geral (RG), as OG fornecem medidas de distâncias que não estão ligadas à escada de distância cósmica, o que pode ajudar a resolver atuais tensões na cosmologia [16]. Além disso, um conjunto de dados advindo de OG podem restringir ainda melhor os parâmetros cosmológicos, ajudando assim a construir uma cosmologia de precisão [17].

Devido a todos esses fatores, as ondas gravitacionais hoje são um dos focos dos astrônomos e cosmólogos. Já foram feitas 50 detecções pela colaboração LIGO/Virgo [18, 19] e apenas uma com contraparte eletromagnética [20], representando uma quantidade de observações ainda distante das medidas do estado-da-arte das observações em cosmologia, como obtida por outros observáveis cosmológicos. Espera-se que a próxima geração de interferômetros (denominada a terceira geração) consiga aumentar esse número de detecções em até duas ordens de grandeza [21], tornando assim as sirenes tão relevantes quanto a radiação cósmica de fundo (RCF), Supernovas do tipo Ia (SN Ia), e as oscilações acústicas de bárion (OAB). Nesta dissertação iremos estudar como o Einstein Telescope (ET) [9], um interferômetro da terceira geração, irá impactar nas restrições de parâmetros cosmológicos. Com este fim, iremos simular dados de OG para o modelo cosmológico padrão (MCP), modelos de energia escura variável [22, 23] e modelos com interação no setor escuro [24, 25].

O MCP, também conhecido como Λ CDM, é hoje o modelo que melhor ajusta todos os dados cosmológicos disponíveis [11]. Porém ele possui alguns problemas relacionados às suas principais componentes, a energia escura Λ e a matéria escura fria, do inglês cold dark matter (CDM) [26]. Ainda, hoje em dia, o MCP não fornece

uma base teórica fundamental para explicar o que são estas duas componentes, embora sejam imprescindíveis para a existência do modelo. Isso nos motiva portanto a buscar modelos alternativos que possam nos ajudar a entender o que são tal energia e matéria [27].

Os modelos de interação no setor escuro utilizam dessa ignorância sobre tais componentes para permitir uma troca de energia entre ambas. Esses modelos podem ser completamente fenomenológicos [25] ou baseados em alguma física mais fundamental [24]. Iremos abordar os dois casos nessa dissertação.

Em suma, neste trabalho será desenvolvida a teoria por trás das OG, para então realizar simulações de onde podemos restringir parâmetros cosmológicos. Deste modo aplicaremos tanto ao modelo cosmológico padrão quanto aos modelos alternativos e assim conseguiremos ter um prognóstico de como a próxima geração de interferômetros irá impactar sobre a restrição de tais modelos.

Capítulo 2

Ondas Gravitacionais

O primeiro passo que daremos é o de entender como surgem as ondas gravitacionais e para isso precisamos de um conhecimento prévio de RG. Neste capítulo então faremos uma introdução à relatividade geral e como esta, aplicada a sistemas auto-gravitantes, gera as OG.

2.1 Teoria da Relatividade Geral

Em 1915, Albert Einstein publicou sua teoria da relatividade geral, com o intuito de expandir sua teoria relativística para campos gravitacionais [28]. Assim, ele desenvolveu uma teoria de gravitação onde o campo gravitacional está intrinsecamente ligado à geometria do espaço-tempo.

A RG é uma teoria tensorial fundamentada no princípio de equivalência. Explicar cada ponto fundamental da teoria seria um processo que demandaria muito tempo e sairia do foco dessa dissertação. Então, nesta seção, iremos abordar de forma geral alguns pontos e equações necessárias para introduzirmos as OG.

2.1.1 Definições

Aqui iremos apresentar algumas definições importantes, que não terão espaço para serem colocadas no decorrer das outras seções.

- Tensor métrico.

O tensor métrico de forma geral vai ser dado por $g_{\mu\nu}$. No caso do espaço-tempo de Minkowski usaremos a letra η , onde a assinatura da métrica foi definida como

$$\eta_{\mu\nu} = (-, +, +, +). \quad (2.1)$$

Os índices gregos como μ e ν possuem valores 0,1,2 e 3, enquanto índices latinos como i, j e k estarão sempre se referindo apenas a parte espacial, com

valores 1,2 e 3.

- Notação de Einstein.

A notação de Einstein é uma forma mais sucinta de escrevermos equações indiciais. Sempre que estivermos contraindo dois índices, ou seja, temos um índice covariante e contravariante iguais em um termo, significa que podemos abri-lo em um somatório. Assim, podemos escrever

$$\sum_{\mu} A^{\mu} A_{\mu} \equiv A^{\mu} A_{\mu}. \quad (2.2)$$

- Quadrivetores e derivadas.

Podemos definir os quadrivetores utilizados como

$$x^{\mu} = (x^0, x^i) = (ct, \vec{x}); \quad x_{\mu} = (-ct, \vec{x}), \quad (2.3)$$

portanto temos que

$$\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right), \quad (2.4)$$

e

$$\square = \partial_{\mu} \partial^{\mu} = -\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} + \partial^i \partial_i, \quad (2.5)$$

onde c é a velocidade da luz e (2.5) é chamado de d'Alambertiano.

- Tensores da Relatividade Geral.

Os tensores que compõem as equações de campo de Einstein são o tensor de Riemann, o tensor de Ricci e o tensor momento-energia. O tensor de Riemann pode ser definido como

$$R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} = \partial_{\alpha} \Gamma^{\mu}_{\nu\beta} - \partial_{\beta} \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} + \Gamma^{\mu}_{\rho\alpha} \Gamma^{\rho}_{\nu\beta} - \Gamma^{\mu}_{\rho\beta} \Gamma^{\rho}_{\nu\alpha}, \quad (2.6)$$

onde $\Gamma^{\mu}_{\nu\beta}$ é o símbolo de Christoffel, que é dado por

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_{\mu} g_{\nu\beta} + \partial_{\nu} g_{\mu\beta} - \partial_{\beta} g_{\mu\nu}). \quad (2.7)$$

Já o tensor de Ricci é obtido a partir do tensor de Riemann

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} = g^{\rho\alpha} R_{\rho\mu\alpha\nu}. \quad (2.8)$$

O tensor momento-energia vai depender especificamente do problema abordado. No caso da cosmologia, utilizamos o tensor momento-energia de um fluido perfeito, dado por

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}, \quad (2.9)$$

onde ρ e p são respectivamente a densidade e pressão do fluido. Enquanto $u_\mu = \frac{\partial x_\mu}{\partial \tau}$ é a quadrivelocidade e τ o tempo próprio, que é o tempo definido no referencial do fluido $d\tau^2 = c^2 dt^2$, ou de forma mais geral, pode ser definido como

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.10)$$

De acordo com a RG, o tensor momento-energia é conservado da seguinte maneira

$$D_\mu T^{\mu\nu} = 0; \quad D_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu T^{\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\alpha T^{\nu\beta} = 0, \quad (2.11)$$

onde D_μ é uma derivada covariante.

2.1.2 Equação da Geodésica

Podemos começar a falar sobre relatividade geral partindo do princípio de equivalência. Esse princípio nos diz que não existe diferença entre massa inercial e massa gravitacional. Na prática, é o mesmo que dizer que um observador em um referencial acelerado não conseguiria distinguir se essa aceleração ocorre devido a um campo gravitacional ou a forças inerciais. A consequência disso é que podemos sempre definir um sistema de coordenadas de “*free-falling*” ou *referencial de queda livre* y^μ onde não há a força da gravidade. Com isso em mente, no referencial de queda livre temos que a equação de movimento é dada por

$$\frac{\partial^2 y^\mu}{\partial \tau^2} = 0. \quad (2.12)$$

Fazendo uma mudança de coordenadas y^μ para um sistema de coordenadas qualquer x^μ , e após um certo algebrismo, chegamos à seguinte equação

$$\frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial \tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (2.13)$$

onde a conexão afim $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ é definida como

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial y^\alpha} \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \quad (2.14)$$

A equação (2.13) descreve o movimento de uma partícula em um sistema coordena-

das curvas arbitrárias e é conhecida como equação da geodésica. É importante notar que a conexão afim é composta por derivadas do tensor métric $g_{\mu\nu}$ (2.7), ou seja, quando estamos no espaço de Minkowski, a equação (2.13) recai na equação de movimento do referencial de queda livre. Uma análise mais completa sobre a equação da geodésica revelaria a riqueza física por trás de tal equação, mas tornar-se-ia muito extensa para nossos propósitos. Para estudos mais detalhados, recomenda-se a utilização da literatura [1, 28].

2.1.3 Equações de campos de Einstein

Uma forma de se obter as equações de Einstein é variando a ação de Einstein-Hilbert

$$\delta(S_E) = \delta \left(\frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R \right) = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} \right) \delta g_{\mu\nu} \quad (2.15)$$

junto com a ação da matéria

$$\delta(S_M) = \frac{1}{2c} \int d^4x \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (2.16)$$

Segundo o princípio de mínima ação $\delta S_m + \delta S_E = 0$, logo

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}, \quad (2.17)$$

onde G é a constante universal da gravitação, g é o determinante de $g_{\mu\nu}$ e R é o escalar de Ricci $R \equiv R^\mu{}_\mu$.

2.2 Teoria Linearizada

O fenômeno ondulatório é comumente entendido como perturbações que carregam energia e se propagam em algum meio. As OG, no caso, são perturbações do espaço-tempo que podem ser geradas por fenômenos oscilatórios como dois buracos negros em órbita bem como por fenômenos explosivos como supernovas [1]. O primeiro passo que temos de tomar para seu entendimento é escrever uma métrica que seja perturbada em torno de um espaço-tempo plano

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad (2.18)$$

e, a partir disto, podemos escrever as equações de Einstein linear em $h_{\mu\nu}$. Essa não é a forma mais geral possível de se estudar ondas gravitacionais, porém é geral o suficiente para os nossos propósitos. O fato é que esperamos trabalhar com sistemas

binários auto gravitantes com movimentos aproximadamente newtonianos, portanto obedecendo uma expansão em torno da métrica de Minkowski.

O tensor de Riemman linear em $h_{\mu\nu}$ pode ser escrito como

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_\nu\partial_\rho h_{\mu\sigma} + \partial_\mu\partial_\sigma h_{\nu\rho} - \partial_\mu\partial_\rho h_{\nu\sigma} - \partial_\nu\partial_\sigma h_{\mu\rho}), \quad (2.19)$$

com o intuito de facilitar alguns cálculos posteriores, podemos escrever a perturbação com o traço invertido

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad (2.20)$$

onde $h \equiv h^\mu{}_\mu$ é o traço de $h_{\mu\nu}$ [29]. É fácil notar que a partir de (2.20) temos que $\bar{h} = -h$, assim

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}, \quad (2.21)$$

dessa forma, podemos finalmente escrever a equação de Einstein linearizada

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\partial^\rho\partial^\sigma\bar{h}_{\rho\sigma} - \partial^\rho\partial_\nu\bar{h}_{\mu\rho} - \partial^\rho\partial_\mu\bar{h}_{\nu\rho} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2.22)$$

onde $\square \equiv \partial^\mu\partial_\mu$ é o d'Alambertiano. Neste ponto precisamos recorrer ao eletromagnetismo e entender como funciona o ajuste de calibre para dar continuidade ao assunto.

2.2.1 Calibre de Lorentz

No eletromagnetismo, temos a equação de onda em sua forma mais simplificada, escrita como

$$\square A^\mu = \frac{4\pi}{c}j^\mu \quad (2.23)$$

onde A^μ e j^μ são o quadripotencial eletromagnético e a quadricorrente, que são os equivalentes à $h^{\mu\nu}$ e $T^{\mu\nu}$ na teoria eletromagnética. Logo, para aproximar a equação (2.22) da equação (2.23), buscou-se utilizar a mesma ferramenta, o conhecido calibre de Lorentz

$$\partial^\mu A_\mu = 0 \quad \rightarrow \quad \partial^\mu \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (2.24)$$

Mas o que é o calibre? Teorias de campos em geral são caracterizadas por grupos de simetrias onde são invariantes. A teoria da relatividade geral deve ser invariante sob todas as possíveis mudanças de coordenadas

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu(x^\nu). \quad (2.25)$$

Além disso, $x'^{\mu}(x^{\nu})$ precisa ser um difeomorfismo, isto é, ser invertível, diferenciável e a inversa também deve ser diferenciável [2]. Sob a transformação (2.25), podemos ver que a métrica irá se transformar de acordo com a seguinte equação

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu}(x^{\gamma}) = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} g_{\alpha\beta}. \quad (2.26)$$

A simetria acima é conhecida como a simetria de calibre da relatividade geral. Então, a partir disso nós podemos fixar um calibre, que em RG é equivalente a escolher um referencial. Fazer isso não só facilita os cálculos, mas também remove graus de liberdade espúrios da teoria, facilitando também o entendimento físico por trás da matemática.

A teoria linearizada é invariante sob uma simetria ainda mais específica

$$x_{\mu} \rightarrow x'^{\mu}(x^{\nu}) = x_{\mu} + \xi^{\mu}(x^{\nu}) \quad (2.27)$$

onde $|\partial_{\mu}\xi^{\mu}(x)|$ tem que ser da mesma ordem de grandeza de $|h_{\mu\nu}|$. É possível mostrar que a partir de (2.27) e (2.26) podemos chegar à

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h'_{\mu\nu}(x) = \bar{h}_{\mu\nu} - (\partial_{\mu}\xi_{\nu} + \partial_{\nu}\xi_{\mu} - \eta_{\mu\nu}\partial_{\alpha}\xi^{\alpha}), \quad (2.28)$$

e também a

$$\partial^{\mu}\bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow (\partial^{\mu}\bar{h}_{\mu\nu})' = \partial^{\mu}\bar{h}_{\mu\nu} - \square\xi_{\nu}. \quad (2.29)$$

A consequência de fixarmos esse calibre é a redução da equação (2.22) à

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2.30)$$

ou seja, conseguimos encontrar uma equação de ondas em relatividade geral de forma análoga ao eletromagnetismo. É importante notar que o calibre de Lorentz $\partial^{\mu}\bar{h}_{\mu\nu} = 0$ nos dá pelo menos quatro equações com as componentes de $\bar{h}_{\mu\nu}$, removendo assim, 4 graus de liberdade espúrios. Outro ponto importante de se notar é que a partir desse calibre e da equação (2.30), temos diretamente que a conservação do tensor momento-energia, na teoria linearizada, é dada por

$$\partial^{\mu}T_{\mu\nu} = 0, \quad (2.31)$$

diferentemente da teoria geral da relatividade completa, onde o tensor momento-energia é conservado por uma derivada covariante.

2.2.2 Calibre de Traço Nulo Transverso (TT) e a Polaridade da Onda

A fim de estudarmos a propagação da onda e sua interação com uma massa teste (ou o instrumento) é necessário olharmos para essa onda em uma região do espaço sem a fonte, ou seja, $T_{\mu\nu} = 0$, dessa forma a equação de onda fica

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (2.32)$$

onde, o D'Alambertiano é dado pela equação (2.5) e c é a velocidade da luz no vácuo. Embora pareça trivial, a velocidade de propagação da onda gravitacional possui um certo destaque, pois algumas teorias de gravidade modificada indicam uma velocidade de propagação da onda gravitacional diferente da velocidade da luz. Entretanto, essas teorias foram descartadas depois do evento de coalescência de estrelas de nêutron GW170817 [20] observado durante a segunda janela de observação do LIGO/Virgo, em que uma contraparte eletromagnética foi observada juntamente com a onda gravitacional, sendo possível detectar a diferença de tempo entre a chegada das duas ondas. Chegou-se, então, a uma diferença de $O(10^{-15})$ entre elas, o que é uma forte evidência a favor da relatividade geral.

Retomando os cálculos anteriores, podemos simplificar ainda mais $h_{\mu\nu}$ de forma que possamos compreender as características desse tensor que carrega a informação da onda. O ponto é, ainda existem graus de liberdades que podem ser removidos desse tensor, visto que a equação (2.29) não se altera com uma nova transformação do tipo $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$ [2]. Então, podemos fazer uma nova mudança de variável de forma que

$$\square \xi_\mu = 0, \quad (2.33)$$

o que implica diretamente em $\square \xi_{\mu\nu} = 0$, onde

$$\xi_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\alpha. \quad (2.34)$$

Então, aplicando o d'Alambertiano na equação (2.28) e sob a condição de $T_{\mu\nu} = 0$, nós vemos que

$$\square(\bar{h}_{\mu\nu} - \xi_{\mu\nu}) = 0, \quad (2.35)$$

logo, como $\xi_{\mu\nu}$ depende de quatro funções independentes ξ_μ , então podemos remover mais 4 graus de liberdade de $h_{\mu\nu}$, restando assim apenas 2, que são os dois graus de liberdades físico da onda gravitacional. Como ξ_μ são funções arbitrárias, podemos escolhe-las de forma que

$$h^{0\mu} = 0, \quad h^i{}_i = 0, \quad \partial^i h_{ij} = 0. \quad (2.36)$$

Essas escolhas definem o calibre traço nulo transversal (TT). Alguns livros mais antigos como [28] fazem o processo de remover os graus de liberdade de forma explícita, considerando apenas uma onda plana transversal. Essa característica de transversalidade está implicitamente embutida no calibre TT, junto com a característica do traço nulo. Sob essas condições, temos que $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$. Um fato importante de se observar é que o calibre TT também pode ser fixado na presença de fonte, porém não pode zerar nenhuma outra componente de $h_{\mu\nu}$. É comum usar a notação h_{ij}^{TT} quando estamos trabalhando nesse calibre.

Como dito anteriormente, a condição de ondas planas está implícita nesse calibre, de forma que a solução da equação (2.32) é dada por

$$h_{ij}^{TT} = B_{ij} e^{ik^\mu x_\mu}, \quad (2.37)$$

onde B_{ij} é o tensor de polarização, $k^\mu = (\omega/c, \vec{k})$ é o quadrivetor de onda e portanto ω é a frequência angular. É importante notar que para uma partícula sem massa temos que $\omega/c = |k|$ e que para uma onda plana a direção de propagação é dada por $\hat{n} = k/|k|$. Por convenção, toma-se a parte real da exponencial e a direção da onda como sendo no eixo z . Essas convenções, somadas às equações (2.36) e a imposição de que h_{ij} seja simétrico, podemos reescrever a solução como

$$h_{ij}^{TT}(t, z) = \begin{pmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{ij} \cos[\omega(t - z/c)], \quad (2.38)$$

em que h_+ e h_\times são as amplitudes conhecidas como *Plus* e *Cross*.

Novamente, conseguimos fazer um completo paralelo das OG com as ondas eletromagnéticas. Ambas são transversais e planas. Porém elas diferem em duas coisas, na polarização e na helicidade. Essas duas últimas características citadas, na verdade, estão interligadas. Em geral, uma onda plana sob uma rotação no eixo de propagação, se transforma como

$$\psi' = e^{i\mathcal{H}\theta} \psi, \quad (2.39)$$

onde \mathcal{H} é a helicidade¹ e θ é o ângulo de rotação. A onda eletromagnética possui $\mathcal{H} = \pm 1$ enquanto a onda gravitacional possui $\mathcal{H} = \pm 2$. Ou seja, quando rotacionamos uma onda eletromagnética em seu eixo de propagação, para retomarmos exatamente à mesma configuração original precisamos dar uma volta de 360°. Por outro lado

¹Normalmente se usa a letra h para helicidade, porém para não confundir com a métrica perturbada, optamos pela presente notação.

temos o mesmo efeito para onda gravitacional apenas girando o eixo 180° . Isto é claramente percebido quando tentamos descrever o efeito que a onda gravitacional causa um anel de partículas teste.

Para dar início a discussão, podemos considerar uma massa teste no referencial de queda livre no momento em que se encontra com a onda gravitacional, ou seja, com a quadrivelocidade $u^\mu = (c, 0, 0, 0)$. O efeito da onda gravitacional deveria então ser notado na equação da geodésica (2.13). Porém, podemos ver a partir de (2.7) que o símbolo de Christoffel é nulo quando trabalhamos com a métrica no calibre TT

$$\Gamma_{00}^\mu = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\partial_0 h_{\nu 0} + \partial_0 h_{0\nu} - \partial_\nu h_{00}) = 0, \quad (2.40)$$

logo, podemos dizer que não há aceleração inicial, pois $\frac{\partial u^\mu}{\partial \tau} = 0$. O argumento pode ser repetido para toda a trajetória. Assim, podemos afirmar que a partícula não sai do repouso quando escolhemos o sistema de coordenadas do calibre TT, o que está em completo acordo com o princípio de equivalência.

Uma das formas de se identificar os efeitos da onda gravitacional então é observando o movimento relativo entre duas partículas, que pode ser feito utilizando a equação de desvio da geodésica [2], que é uma equação que mede exatamente o efeito que alguma curvatura causa entre duas geodésicas. Porém, por simplicidade, vamos analisar o elemento de linha da teoria linearizada sob o calibre de Lorentz e TT.

Considerando o efeito da polarização *plus* e 3 partículas testes num plano cartesiano, onde uma está posicionadas na origem, a segunda está posicionada a uma distância qualquer x_1 no eixo x , enquanto a última está posicionada também a uma distância qualquer y_1 , porém no eixo y . De forma que $dx^\mu = (0, x_1, y_1, 0)$. O elemento de linha nesse caso pode ser escrito como

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = (1 + h_+ \cos \omega t)x_1^2 + (1 - h_+ \cos \omega t)y_1^2. \quad (2.41)$$

Pode-se ver que a equação (2.42) varia entre uma elipse com o eixo principal em x , um círculo de raio dS e uma elipse com o eixo principal em y dependendo do valor do argumento do cosseno, sendo todas elas centradas em 0. Podemos fazer a mesma análise para a polarização *cross*, obtendo

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = x_1^2 + 2h_\times \cos(\omega t)x_1 y_1 + y_1^2, \quad (2.42)$$

que é a equação da elipse centrada na origem, porém rotacionada 45° . Para cossenos negativos, ela será uma elipse com o eixo principal paralelo a uma reta $y = x$, já para cossenos positivos ela terá o eixo principal paralelo a uma reta $y = -x$. Quando

o cosseno igual a zero, temos exatamente um círculo. Podemos ver esse efeito na prática na figura 2.1

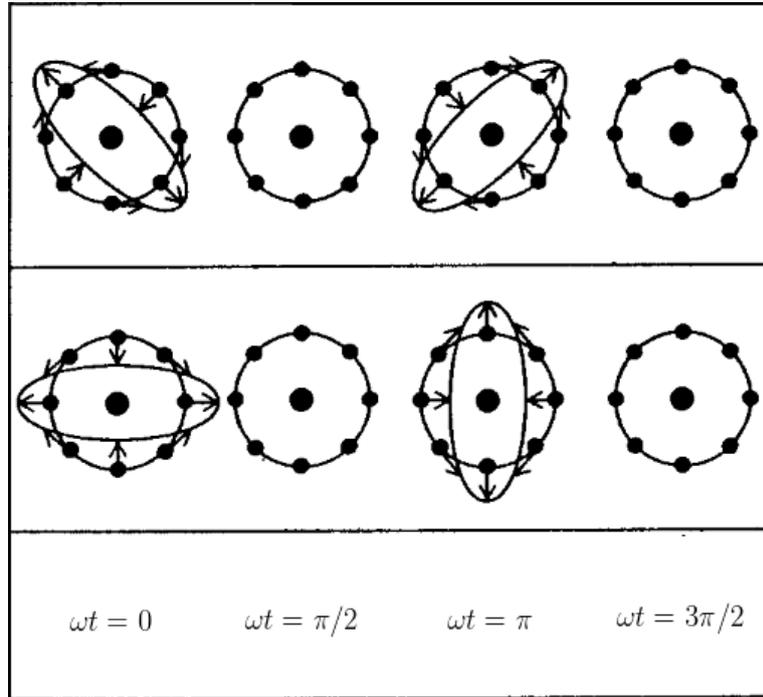


Figura 2.1: Anéis de partículas afetados por uma onda gravitacional. A primeira linha é o efeito causado pela polarização *cross* enquanto a segunda linha é o efeito causado pela polarização *plus*. **Figura adaptada da referência:** [1]

Como consequência, podemos perceber que o efeito causado por uma onda gravitacional ao passar por um anel de partículas, ela estica o anel de forma análoga a um efeito de maré, transformando o anel em uma elipse. Por esse motivo, os detectores de ondas gravitacionais são barras longas ou interferômetros em formas de cruz ou triangular, porque se espera que quando a onda gravitacional passe por eles, ela imprima esse efeito de alongar em uma direção e comprimir na outra, gerando assim a observação. É possível notar então que se temos um detector com um braço de tamanho L possui uma variação máxima de tamanho, em primeira ordem, de $(1 + h_+)L$ ou $L + \delta L$, assim, igualando as duas, temos que $h_+ = \delta L/L$. Essa variação relativa do braço do interferômetro é também conhecida como *strain*. Considerando então que a amplitude da onda gravitacional é da ordem de 10^{-21} , e que até então, os mais avançados instrumentos de medição possuem tamanho de $4 \times 10^3 m$, então, podemos estimar $\delta L \approx 10^{-18}$ [30]. O que mostra o quão preciso esses detectores precisam ser.

2.3 Momento de Quadrupolo

Até a presente seção nos dedicamos a desenvolver a teoria de Einstein, che-

gar em uma equação de onda e estudarmos a sua propagação. A partir de agora começaremos a olhar também para a fonte, para entendermos melhor como que essas OG são geradas e isso inclui todas as aproximações que precisam ser feitas.

A primeira delas vem do fato de, na teoria linearizada, nós trabalharmos com uma métrica expandida em torno de um espaço-tempo plano. Essa expansão só é justificada se a fonte for suficientemente fraca, o que implica em velocidades baixas. Tal fato pode ser verificado, em um sistema auto-gravitante, através do teorema do virial

$$\frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{1}{2} \frac{G\mu m}{d}, \quad (2.43)$$

onde, μ e m são a massa reduzida e a massa total do sistema e v é a velocidade linear dos corpos e d a distância entre eles. Podemos escrever essa equação em termo do raio de Schwarzschild $R_S = 2Gm/c^2$, que é o raio do horizontes de eventos de um buraco negro, apenas dividindo a equação (2.43) por c^2

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{R_S}{d}. \quad (2.44)$$

Essa relação evidencia a condição anteriormente citada, pois vemos que, se a distância entre os dois corpos for suficientemente grande $R_S \ll d$, então as velocidades envolvidas no problema serão muito menores que a velocidade da luz $v \ll c$. Embora a aproximação de campo fraco implique em baixa velocidades, essas duas aproximações podem ser feitas de formas distintas e é o que veremos mais a frente.

2.3.1 Aproximação de campo fraco e limite não relativístico

Para começarmos a trabalhar com a fonte, devemos encontrar uma solução para a equação (2.30). O operador d'Alambertiano é facilmente invertível utilizando o método de função de Green $G(x^\mu - x'^\mu)$, onde esta satisfaz a equação

$$\square G(x^\mu - x'^\mu) = \delta^4(x^\mu - x'^\mu), \quad (2.45)$$

assim, a solução da equação (2.30) fica

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = -\frac{16\pi G}{c^4} \int d^4x' G(x^\mu - x'^\mu) T_{\mu\nu}(x'^\mu). \quad (2.46)$$

Como estamos estudando o caso de emissão de OG, utilizamos as condições de contorno de Kirchoff-Sommerfield, que fisicamente significa que não há a chegada de radiação em nenhum momento do passado até o tempo presente. Dessa forma a função de Green apropriada para nosso problema (assim como é feito no eletromagnetismo) é a retardada

$$G(x^\mu - x'^\mu) = -\frac{1}{4\pi|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta(ct_{ret} - ct') \quad (2.47)$$

onde $t_{ret} = t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}$ é o tempo retardado. Então, usando a delta de Dirac para integrar a parte temporal, ficamos com

$$\bar{h}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = \frac{4G}{c^4} \int d^3x' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} T_{\mu\nu} \left(t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}, \vec{x}' \right). \quad (2.48)$$

Nosso interesse é calcular o campo em regiões fora da fonte, logo, é conveniente projetar (2.50) no calibre traço nulo transverso. Para fazer isso, podemos utilizar o projetor

$$\Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) = P_{ik}P_{jl} - \frac{1}{2}P_{ij}P_{kl} \quad (2.49)$$

onde \hat{n} é o versor da base do espaço vetorial. Esse projetor é transverso em todos os índices, possui traço nulo em relação a (i, j) e (k, l) , e é simétrico sob a mudança simultânea $(i, j) \iff (k, l)$. O tensor $P_{ik}(\hat{n}) = \delta_{ij} - n_i n_j$, é simétrico, transverso, possui traço 2 e também é um projetor. Podemos escrever

$$h_{ij}^{TT}(t, \vec{x}) = \frac{4G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) \int d^3x' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} T_{kl} \left(t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}, \vec{x}' \right). \quad (2.50)$$

Para um aprofundamento na mudança de índices, no tensor momento-energia, recomendamos as referências [2, 28]. Observamos que, a partir da conservação do tensor momento-energia (2.31), chegamos nas relações

$$T_{0j} = -n^i T_{ij}; \quad T_{00} = n^i n^j T_{ij}, \quad (2.51)$$

logo, vemos que o tensor momento-energia pode ser escrito apenas com as componentes espaciais sem nenhuma perda de informação.

A partir desse ponto, podemos fazer uma primeira expansão de Taylor. Para facilitar a notação iremos fazer $|x| = r$ e podemos dizer que $\hat{x} = \hat{n}$. Visto que esperamos que a fonte de OG esteja a uma distância muito grande da observação que é feita em x , podemos então dizer que $d \ll r$, logo, podemos fazer a seguinte expansão em primeira ordem

$$|\vec{x} - \vec{x}'| = r - \vec{x}' \cdot \hat{n} + O\left(\frac{d^2}{r}\right), \quad (2.52)$$

assim, podemos reescrever a integral (2.50) como

$$h_{ij}^{TT}(t, \vec{x}) = \frac{4G}{rc^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) \int d^3x' T_{kl} \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{x}' \cdot \hat{n}}{c}, \vec{x}' \right). \quad (2.53)$$

É importante então, fazermos uma transformada de Fourier para explicitarmos a dependência de T_{ij} na frequência da fonte

$$T_{kl} \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{x}' \cdot \hat{n}}{c}, \vec{x}' \right) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} T_{kl}(\omega, \vec{k}) e^{-i\omega(t-r/c+\omega\hat{n}/c)} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}'}. \quad (2.54)$$

Agora, podemos aplicar o limite não relativístico, também conhecido como limite de baixa velocidade ou limite de longo comprimento de onda. A frequência da onda gravitacional ω é igual a duas vezes a frequência da fonte ω_s (devido ao sistemas auto gravitantes, a grosso modo, retornarem a configuração original após darem meia volta, pois a única diferenciação entre os dois corpos é a massa de cada um). Por sua vez temos que $v \sim \omega_s d$ (a aproximação se deve ao fato do movimento não ser exatamente circular). Sendo o comprimento de onda $\lambda = 2\pi c/\omega$, logo temos

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{c}{\omega} d, \quad (2.55)$$

então, para fontes relativísticas temos que $v \ll c$ e $\lambda/2\pi \ll d$. A integral (2.53) é feita na variável x' , onde temos como limite de integração o tamanho d da fonte. Além disso o movimento não é exatamente circular, mas possui velocidade circular que fica em torno de uma frequência ω_s . Podemos visualizar melhor o problema na figura 2.2

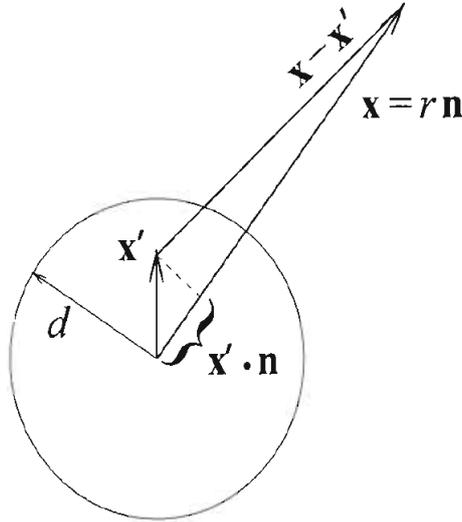


Figura 2.2: Esquema do sistema a ser integrado. Note que os vetores aqui estão sendo representados pelas letras em negrito. **Fonte:** [2]

Dito isso, temos que nesse caso o limite tomado pode ser transcrito como

$$\frac{\omega}{c} \cdot \vec{x}' < \frac{\omega_s d}{c} \ll 1. \quad (2.56)$$

Assim, podemos expandir o tensor momento-energia em uma série de Taylor em torno do ponto $(t - r/c, \vec{x}')$

$$T_{kl} \left(t - \frac{r}{c}, \vec{x}' \right) \simeq T_{kl} \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{x'^i n^i}{x} \partial_0 T_{kl} + \frac{1}{2c^2} x'^i x'^j n^i n^j \partial_0^2 T_{kl} + \dots \quad (2.57)$$

Substituindo a expansão em (2.53), obtemos

$$h_{ij}^{TT}(t, \vec{x}) = \frac{4G}{rc^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) \left[S^{kl} + \frac{1}{c} n_m \dot{S}^{kl,m} + \frac{1}{2c^2} n_m n_p \ddot{S}^{kl,mp} + \dots \right]. \quad (2.58)$$

lembrando que as derivadas são todas tomadas no tempo retardado, e S^{kl} é definido como o momento do tensor momento-energia

$$S^{ij} = \int d^3x T^{ij}, \quad (2.59)$$

$$S^{ij,k} = \int d^3x T^{ij} x^k, \quad (2.60)$$

$$S^{ij,kl} = \int d^3x T^{ij} x^k x^l, \quad (2.61)$$

onde a vírgula separa os índices do tensor momento-energia e da variável espacial. Uma maneira simples de entendermos o significado físico desses momentos é olhando para o momento da densidade de energia T^{00}/c^2 e para o momento do momento linear T^{0i}/c .

$$M = \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00}, \quad (2.62)$$

$$M^i = \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00} x^i, \quad (2.63)$$

$$M^{ij} = \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00} x^i x^j, \quad (2.64)$$

$$P^i = \frac{1}{c} \int d^3x T^{0i}, \quad (2.65)$$

$$P^{i,j} = \frac{1}{c} \int d^3x T^{0i} x^j, \quad (2.66)$$

Podemos encontrar identidades e relações entre esses momentos simplesmente utilizando derivadas temporais, o teorema do divergente e a conservação do tensor momento-energia

$$\partial_0 T^{00} = -\partial_i T^{0i}. \quad (2.67)$$

Calculando \dot{M} e integrando em um volume V muito maior que a fonte vemos que

$$\begin{aligned} c\dot{M} &= \int_V d^3x \partial_0 T^{00}, \\ &= - \int_V d^3x \partial_i T^{0i}, \\ &= - \int_S dS_i T^{0i}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

onde dS_i é o elemento de área e S é a superfície integrada. Como uma das condições de contorno é que T^{0i} seja zero na superfície, então temos que $\dot{M} = 0$. Esse resultado pode ser interpretado como a conservação de massa do sistema. A gente pode fazer o mesmo processo para o vetor (2.63)

$$\begin{aligned} c\dot{M}^i &= \int_V d^3x \partial_0 \partial_0 T^{00} x^i, \\ &= - \int_V d^3x \partial_j T^{0j} x^i, \end{aligned}$$

porém tem um passo a mais que devemos fazer. Utilizando a regra do produto podemos reescrever a equação acima como

$$c\dot{M}^i = - \int_V d^3x [\partial_j (T^{0j} x^i) - T^{0j} \partial_j x^i], \quad (2.69)$$

o primeiro termo da integral acima pode ser resolvido pelo mesmo processo usado na dedução (2.68), e como já vimos seu valor é zero. Já no segundo termo, podemos usar o fato de $\partial_j x^j = \delta_i^j$ para chegarmos a

$$c\dot{M}^i = \int_V d^3x T^{0i} = cP^i. \quad (2.70)$$

Por um processo completamente equivalente à (2.68) fica claro que $\ddot{M}^i = \dot{P}^i = 0$. Ou seja, P^i é o momento linear do sistema e o que acabamos de demonstrar é que ele se conserva. Seguindo os mesmos passos que nos levaram à (2.70), nós chegamos à $\ddot{M}^{ij} = 2S^{ij}$ (note que quando fizemos para o caso de \dot{M}^i o processo de mudar a derivada para x^i fez com que no final $T^{00} \rightarrow T^{0i}$. No caso de M^{ij} ocorre o mesmo processo, só que duas vezes, chegando ao final na parte espacial do tensor momento-energia). Quando olhamos para M^{ij} , vemos exatamente a descrição de um momento de inércia, ou seja, temos uma descrição do termo S^{ij} muito clara vindo da física clássica.

As integrais (2.62), (2.63) e (2.64) são totalmente equivalentes aos termos de monopolo, dipolo e quadrupolo da expansão de um potencial elétrico (isso só ocorre para fontes não relativísticas, onde podemos fazer a aproximação $T^{00}/c^2 \simeq \rho(t, \vec{x})$,

em que ρ é a densidade da fonte), como podemos ver na referência [31]. Então, na teoria linearizada a expansão em série de Taylor de T^{ij} é equivalente a uma expansão multipolar, entretanto o primeiro termo dessa expansão é de um quadrupolo. O que está completamente em acordo com o que foi discutido acima. Como o termo de monopolo representa a massa total, o de dipolo representa o momento total e essas quantidades são conservadas, então é natural que o termo de ordem mais baixa da expansão passível de descrever a radiação gravitacional seja o termo de quadrupolo. Assim, mantendo o menor termo da expansão, nós temos a radiação de quadrupolo

$$[h_{ij}^{TT}(t, \vec{x})]_{quad} = \frac{2G}{rc^4} \Lambda_{ij,kl}(\hat{n}) \ddot{M}^{kl}(t - r/c). \quad (2.71)$$

2.3.2 Generalização do momento de massa de quadrupolo

O primeiro ponto que podemos apontar é a generalização do tensor \ddot{M}^{ij} . Podemos escrevê-lo em sua forma irreduzível

$$M^{kl} = Q^{kl} + \frac{1}{3} \delta^{kl} M_{ii} \quad (2.72)$$

onde nessa equação separamos o traço do tensor da sua parte sem traço Q^{kl} . Como $\Lambda_{ij,kl} \delta^{kl} = 0$, então temos

$$[h_{ij}^{TT}(t, \vec{x})]_{quad} = \frac{2G}{rc^4} \ddot{Q}_{kl}^{TT}(t - r/c), \quad (2.73)$$

entretanto, no calibre TT, Q_{ij} e M_{ij} são objetos iguais, então nesse calibre podemos utilizar as duas notações sem perda de generalização.

Até o momento só estudamos a onda gravitacional se propagando na direção \hat{z} do eixo cartesiano, que é um sistema de coordenadas muito específico, porém útil para se fazer os cálculos. É interessante então, acharmos uma forma de generalizar h_{ij}^{TT} para uma direção \hat{n}' qualquer. O melhor jeito de fazer isso é fazendo uma mudança de referencial indo do referencial generalizado O' , para o referencial do centro de massa do sistema O , onde $\hat{z} = \hat{n}'$ é a direção de propagação da onda plana e \hat{n} é dado por

$$\hat{n}' = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta). \quad (2.74)$$

A primeira parte é relativamente simples de ser feita, devemos apenas calcular as componentes $h_{11}^{TT} = h_+$ e $h_{12}^{TT} = h_\times$. Sabendo que as únicas componentes não nulas do projetor P_{ij} são $P_{11} = 1$ e $P_{22} = 1$ (isso no caso da direção de propagação sendo \hat{z}), então

$$\Lambda_{ij,kl} \ddot{M}_{kl} = \left(P_{ik} P_{jl} - \frac{1}{2} P_{ij} P_{kl} \right) \ddot{M}_{kl} \quad (2.75)$$

$$\Lambda_{11,kl}\ddot{M}_{kl} = P_{11}P_{11}\ddot{M}_{11} - \frac{1}{2}P_{11}P_{11}\ddot{M}_{11} - \frac{1}{2}P_{11}P_{22}\ddot{M}_{22}, \quad (2.76)$$

$$\Lambda_{11,kl}\ddot{M}_{kl} = \frac{1}{2}(\ddot{M}_{11} - \ddot{M}_{22}), \quad (2.77)$$

Logo, temos que

$$h_+ = \frac{G}{rc^4}(\ddot{M}_{11} - \ddot{M}_{22}), \quad (2.78)$$

Seguindo o mesmo raciocínio, chegamos à

$$h_\times = \frac{2G}{rc^4}\ddot{M}_{12} \quad (2.79)$$

O próximo passo é calcular essas componentes de \ddot{M}^{ij} em um referencial O' de um observador qualquer. Para isso, basta fazermos as rotações em ângulos e eixos diferentes. Implicitamente, o que estamos fazendo é uma transformação tensorial, na forma

$$\ddot{M}'_{ij} = R_{ik}R_{jl}\ddot{M}_{kl} \quad (2.80)$$

onde R_{ij} é definida como

$$R = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.81)$$

Assim, abrindo os somatórios de (2.80), chegamos à

$$h_+(t, \theta, \phi) = \frac{G}{rc^4}[\ddot{M}_{11}(\cos^2 \phi - \sin^2 \phi \cos^2 \theta) + \ddot{M}_{22}(\sin^2 \phi - \cos^2 \phi \cos^2 \theta) + \ddot{M}_{12} \sin 2\phi(1 + \cos^2 \theta)], \quad (2.82)$$

$$h_\times(t, \theta, \phi) = \frac{G}{rc^4}[(\ddot{M}_{11} - \ddot{M}_{22}) \sin 2\phi \cos \theta + 2\ddot{M}_{12} \cos 2\phi \cos \theta]. \quad (2.83)$$

Com as expressões acima conseguimos então calcular as amplitudes da onda gravitacional em um referencial de laboratório independentemente da direção de propagação da onda. Podemos notar, a partir destes cálculos, que o ângulo θ consequentemente será o ângulo entre o vetor de momento angular \vec{L} (que é sempre perpendicular ao plano da órbita) do sistema e o vetor \hat{z}' . Por essa razão, costuma-se mudar esse ângulo para ι . Podemos ver a configuração final na figura 2.3.

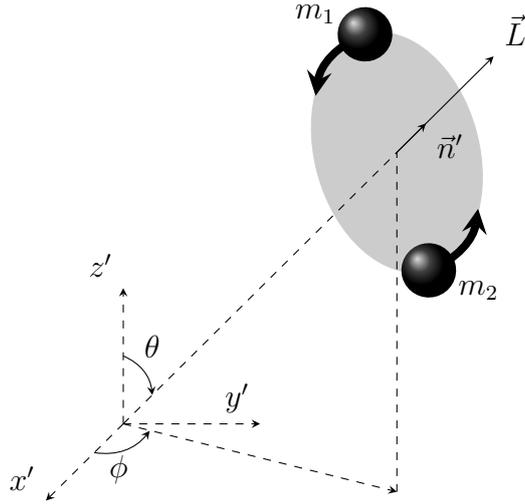


Figura 2.3: Esquema de um sistema binário de massas m_1 e m_2 relacionado em relação a um sistema de coordenadas qualquer O' .

É importante pontuar que todo o desenvolvimento feito nessa seção nos levou a amplitude da radiação da onda gravitacional ou da radiação de quadrupolo. Como vimos esse resultado foi obtido utilizando o menor termo da expansão de multipolo, sendo que os outros termos como o de octopolo, também geram radiação, embora com amplitudes bem menores. A aproximação de quadrupolo é suficientemente boa para descrever as OG observadas pela colaboração LIGO/Virgo e também para fazermos nossas simulações.

2.4 Sistemas binários como emissores de ondas gravitacionais

Todo o texto que foi desenvolvido até o momento tem como objetivo não só estudar OG, mas também reproduzir eventos reais que podem acontecer em nosso universo. Então, toda a teoria que havia sido escrita da maneira mais geral possível, agora irá ser aplicada em uma situação específica, que serão sistemas binários auto-gravitantes rotacionando em uma órbita quase-circular. Embora sistemas orbitais sejam guiados por órbitas elípticas, o efeito da emissão de radiação gravitacional gerada no sistema é de circularizar a órbita. Como veremos mais a frente, espera-se que seja possível medir a onda gravitacional emitida apenas nos últimos instantes da órbita (em torno de 15 minutos antes da coalescência). Nessa fase, os objetos em órbita quasi-circular espiralam progressivamente até o momento da coalescência. Então, baseado nisso, o sinal que devemos medir aqui na Terra vem desses sistemas com órbitas circulares.

2.4.1 Órbita circular

Primeiro, é necessário descrever o sistema. O mais simples ao se trabalhar com órbitas é trabalhar no referencial de centro de massas do sistema onde $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ e \vec{r}_1 e \vec{r}_2 são a posição do primeiro corpo e do segundo respectivamente. Também podemos associar a massa a esses corpos como sendo m_1 e m_2 , assim temos que a massa total é $m = m_1 + m_2$ e a massa reduzida $\mu = m_1 m_2 / m$. Iremos considerar as estrelas trabalhadas como compactas (estrela de nêutron ou buraco negro), porque é nosso alvo de estudo. Isso nos permite trata-las aproximadamente como massas pontuais. Além disso, podemos trabalhar em um referencial onde os eixos cartesianos x e y formam o plano da órbita, assim r pode ser simplesmente decomposto em

$$x(t) = R \cos(\omega_s t + \pi/2), \quad (2.84)$$

$$y(t) = R \sin(\omega_s t + \pi/2), \quad (2.85)$$

onde R é o raio do sistema e $\pi/2$ é uma escolha útil de tempo inicial (irá apenas mudar o sinal de h_+). O momento de inércia desse sistema no referencial do centro de massa, pode ser simplesmente escrito como $M_{ij} = \mu x_i x_j$, logo

$$M_{11} = \mu R^2 \cos^2(\omega_s t + \pi/2) = \frac{\mu R^2}{2} (1 - \cos(2\omega_s t)), \quad (2.86)$$

$$M_{22} = \mu R^2 \sin^2(\omega_s t + \pi/2) = \frac{\mu R^2}{2} (1 + \cos(2\omega_s t)), \quad (2.87)$$

$$M_{12} = \mu R^2 \sin(\omega_s t + \pi/2) \cos(\omega_s t + \pi/2) = -\frac{\mu R^2}{2} \sin(2\omega_s t), \quad (2.88)$$

onde foram utilizadas as relações algébricas $\cos^2(x) = (1 + \cos(2x))/2$, $\sin^2(x) = (1 - \cos(2x))/2$ e as relações de adição e subtração de arco. Com isso, temos que

$$\ddot{M}_{11} = -\ddot{M}_{22} = 2\mu R^2 \omega_s^2 \cos(2\omega_s t), \quad (2.89)$$

$$\ddot{M}_{12} = 2\mu R^2 \sin(2\omega_s t). \quad (2.90)$$

Quando colocamos as componentes de M_{ij} desenvolvidas acima nas equações (2.82) e (2.83), obtemos então

$$h_+(t, \theta, \phi) = \frac{4G\mu\omega_s^2 R^2}{rc^4} \left(\frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \right) \cos(2\omega_s t_{ret} + 2\phi), \quad (2.91)$$

$$h_\times(t, \theta, \phi) = \frac{4G\mu\omega_s^2 R^2}{rc^4} \cos \iota \sin(2\omega_s t_{ret} + 2\phi). \quad (2.92)$$

Ainda podemos fazer algumas mudanças nas amplitudes acima. Utilizando a lei de

Kepler

$$\omega_s^2 = \frac{Gm}{R^3}, \quad (2.93)$$

escrevendo a frequência angular da fonte em função da frequência da onda utilizando $\omega_s = \omega_{gw}/2 = \pi f_{gw}$ e definindo a “massa de gorjeio¹” como $M_c = \mu^{3/5} m^{2/5}$, podemos reescrever as equações (2.91) e (2.92) como

$$h_+(t, \theta, \phi) = \frac{4}{r} \left(\frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/3} \left(\frac{\pi f_{gw}}{c} \right)^{2/3} \left(\frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \right) \cos(2\omega_s t_{ret} + 2\phi), \quad (2.94)$$

$$h_\times(t, \theta, \phi) = \frac{4}{r} \left(\frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/3} \left(\frac{\pi f_{gw}}{c} \right)^{2/3} \cos \iota \sin(2\omega_s t_{ret} + 2\phi). \quad (2.95)$$

2.4.2 Diminuição do raio da órbita: o movimento quasi-circular

Embora não tenhamos abordado nessa dissertação a questão energética envolvendo a onda gravitacional, neste ponto podemos destacar que como outras ondas ela carrega energia e momento. O desenvolvimento do tema é importante, de fato, entretanto demandaria um esforço muito grande focado em um tema que não será utilizado para desenvolvimentos posteriores. Apesar disso, podemos pincelar algumas informações sobre o assunto, começando pelo principal motivo de evitarmos nos aprofundar nele. A energia carregada pela onda gravitacional está diretamente ligada a termos de segunda ordem do tensor de Ricci, ou seja, precisamos ir além da teoria linearizada. Esses termos por sua vez, geram uma álgebra extensiva. Além disso, a análise para separar a energia da fonte, da energia da própria onda gravitacional deve ser feita de maneira detalhista e minuciosa como visto na referencia [2]. Um resultado desse desenvolvimento que podemos destacar é o da energia E_{quad} emitida pelo sistema por unidade tempo t na aproximação de quadrupolo que é

$$\frac{dE_{quad}}{dt} = \frac{c^3 r^2}{16\pi G} \int d\Omega \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle, \quad (2.96)$$

onde $\langle \dots \rangle$ representa média sobre todo o espaço e $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ é o elemento de ângulo sólido. Sabendo que $\langle \cos^2(2\omega_s t_{ret} + 2\phi) \rangle = \langle \sin^2(2\omega_s t_{ret} + 2\phi) \rangle = 1/2$ e utilizando as expressões (2.94) e (2.95) podemos reduzir a expressão acima à

$$\frac{dE_{quad}}{dt} = \frac{4c^5}{G} \left(\frac{\pi GM_c f_{gw}}{c^2} \right)^{10/3} \int_0^\pi \sin \iota \, d\iota \left[\left(\frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \right) + \cos^2 \iota \right], \quad (2.97)$$

¹O nome “gorjeio” é uma tradução livre do inglês *chirp* e vem do fato de que o sinal da onda gravitacional se assemelha ao gorjeio de um pássaro, como podemos ver na referência [2].

onde o resultado da integral é $8/5$, o que nos leva ao resultado final

$$\frac{dE_{quad}}{dt} = \frac{32}{5} \frac{c^5}{G} \left(\frac{\pi G M_c f_{gw}}{c^2} \right)^{10/3}. \quad (2.98)$$

O fato do sistema estar perdendo energia tem efeitos diretos sobre o mesmo. A energia mecânica do sistema E_{mec} , que é a soma da energia cinética E_{cin} com a energia potencial E_{pot} pode ser expressa como

$$E_{mec} = E_{cin} + E_{pot} = -\frac{Gm_1m_2}{2R}. \quad (2.99)$$

Ao calcular a derivada temporal dessa expressão supondo que as massas permanecem constantes, temos

$$\frac{E_{mec}}{dt} = \frac{Gm_1m_2}{2R^2} \frac{dR}{dt}, \quad (2.100)$$

ou seja, a perda de energia $\frac{dE_{mec}}{dt} < 0$ acontece quando temos uma diminuição do raio $\frac{dR}{dt} < 0$. Então, a emissão de OG por um sistema binário faz com que a distância entre os objetos diminua. Esse comportamento é análogo ao de um elétron preso ao núcleo de um átomo, que decai para uma órbita menos excitada ao emitir um fóton. O regime de movimento quasi-circular vai ser definido pela condição $\dot{\omega}_s \ll \omega_s^2$ que é o que garante a lenta variação radial. Podemos ver isso calculando a velocidade radial a partir da lei de Kepler (2.93), onde obtemos

$$\dot{R} = -\frac{2}{3} (\omega_s R) \frac{\dot{\omega}_s}{\omega_s^2}. \quad (2.101)$$

Então, enquanto a condição $\dot{\omega}_s \ll \omega_s^2$ for mantida, a velocidade radial \dot{R} será muito menor que a velocidade tangencial $\omega_s R$, garantindo assim o regime de movimento quasi-circular. Podemos então, usar a própria equação (2.93) para escrever a derivada temporal da energia mecânica (2.100) puramente em função da frequência da onda

$$\frac{dE_{mec}}{dt} = -\frac{1}{3} \left(\frac{G^2 M_c^5 \pi^2}{f_{gw}} \right)^{1/3}, \quad (2.102)$$

logo, quando igualamos a variação de energia do sistema com quantidade de energia emitida na forma de ondas gravitacionais (2.98) conseguimos colocar a derivada temporal da frequência em função da própria frequência

$$\frac{df_{gw}}{dt} = \frac{96}{5} \pi^{8/3} \left(\frac{G M_c}{c^3} \right)^{5/3} f_{gw}^{11/3}. \quad (2.103)$$

Ao integrar a equação acima, encontramos que f_{gw} diverge para o infinito quando $t \rightarrow t_{coal}$, onde t_{coal} é o momento em que ocorre a coalescência. Então, nós fazemos

a mudança de variável $t \rightarrow \tau = t_{coal} - t$ e $dt = -d\tau$, e integrando a equação (2.103), temos

$$\int f_{gw}^{-11/3} df_{gw} = -\frac{96}{5}\pi^{8/3} \left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{5/3} \int d\tau. \quad (2.104)$$

Podemos resolver as integrais de maneira simples e zerar a constante de integração facilmente sabendo que quando $\tau \rightarrow \infty$, temos que $f_{gw} \rightarrow 0$. Assim nosso resultado pode ser expresso como

$$f_{gw}(\tau) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{5}{256\tau}\right)^{3/8} \left(\frac{c^3}{GM_c}\right)^{5/8}. \quad (2.105)$$

Com esse resultado, também podemos analisar a variação temporal do raio

$$\frac{\dot{R}}{R} = -\frac{1}{4\tau}, \quad (2.106)$$

onde podemos integrar obtendo

$$R(\tau) = R_0 \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{1/4} = R_0 \left(\frac{t_{coal} - t}{t_{coal} - t_0}\right)^{1/4}, \quad (2.107)$$

onde R_0 é o valor do raio no tempo inicial t_0 . O que podemos observar é que enquanto $t \ll t_{coal}$ o raio varia lentamente como é de se esperar, porém para $t \sim t_{coal}$, temos uma abrupta diminuição do raio onde as aproximações que estamos levando em conta não valem mais. Porém isso não chega a ser um problema que temos que abordar. As nossas simulações são feitas desde a frequência mínima captada pelo interferômetro até a frequência da orbita circular estável mais interna ou como é conhecida em inglês *innermost stable circular orbit* (ISCO)

$$f_{isco} = \frac{1}{2\pi 6\sqrt{6}} \frac{c^3}{Gm}, \quad (2.108)$$

que pode ser escrita como

$$(f_{gw})_{isco} = 1,1 \left(\frac{M_\odot}{m}\right) kHz. \quad (2.109)$$

Podemos fazer uma rápida comparação entre a equação (2.109) e a nossa condição de movimento quasi-circular $\omega_s \ll \omega_s^2$, que pode ser escrita como $f_{gw} \ll 15.6(M_\odot/M_c)kHz$ usando a equação 2.103. Escrevendo $(f_{gw})_{max} = 15.6(M_\odot/M_c)kHz$, temos que

$$\frac{(f_{gw})_{max}}{(f_{gw})_{isco}} = 14,18 \left(\frac{M_c}{m}\right). \quad (2.110)$$

Fazendo o caso do mínimo valor possível para M_c/m que é $m_1 = m_2 = m/2$, temos

$$\frac{(f_{gw})_{max}}{(f_{gw})_{isco}} \approx 6, \quad (2.111)$$

ou seja, mesmo para caso mais extremo, a frequência da ISCO continua sendo 6 vezes menor do que a frequência máxima possível. De fato, a definição da ISCO advém dos efeitos gerados devido aos campos fortes, então a partir dela vemos que a aproximação newtoniana não é mais válida. O que tomamos como geral é que a fase de mergulho começa a partir da ISCO, então simplesmente fazemos $(f_{gw})_{max} = (f_{gw})_{isco}$.

Então, resumindo, a fase que nós temos interesse de estudo é fase de espiral onde o raio do sistema está diminuindo lentamente enquanto a frequência aumenta também lentamente até uma frequência limite que vai ser dada pela ISCO. O sinal produzido nesse período é chamado de *chirp sinal* que em tradução livre é “sinal de gorjeio”. Podemos ver o formato do sinal de gorjeio na figura 2.4.

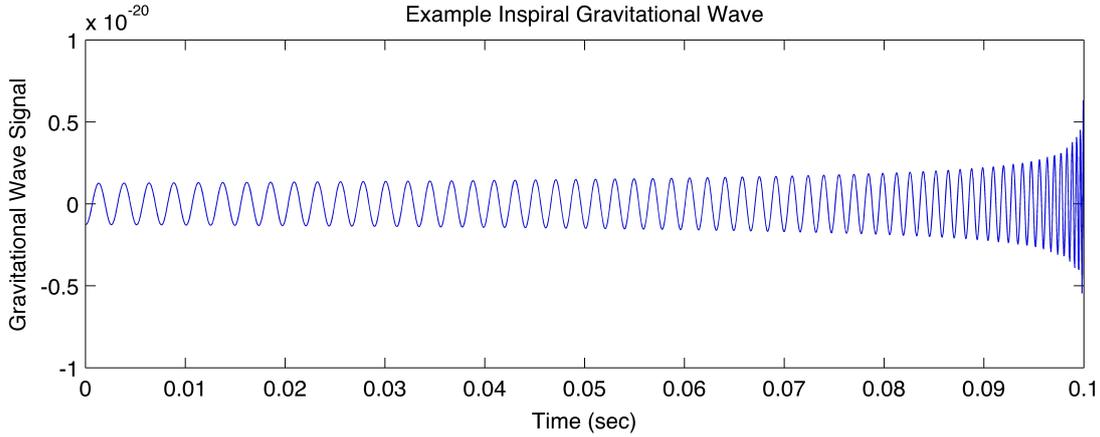


Figura 2.4: Exemplo do sinal de gorjeio próximo à coalescência. Podemos ver como a frequência e a amplitude crescem de acordo com o passar do tempo. **Fonte:** [3]

Outra característica deste sinal é que ele varia aproximadamente dentro da faixa de frequências sonoras auditivas para o ser humano, por isso denominam as OG como sirenes padrão, um termo referente ao termo de vela padrão que é utilizado para SN Ia e outros observáveis cosmológicos que emitem radiação eletromagnética e permitem medir distâncias. Então, matematicamente podemos definir o sinal de gorjeio como

$$h_{+}(t) = \frac{1}{r} \left(\frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/4} \left(\frac{5}{c\tau(t)} \right)^{1/4} \left(\frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \right) \cos\{\Phi[\tau(t)]\}, \quad (2.112)$$

$$h_{\times}(t) = \frac{1}{r} \left(\frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/4} \left(\frac{5}{c\tau(t)} \right)^{1/4} \cos \iota \sin\{\Phi[\tau(t)]\}, \quad (2.113)$$

que é a nossa forma final para as amplitudes *plus* e *cross*. Note que mudamos $(2\omega_s t_{ret} + 2\phi) \rightarrow \Phi(\tau)$. A mudança ocorre simplesmente por não termos mais uma frequência constante, então na verdade podemos escrever todo esse argumento como uma função de τ , onde a fase está incluída nela. Uma coisa que acabou ficando implícita no meio do processo foi a mudança $t_{ret} \rightarrow t$, onde t é o tempo do observador. Isso porque o tempo que a onda gravitacional demora para se propagar na velocidade da luz não varia com o referencial.

Por fim, podemos fazer a transformada de Fourier do sinal de gorjeio, obtendo

$$\tilde{h}_+(f) = \frac{e^{i\Psi_+(f)}}{\pi^{2/3}} \left(\frac{5}{24}\right)^{1/2} \frac{c}{r} \left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{5/6} \left(\frac{1}{f^{7/6}}\right) \left(\frac{1 + \cos^2 \iota}{2}\right), \quad (2.114)$$

$$\tilde{h}_\times(f) = \frac{e^{i\Psi_\times(f)}}{\pi^{2/3}} \left(\frac{5}{24}\right)^{1/2} \frac{c}{r} \left(\frac{GM_c}{c^3}\right)^{5/6} \left(\frac{1}{f^{7/6}}\right) \cos \iota, \quad (2.115)$$

onde $\Psi_\times(f) = \Psi_+(f) + \pi/2$ e

$$\Psi_+(f) = 2\pi f(t_{coal} + r/c) - \Phi_0 - \frac{\pi}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{8\pi GM_c f}{c^3}\right)^{-5/3}, \quad (2.116)$$

onde Φ_0 é o valor da fase Φ na coalescência. Essas amplitudes 2.114 e 2.115 são extremamente importantes para as simulações, pois iremos trabalhar no espaço de frequências. Todavia, essa forma de $\Psi_+(f)$ não é a mais correta, necessitando de aproximações pós-newtonianas para tal [2, 32], mas isso vai um pouco além do escopo do trabalho, porque como veremos mais a frente, isso não influenciará nos nossos resultados.

2.4.3 Circularização da Órbita

Como vimos na subseção anterior a emissão de OG geram efeitos no próprio sistema como a diminuição da distância entre os corpos e como já foi dito antes em sistemas elípticos esse efeito causa a diminuição da excentricidade [2]. Não é nossa intenção aqui desenvolver novamente todo o problema agora para um sistema de massas pontuais com órbita elíptica, porém podemos pontuar alguns resultados obtidos dessa análise. A derivada temporal do semieixo maior a e da excentricidade e são

$$\frac{da}{dt} = -\frac{64}{5} \frac{G^3 \mu m^2}{c^5 a^3} \frac{1}{(1-e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4\right), \quad (2.117)$$

$$\frac{de}{dt} = -\frac{304}{15} \frac{G^3 \mu m^2}{c^5 a^4} \frac{e}{(1-e^2)^{5/2}} \left(1 + \frac{121}{304} e^2\right). \quad (2.118)$$

O primeiro ponto importante que podemos nos atentar é de que , se $e = 0$ então $de/dt = 0$, o que nos garante que a órbita circular não volte a se tornar elíptica. As equações (2.117) e (2.118) podem ser combinadas, obtendo assim

$$\frac{da}{de} = \frac{12}{19}a \left(\frac{1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4}{e(1 - e^2)(1 + \frac{121}{304}e^2)} \right), \quad (2.119)$$

que pode ser integrada analiticamente

$$a(e) = a_0 \frac{e^{12/19}}{1 - e^2} \left(1 + \frac{121}{304}e^2 \right)^{870/2299}. \quad (2.120)$$

onde a_0 é o valor inicial do semieixo maior. Embora a equação (2.120) não seja tão facilmente invertível, podemos calcular e usando métodos numéricos, mas para isso precisamos de um exemplo com números. Podemos pegar o famoso caso do pulsar Hulse-Taylor, onde $m_1 = m_2 \simeq 1,4M_\odot$, $e_0 \simeq 0.6$ e $a_0 \simeq 2 \times 10^9 m$ [30]. Usando as massas e sabendo que a frequência mínima captada pelos interferômetros é de $1Hz$, usando a equação (2.93) podemos calcular o valor do semieixo maior como sendo aproximadamente o raio no momento em que o instrumento começa a captar a radiação gravitacional $a \simeq 3 \times 10^6 m$. Colocando esses valores na equação (2.120), chegamos à $e = 3,38 \times 10^{-5}$. Isso mostra como a circularização da órbita ocorre de forma relativamente mais rápido à diminuição do raio.

Capítulo 3

Modelo Cosmológico Padrão e alternativos

Tentativas de compreender o Universo do ponto de vista físico-matemático existem desde à época de Newton, porém esse tipo de estudo ganhou corpo apenas após a criação da relatividade geral e das observações feitas por Edwin Hubble de que objetos extragalácticos muitos distantes estão sistematicamente se afastando de nós. O estudo do Universo, hoje, é conhecido como cosmologia. O modelo cosmológico padrão é o resultado de uma construção baseada em teoria e dados, relativos ao Universo. Entretanto, ainda existem inconsistências nesse modelo, como uma tensão observacional em alguns parâmetros que serão melhores debatidas mais a frente. Para iniciarmos a discussão, partiremos desenvolvendo a base teórica, fundamentada na relatividade geral.

3.1 Equações de Friedmann

Com o intuito de apresentar os fundamentos matemáticos do MCP, apresentaremos inicialmente a métrica do espaço-tempo, em seguida o conteúdo de matéria-energia do Universo, e, por fim, descreveremos a dinâmica do mesmo. O primeiro pilar para a descrição subsequente é o princípio cosmológico.

3.1.1 Princípio cosmológico

Esse princípio impõe que o Universo seja homogêneo e isotrópico em grandes escalas. Então, mesmo que em pequenas escalas a gente observe que não tenha homogeneidade e isotropia, como vemos na nossa galáxia e sistema solar, quando olhamos para o Universo como um todo ele deve ser igual em todas as direções e também mover-se de forma idêntica em todas as direções. Fundamentalmente este é o estabelecimento de que não existe uma posição privilegiada no cosmos. Todos

os observadores, independente de onde estiverem necessariamente precisam observar um Universo com propriedades idênticas.

Embora esse princípio seja algo teoricamente imposto para construirmos nossas equações, ele vem sendo testado e provando-se como verdadeiro. Um dos principais observáveis que comprovam isso é a radiação cósmica de fundo em micro-ondas, que possui uma temperatura média $T_{RCF} = 2,725K$ com uma variação na ordem do micro-Kelvin $O(10^{-6}K)$ em todo o céu. Além disso, existem estudos feitos com galáxias que também chegam a essa conclusão [33, 34].

Nós podemos escrever matematicamente um vetor posição em um Universo isotrópico e homogêneo como

$$\vec{r} = a(t)\vec{\chi}, \quad (3.1)$$

onde $a(t)$ é conhecido como fator de escala e $\vec{\chi}$ é a chamada coordenada comóvel. O fato de $a(t)$ ser apenas uma função do tempo é primordial, pois se $a(t)$ dependesse das coordenadas ou da variação das coordenadas, esse Universo deixaria de ser isotrópico. Derivando a equação 3.2, chegamos à

$$\vec{v} = H(t)\vec{r}, \quad (3.2)$$

onde $H(t) = \dot{a}/a$ é o parâmetro de Hubble. A nomenclatura do parâmetro é dada em homenagem a Edwin Hubble, por suas observações relativas ao tema vistas na figura 3.1.

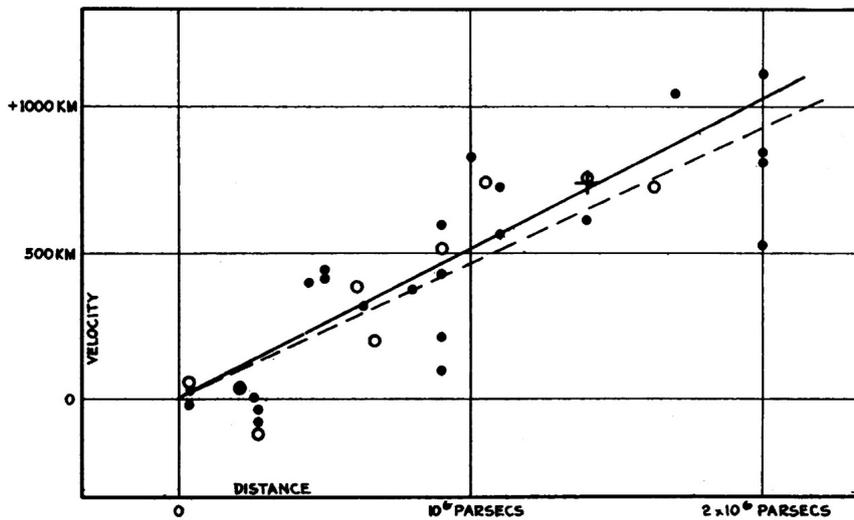


Figura 3.1: Relação entre a velocidade de afastamento e a distância de objetos fora da Via Láctea encontrados por Hubble para dois grupos diferentes de dados. Os valores dos coeficiente angulares encontrados para cada reta foram $H(t_0) = 465 \pm 50$ e $H(t_0) = 513 \pm 60 \text{ km Mpc}^{-1} \text{ s}^{-1}$. **Fonte:** [4].

Em 2018, na XXX Reunião Anual da IAU a equação (3.2) passou a ser denominada lei de Hubble-Lemaître [35], devido aos estudos teóricos de Georges Lemaître. Esta indica uma relação de expansão, e conseqüente crescimento, do Universo para tempos cada vez maiores.

3.1.2 Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)

A partir das análises precedentes, é preciso estabelecer um espaço-tempo compatível com o princípio cosmológico. Para tal, estabeleceremos uma métrica baseada em duas propriedades. Primeiro, que possua uma coordenada comóvel multiplicada por um fator de escala. E, segundo, que possua curvatura constante, ou seja, que sejam maximalmente simétricas. Sob este prisma a métrica que utilizamos para o espaço é a denominada métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), que leva em conta as duas propriedades citadas acima

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (3.3)$$

Note que de agora em diante \vec{r} desempenhará o papel da coordenada comóvel. Os ângulos axial ϕ e azimutal θ são ângulos usuais de um espaço tridimensional em coordenadas esféricas. A constante k é a constante de curvatura e, dependendo de seu valor, a geometria do espaço-tempo será distinta:

- Curvatura fechada ou geometria esférica $k = 1$.
- Curvatura aberta ou geometria hiperbólica $k = -1$.
- Curvatura plana ou geometria euclidiana $k = 0$.

Podemos ver uma representação em um espaço bidimensional da curvatura na figura 3.2.

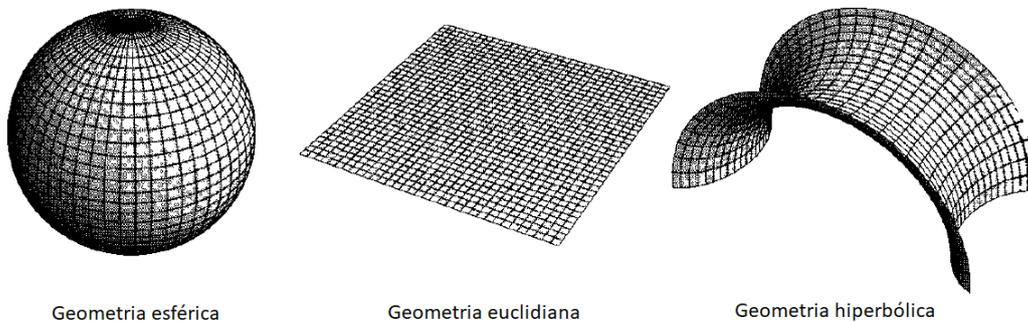


Figura 3.2: As três possíveis curvaturas do espaço-tempo isotrópico e homogêneo. Adaptado da referência. **Fonte:** [5]

3.1.3 Solução das Equações de Einstein usando FLRW

A métrica do espaço-tempo discutida na subseção anterior influencia toda a parte geométrica das equações de Einstein. Já a parte energética pode ser definida como um fluido perfeito definido no último capítulo (ver equação 2.9).

A principal característica desse tipo de fluido é de que ele é definido apenas pela densidade e pressão, ou seja, ele não possui efeitos de torção, cisalhamento ou viscosidade, o que é o ideal se por hipótese, nosso fluido apenas interagir gravitacionalmente, assim podemos explicitar suas componentes

$$T_{00} = c^2 \rho(t), \quad (3.4)$$

$$T_{ii} = g_{ii} p(t). \quad (3.5)$$

Além disso, essas características junto com a densidade sendo uma função apenas do tempo estão de acordo com o princípio cosmológico. Note que nesse caso, $u_0 = -c$ e $u_i = 0$, o que significa que o fluido está em repouso em relação as coordenadas (r, θ, ϕ) .

As equações de campo de Einstein, definidas no último capítulo, admitem um termo constante que normalmente é tomado como zero. Entretanto, na cosmologia mantemos esse termo. Então a equação (2.17) pode ser escrita como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (3.6)$$

Este termo é conhecido como constante cosmológica e possui propriedades particulares (como desenvolveremos mais adiante) e é parte do MCP.

Utilizando o tensor métrico referente à (3.3), as quantidades não nulas do tensor de Ricci são

$$R_{00} = -\frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a}, \quad (3.7)$$

$$R_{ij} = \frac{g_{ij}}{c^2} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 2 \frac{c^2 k}{a^2} \right], \quad (3.8)$$

e o escalar de Ricci fica

$$R = \frac{6}{c^2} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{c^2 k}{a^2} \right]. \quad (3.9)$$

Substituindo (3.9), (3.7), (3.8), (3.4) e (3.5) nas equações de campo de Einstein (3.6), após um pequeno algebrismo obtemos duas equações

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) + \frac{\Lambda}{3} - c^2 \frac{k}{a(t)^2}, \quad (3.10)$$

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (3.11)$$

lembrando que $H(t) = \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)$. Essas são a equação de Friedmann e a equação de aceleração respectivamente e juntas descrevem a dinâmica do Universo.

3.2 Soluções da equação de Friedmann

Na subseção anterior descrevemos como, a partir das equações de campo de Einstein, chega-se nas equações que descrevem a dinâmica de um universo homogêneo e isotrópico. Agora, iremos analisar as componentes associadas ao que compõe o modelo cosmológico em questão.

3.2.1 Universo estático de Einstein

A constante cosmológica Λ foi proposta inicialmente por Einstein em 1917 numa tentativa de criar um modelo de Universo estático dominado por matéria bariônica. O conceito é simples, seria uma energia que iria contrabalancear a força gravitacional [36].

Entretanto, anos depois de sua proposição, Einstein abandonou essa ideia, pois além do modelo ser instável, Edwin Hubble apontou em suas observações, que o Universo está se expandindo [4] (como visto na seção anterior).

Todavia, em 1998, após novos dados de supernova do tipo Ia, descobriu-se que atualmente o universo não está apenas expandindo, mas sim, expandindo de forma acelerada [37]. Isso levou aos físicos teóricos a retomarem o uso da constante, porém de uma forma levemente diferente. O consenso hoje é de que ela representa a energia do vácuo, que seria um fluido com pressão negativa [38], mas ainda há um certo desconhecimento sobre tal energia, sendo esse o alvo de diversos trabalhos científicos como [26, 39–41] e inclusive o presente trabalho.

3.2.2 Universo de Einstein-de Sitter

Esse modelo de Universo é dominado por matéria e não possui a constante cosmológica, o que nos dá uma equação de Friedmann da forma

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_m(t), \quad (3.12)$$

Porém para solucionar a equação (3.10) temos que saber como que a densidade de matéria ρ_m varia com o fator de escala a . Para isso utilizamos a equação de

conservação do fluido (2.11), também conhecida como equação de continuidade

$$\dot{\rho}_m + 3 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right) \left(\rho_m + \frac{p_m}{c^2} \right) = 0, \quad (3.13)$$

onde podemos simplesmente utilizar a regra da cadeia para escrever a derivada em relação ao fator de escala

$$\frac{d\rho_m}{da} + \frac{3}{a}\rho_m = 0. \quad (3.14)$$

O fluido de matéria bariônica possui a característica de não ter pressão por ser um fluido não relativístico. Fluidos não relativísticos são fluidos cuja a velocidade é muito menor que a da luz. Dessa forma podemos solucionar as equações (3.14) e (3.12), ficando com

$$\rho_m = \rho_{m,0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3}, \quad (3.15)$$

$$a = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad (3.16)$$

$$H = \frac{2}{3t}, \quad (3.17)$$

onde $\rho_{m,0}$ e a_0 são a densidade e fator de escala hoje. Esses resultados nos dizem que um universo composto apenas por matéria bariônica expandiria eternamente porém de forma desacelerada. A ponto de que em um tempo infinito a taxa de expansão H tende a zero. A desaceleração fica bastante evidente quando reescrevemos

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3}\rho_m = -\frac{4\pi G}{3}\rho_{m,0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3}, \quad (3.18)$$

temos uma dinâmica sempre desacelerada.

3.2.3 Universo dominado por radiação

Para além das possibilidades anteriores, a expansão do Universo também pode ser guiada por radiação ou matéria relativística. Essa componente inclui tanto o fóton, que é uma partícula sem massa, quanto o neutrino, que hoje sabemos que possuem massa, devido à física de oscilação de neutrinos [42, 43]. Porém, essa massa é extremamente pequena tendo um limite superior da ordem do elétron-volt (em unidades naturais onde $c = 1$ e energia tem a mesma unidade de massa).

A pressão de um fluido de radiação é $p_r = \rho_r c^2/3$ e é a principal diferença para o fluido de matéria, quando estamos tratando da evolução do universo. Solucionamos então as equações de continuidade e Friedmann de forma análoga à última subseção,

obtendo os resultados

$$\rho_r = \rho_{r,0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-4}, \quad (3.19)$$

$$a = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.20)$$

$$H = \frac{1}{2t}. \quad (3.21)$$

Podemos ver que um fluído de radiação também gera uma dinâmica desacelerada em que a taxa de expansão $H(t)$ tende a zero em um tempo infinito. A principal diferença entre o fluído não relativístico e o fluído relativístico então é como varia a sua respectiva densidade. Enquanto a densidade de radiação decai com o fator de escala à quarta potência a densidade de matéria decai com o fator de escala a terceira potência, o que significa que a radiação se dissipa mais rápido de acordo com que o universo se expande.

3.2.4 Universo dominado por energia escura

Como visto anteriormente, embora uma constante cosmológica não desempenhe o mesmo papel que o proposto originalmente por Einstein, a mesma pode ser utilizada como explicação para o mecanismo de aceleração do Universo.

Neste sentido, podemos tratar a mesma de modo equivalente a um fluido de densidade constante e com equação de estado dada por $p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2$. Deste modo a equação de aceleração se torna

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = \frac{8\pi G}{3} \rho_\Lambda, \quad (3.22)$$

enquanto a solução para a equação de Friedmann se torna trivial, uma vez que ρ_Λ é constante, nos dando um fator de escala exponencial

$$a(t) = a_0 \exp \left\{ \left(\frac{8\pi G}{3} \right)^{1/2} \rho_\Lambda t \right\}. \quad (3.23)$$

As principais características de um universo dominado por energia escura são a expansão acelerada e o crescimento exponencial do fator de escala.

3.2.5 Densidade crítica

Até o momento temos tratado dos possíveis fluidos que compõem o Universo e como eles alteram sua dinâmica. O que acabou ficando implícito, em todos os casos acima, é que tratavam-se de casos em que a curvatura do Universo foi considerada

plana, ou seja, $k = 0$. Podemos entender que a densidade total energética do Universo é a soma de todos os possíveis fluídos quando a curvatura é zero

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_r + \rho_m + \rho_\Lambda) = \frac{8\pi G}{3} \rho_{tot}, \quad (3.24)$$

podemos então definir essa densidade como sendo a densidade crítica, de forma que

$$\rho_{crit}(t) = \frac{3H(t)^2}{8\pi G}. \quad (3.25)$$

Com essa definição podemos reescrever a equação de Friedmann para um universo plano como

$$\Omega_m(t) + \Omega_r(t) + \Omega_\Lambda(t) = 1, \quad (3.26)$$

onde

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_{crit}}. \quad (3.27)$$

Podemos então definir um termo de densidade relativa de curvatura

$$\Omega_k = \frac{-kc^2}{H^2 a^2} \quad (3.28)$$

e recoloca-lo na equação (3.26), ficando com

$$\Omega_k(t) = 1 - \frac{\rho_{tot}(t)}{\rho_{crit}(t)} \quad (3.29)$$

onde fizemos $\Omega_m(t) + \Omega_r(t) + \Omega_\Lambda(t) = \Omega(t)$ por simplicidade. A expressão (3.29) nos ajuda a analisar a curvatura do universo a partir do material que o preenche. Basicamente, se $\rho_{tot} > \rho_{crit}$ então $\Omega_k < 0$, logo o universo tem curvatura aberta. Se $\rho_{tot} < \rho_{crit}$, então $\Omega_k > 0$, logo o universo tem a curvatura fechada. Com essas definições, pode-se obter um valor para o parâmetro de curvatura a partir dos parâmetros de densidades relativas atual do Universo, definidos como $\Omega_{m,0}$, $\Omega_{r,0}$, $\Omega_{\Lambda,0}$ que são aferidos através de diversos tipos de experimentos. Também é possível medir o parâmetro de Hubble hoje H_0 , comumente chamado de *constante de Hubble*. Então, no modelo cosmológico padrão, definimos o tempo atual como t_0 e indicamos o índice 0 para todos os parâmetros inferidos hoje. O interessante dessas definições é que a partir das equações (3.19), (3.15) e da definição de Ω_k , conseguimos definir uma equação de Friedmann com uma dependência explícita no fator de escala

$$H(t) = H_0 \left[\Omega_{r,0} \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^4 + \Omega_{m,0} \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^3 + \Omega_{k,0} \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^2 + \Omega_{\Lambda,0} \right]^{1/2} \quad (3.30)$$

onde $\Omega_{i,0} = \rho_{i,0}/\rho_{crit,0}$ e $i = r, m, \Lambda$.

3.3 Distâncias cosmológicas

Medir distâncias no nosso cosmos é hoje uma das maneiras mais eficientes de se obter informações sobre a sua expansão. Para isso precisamos da equação de Friedmann e da geometria do espaço, que foram definidas na seção anterior. Dado que a luz segue uma geodésica nula, podemos calcular a distância percorrida por ela é através do elemento de linha $dS^2 = 0$. No caso da cosmologia temos

$$\frac{dr}{1 - kr^2} = \pm c \frac{dt}{a(t)}, \quad (3.31)$$

onde $d\phi = d\theta = 0$. A solução positiva representa os raios de luz que são emitidos do nosso referencial enquanto a negativa representa os raios de luz que chegam ao nosso referencial. Como estamos interessados nos raios que chegam, vamos utilizar a negativa.

3.3.1 Distância Comóvel

A distância comóvel é a distância em coordenadas comóveis que leva para a luz se propagar de um tempo t_0 à um tempo t qualquer. O cálculo é dado simplesmente pela integração da equação (3.31)

$$\int_0^{d_c(t)} \frac{dr}{1 - kr^2} = c \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')}, \quad (3.32)$$

lembrando que t_0 é o tempo definido hoje, então $r(t_0) = 0$. O lado direito pode ser modificado a fim de mudarmos a variável de integração para a usando $dt = da/aH$ e resolvendo o lado esquerdo, assim (3.32) fica

$$d_c(t) = \frac{c}{H_0 a_0 \sqrt{|\Omega_{k,0}|}} S_k \left[H_0 a_0 \sqrt{|\Omega_{k,0}|} \int_a^{a_0} \frac{da'}{a'^2 H(a')} \right], \quad (3.33)$$

onde $S_k(x) = \sin(x)$, x , e $\sinh(x)$ para $k = 1, 0$ e -1 respectivamente e que $\Omega_{k,0} = -kc^2/H_0^2 a_0^2$. A luz percorre sempre uma distância fixa num intervalo de tempo fixo, porque sua velocidade é constante. Mas o que essa equação nos diz é que se o Universo se expandir de formas diferentes, a luz irá alcançar distâncias comóveis diferentes em um intervalo de tempo fixo.

3.3.2 Desvio para o vermelho

O desvio para o vermelho z , na cosmologia, é a diferença relativa no espectro de luz observado, causado pela velocidade relativa da fonte. Pode ser expresso matematicamente como $z = \Delta\lambda/\lambda$, onde λ é o comprimento de onda da luz [6]. Ele ocorre porque a medida que o objeto se afasta, a distância entre uma crista de

onda e outra aumenta, o que pode ser entendido como a diminuição da frequência, porque a velocidade da luz é constante. Portanto, se conhecemos o espectro de luz das estrelas (que é o principal emissor de luz das galáxias) e quando observamos galáxias muito distante e vemos que esse espectro está deslocado para o vermelho, então essa galáxia está se afastando de nós, de forma que $z \approx v/c$, onde v é o módulo da velocidade da galáxia. Embora não seja exatamente uma medida de distância, o desvio para o vermelho é extremamente importante e pode ser facilmente medido sem depender de modelo cosmológico. A gente pode então relacionar o desvio para o vermelho com a variação do fator de escala a utilizando a equação (3.32), onde vamos calcular a distância comóvel percorrida por duas diferentes cristas de ondas. Sendo uma primeira crista emitida em um tempo t_1 , a segunda será emitida em um tempo $t_1 + \delta t_1$, onde δt_1 é o período da onda. Então, se a primeira crista é recebida em um tempo t_0 a segunda será recebida em um tempo $t_0 + \delta t_0$. Uma característica importante é que esses períodos de onda são muito pequenos em relação ao tempo cosmológico $\delta t_1 \ll t_1$ e $\delta t_0 \ll t_0$, o que nos permite trabalhar dentro do limite $\delta t_1 \rightarrow 0$ e $\delta t_0 \rightarrow 0$. A distância percorrida pela primeira crista é simplesmente dada por (3.32), onde fazemos $t \rightarrow t_1$, obtendo assim

$$d_c(t) = c \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = c[F(t_0) - F(t_1)], \quad (3.34)$$

onde $F(t)$ é a primitiva de $a(t)^{-1}$. Já para o cálculo da segunda crista, temos que

$$d_c(t) = c \int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (3.35)$$

Note que independente da função $a(t)$, essa integral terá uma solução do tipo

$$d_c(t) = c[F(t_0 + \delta t_0) - F(t_1 + \delta t_1)]. \quad (3.36)$$

Pela definição de derivada, temos

$$F(t_0 + \delta t_0) = \delta t_0 \frac{dF(t_0)}{dt_0} + F(t_0), \quad (3.37)$$

e pelo teorema fundamental do cálculo temos que $dF(t_0)/dt_0 = a(t_0)^{-1}$. Substituindo então (3.37) em (3.36), e fazendo a mesma coisa para $F(t_1 + \delta t_1)$, ficamos com

$$d_c(t) = c \left[\frac{\delta t_1}{a(t_1)} - \frac{\delta t_0}{a(t_0)} + F(t_0) - F(t_1) \right]. \quad (3.38)$$

Subtraindo então (3.34) de (3.38) e após um pequeno algebrismo, ficamos com

$$\frac{\delta t_0}{\delta t_1} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}. \quad (3.39)$$

Podemos relacionar o período da onda com o comprimento dela pela seguinte fórmula $\delta t_1 = \lambda_1/c$ e subtrair λ_1/λ_1 dos dois lados da equação (3.39), e assim chegamos a definição do desvio para o vermelho cosmológico

$$\frac{a(t_0)}{a(t_1)} = z + 1. \quad (3.40)$$

É importante frisar que todo esse desenvolvimento do desvio para o vermelho só é possível pois estamos trabalhando com os períodos no limite em que eles tendem a zero, embora a operação tenha ficado implícita nas equações. Nesse limite temos que o fator de escala do universo entre uma crista e outra da onda é constante. Normalmente, utiliza-se essa informação do fator de escala para se chegar no resultado final [44].

Podemos então utilizar essa relação entre o fator de escalar e o desvio para o vermelho, considerando t_1 como sendo um t qualquer, para reescrever a equação (3.41) em função de z

$$H(z) = H_0 [\Omega_{r,0} (z + 1)^4 + \Omega_{m,0} (z + 1)^3 + \Omega_{k,0} (z + 1)^2 + \Omega_{\Lambda,0}]^{1/2}. \quad (3.41)$$

Além disso, também podemos colocar nossa distância comóvel em função do desvio para o vermelho, substituindo a derivada da relação (3.40)

$$\frac{da}{a^2} = -\frac{dz}{a_0}, \quad (3.42)$$

na integral (3.33), ficando assim com

$$d_c(t) = \frac{c}{H_0 a_0 \sqrt{|\Omega_{k,0}|}} S_k \left[\sqrt{|\Omega_{k,0}|} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right], \quad (3.43)$$

onde o limite de integração é dado por (3.40), vemos que quando $a(t_1) \rightarrow a(t_0)$, então $z \rightarrow 0$ e $H(z) = H_0 E(z)$.

3.3.3 Distância de diâmetro angular e distância de luminosidade

A distância angular d_A e a distância de luminosidade d_L são extensões observáveis da distância comóvel. Isso porque nosso Universo físico está em expansão, então é impossível medir diretamente uma distância comóvel. Neste caso, estas distâncias são úteis para adquirirmos resultados observacionais.

Distância de diâmetro angular

A distância de diâmetro angular é definida como a distância obtida a partir da medida de separação angular de dois objetos. Podemos definir a separação angular entre dois objetos a partir da métrica 3.3, onde $dr = 0$ e $d\phi = 0$

$$dS = a(t_1)d_c d\theta, \quad (3.44)$$

onde o fator de escala calculado no tempo t_1 se deve ao fato de estarmos observando a luz que foi emitida no tempo t_1 , então essa separação angular é referente a esse tempo, logo temos que usar o fator de escala dessa época. Assim, a distância de diâmetro angular é exatamente a distância física

$$d_A = a(t_1)d_c. \quad (3.45)$$

Utilizando as equações (3.43) e (3.40) podemos reescrever d_A como

$$d_A = \frac{c}{H_0 \sqrt{|\Omega_{k,0}|}(1+z)} S_k \left[\sqrt{|\Omega_{k,0}|} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right]. \quad (3.46)$$

Distância de Luminosidade

A distância de luminosidade por sua vez é a distância usada para medirmos o fluxo de luz emitido por um objeto que está a uma distância suficientemente grande para sentir o efeito da expansão do Universo. Podemos demonstrá-la a a partir da definição de fluxo

$$F = \frac{L}{4\pi r^2}, \quad (3.47)$$

onde r é a distancia entre o observador e o emissor e L é a luminosidade, que é a energia emitida por um objeto por unidade de tempo. Para uma fonte emissora e um observador estático a luminosidade observada é a mesma que a emitida. Acontece que em um caso onde um está se afastando do outro isso não ocorre. Para ilustrar isso vamos usar um exemplo onde um fóton é emitido em um período δt por um astro qualquer. Podemos definir a luminosidade emitida como

$$L_e = \frac{E_e}{\delta t_e}. \quad (3.48)$$

Como sabemos da teoria quântica que a energia do fóton é $E_e = ch/\lambda_e = h/\delta t_e$, onde h aqui é a constante de Planck, temos que

$$L_e = \frac{h}{\delta t_e^2}. \quad (3.49)$$

Devido ao efeito do desvio para o vermelho, há uma diferença entre o período de emissão e o observado que é dado pela equação (3.39). Então utilizando essa equação junto com a equação (3.40), podemos reescrever a luminosidade emitida como

$$L_e = \frac{h}{\delta t_{obs}^2} (1+z)^2 = L_{obs} (1+z)^2. \quad (3.50)$$

Então, o fluxo que observamos, em um Universo em expansão, não é o fluxo emitido, pois existe uma perda de energia devido a própria expansão. Vemos que

$$F_{obs} = \frac{L_e}{4\pi(1+z)^2 d^2}. \quad (3.51)$$

Mesmo sendo trabalhado aqui o caso de um fóton, o caso geral não é tão diferente disso. Apenas deve-se levar em conta que a luminosidade total será a soma da energia de todos os fótons. Outra coisa que temos que levar em conta é que o fluxo é uma quantidade de energia diluída em uma área. No caso de uma fonte isotrópica, que são a maioria das fontes de luz do Universo, essa área é a área da esfera, como podemos observar na equação (3.51). O raio dessa esfera em um universo em expansão, não seria apenas d , mas sim $d_c a(t)$. Como nós somos os observadores e luz nos alcança sempre em t_0 , temos que $d \rightarrow d_c a(t_0)$ [2]. Assim, para trabalharmos com luminosidades fixas em um universo em expansão, definimos a distância de luminosidade como

$$d_L = a_0(1+z)d_c, \quad (3.52)$$

Utilizando a equação (3.43), podemos reescrever d_L como

$$d_L = (1+z) \frac{c}{H_0 \sqrt{|\Omega_{k,0}|}} S_k \left[\sqrt{|\Omega_{k,0}|} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right]. \quad (3.53)$$

Assim, podemos relacionar as equações (3.53) e (3.46), nos levando à

$$d_L = (1+z)^2 d_A. \quad (3.54)$$

Embora a relação acima pareça trivial, existem estudos hoje que tentam demonstrá-la do ponto de vista observacional e também teórico. Essa questão é nomeada de dualidade cósmica [45].

3.3.4 Desvio para o vermelho em ondas gravitacionais

Para estudar o desvio para o vermelho em OG a primeira coisa que iremos fazer é, por simplicidade, considerar que a onda gravitacional se propaga de forma similar à luz na geometria de FRLW. Isso não necessariamente deveria ser verdade, haja visto

que as duas ondas possuem peculiaridades que as distinguem. Inclusive, algumas teorias de relatividade modificada, conhecidas como $f(R)$, tem como previsão uma velocidade de propagação diferente para a onda gravitacional, como pode ser visto nas referencias [46–48]. Contudo, o foco dessa dissertação não é contrastar tais teorias com a relatividade geral. E também já existe uma evidência muito forte (em até quinze ordens de grandeza) de que a velocidade de propagação da luz é igual a da onda gravitacional que foi obtida ao se observar pela primeira vez uma coalescência de estrelas de nêutron com uma contraparte eletromagnética [49]. Sendo a propagação da luz similar a da onda gravitacional, precisamos apenas alterar a distância percorrida pela onda, que no capítulo anterior chamamos de r , para $d_c a_0$, assim como fizemos para radiação eletromagnética. Dessa forma, reescrevemos as equações (2.94) e (2.95), como

$$h_+(t) = \frac{1}{d_c a_0} \left(\frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/4} \left(\frac{5}{c\tau(t)} \right)^{1/4} \left(\frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \right) \cos\{\Phi[\tau(t)]\}, \quad (3.55)$$

$$h_\times(t) = \frac{1}{d_c a_0} \left(\frac{GM_c}{c^2} \right)^{5/4} \left(\frac{5}{c\tau(t)} \right)^{1/4} \cos \iota \sin\{\Phi[\tau(t)]\}. \quad (3.56)$$

Assim como a distância percorrida pela onda gravitacional se altera devido a estarmos sob o fundo de FRLW, também devemos ter uma mudança no período de tempo $\tau(t)$. Embora, τ não seja exatamente o período de uma onda, ele continua respeitando à norma $\tau \ll t_0$ (visto que só observamos aproximadamente os últimos 15min da coalescência), assim, o mesmo desenvolvimento feito utilizando um período de onda, pode ser feito utilizando o tempo para coalescência. Logo, adaptando as equações (3.39) e (3.40) temos

$$\tau_e = \frac{\tau_{obs}}{(1+z)} \quad (3.57)$$

O que nos permite, após algum algebrismo, reescrever as equações (3.55) e (3.56), como

$$h_+(t) = \frac{1}{d_c a_0 (1+z)} \left(\frac{GM_c (1+z)}{c^2} \right)^{5/4} \left(\frac{5}{c\tau_{obs}(t)} \right)^{1/4} \left(\frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \right) \cos\{\Phi[\tau_{obs}(t)]\}, \quad (3.58)$$

$$h_\times(t) = \frac{1}{d_c a_0 (1+z)} \left(\frac{GM_c (1+z)}{c^2} \right)^{5/4} \left(\frac{5}{c\tau_{obs}(t)} \right)^{1/4} \cos \iota \sin\{\Phi[\tau_{obs}(t)]\}. \quad (3.59)$$

As relações acima nos dizem duas coisas muito importantes. Primeiro, o que medimos, ao observarmos uma onda gravitacional, é a distância de luminosidade, pois $d_L = d_c a_0 (1+z)$ e segundo, que existe uma degenerescência entre a massa de gorjeio e o desvio para o vermelho. Ou seja, para sabermos a massa dos objetos que estamos observando, precisamos saber o valor de z . Isso se dá pelo fato de que a massa de

gorjeio ser o único parâmetro que altera a frequência do sistema, então é impossível para nós distinguirmos se uma frequência observada possui aquele valor devido as massas ou devido a um desvio para o vermelho. Então, absorvemos esse fator de $(1+z)$ na massa de gorjeio, ficando assim $\mathcal{M}_c = (1+z)M_c$, o que nos permite finalmente escrever as amplitudes como

$$h_+(t) = \frac{1}{d_L} \left(\frac{G\mathcal{M}_c}{c^2} \right)^{5/4} \left(\frac{5}{c\tau_{obs}(t)} \right)^{1/4} \left(\frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \right) \cos\{\Phi[\tau_{obs}(t)]\}, \quad (3.60)$$

$$h_\times(t) = \frac{1}{d_L} \left(\frac{G\mathcal{M}_c}{c^2} \right)^{5/4} \left(\frac{5}{c\tau_{obs}(t)} \right)^{1/4} \cos \iota \sin\{\Phi[\tau_{obs}(t)]\}. \quad (3.61)$$

É importante notar que as transformadas de Fourier (2.115) e (2.114) continuam sendo válidas, mesmo com essas modificações.

3.4 Da teoria às observações

O MCP, além de ter uma base teórica muito bem estruturada, é construído sobre diferente tipos dados observacionais. Durante o século passado e o atual, foram realizados diversos experimentos para se obter esses dados. Entre estes podemos citar as medidas da distribuição de temperatura da radiação cósmica de fundo RCF em micro-ondas [50], observações da abundância relativa de partículas na nucleossíntese primordial (NP) [7], medidas de distância de luminosidade, obtidas através de SN Ia [13], observações de oscilações acústicas de bárions [51], e, mais recentemente, medidas associadas às sirenes padrão, que são as ondas gravitacionais [19].

Ainda assim existem outras inúmeras observações que vêm sendo feitas durante os últimos anos. Hoje, todos esses experimentos convergem para um modelo, que é o modelo padrão, chamado Λ CDM. Podemos ver na tabela 3.4, uma das melhores estimativas de parâmetros que temos hoje, que foi o lançamento de resultados feito em 2018 pela colaboração Planck, onde leva em conta lenteamento fraco e OAB e os resultados obtidos de supernova tipo Ia do Pantheon [12].

Estes dados indicam que a densidade relativa de radiação pode ser medida a partir da própria temperatura da RCF e o que temos hoje é $\Omega_{r,0} \simeq 10^{-5}h^{-2}$, onde $h = H_0/100 \text{ km}^{-1}\text{s Mpc}$. Além disso, também é possível medir muito bem o parâmetro de densidade relativa de matéria bariônica a partir da RCF e o que observamos é que $\Omega_{b,0}h^2 = 0,02242$. Isso nos leva a crer que existe uma componente do universo que se comporta igual a matéria bariônica mas a gente não consegue observar, pois ela não interage diretamente com a luz. Essa matéria hoje é conhecida como matéria escura e é essencial para o modelo. Inclusive, simulações que tentam recriar o nosso

Parâmetros	Planck 2018	Pantheon + RCF + H_0 Riess
H_0 [$km s^{-1} Mpc^{-1}$]	$67,36 \pm 0,54$	$72,236 \pm 1,572$
$\Omega_{m,0}$	$0,3153 \pm 0,0056$	$0,274 \pm 0,012$
$\Omega_{k,0}$	$-0,0106 \pm 0,0065$	$0,009 \pm 0,003$
$\Omega_{\Lambda,0}$	$0,6847 \pm 0,0073$	$0,717 \pm 0,011$

Tabela 3.1: Estimativa de parâmetros obtidas pela colaboração Planck utilizando dados de TT,TE,EE,LowE+lensing [11] e obtidas no trabalho [12], onde utilizaram dados de SN Ia, junto com dados da radiação cósmica de fundo e um *prior* de H_0 obtido na referência [13]. Os erros estão em 68% de nível de confiança.

Universo observável só conseguem chegar próximo à realidade incluindo-a [52, 53]. A sigla *CDM* do nome do modelo é referente a *cold dark matter*, que é matéria escura fria em inglês. Uma de suas características então é de não possuir altas velocidades, daí o nome *cold*. Caso a matéria escura fosse “quente” a formação de estruturas do Universo seria modificada, de forma que não estaria de acordo com as observações atuais [54, 55].

Logo, o que nós vemos desses dados é que o Universo hoje tem uma quantidade relevante de matéria, porém hoje quem predomina é a energia escura. Sob essa conjuntura e levando em conta a variação das densidades com o fator de escala (3.15) e (3.19), o que esperamos é que o universo tenha passado por pelo menos dois períodos distintos, um em que ele é dominado por radiação e outro onde ele é dominado por matéria e futuramente será inteiramente dominado pela energia escura. Podemos visualizar isso na figura 3.3.

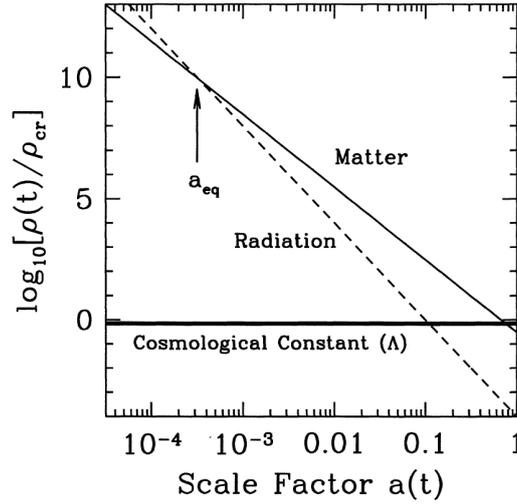


Figura 3.3: Gráfico logarítmico da evolução das densidades de matéria, radiação e energia escura. O fator de escala no ponto em que as curvas de matéria e radiação se cruzam é também conhecido como a_{eq} , que seria o fator de escala de equilíbrio. Neste gráfico foi utilizado $a_o = 1$, que é uma normalização do fator de escala comumente utilizada do fator de escala. **Fonte:** [6]

Então para entender melhor essa base fundamental para o modelo cosmológico padrão, no resto dessa seção iremos explorar um pouco alguns desses observáveis e alguns problemas do modelo padrão.

3.4.1 Observáveis cosmológicos do Universo primordial

Radiação Cósmica de fundo

Como vimos nessa seção, o Universo sempre esteve em expansão, independente do conteúdo que domina em cada época. Da termodinâmica, sabemos que um fluido em expansão adiabática (quando não há troca de calor) deve esfriar conforme se expande. Assim é o Universo, se reboinásemos o tempo e víssemos tudo voltando para o passado, veríamos ele ficando cada vez mais quente e denso. Até um ponto em que a radiação iria se acoplar a matéria bariônica e entrar em equilíbrio térmico. Basicamente, o Universo estaria tão denso e quente que a radiação não conseguiria percorrer caminhos livremente, ela estaria em um processo contínuo de espalhamento com os elétrons livres. Então existe um momento em que essa radiação se libertou. Esse momento é conhecido como superfície de último espalhamento e é estimado pelo Planck que deva ter ocorrido em $z_* = 1090,30$ ou $t \simeq 300.000$ anos. Nesse momento então que se formou o que conhecemos como radiação cósmica de fundo. Ou seja, essa radiação é emitida de todas as direções do céu e carrega informação do universo primordial. Além disso, pelas características da sua formação citadas

acima, a densidade energética de fótons na época do último espalhamento, entre uma frequência f e $f + df$, devem seguir um espectro de corpo negro, dado por

$$n(f)df = \frac{8\pi h f^3}{c^3} \frac{1}{\exp(hf/k_B T) - 1} df \quad (3.62)$$

onde h é a constante de Planck, k_B é a constante de Boltzmann e T é a temperatura de equilíbrio. A equação (3.62) não se altera com o desvio para o vermelho [6], então ela vale para qualquer tempo do universo. Logo, devemos observar um espectro de corpo negro na radiação cósmica de fundo e de fato observamos. A medida do espectro de corpo negro da RCF foi bem determinada pela primeira vez pelo *Infrared Absolute Spectrophotometer* (FIRAS), um instrumento do satélite COBE na década de 90. Podemos ver na figura 3.4 que devido a precisão do experimento a curva teórica esconde os pontos observados. Até hoje, essa é uma das medidas mais bem estabelecidas da cosmologia, sendo encontrado uma temperatura de $T = 2,725K$.

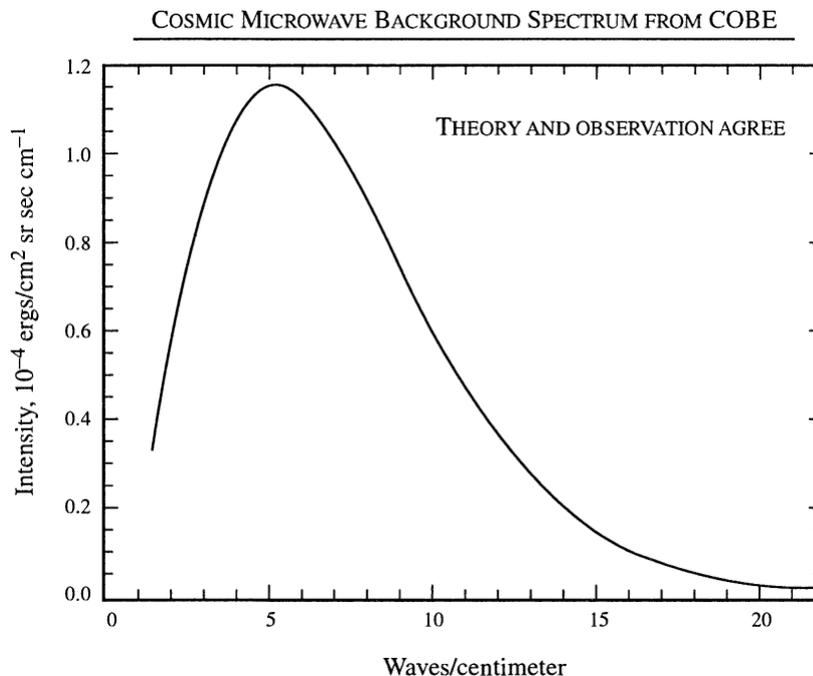


Figura 3.4: Radiação de corpo negro medida pelo FIRAS (Mather et al., 1994). Os pontos medidos e as barras de erro estão escondidas pela curva teórica, pois as suas incertezas são menores do que a espessura da curva. **Fonte:** [6]

Bariogênese cosmológica

A bariogênese cosmológica ou também como é conhecida *Big Bang Bariogenesis* BBN é a formação dos átomos no modelo cosmológico padrão. Como dito na subseção anterior, houve uma época onde o universo era tão quente que a matéria bariônica estava acoplada à radiação. Devido a esse fato, não era possível formar

átomos ou até mesmo núcleos, a energia do fóton era tão forte e sua densidade tão grande que as partículas formadas eram quase instantaneamente destruídas. Após a superfície de último espalhamento, quando a radiação finalmente se propaga livremente, temos uma época de recombinação, que é quando os elementos leves começam a se formar. A teoria da BBN então surge devido a possibilidade de se calcular a probabilidade de formação de cada um desses elementos conhecendo a sua seção de choque, e assim então determinar suas abundâncias no Universo.

Podemos ver na figura como as previsões dessa teoria estão muito bem de acordo com os dados observacionais. Temos pelo menos 4 elementos que são formados na BBN: Hidrogênio H, deutério D, Hélio ^3H , e Lítio ^7Li . Outra coisa que podemos observar, é que as previsões teóricas da BBN dependem da densidade de bárions no momento da nucleossíntese. Os bárions possuem uma característica de conservação, que é dada pelo número bariônico. Logo, a BBN também prevê a densidade de bárions hoje e ela está muito bem alinhada com os resultados do Planck, indicando assim também a existência da matéria escura fria.

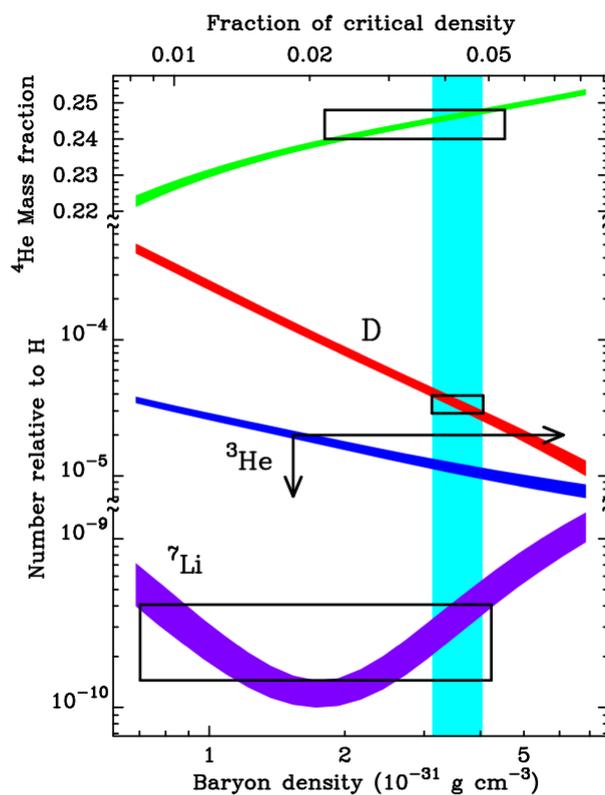


Figura 3.5: Restrições na densidade de bárions advindas da BBN. As faixas horizontais representam as previsões teóricas em um alcance de 10 ordens de magnitude, para os elementos ^4He , Deutério, ^3He e Lítio. A faixa vertical é fixada pela medida do deutério primordial e as caixas são os limites impostos pelas observações. **Fonte:** [7]

3.4.2 Observáveis cosmológicos do Universo tardio

As medidas de distâncias que foram vistas nesse capítulo, também são uma forma de restringir os parâmetros cosmológicos, pois como foi visto, elas dependem diretamente do parâmetro de Hubble. Existem algumas formas de medirmos distâncias cosmológicas, como por exemplo, através das OG ou de velas padronizáveis. Esses eventos são observados em pequenos desvios para o vermelho, por isso são considerados como observáveis do Universo tardio, diferentemente da RCF. Como iremos utilizar alguns desses indicadores de distâncias na nossa restrição de parâmetros, iremos aborda-los a seguir.

Supernovas Tipo Ia

A vela padronizável é uma classe de objetos que podem ter seu brilho intrínseco calibrado, segundo uma certa metodologia. Como vimos neste capítulo, a distância de luminosidade está diretamente atrelada a uma medida do brilho do objeto, que é observado através do fluxo. Logo, se medimos o fluxo e sabemos o brilho, obtemos a medida de distância.

Supernovas do tipo Ia são eventos altamente energéticos que ocorrem em sistemas de estrelas binárias, onde uma delas é necessariamente uma anã branca e outra uma estrela maior, como uma gigante vermelha. Quando esses objetos ultrapassam o limite de Roche, há um rompimento por maré da estrela menos densa, o que faz a anã branca acretar o material de sua parceira. Entretanto, a anã branca possui um limite de massa sob o qual sua estrutura não consegue se sustentar, que é o limite de Chandrasekhar, cerca de $M_{Ch} = 1,44M_{\odot}$ [56] e [57]. Quando a massa da anã ultrapassa este limite ela explode, gerando uma supernova. Esse tipo de evento é extremamente energético e possui uma curva de brilho bem definida, embora necessitem de uma calibração bem cuidadosa. Essas características nos permitiram observar objetos a distâncias relativamente grandes, quando comparados às cefeidas por exemplo, que são outra vela padrão (inclusive as cefeidas podem ser utilizadas como forma de calibrar as super novas). Devido a isso, as primeiras evidências que foram obtidas de um universo acelerado vieram das SN Ia.

Oscilações acústicas de Bárions

As oscilações acústicas bariônicas, do inglês baryon acoustic oscillations (BAO), são oscilações geradas na época antes do desacoplamento, no fluido fóton-bárion. Essas oscilações ocorrem devido a competição entre a força da gravidade gerada por poços de matéria escura e a pressão de radiação que tende a repelir os bárions. O equilíbrio instável entre essas duas forças então gerou perturbações que se propagaram como ondas de pressão. Em um universo tridimensional, essas ondas tem

a forma de cascas esféricas. Com o resfriamento do Universo e o desacoplamento, essas oscilações ficaram impressas em uma escala chamada de escala acústica, caracterizada pela expressão

$$r_s = \int_{z_{drag}}^{\infty} \frac{c_s dz}{H(z)}, \quad (3.63)$$

onde c_s é a velocidade do som e z_{drag} é o redshift da época de dragagem, momento que ocorre logo após ao desacoplamento [20]. Então, onde ocorreram essas oscilações, espera-se que tenha uma sobredensidade de bárions e matéria escura. Com a evolução do Universo, essas regiões posteriormente aglomeram uma maior quantidade de galáxias, sendo possível serem identificadas como picos em funções de correlação de dois pontos $\xi(\vec{r}_{12}) = \langle \delta(\vec{r}_1) \delta(\vec{r}_2) \rangle$ ou uma série de oscilações amortecidas no espectro de potências. A primeira detecção de uma escala acústica através de uma função de correlação foi feita pelo Sloan Digital Sky Survey (SDSS). Foram mapeadas 46.748 galáxias e uma curva com um pico próximo a $105 Mpc/h$ [58]. Com a escala acústica então, pode-se obter restrições para os parâmetros cosmológicos utilizando a escala de dilatação

$$D_V = \left[cz(1+z)^2 \frac{d_A^2}{H(z)} \right]^{1/3}. \quad (3.64)$$

Ondas Gravitacionais

As OG foram apresentadas como instrumentos para medir distâncias cosmológicas originalmente no trabalho de Schutz [15]. Porém, como ele explica em seu trabalho, para identificar a posição do objeto emissor no céu precisa ser feito um trabalho de triangulação, o que aumenta o erro associado à medida. Todavia, hoje sabemos que existe um tipo de evento que pode nos dar a posição do sistema binário precisamente, que são as coalescências que possuem contraparte eletromagnética. A contraparte eletromagnética desses eventos são conhecidas como “erupções de raios gama de curta duração”, como podemos ver na referência [59]. Esse tipo de coalescência requer que pelo menos um dos corpos envolvidos seja uma estrela de nêutrons e que o sistema esteja aproximadamente *face-on*, ou seja, $\iota \leq 20^\circ$. O evento de coalescência GW170817 [20] hoje é o único que possui tanto a medida da onda gravitacional quanto sua contraparte eletromagnética e dele já conseguimos obter uma medida para a constante de Hubble, embora ainda esteja longe de podermos compará-la com as medidas atuais de alta precisão.

É esperado que para a próxima geração de interferômetros, mais especificamente, para o Einstein Telescope, consigamos obter registro de pelo menos 1000 eventos desse tipo em 10 anos [21], o que trará resultados impactantes para a cosmologia. Nesse trabalho, nosso foco é tentar simular esses eventos para entendermos o quão

impactante será termos uma base de dados grande de ondas gravitacionais.

3.4.3 Problemas do modelo padrão

O modelo Λ CDM tem se mostrado muito consistente com as observações realizadas nos últimos anos. Embora ele forneça explicações robustas sobre diversas observações, ele falha na hora de dar uma explicação física sustentável para a energia escura e para a matéria escura.

Nós sabemos como esses elementos devem se comportar, mas não sabemos o que eles são. Não há hoje nenhuma física de partículas ou teoria fundamental que explique uma matéria que interage apenas gravitacionalmente como a matéria escura do mesmo jeito que a relatividade geral sozinha não da conta de descrevê-la a partir da matéria bariônica existente. Já no caso da energia escura, a explicação mais comum que temos para ela é de ser a energia do vácuo. Pois é sabido que o vácuo possui oscilações quânticas e é possível calcular qual seria a energia gerada por essas oscilações. O problema é que o valor esperado da teoria é de $\rho_\Lambda = 10^{74} GeV^4$ (em unidades naturais, onde $c = 1$), que é 121 ordens de grandeza maior do que o que é observado [60]. Isso nos leva a crer que que exista algum tipo de física fundamental que ainda não entendemos. Essa física nova, pode ser compreendida em modelos alternativos ao Λ CDM e é uma forma de tentarmos lidar com essa falta de conhecimento sobre o setor escuro.

Além disto, o estado-da-arte da cosmologia indica que existem as chamadas tensões no modelo padrão. Entre estas, a mais conhecida é a chamada tensão na constante de Hubble [16] e [61]. Esta tensão surge na comparação entre dados relativos a dois momentos do Universo. O primeiro deles, relativo ao Universo tardio (do inglês, late time Universe), isto é, para o Universo associado à pequenos desvios para o vermelho. Já o segundo é relativo ao Universo jovem (do inglês, early time Universe), isto é, para o Universo associado à grandes desvios para o vermelho. Neste sentido a comparação entre as medidas do Universo para late time e early time indicam uma discrepância para a medida deste parâmetro de entre $4 - 6\sigma$, como podemos ver na figura 3.6. Podemos destacar as medidas de $H_0 = 67,4 \pm 0,5$ do Planck (dados da RCF)[11] e $H_0 = 74 \pm 1,4$ do SHOES (SN Ia e cefeidas) [13] como sendo as principais referencias entre medidas do Universo jovem e tardio, e a tensão entre as duas é de $4,4\sigma$.

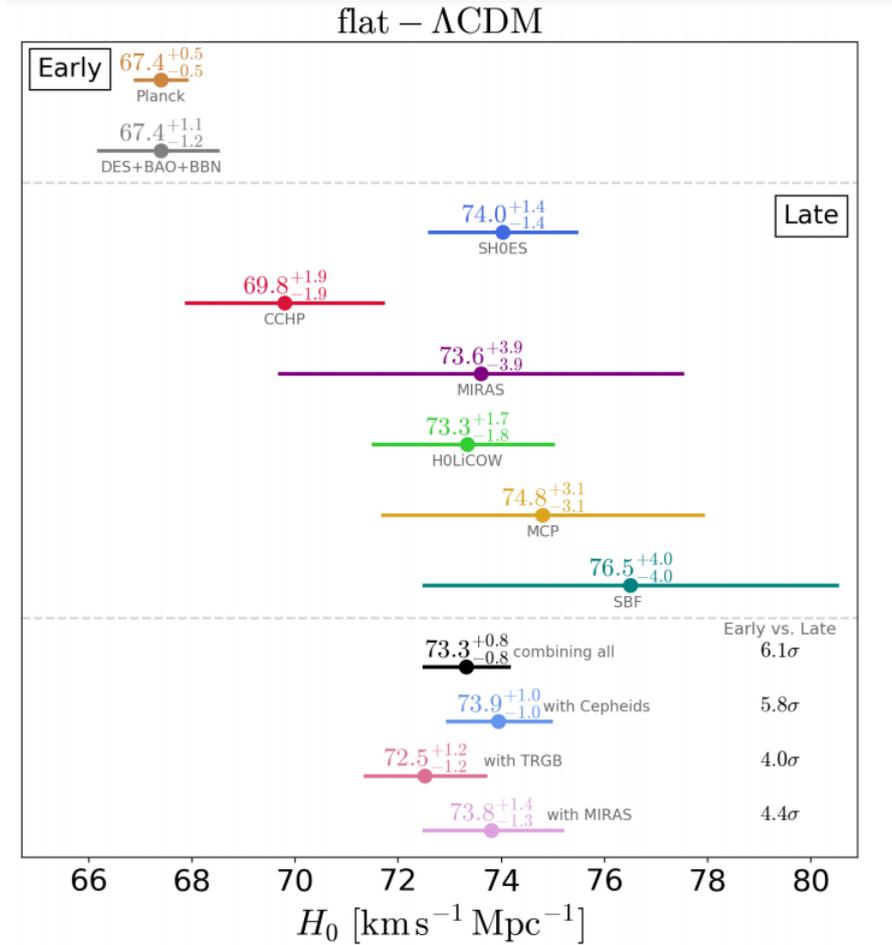


Figura 3.6: Medidas de H_0 obtidas na literatura recente. A parte de cima do painel estão as medidas do Universo jovem e tardio, e a parte de baixo está a combinaao de todos os conjuntos de dados de late time e alguns conjuntos estatisticamente não relacionados junto com suas respectivas discrepâncias relativa à medida do Planck. **Fonte:** [8]

3.5 Modelos cosmológicos alternativos

Como foi visto na última seao, existem questões que o modelo Λ CDM não consegue explicar e para isso precisamos ir em busca de uma física nova e estudar os modelos alternativos. Mesmo alguns desses modelos sendo totalmente ou em parte fenomenológicos, entendê-los e restringi-los com dados pode indicar caminhos para a obtenao da verdadeira natureza da energia escura por exemplo, ou do porquê de dados obtidos no Universo recente terem uma tensão com dados obtidos do começo do Universo.

Aqui apresentaremos modelos que tem, como ponto principal, uma energia escura variável. Neste sentido,  interessante introduzirmos a unidade naturais $c = 1$ e a equaao de estado

$$w = \frac{p}{\rho}. \quad (3.65)$$

A partir desta definição podemos escrever a equação de aceleração (3.11), como

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3}\rho(1+3w), \quad (3.66)$$

onde já estamos considerando a constante cosmológica como um fluido de energia escura. Deste modo, podemos inferir se o Universo está acelerando apenas pelo valor da equação de estado

$$\begin{cases} \omega > -\frac{1}{3} \rightarrow \text{Expansão desacelerada} \\ \omega = -\frac{1}{3} \rightarrow \text{Expansão constante} \\ \omega < -\frac{1}{3} \rightarrow \text{Expansão acelerada} \end{cases}$$

Outra equação que podemos reescrever utilizando a equação de estado é a equação de continuidade (3.13), que se torna

$$\frac{d\rho}{dz} - \frac{3}{1+z}\rho(1+w(z)) = 0, \quad (3.67)$$

onde usando a regra da cadeia e as relações (3.42) e (3.40) eliminamos a variável temporal. É principalmente sobre esses aspectos que iremos desenvolver os modelos alternativos. Serão considerados pelo menos dois tipos diferentes de modelos. Modelos de energia escura com equação de estado variável e modelos com interação no setor escuro. Outro ponto importante é que iremos trabalhar apenas com o universo plano. Embora, ainda existam debates sobre a curvatura do Universo, analisar esses modelos que possuem mais parâmetros que o Λ CDM com um parâmetro extra de curvatura pode dificultar a análise.

3.6 Modelos com energia escura variável

Nessa seção, iremos trabalhar com os modelos de energia escura variável, que são modelos onde basicamente escolhermos formas funcionais para a equação de estado.

3.6.1 Modelo $wCDM$

O modelo $wCDM$ é um modelo onde consideramos ainda um fluido e energia escura constante, porém com equação de estado que pode ter qualquer w_0 valor portanto que seja menor que $-1/3$, assim temos que

$$\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda,0}(1+z)^{3(1+w_0)}, \quad (3.68)$$

que pode ser escrito em termo das densidade relativas como

$$\Omega_\Lambda = \Omega_{\Lambda,0}(1+z)^{3(1+w_0)}. \quad (3.69)$$

Assim a gente pode escrever o parâmetro de hubble como

$$H(z) = H_0 \left[\Omega_{r,0} (z+1)^4 + \Omega_{m,0} (z+1)^3 + \Omega_{\Lambda,0} (1+z)^{3(1+w_0)} \right]^{1/2}, \quad (3.70)$$

onde pela completeza $\Omega_{\Lambda,0} = 1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{r,0}$.

3.6.2 Parametrização Chevallier-Linder-Polarski

A parametrização CPL [62], [22] e [23] é um tipo de parametrização linear em relação ao fator de escala da equação de estado. Sua forma funcional é

$$w = w_0 + \left(1 - \frac{a}{a_0}\right) w_a = w_0 + \frac{z}{z+1} w_a. \quad (3.71)$$

Vemos claramente que o modelo com essa parametrização é um aprimoramento do modelo $wCDM$, por esse motivo em algumas literatura ele também é chamado de $w_0 w_a CDM$. A solução da equação de continuidade pra esse modelo fica

$$\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda,0} (1+z)^{3(1+w_0+w_a)} e^{-3w_a z/(1+z)}, \quad (3.72)$$

o que nos leva ao parametro de Hubble normalizado

$$E(z)^2 = \Omega_{r,0} (z+1)^4 + \Omega_{m,0} (z+1)^3 + \Omega_{\Lambda,0} (1+z)^{3(1+w_0+w_a)} e^{-3w_a z/(1+z)}. \quad (3.73)$$

3.7 Modelos com interação no setor escuro

Modelos com interação no setor escuro ou energia escura interagente são modelos em que há troca de energia entre o fluido de energia escura e de matéria escura. Como esses dois fluidos são uma incógnita para o modelo padrão, podemos assumir esse tipo de comportamento e estudá-lo de forma fenomenológica. Basicamente o único requerimento para tal é que os dois fluidos se conservem juntos [27]

$$D_\mu T_c^{\mu\nu} + D_\mu T_\Lambda^{\mu\nu} = 0 \quad (3.74)$$

onde $T_c^{\mu\nu}$ é o tensor momento energia referente a matéria escura fria e $T_\Lambda^{\mu\nu}$ é o tensor momento energia referente a energia escura. Dessa forma nas duas equações de continuidades acopladas

$$\frac{d\rho_c}{dz} - \frac{3}{1+z}\rho_c = Q, \quad (3.75)$$

$$\frac{d\rho_\Lambda}{dz} - \frac{3}{1+z}\rho_\Lambda(1+w_0) = -Q, \quad (3.76)$$

onde Q é a taxa de transmissão. A escolha de Q irá definir o modelo trabalhado e o seu sinal irá definir para qual lado está ocorrendo a transferência de energia. Se $Q > 0$ temos energia escura sendo convertida matéria escura, se $Q < 0$ o oposto ocorre.

3.7.1 Modelo 1

O primeiro modelo que iremos considerar aqui é um modelo de interação do tipo

$$Q = 3\xi H\rho_c, \quad (3.77)$$

onde ξ é a constante de interação [25]. Note que nesses casos estamos trabalhando com um fluido de energia escura com a equação de estado constante, assim podemos resolver as equações (3.75) e (3.76) de forma analítica, obtendo então

$$\Omega_c = \Omega_{c,0}(1+z)^{3(1-\xi)}, \quad (3.78)$$

$$\Omega_\Lambda = \left(\Omega_{\Lambda,0} + \frac{\xi}{\xi+w}\Omega_{c,0} \right) (1+z)^{3(1+w)} - \frac{\xi}{\xi+w}\Omega_{c,0}(1+z)^{3(1-\xi)}. \quad (3.79)$$

Logo, obtemos um parâmetro de Hubble normalizado na forma

$$E(z)^2 = \Omega_{r,0}(z+1)^4 + \Omega_{b,0}(z+1)^3 + \frac{w}{\xi+w}\Omega_{c,0}(1+z)^{3(1-\xi)} + \left(\Omega_{\Lambda,0} + \frac{\xi}{\xi+w}\Omega_{c,0} \right) (1+z)^{3(1+w)}. \quad (3.80)$$

Note que devido termos uma interação entre matéria escura e energia escura, separamos então a componente de matéria Ω_m em matéria bariônica Ω_b e matéria escura Ω_c , mas elas devem satisfazer a relação $\Omega_m = \Omega_c + \Omega_b$.

3.7.2 Modelo 2

Já para o segundo modelo [25], foi considerado uma interação do tipo

$$Q = 3\xi H\rho_\Lambda. \quad (3.81)$$

Esse tipo de interação também possui uma solução analítica

$$\Omega_\Lambda = \Omega_{\Lambda,0}(1+z)^{3(1+\xi+w)}, \quad (3.82)$$

$$\Omega_c = \left(\Omega_{c,0} + \frac{\xi}{\xi+w} \Omega_{\Lambda,0} \right) (1+z)^3 - \frac{\xi}{\xi+w} \Omega_{\Lambda,0} (1+z)^{3(1+\xi+w)}. \quad (3.83)$$

que nos leva a um parâmetro de Hubble

$$E(z)^2 = \Omega_{r,0} (z+1)^4 + \Omega_{b,0} (z+1)^3 + \frac{w}{\xi+w} \Omega_{\Lambda,0} (1+z)^{3(1+\xi+w)} + \left(\Omega_{c,0} + \frac{\xi}{\xi+w} \Omega_{\Lambda,0} \right) (1+z)^3. \quad (3.84)$$

3.7.3 Modelo 3

O terceiro modelo estudado foi um modelo de decaimento do vácuo análogo ao modelo de gás de Chaplygin generalizado não adiabático [24] e [63]. Nesse caso, temos que

$$Q = \Gamma \rho_c = -\dot{\rho}_\Lambda, \quad (3.85)$$

onde

$$\rho_\Lambda = \sigma H^{-2\alpha}, \quad (3.86)$$

$$\Gamma = -\alpha \sigma H^{-(2\alpha+1)}, \quad (3.87)$$

$$\sigma = 3(1 - \Omega_{m,0}) H_0^{2(\alpha+1)}. \quad (3.88)$$

Nesse modelo Γ é conhecido como a taxa de criação de matéria e α é a constante de interação. Um α negativo significa que temos matéria escura sendo criada enquanto para α positivo temos matéria escura sendo aniquilada. Esse modelo possui uma solução analítica aproximada para o parâmetro de Hubble normalizado, que pode ser escrita como

$$E(z) = \sqrt{\Omega_{r,0} (z+1)^4 + [(1 - \Omega_{m,0}) + \Omega_{m,0} (z+1)^{3(1+\alpha)}]^{\frac{1}{1+\alpha}}}. \quad (3.89)$$

A solução analítica para o caso sem radiação é o termo do colchetes. Embora essa seja uma solução aproximada o estudo [64] demonstrou que seu desvio máximo fica em torno de 1% da solução geral numérica, porém esse erro pode variar com o parâmetro de interação e o parâmetro $\Omega_{m,0}$.

Capítulo 4

Análise estatística e resultados

Neste capítulo iremos discorrer sobre as análises e resultados obtidos, que podem ser divididos em duas partes. A primeira parte é composta pelas simulações geradas, enquanto a segunda parte temos os resultados da análise estatística e as restrições obtidas. Vale notar que tais simulações terão por base a física desenvolvida nos dois capítulos precedentes.

O principal ponto da simulação é identificar como que um novo experimento restringirá os parâmetros cosmológicos, podendo assim antecipar o impacto deste na cosmologia. Para isso, nós precisamos calcular qual será o erro instrumental σ_{inst} obtido a partir dos eventos simulados baseados na próxima geração de instrumentos, tendo com base o método de matriz de Fisher, uma certa distribuição de eventos e o método de Monte Carlo.

4.1 Simulação

Para além da física que embasa as ondas gravitacionais, necessitamos estabelecer o detalhamento associado à instrumentação para o qual estamos simulando as detecções. No nosso caso, simulamos detecções feitas pelo Einstein Telescope, um interferômetro que fará parte da terceira geração de interferômetros de ondas gravitacionais. É esperado que tenhamos pelo menos detecções de 1000 eventos com contraparte eletromagnética em 10 anos de funcionamento do experimento [21] e [17]. Então nos baseamos nessa quantidade de dados para limitarmos nossa simulação.

Como visto no capítulo 2, a principal quantidade observada pelo interferômetro é chamada de *strain*, que é a alteração do tamanho do braço do interferômetro gerado pela passagem da OG. O *strain* pode ser escrito como uma combinação linear das amplitudes da onda gravitacional no espaço de frequências, calculadas no capítulo 2, tal que

$$h^{(j)}(f) = F_+^{(j)}(\theta, \phi, \psi)h_+ + F_\times^{(j)}(\theta, \phi, \psi)h_\times, \quad (4.1)$$

onde $F^{(j)}(\theta, \phi, \psi)$ é o padrão de antena, uma função angular que depende do arranjo dos braços do interferômetro. Para facilitar a notação, neste capítulo iremos utilizar $\tilde{h}(f) = h(f)$. Temos que o ET será uma rede triangular de 3 interferômetros, como podemos ver na figura 4.1, então basicamente temos 3 funções de padrão de antena que são relacionadas por

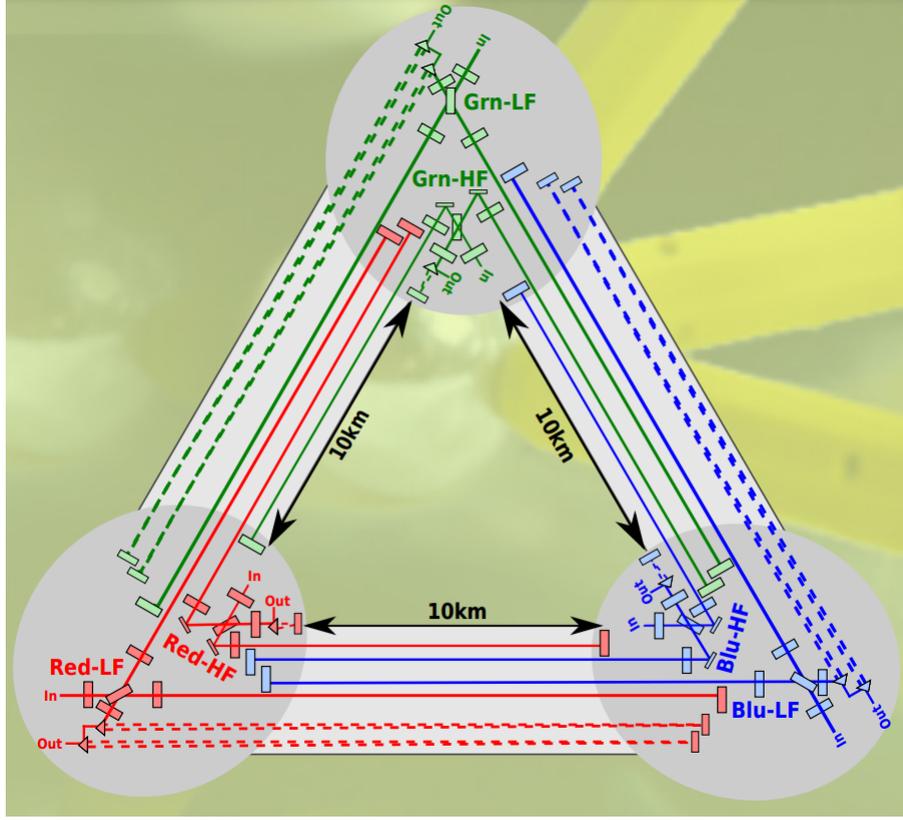


Figura 4.1: Esquema da estrutura do Einstein Telescope. Podemos ver claramente na imagem os três interferômetros identificados pelas cores verde, azul e vermelho em um arranjo triangular. As siglas HF e LF são referentes a instrumentos do interferômetro específicos para captar altas frequências e baixas frequências respectivamente [9].

$$F_{+, \times}^{(1)}(\theta, \phi, \psi) = F_{+, \times}^{(2)}(\theta, \phi + 2\pi/3, \psi) = F_{+, \times}^{(3)}(\theta, \phi + 4\pi/3, \psi). \quad (4.2)$$

onde podemos escrever a primeira função como

$$F_{+}^{(1)}(\theta, \phi, \psi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta) \cos(2\phi) \cos(2\psi) - \cos \theta \sin(2\phi) \sin(2\psi) \right], \quad (4.3)$$

$$F_{\times}^{(1)}(\theta, \phi, \psi) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta) \cos(2\phi) \sin(2\psi) + \cos \theta \sin(2\phi) \cos(2\psi) \right], \quad (4.4)$$

lembrando que os ângulos (θ, ϕ) estão relacionados com a posição da fonte e aqui

temos a introdução do ângulo ψ que é o ângulo entre as polarizações. Sob tais circunstâncias e sendo as amplitudes das polarizações dadas pelas equações 2.112 e 2.113, temos que

$$h^{(j)}(f) = \mathcal{A}^{(l)} f^{-7/6} e^{i\Psi(f)}, \quad (4.5)$$

onde

$$\mathcal{A}^{(l)} = \frac{1}{d_L} \sqrt{\frac{5\pi}{96} \left(\left(F_+^{(i)} \right)^2 (1 + \cos^2 \iota)^2 + 4 \left(F_\times^{(i)} \right)^2 \cos^2 \iota \right)} \pi^{-7/6} \mathcal{M}_c^{5/6} \quad (4.6)$$

e $\Psi(f)$ na sua forma mais simples é dada pela equação (2.116). A razão sinal ruído $\rho^{(j)}$ (RSR) que é a quantidade que determina se temos uma observação ou não é simplesmente dada pelo produto interno

$$((\rho^{(j)})^2) = 4 \int_{1Hz}^{2f_{isco}} |h^{(j)}(f)|^2 \frac{df}{S_h(f)}. \quad (4.7)$$

A função $S_h(f)$ é a densidade do espectro de potência (DEP), que é uma característica do detector. Nós usamos a DEP dada pela referência [65]. Já limite de integração superior é dado pela ISCO, como vimos no desenvolvimento do capítulo 2, enquanto o limite inferior é dado pela menor frequência possível de ser detectada pelo instrumento. Como o ET é uma rede composta por três interferômetros, a razão sinal ruído final ρ será uma soma quadrática das RSR's de cada um dos interferômetros

$$\rho = \sqrt{\sum_j^3 (\rho^{(j)})^2}. \quad (4.8)$$

Segundo a referência [66], podemos considerar um sinal como verdadeiro quando $\rho > 8$. Devido às detecções trabalhadas possuírem uma contraparte eletromagnética, nos podemos fazer ainda algumas simplificações no problema. Segundo a referência [32], nesse caso em específico, podemos considerar o sistema aproximadamente com a face virada para a nossa direção, isto é, $\iota < 20^\circ$, porque esperamos que a erupção de raio gama seja consideravelmente forte. O que também é visto nessas referências é que existe pouca diferença entre variarmos o ângulo ι nesse alcance, então podemos utilizar $\iota \approx 0$ como uma boa aproximação. Dessa forma, temos que a razão sinal ruído (4.8) pode ser reescrita explicitamente como

$$\rho(z, \theta, \mathcal{M}_c) = \frac{3\pi^{-7/6} \mathcal{M}_c^{5/6}}{4 d_L(z)} \sqrt{\frac{5\pi}{96} f(\theta) \int_{1Hz}^{2f_{isco}} f^{-7/3} \frac{df}{S_h(f)}}, \quad (4.9)$$

$$f(\theta) = (35 + 28 \cos(2\theta) + \cos(4\theta)). \quad (4.10)$$

No final então ficamos com apenas o ângulo θ e a massa de gorjeio \mathcal{M}_c como parâmetros livres. Assim na nossa simulação foram utilizados valores de θ dentro de um intervalo de $[0, 180^\circ]$ e valores de massas no intervalo de $[1, 2]M_\odot$ para estrelas de nêutron e $[3, 10]M_\odot$ para buracos negros [21]. Como estamos objetivando eventos com contraparte eletromagnética, eles necessariamente precisam que uma de suas componentes seja uma estrela de nêutrons. De acordo com a referência [67], a quantidade de coalescência de estrelas de nêutrons com buraco negro é 3% da quantidade de eventos de duas estrelas de nêutrons.

O método de matriz de Fisher pode ser escrito como

$$\sigma_{d_L}^{inst} \simeq \sqrt{\left\langle \frac{\partial h}{\partial d_L}, \frac{\partial h}{\partial d_L} \right\rangle^{-1}} = \frac{d_L}{\rho}. \quad (4.11)$$

Embora tenhamos feito a aproximação de $\iota \simeq 0$ para a simulação é necessário levar em conta o erro associado a esse ângulo dentro do processo. Então, considerando o efeito máximo de ι ($\iota = 0$ à $\iota = 90^\circ$) à RSR, adicionamos um fator 2 à (4.11) [21]. Outro ponto que devemos levar em consideração, é de que assim como as ondas eletromagnéticas, as ondas gravitacionais também estão sujeitas a erro de lenteamento fraco que é dado pela expressão

$$\sigma_{d_L}^{lens} = 0,05z d_L, \quad (4.12)$$

dessa forma, obtemos o erro final da distância de luminosidade somando os dois erros adquiridos em quadratura

$$\sigma_{d_L} = \sqrt{\left(\frac{2d_L}{\rho}\right)^2 + (0,05z d_L)^2}. \quad (4.13)$$

Após a obtenção dos erros, podemos realizar um processo de Monte Carlo que consiste em obtermos um d_L aleatório dentro de uma distribuição normal que é escrita como

$$\mathcal{N}(d_L, \sigma_{d_L}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{d_L}^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-d_L}{\sigma_{d_L}}\right)^2}, \quad (4.14)$$

onde d_L aqui está fazendo o papel de valor médio da distribuição.

4.1.1 Distribuição de Eventos

Outro ponto necessário para a nossa simulação é o modo como esses eventos vão se distribuir em relação ao desvio para o vermelho. Nesse ponto é importante que consideremos um modelo fiducial com o qual iremos trabalhar, e que será a

cosmologia de fundo sobre a qual vai ser construída a simulação.

Para obtermos a distribuição de eventos partimos da variação de volume comóvel por redshift, dada por

$$P(z) \propto \frac{4\pi d_c^2 R(z)}{H(z)(1+z)}, \quad (4.15)$$

onde

$$R(z) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 + 2z & z \leq 1 \\ \frac{3}{4}(5 - z) & 1 < z < 5 \\ 0 & z \geq 5 \end{array} \right\}. \quad (4.16)$$

Essa função $R(z)$ é um ajuste feito por [65] obtida a partir do estudo de síntese de população estelar realizado no trabalho [68]. Fica claro que é necessário de antemão um modelo cosmológico pois necessitamos disso para calcular $H(z)$ e $d_c(z)$. A distribuição obtida para o Λ CDM pode ser vista na figura 4.2.

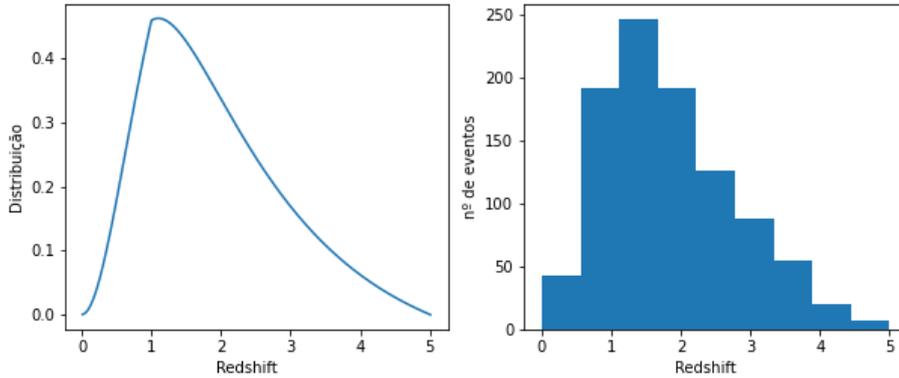


Figura 4.2: Distribuição de eventos normalizada encontrada para o modelo Λ CDM à esquerda e histograma feito com a quantidade total de eventos simulados à direita, onde o intervalo utilizado para o bin foi de 0,5.

Em geral, a distribuição dos outros modelos formaram uma curva muito próxima do modelo Λ CDM, sendo assim, fizemos um gráfico do desvio $(P_{mod}/P_{\Lambda CDM} - 1)$ da distribuição dos modelos alternativos que chamamos de P_{mod} , em relação a distribuição do modelo Λ CDM, nomeada de $P_{\Lambda CDM}$. O gráfico pode ser visto na figura 4.3.

O que podemos notar na figura 4.3 é que o desvio máximo do Λ CDM é aproximadamente 5×10^{-2} para a maioria dos modelos, sendo que para a parametrização CPL é onde temos o maior desvio, se diferenciando em até $1,34 \times 10^{-1}$ do modelo cosmológico padrão em $z = 0$. É interessante vermos como existe uma diferença da distribuição entre os modelos com energia escura variável e os modelos com interação no setor escuro. Podemos ver que os modelos com interação geraram uma

sobredensidade de eventos em $z \leq 1,6$ enquanto para $z > 1.6$ temos uma diminuição na quantidade de eventos, se acentuando de acordo com que o *redshift* aumenta. O w CDM foi o modelo que menos desviou do Λ CDM, enquanto a parametrização CPL teve uma distribuição de eventos consideravelmente menor em $z < 1$. Logo, mesmo que seja possível identificar algumas assinaturas dos modelos em suas distribuições, elas são relativamente pequenas, não gerando grande impacto nas simulações. Entretanto, é notória a possibilidade uma exploração futura sobre o tema, permitindo análises ainda mais detalhadas.

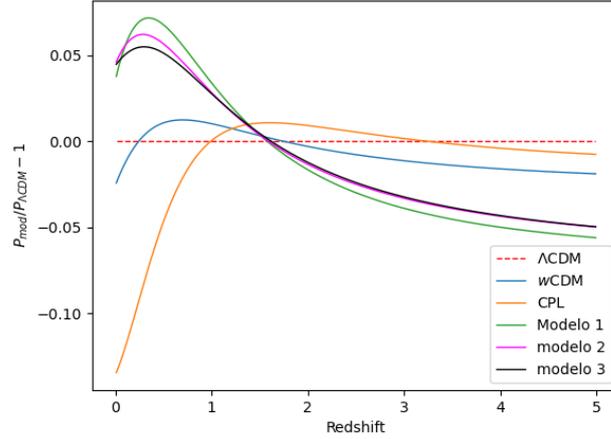


Figura 4.3: Desvio das distribuições por redshift dos modelos alternativos relativo à distribuição do Λ CDM. A linha tracejada representa o próprio Λ CDM, onde não tem nenhum desvio. A linha azul e laranja representa o modelo w CDM e Λ CDM respectivamente. Enquanto a linha verde, magenta e preta representam os modelos com interação nos setores escuro 1, 2 e 3 respectivamente.

4.1.2 Resultados da Simulação

Seguindo todos os passos da seção 4.1 e com a distribuição de desvio para o vermelho podemos, enfim, obter nossos pontos simulados. Eles podem ser vistos nas figuras 4.4, 4.5 e 4.6.

Foram simulados pontos para cada um dos modelos trabalhados. Para cada um foi utilizado um modelo fiducial onde o valor dos parâmetros fiduciais podem ser vistos na tabela 4.1. Escolhemos o melhor ajuste obtidos na restrição de parâmetros de cada modelo utilizando os dados de BAO do Baryon Oscillation Spectroscopic Survey (BOSS) DR 12 [51] e SN Ia da compilação do Pantheon [12]. Porém, nos casos em que a posterior formada não era gaussiana, selecionamos a média no lugar do melhor ajuste. Embora os parâmetros fiduciais possam influenciar no valor do melhor ajuste, ele não deve influenciar diretamente na restrição dos parâmetros,

ou seja, no valor do erro obtido.

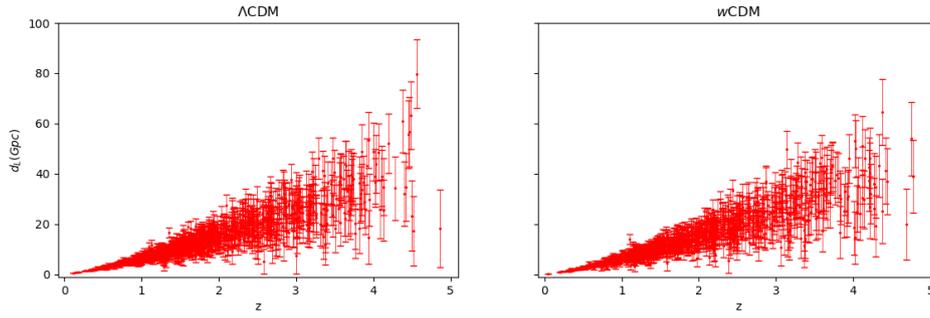


Figura 4.4: Pontos de distância de luminosidade simulados e seus respectivos erros para o modelo Λ CDM e para o modelo w CDM.

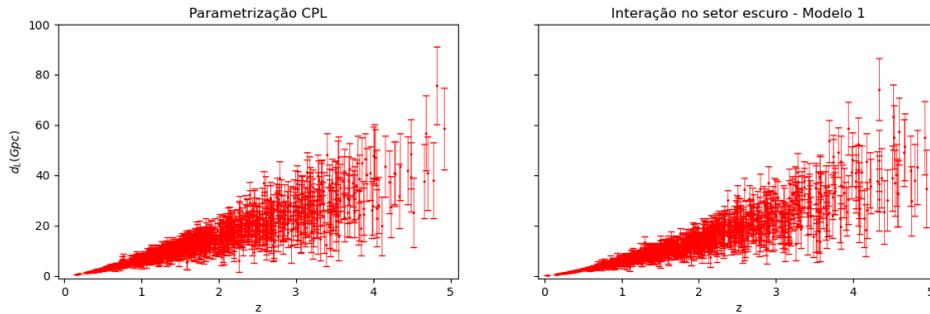


Figura 4.5: Pontos de distância de luminosidade simulados e seus respectivos erros para a parametrização CPL e para o primeiro modelo de interação no setor escuro.

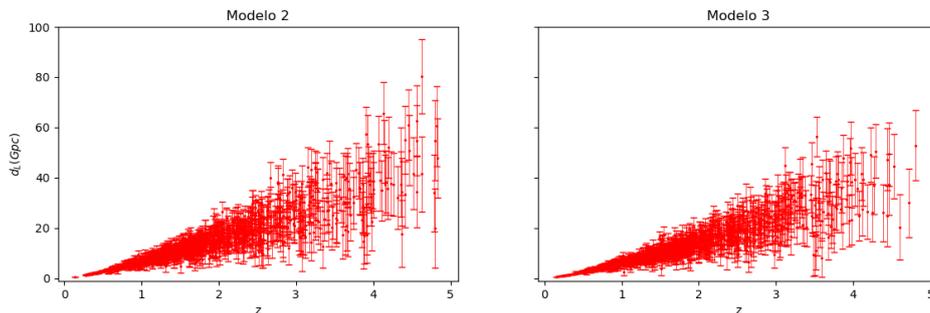


Figura 4.6: Pontos de distância de luminosidade simulados e seus respectivos erros para os modelos com interação no setor escuro 2 e 3.

Sendo assim existe uma certa liberdade na escolha dos parâmetros dos modelos fiduciais, porém escolhemos de forma a se aproximar dos valores já conhecidos pela

literatura.

Parâmetro	Λ CDM	w CDM	CPL	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3
$H_0[km s^{-1}Mpc^{-1}]$	68,93	71,14	72,07	68,55	70,02	73,35
$\Omega_{c,0}$	0,2598	0,2672	0,2420	0,312	0,4027	0,2409
w_0	-	-1,08	-1,04	-1,19	-1,34	-
w_a	-	-	-0,571	-	-	-
ξ	-	-	-	0,0045	0,2158	-
α	-	-	-	-	-	0,179

Tabela 4.1: Valores dos parâmetros utilizados para os modelos fiduciais.

4.2 Análise estatística

Para analisarmos os modelos, compara-los e ajustarmos os parâmetros, necessitamos de uma base estatística. A busca por um método robusto, tem sido foco de estudos nos últimos tempos, devido a quantidade de dados que vem sendo gerados e hoje têm-se um consenso de que o método Bayesiano é o ideal para tal.

Mas antes de entrarmos no método Bayesiano em si, precisamos definir nossa função probabilidades, com a qual trabalharemos nesse capítulo. Dado um conjunto S , com subconjuntos A e B , a probabilidade vai ser uma função real que satisfaz os axiomas de Komolgorov:

- Para todo A em S , $P(A) \geq 0$.
- Para subconjuntos disjuntos (i.e. onde $A \cap B = 0$), $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(S)=1$

A análise Bayesiana nos permite verificar qual hipótese ou teoria é mais provável, além de verificar a probabilidade de um parâmetro ter certo valor. Para tal análise, precisamos utilizar a probabilidade condicional

$$P(A|B) = P(A \cap B)/P(B), \quad (4.17)$$

que em poucas palavras, é a probabilidade de encontrarmos algum elemento de A em B . Dessa forma podemos ver que

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B), \quad (4.18)$$

$$P(B \cap A) = P(B|A)P(A), \quad (4.19)$$

como $A \cap B = B \cap A$, então podemos igualar as relações (4.17) e (4.18) acima, o que nos dá

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}, \quad (4.20)$$

que é conhecido como teorema de Bayes [69]. Com essa relação podemos inferir a viabilidade de uma hipótese dado um conjunto de dados. Na prática, podemos identificar $A = \vec{\theta}$ e $B = d$, onde $\vec{\theta}$ é um vetor que contém os parâmetros que compõem nossa hipótese (modelo $y \equiv y(\vec{\theta})$) e d um dado qualquer. A probabilidade a posterior $P(\theta|y_i)$, é a ferramenta do modelo Bayesiano utilizada para a estimativa dos parâmetros. Vamos calculá-la a partir da verossimilhança $P(d|\vec{\theta})$, do prior, $P(\vec{\theta})$ e da evidência $P(d)$. A verossimilhança (do inglês *likelihood*) é definida como

$$P(d|\vec{\theta}) = \mathcal{L}(d|\vec{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{(d - y(\vec{\theta}))^2}{2\sigma^2} \right\}. \quad (4.21)$$

Em geral, quando temos um conjunto de N dados (x_i, y_i) com um desvio padrão σ_i associado um y_i e um modelo y dependente de um conjunto de parâmetros dado por $\vec{\theta}$ ($y \equiv y(\vec{\theta})$), a verossimilhança final mais geral será dada por

$$\mathcal{L}(y_i|\vec{\theta}) = C_N \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i,j} (y_i - y(x_i, \vec{\theta})) E^{-1} (y_j - y(x_j, \vec{\theta})) \right\}, \quad (4.22)$$

onde

$$C_N = \prod_i^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}}, \quad (4.23)$$

e

$$E \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2N} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \dots & \sigma_{NN} \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

é a “matriz de covariância de dados”. O argumento da função exponencial (4.22) dentro do somatório é também conhecido como χ^2 e também pode ser utilizado para a inferência dos parâmetros.

A inferência Bayesiana também é composta pelo prior $P(\vec{\theta})$ que é uma probabilidade para a hipótese anterior aos dados. Normalmente o prior é uma informação na forma de um ansatz, que pode ser baseada em estudos ou experimentos prévios ou em alguma teoria. O prior mais conservador possível que pode ser utilizado é o

prior uniforme, que funciona como limites para a likelihood.

Por fim, temos a evidência $P(d_i)$ que usando a completeza do espaço pode ser escrita como

$$P(d_i) = \sum_j \mathcal{L}(y_i|\vec{\theta}_j)P(\vec{\theta}), \quad (4.25)$$

e

$$P(d_i) = \int \mathcal{L}(y_i|\vec{\theta})P(\vec{\theta})d^n\theta, \quad (4.26)$$

para o caso de um espaço paramétrico discreto e para o caso de um espaço contínuo respectivamente, onde n é a quantidade de parâmetros.

Esses três elementos então compõem a probabilidade a posteriori $P(\theta|y_i)$, que é a ferramenta do modelo Bayesiano utilizada para a estimativa dos parâmetros.

4.2.1 Estimativa de parâmetros

O foco no presente trabalho é restringir o espaço paramétrico de forma a obter um melhor ajuste para os parâmetros e os respectivos erros. Uma maneira prática de realizar tal análise é através da minimização do χ^2 . O melhor ajuste é obtido diretamente do χ^2 mínimo e além disso quando variamos o χ^2 do seu valor mínimo podemos calcular curvas de níveis onde temos a probabilidade é superior a um certo nível de credibilidade.

Mesmo se os modelos possuírem muitos parâmetros é possível construir a posteriori unidimensional e curvas de níveis bidimensionais marginalizando sobre os parâmetros indesejados [70]. O processo de marginalização é feito integrando sobre o parâmetro indesejado, como podemos ver no exemplo a seguir em que estamos marginalizando sobre um parâmetro genérico ϕ

$$P(\theta|y_i) = \int P(\theta|\phi, y_i)P(\phi|y_i)d\phi. \quad (4.27)$$

Para o cálculo do erro associado ao parâmetro, podemos relacionar a posteriori unidimensional com a probabilidade deste parâmetro. Recorrendo à literatura podemos identificar os valores numéricos para as distâncias ao χ^2 mínimo tendo, respectivamente, os valores: $\Delta\chi^2 = 1$ para 68,3%, $\Delta\chi^2 = 4$ para 95,4% e $\Delta\chi^2 = 9$ para 99% para de estarmos restringindo apenas um parâmetro [10]. Assumindo a equivalência dos erros com os desvios-padrão, os valores anteriores definem, respectivamente, os intervalos de 1σ , 2σ e 3σ . Já as curvas de contorno de 1σ e 2σ em duas dimensões acontecem para outros valores de intervalo de χ^2 , como podemos ver bem exemplificado na figura 4.7.

Essa figura 4.7 demonstra um caso ideal onde as curvas de credibilidade formam elipses. Isso significa que as posteriores dos dois parâmetros analisados são forma-

das por distribuições normais. Quando isso ocorre o espaço paramétrico fica bem definido e o melhor ajuste automaticamente será a média da distribuição normal, mas de forma mais geral o melhor ajuste é dado pelo χ^2 mínimo. Trabalhando com o χ^2 também ganhamos outra vantagem. Quando utilizamos diferentes conjuntos de dados como, por exemplo, os dados simulados de ondas gravitacionais e dados advindos de supernova do tipo Ia, basta somarmos os χ^2 referentes a cada conjunto de dados que obtemos um novo χ^2 com informações dos dois conjuntos.

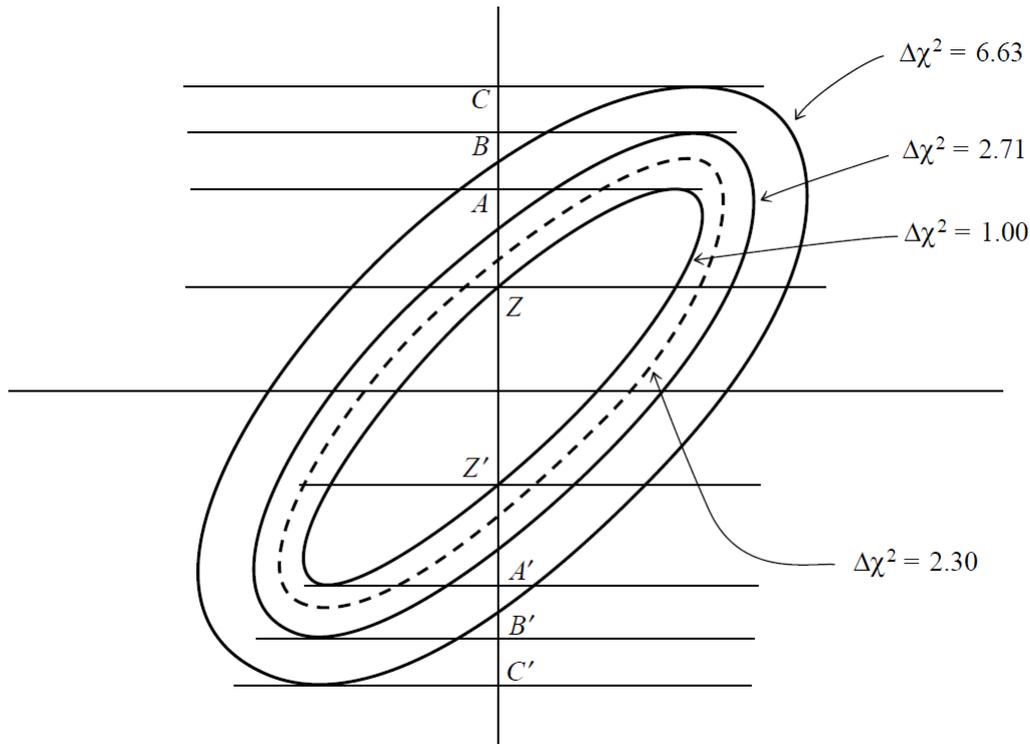


Figura 4.7: Esquema dos níveis de credibilidade tanto para o ajuste de dois parâmetros (linha tracejada) quanto para o ajuste de um único parâmetro (linhas cheias). Os intervalos AA', BB' e CC' são referentes à 68,3%, 90% e 99% de probabilidade para o ajuste de um parâmetro. Enquanto a curva tracejada é referente a 68,3% dos dados normalmente distribuídos em um ajuste bidimensional. **Fonte:** [10].

Dado o desconhecimento prévio das curvas a posteriori, para os parâmetros almeçados, utilizamos o método MCMC através do código MontePython [71]. Esse tipo de abordagem é bastante utilizado em trabalhos atuais além de gerar um ganho computacional e de tempo quando estamos tratando modelos com muitos parâmetros.

Essa classe de algoritmos MCMC consiste em uma caminhada aleatória pelo espaço paramétrico onde cada passo é decidido se é aceito ou não baseado na probabilidade da posição atual e da futura. Dessa forma o algoritmo passa mais vezes nas regiões onde a probabilidade é maior gerando assim uma densidade de pontos

maior nessas regiões. Os pontos por onde o algoritmo passa são registrados formando então uma cadeia, dessa forma consegue-se mapear todo espaço paramétrico e atribuir uma densidade probabilística a cada conjunto de parâmetros, então podemos não apenas obter os valores dos parâmetros referentes a cada probabilidade como também construir essas curvas de probabilidade. Dessa forma nós obtemos os melhores ajustes, os erros associados a cada parâmetro e as curvas de níveis de credibilidade.

Podemos gerar diversas cadeias de Markov até que se chegue a um resultado robusto. Uma forma de se verificar isso é utilizando o critério de convergência de Gelman-Rubin [72]. Esse critério é dado pela razão da média das variâncias das correntes pela variância do conjunto de médias das correntes, que pode ser identificada pela letra R . Quando essas duas variâncias possuem valores muito próximos, ou seja, quando $R - 1 \simeq 0$, então temos uma boa convergência.

Como dito anteriormente, o código utilizado para tal análise foi o MontePython porém, para a análise completa é necessária a inclusão de uma cosmologia associada ao problema. Pra tal fim, utilizamos o programa CLASS [73] e para incluir as expressões relativas aos modelos com interação no setor escuro, foi necessário modificarmos este programa.

4.2.2 Resultado da análise estatística

Os nossos resultados foram organizados em duas classes de modelos: modelos sem interação no setor escuro (que englobam modelos com energia escura constante e variável) e modelos com interação no setor escuro (que englobam diferentes evoluções para os parâmetros envolvidos). A seguir, iremos apresentar cada um dos resultados obtidos iniciando pelos modelos sem interação.

A tabela 4.3 apresenta os resultados para o modelo Λ CDM, w CDM e para a parametrização CPL. Nós utilizamos um conjunto de priors uniformes que podem ser vistos na tabela 4.2 e 3 diferentes conjuntos de dados para restringir o espaço paramétrico dos modelos. Além disso fixamos $\Omega_{b,0}h^2 = 0,02237$ e $T_{CMB} = 2,726K$ baseados no Planck [11]. O primeiro conjunto é o conjunto com 1000 dados simulados de ondas gravitacionais, referenciado como GW. O segundo conjunto de dados são dados provenientes de oscilações acústica de bárions do BOSS DR 12 [51], que será chamado de BAO. Já o terceiro conjunto são 1048 dados de supernova do tipo Ia da compilação do Pantheon, que estão localizados entre $0,01 < z < 2,3$ [12] e será referenciado como Pantheon.

Primeiramente, como nosso objetivo é a análise dos erros, podemos definir um estimador de precisão. Em relação ao parâmetro H_0 , temos que o desvio padrão encontrado utilizando o conjunto de dados de GW, pode ser escrito como $\sigma_{H_0} =$

$0,70Km s^{-1}Mpc^{-1}$, onde σ_{H_0} é a média dos erros superior e inferior encontrados. Assim, temos que a precisão pode ser escrita como

$$\varepsilon(H_0) = \frac{\sigma_{H_0}}{|H_0|} \simeq 1\%. \quad (4.28)$$

Esse estimador também é conhecido como erro relativo, devido a ser o erro relativo ao valor do parâmetro.

Parâmetro	Intervalo
$H_0[km s^{-1}Mpc^{-1}]$	[60 , 80]
$\Omega_{c,0}$	[0 , 1]
w_0	[-2 , 0]
w_a	[-1 , 1]
ξ	[-1 , 1]
α	[-1 , 1]

Tabela 4.2: Tabela com o intervalo de priors uniformes selecionados para cada parâmetro.

Resultados Λ CDM

Primeiramente, vemos que os dados de ondas gravitacionais simulados restringem os parâmetros $\Omega_{m,0}$ e H_0 com o modelo Λ CDM, melhor do que os dados do Pantheon e de BAO, embora a restrição no parâmetro de densidade de matéria encontrada não seja tão boa quanto a de ajustes feitos com dados do *CMB*. Podemos observar que os dados de supernova e BAO não restringem bem a constante de Hubble, tendo uma precisão de $\varepsilon(H_0) = 2,39\%$ para esse conjunto de dados. Entretanto, com o acréscimo dos dados simulados, conseguimos um desvio padrão de $\sigma_{H_0} = 0,4$ e $\varepsilon(H_0) = 0,58\%$ que está da ordem do erro encontrado no último lançamento de dados do Planck, como vimos na tabela 3.4.

Podemos ver claramente na figura 4.8 como o ajuste feito com todos os conjuntos de dados gera uma posteriori unidimensional mais estreita, o que refletiu no menor erro. É possível ver também como que os dados de distância de luminosidade advindos de ondas gravitacionais possuem uma degenerescência diferente do conjunto Pantheon+BAO, o que evidencia as diferentes correlações entre os parâmetros dependendo do observável aferido.

Resultados w CDM

Podemos notar que ao acrescentar o parâmetro w_0 ao ajuste com os dados de GW obtivemos uma leve piora nas restrições dos parâmetros $\Omega_{m,0}$ e H_0 , principalmente no parâmetro de densidade relativa de matéria, com seu erro relativo alcançando $\varepsilon(\Omega_{m,0}) = 12,84\%$. Mesmo assim ainda é comparável com a acurácia dos dados de Pantheon+BAO $\varepsilon(\Omega_{m,0}) = 13,54\%$.

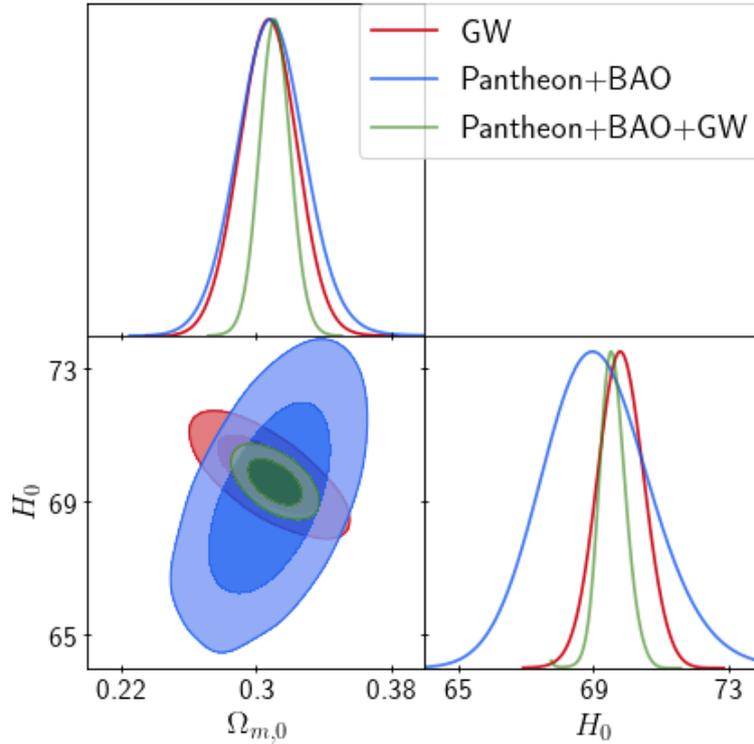


Figura 4.8: Curvas de nível de credibilidade de 68,3% e 95,4% sendo respectivamente a região mais escura e a região mais clara e as posteriores unidimensionais encontradas para o modelo cosmológico padrão Λ CDM. Podemos ver as curvas criadas utilizando todos os conjuntos de dados Pantheon+BAO+GW em verde, a curva para o conjunto de dados simulados de ondas gravitacionais em vermelho e a curva para os dados de BAO e supernova do Pantheon em azul.

Além disso, é possível ver que o ajuste feito com todos os dados possui uma notável melhora, e obtemos um erro comparável ao ajuste do modelo Λ CDM que possui um parâmetro a menos. Vemos uma situação muito parecida ocorrendo com o parâmetro w_0 . Já em relação a constante de Hubble, temos um aumento considerável no erro obtido pelo ajuste do conjunto de dados do Pantheon+BAO, o que gerou um erro relativo de $\varepsilon(H_0) = 5,50\%$, que é mais do que o dobro em relação ao Λ CDM. Já em relação ao ajuste utilizando GW e Pantheon+BAO+GW não houve uma mudança significativa em relação ao modelo cosmológico padrão, a não ser um

leve aumento do desvio padrão. Podemos ver na figura 4.9 que há uma assimetria na gaussiana do parâmetro $\Omega_{m,0}$ no ajuste realizado com o conjunto Pantheon+BAO, o que também leva a assimetria dos erros. Também é possível ver que as curvas de níveis em 1σ e 2σ obtidas para o parâmetro H_0 com o mesmo conjunto de dados é muito maior do que as outras. Porém, podemos notar que a melhora na restrição na constante de Hubble e no parâmetro w_0 se dá devido a ortogonalidade dos dados, enquanto no caso do parâmetro Ω_0 se dá principalmente por causa da tensão entre os parâmetros, o que a torna artificial.

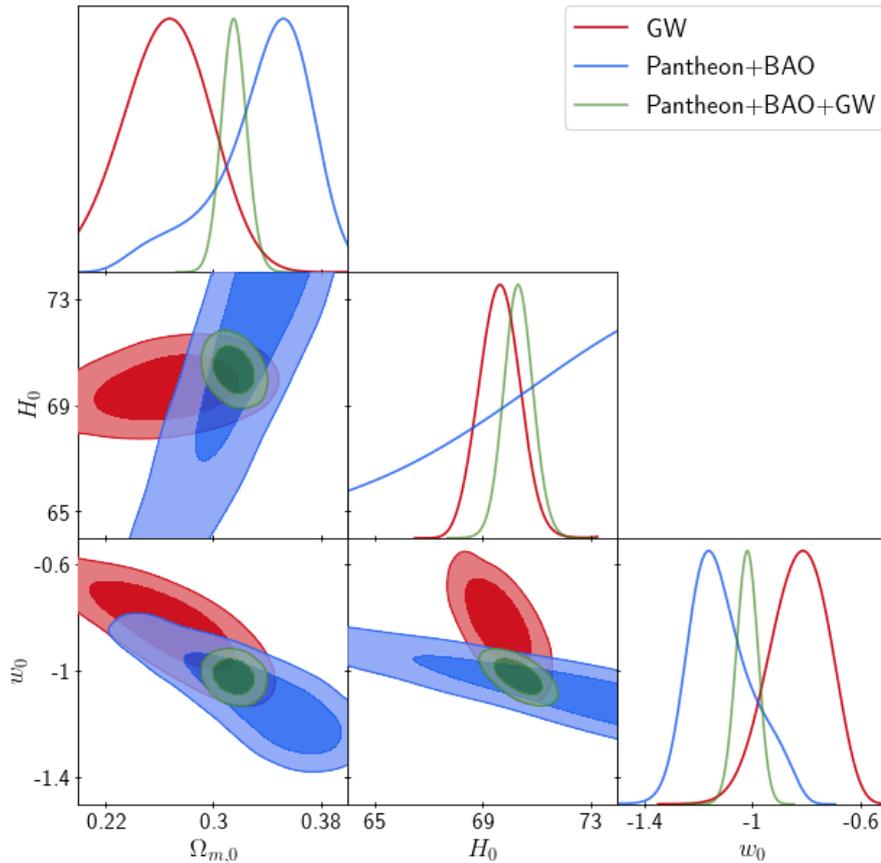


Figura 4.9: Curvas de nível de 68, 3% e 95, 4% sendo respectivamente a região mais escura e a região mais clara e as posteriores unidimensionais encontradas para o modelo w CDM. Podemos ver as curvas criadas utilizando todos os conjuntos de dados Pantheon+BAO+GW em verde, a curva para o conjunto de dados simulados de ondas gravitacionais em vermelho e a curva para os dados de BAO e supernova do Pantheon em azul.

Resultados parametrização CPL

O modelo CPL é o modelo mais complexo até o momento possuindo até 4 parâmetros livres. Devido a isso, vemos que mesmo utilizando os três conjuntos de dados juntos não conseguimos um bom ajuste para o parâmetro w_a , visto que

o erro relativo encontrado foi de $\varepsilon(w_a) = 50,93\%$. Podemos ver pela figura 4.10 que esse problema de ajuste se repete também para os outros dois conjuntos de dados. Porém, os outros parâmetros em geral tiveram um ajuste bem parecido com o modelo w CDM, com um erro relativo por volta de 10%, mas podemos destacar o parâmetro $\Omega_{m,0}$ que teve um erro de 3,58% quando utilizamos todos os conjuntos de dados.

Modelo	Parâmetros	GW	Pantheon+BAO	Pantheon+BAO+GW
Λ CDM	$\Omega_{m,0}$	$0,3062^{+0,0157}_{-0,0184}$	$0,3064^{+0,0212}_{-0,0211}$	$0,3111^{+0,0095}_{-0,0095}$
	$H_0[Km\ s^{-1}Mpc^{-1}]$	$69,80^{+0,71}_{-0,68}$	$68,93^{+1,55}_{-1,80}$	$69,59^{+0,40}_{-0,41}$
w CDM	$\Omega_{m,0}$	$0.2607^{+0,0357}_{-0,0316}$	$0.3583^{+0,0452}_{-0,0247}$	$0.3146^{+0,0091}_{-0,0098}$
	$H_0[Km\ s^{-1}Mpc^{-1}]$	$69,56^{+0,72}_{-0,80}$	$76,42^{+6,63}_{-1,83}$	$70,32^{+0,54}_{-0,57}$
	w_0	$-0,805^{+0,120}_{-0,093}$	$-1,178^{+0,098}_{-0,145}$	$-1,017^{+0,042}_{-0,040}$
CPL	$\Omega_{m,0}$	$0,3142^{+0,041}_{-0,027}$	$0,3776^{+0,0525}_{-0,0230}$	$0,3072^{+0,0106}_{-0,0114}$
	$H_0[Km\ s^{-1}Mpc^{-1}]$	$70,41^{+1,95}_{-2,89}$	$79,39^{+6,24}_{-1,75}$	$70,68^{+0,72}_{-0,73}$
	w_0	$-0,548^{+0,589}_{-0,236}$	$-1,178^{+0,148}_{-0,148}$	$-0,855^{+0,110}_{-0,120}$
	w_a	$-3,379^{+2,370}_{-2,317}$	$-0,488^{+1,312}_{-0,340}$	$-1,296^{+0,697}_{-0,623}$

Tabela 4.3: Tabela com os melhores ajustes e erros em 1σ dos modelos Λ CDM, w CDM e CPL encontrados utilizando o conjunto de dados GW, Pantheon+BAO e Pantheon+BAO+GW.

Modelos com interação no setor escuro

Como tínhamos definido no capítulo 3, também trabalhamos com três modelos de interação no setor escuro, que chamamos por simplicidade de modelo 1, 2 e 3. As características principais desses modelos são respectivamente $Q \propto \rho_m$, $Q \propto \rho_\Lambda$ e $Q \propto \dot{\rho}_\Lambda$. Podemos ver os melhores ajustes e erros em 1σ encontrados para os modelos com interação no setor escuro na tabela 4.4. Podemos ver que o modelo 1 e 2 mesmo tendo a mesma quantidade de parâmetros possuem resultados muito diferente. O primeiro modelo, onde a interação é proporcional a densidade de matéria obteve melhores restrições nos parâmetros, obtendo valores até melhores que a parametrização CPL para o H_0 quando utilizamos todos os conjuntos de dados.

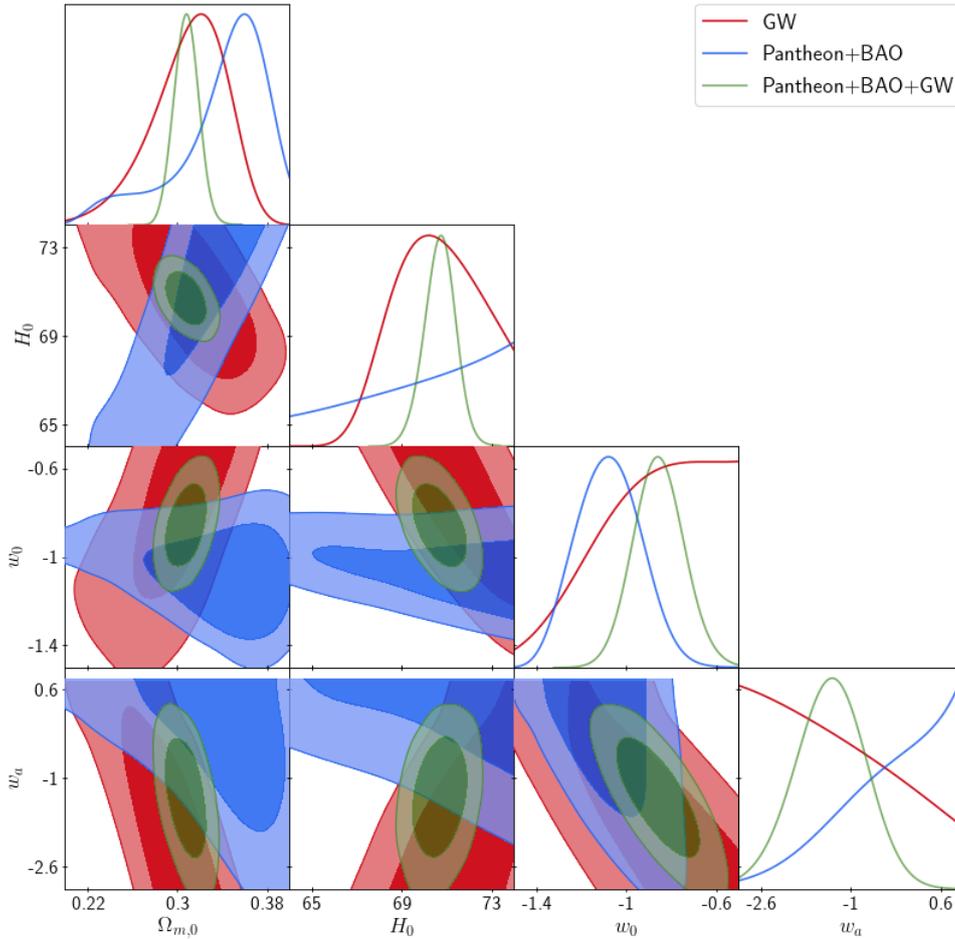


Figura 4.10: Curvas de nível de 68,3% e 95,4% sendo respectivamente a região mais escura e a região mais clara e as posteriores unidimensionais encontradas para a parametrização CPL. Podemos ver as curvas criadas utilizando todos os conjuntos de dados Pantheon+BAO+GW em verde, a curva para o conjunto de dados simulados de ondas gravitacionais em vermelho e a curva para os dados de BAO e supernova do Pantheon em azul.

Todavia, as restrições do parâmetro Ω_m obtidas apenas para o conjunto de GW não foram boas, ao ponto de não conseguirmos encontrar os limites de 68,3% de probabilidade. Fica claro na figura 4.11 como que o conjunto de dados de ondas gravitacionais não restringe bem o parâmetro $\Omega_{m,0}$ e como os dados de Pantheon+BAO não conseguem restringir o parâmetro H_0 , porém os dois conjuntos de dados se completam nesse sentido, e juntos acabam gerando as elipses e gaussianas necessárias para uma boa restrição.

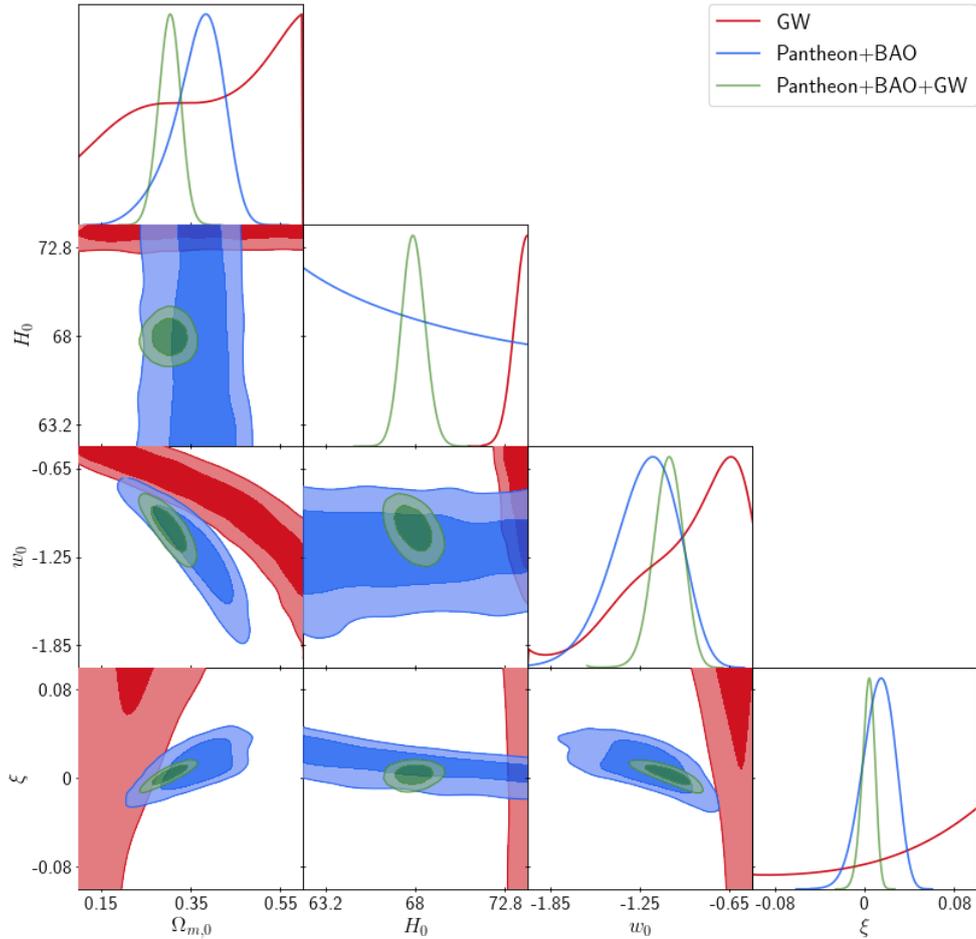


Figura 4.11: Curvas de nível de credibilidade de 68,3% e 95,4% sendo respectivamente a região mais escura e a região mais clara e as posteriores unidimensionais encontradas para o primeiro modelo de interação no setor escuro. Podemos ver as curvas criadas utilizando todos os conjuntos de dados Pantheon+BAO+GW em verde, a curva para o conjunto de dados simulados de ondas gravitacionais em vermelho e a curva para os dados de BAO e supernova do Pantheon em azul.

Já o segundo modelo se mostrou bastante problemático. Não conseguimos obter boas restrições para ele nem mesmo utilizando todos os conjuntos de dados trabalhado. Podemos ver na figura 4.12 que não conseguimos uma boa convergência para as curvas de níveis e as posteriores unidimensionais não formaram distribuições normais em quase as posteriores. Além disso, vemos que as curvas de níveis possuem descontinuidades e isso pode ocorrer devido a limitações físicas do modelo. Todavia, a única restrição que conseguimos, foi para o parâmetro H_0 , utilizando os dados do Pantheon+BAO+GW e teve um erro relativo de $\varepsilon(H_0) = 1,02\%$.

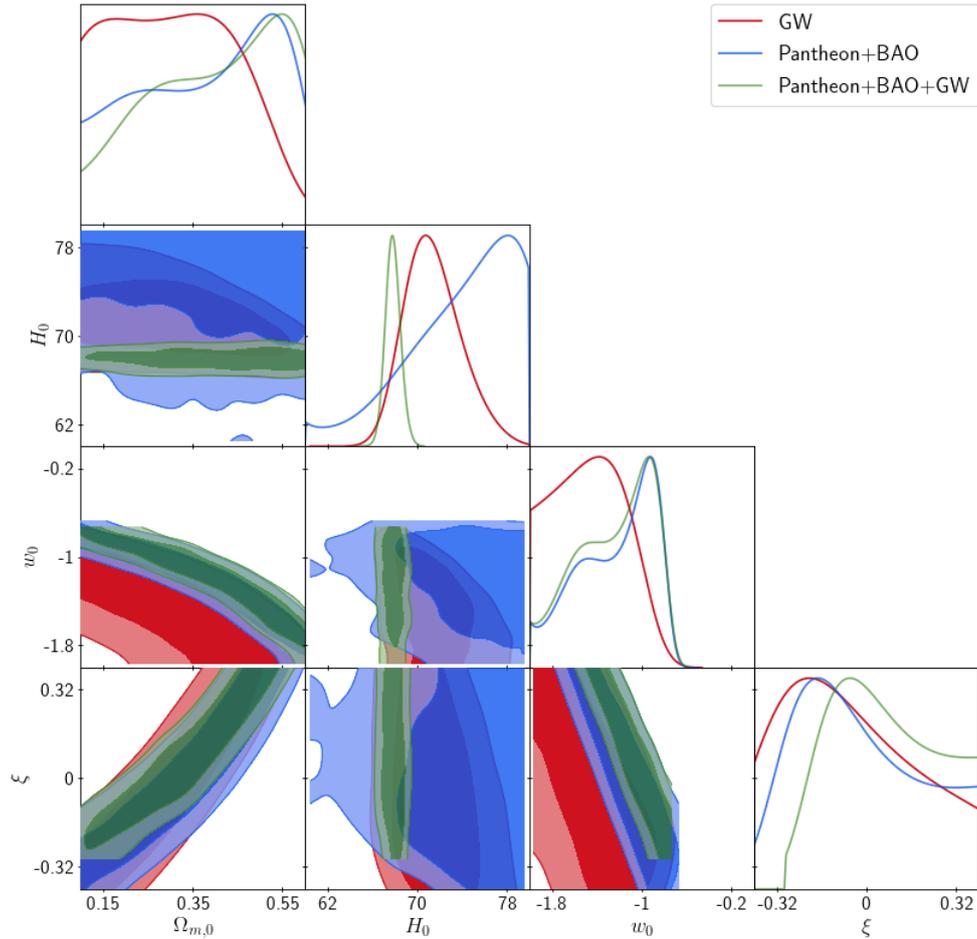


Figura 4.12: Curvas de nível de credibilidade de 68,3% e 95,4% sendo respectivamente a região mais escura e a região mais clara e as posteriores unidimensionais encontradas para o modelo 2 de interação no setor escuro. Podemos ver as curvas criadas utilizando todos os conjuntos de dados Pantheon+BAO+GW em verde, a curva para o conjunto de dados simulados de ondas gravitacionais em vermelho e a curva para os dados de BAO e supernova do Pantheon em azul.

Já no ajuste feito para o terceiro modelo, o modelo referente ao gás de Chaplygin generalizado, obtivemos ótimas restrições do espaço paramétrico em geral, porém o melhor ajuste de alguns parâmetros não foram muito convencionais. Observa-se que quando utilizamos o conjunto de dados de ondas gravitacionais obtivemos um parâmetro de densidade de massa com o valor um pouco abaixo do normal, bem próximo do limite do prior, o que pode ter gerado um erro subestimado. E o parâmetro α obtido também estava bem próximo do limite de restrição $\alpha = 0,926 \pm 0,280$. Quando todos os conjuntos de dados foram utilizados, obtivemos restrições da ordem de 1% para a constante de Hubble, e 10% para o parâmetro de densidade de matéria. Pode-se notar como o conjunto de dados do Pantheon+BAO evidenciam um parâmetro α positivo, o que significa que teríamos aniquilação de

matéria escura e criação de energia escura, embora o valor encontrado do parâmetro seja alto, o que corresponde a um grande desvio do modelo padrão. Contudo o valor encontrado de $\alpha = 0,229 \pm 0,091$ está condizente com o valor $\alpha = 0,2 \pm 0,07$ encontrado no trabalho [24]. Em relação aos outros dois parâmetros os dados de supernova e BAO se comportaram de forma parecida aos outros ajustes. Podemos ver as elipses e gaussianas geradas pelo o ajuste na figura 4.13.

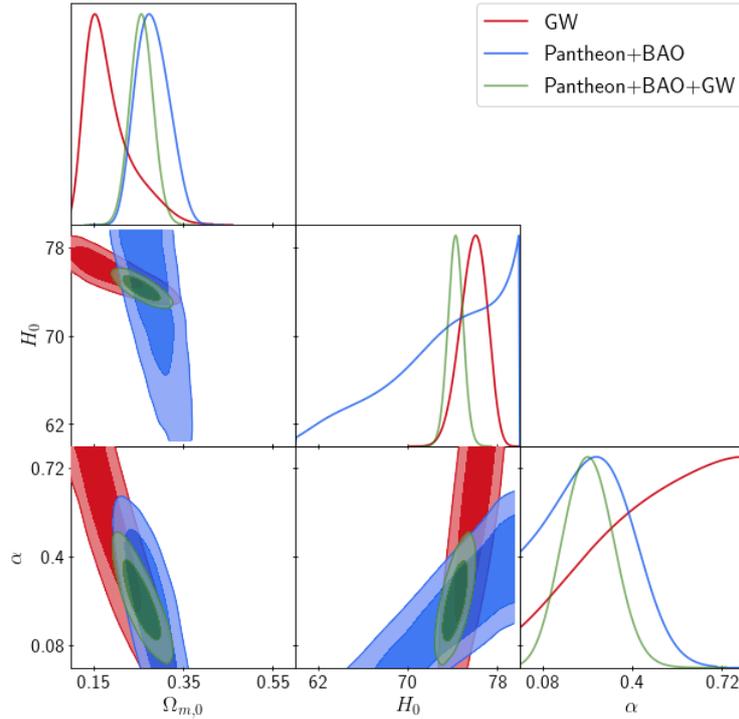


Figura 4.13: Curvas de nível de credibilidade de 68,3% e 95,4% sendo respectivamente a região mais escura e a região mais clara e as posteriores unidimensionais encontradas para o modelo 3 de interação no setor escuro. Podemos ver as curvas criadas utilizando todos os conjuntos de dados Pantheon+BAO+GW em verde, a curva para o conjunto de dados simulados de ondas gravitacionais em vermelho e a curva para os dados de BAO e supernova do Pantheon em azul.

Modelos com interação no setor escuro	Parâmetros	GW	Pantheon+BAO	Pantheon+BAO+GW
modelo 1	$\Omega_{m,0}$	0,577	$0,360^{+0,068}_{-0,044}$	$0,304^{+0,027}_{-0,024}$
	$H_0[Km s^{-1}Mpc^{-1}]$	$74,09^{+0,67}_{-0,87}$	72,47	$67,93^{+0,64}_{-0,64}$
	w_0	$-1,270^{+0,457}_{-0,184}$	$-1,192^{+0,240}_{-0,193}$	$-1,057^{+0,11}_{-0,091}$
	ξ	$0,34^{+0,13}_{-0,08}$	$0,0045^{+0,0148}_{-0,0139}$	$0,0037^{+0,0063}_{-0,0050}$
modelo 2	$\Omega_{m,0}$	$0,23^{+0,13}_{-0,20}$	0,3616	0,4838
	$H_0[Km s^{-1}Mpc^{-1}]$	$71,23^{+2,17}_{-2,90}$	$76,93^{+6,33}_{-1,74}$	$67,88^{+0,71}_{-0,68}$
	w_0	-1,268	$-1,194^{+0,468}_{-0,208}$	-1,357
	ξ	$-0,16^{+0,22}_{-0,41}$	0,0020	0,361
Modelo 3	$\Omega_{m,0}$	$0,125^{+0,028}_{-0,069}$	$0,255^{+0,033}_{-0,039}$	$0,260^{+0,026}_{-0,027}$
	$H_0[Km s^{-1}Mpc^{-1}]$	$76,99^{+1,36}_{-1,03}$	$79,77^{+6,65}_{-1,94}$	$74,17^{+0,70}_{-0,71}$
	α	$0,926^{+0,434}_{-0,125}$	$0,41^{+0,23}_{-0,17}$	$0,229^{+0,083}_{-0,098}$

Tabela 4.4: Tabela com os melhores ajustes e erros em 1σ dos modelos de interação no setor escuro, onde foram utilizados o conjunto de dados GW, Pantheon+BAO e Pantheon+BAO+GW. Em alguns casos não foi possível encontrar o erro nem mesmo em 1σ , então deixamos apenas o melhor ajuste.

Capítulo 5

Conclusões

Em virtude do que foi discutido nesta dissertação, é notável como simulações de ondas gravitacionais podem ajudar a entender o poder de restrição de futuros dados de ondas gravitacionais. O valor obtido por nós para a constante de Hubble e o desvio padrão no modelo Λ CDM foi de $H_0 = 69,59 \pm 0,40 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, o que está da ordem do desvio padrão encontrado pela colaboração do Planck em 2018, $H_0 = 67,36 \pm 0,54 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Além disso, podemos ver que a precisão nesse parâmetro utilizando os conjuntos de dados de BAO e de SN Ia é de $\varepsilon(H_0) = 2,39\%$, e que com o acréscimo dos dados de OG, temos uma melhora considerável, obtendo $\varepsilon(H_0) = 0,58\%$ de precisão. Já o parâmetro de densidade de matéria $\Omega_{m,0}$ não foi tão bem restringido quando ajustamos todos os conjuntos de dados Pantheon+BAO+GW. Como podemos ver, nosso resultado $\Omega_{m,0} = 0,3111 \pm 0,0095$ embora o erro tenha sido ligeiramente maior, está comparável ao do Planck $\Omega_{m,0} = 0,3153 \pm 0,0073$.

Já para o caso dos modelos de energia escura variável, conseguimos encontrar boas restrições ao adicionarmos os dados de ondas gravitacionais aos outros dados do Universo tardio. Em todos os casos, conseguimos uma redução de aproximadamente 9% no erro relativo da constante de Hubble H_0 . Para o caso da equação de estado constante obtivemos um ajuste de $w_0 = -1,017 \pm 0,041$ utilizando o conjunto de dados Pantheon+BAO+GW, enquanto utilizando o conjunto Pantheon+BAO o resultado encontrado foi $w_0 = -1,178 \pm 0,126$, ou seja, vemos uma redução de 1/3 no erro quando comparamos os dois casos. Já para o caso do parâmetro $\Omega_{m,0}$, quando utilizamos todos os conjuntos de dados, conseguimos um $\sigma_{\Omega_{m,0}} = 0,0095$, que é equiparável ao erro obtido no ajuste do modelo cosmológico padrão. Já para a parametrização CPL, a restrição nos parâmetros $\Omega_{m,0}$ e H_0 quando utilizado Pantheon+BAO+GW foram ótimas, no sentido de obtermos um erro próximo ao w CDM e Λ CDM. Já em relação aos parâmetros w_0 e w_a , quando utilizado apenas o conjunto Pantheon+BAO, obtivemos $w_0 = -1,178 \pm 0,148$ e $w_a = -0,488 \pm 0,820$, enquanto para o conjunto em que acrescentamos os dados

de ondas gravitacionais obtivemos $w_0 = -0,855 \pm 0,115$ e $w_a = -1,296 \pm 0,660$. Embora tenhamos conseguido uma melhora nas restrições, não foi tão significativa.

Também foram obtidos bons resultados para os alguns modelos com interação no setor escuro quando acrescentamos os dados simulados às restrições. No primeiro modelo, em que temos $Q \propto \rho_m$, podemos destacar o valor obtido para o parâmetro de interação $\xi = 0,0037 \pm 0,0052$. O valor positivo desse parâmetro evidencia uma conversão de energia escura em matéria escura. Embora o erro em 68,3% obtido tenha sido relativamente alto, o valor do ajuste junto com o erro está dentro do esperado para um bom ajuste desse modelo. Ele está bem próximo do que seria o modelo Λ CDM, onde não teríamos troca de energia entre os fluidos. Percebemos uma melhora considerável nos valores dos erros ao adicionarmos o conjunto GW, onde obtivemos $H_0 = 67,93 \pm 0,64 km s^{-1} Mpc^{-1}$, um valor razoavelmente melhor do que o obtido no caso da parametrização CPL, modelo cujo qual possui a mesma quantidade de parâmetros. Também pudemos ver nas imagens que o conjunto de dados de GW complementou o conjunto Pantheon+BAO, na maioria das vezes, por serem ortogonais um ao outro. Porém o ajuste feito para o modelo 2, onde $Q \propto \rho_\Lambda$ não foi tão bom quanto o primeiro modelo. Podemos ver pela figura 4.12 que as restrições do espaço paramétrico nesse caso não ficaram boas, sendo necessários mais estudos ou acréscimo de dados para entendermos melhor o que está por trás disso. Uma possibilidade também é a de que o modelo de interação pode entrar em domínios não físicos dependendo dos valores dos parâmetros, então deve ser feito um estudo melhor tanto dos *prior's* quanto do próprio modelo. Sendo assim, não pudemos concluir nada desse modelo.

No terceiro modelo com interação no setor escuro, referente a $Q \propto \dot{\rho}_\Lambda$, encontramos boas restrições no espaço paramétrico, tanto utilizando apenas o conjunto de ondas gravitacionais simulados, quanto para os outros conjuntos de dados. Entretanto, o melhor ajuste obtidos para GW, foram um pouco incomuns, sendo $\Omega_{m,0} = 0,125 \pm 0,049$ e $\alpha = 0,926 \pm 0,280$ valores muito distantes do esperado Λ CDM. Mesmo assim, quando acrescentados ao conjuntos e dados de super nova e oscilações acústica de bárions a restrição na constante de Hubble foi de $H_0 = 74,17 \pm 0,71 km s^{-1} Mpc^{-1}$, o que está aproximadamente próximo às restrições nos outros modelos utilizando os três conjuntos. Já para o parâmetro $\Omega_{m,0}$, obtivemos um erro relativamente alta, da ordem de 10%, o que não ocorreu com os modelos de energia escura variável. Outro ponto notável é que o melhor ajuste do parâmetro $\alpha = 0,229 \pm 0,091$, teve o erro melhorado consideravelmente em relação ao ajuste utilizando os conjuntos Pantheon+BAO, que foi de $\alpha = 0,41 \pm 0,20$. E o seu valor positivo neste caso evidencia um $Q < 0$, que seria um modelo em que teria decaimento de matéria escura em energia escura.

Sob este prisma, podemos concluir que as simulações de ondas gravitacionais

foram bem sucedidas em restringir melhor o espaço paramétrico de quase todos os modelos trabalhado, logo, o processo de estudo criação dos dados simulados também foi bem sucedido. O problema, no segundo modelo de interação no setor escuro, pode ser tanto de origem teórica quanto computacional, sendo necessário mais estudos sobre para uma melhor análise. Mas, em geral, notamos que embora ainda não tenhamos dados advindos de ondas gravitacionais em quantidade suficientemente grande para obtermos bons resultados, os dados simulados para o Einstein Telescope possuem bastante potencial para trabalhos de prognóstico. Sendo possível então obtenção de restrições tão boas quanto das de dados da RCF, apenas utilizando dados advindos do Universo tardio.

Referências Bibliográficas

- [1] Charles W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco, 1973.
- [2] Michele Maggiore. *Gravitational Waves. Vol. 1: Theory and Experiments*. Oxford Master Series in Physics. Oxford University Press, 2007.
- [3] <https://www.ligo.org/science/gw-overview/images/inspiral.jpg>. acesso em 17 ago. 2021.
- [4] Edwin Hubble. A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 15:168–173, 1929.
- [5] J. B. Hartle. *An introduction to Einstein's general relativity*. 2003.
- [6] Scott Dodelson. *Modern Cosmology*. Academic Press, Amsterdam, 2003.
- [7] S. Burles, K. M. Nollett, and Michael S. Turner. Deuterium and big bang nucleosynthesis. *Nucl. Phys. A*, 663:861c–864c, 2000.
- [8] Licia Verde, Tommaso Treu, and Adam G. Riess. Tensions between the early and late universe. *Nature Astronomy*, 3(10):891–895, Sep 2019.
- [9] <http://www.et-gw.eu/>. acesso em 17 ago. 2021.
- [10] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, and Brian P. Flannery. Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing. 9 1992.
- [11] N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini, A. J. Banday, R. B. Barreiro, N. Bartolo, and et al. Planck 2018 results. *Astronomy Astrophysics*, 641:A6, Sep 2020.
- [12] D. M. Scolnic, D. O. Jones, A. Rest, Y. C. Pan, R. Chornock, R. J. Foley, M. E. Huber, R. Kessler, G. Narayan, A. G. Riess, and et al. The complete light-curve sample of spectroscopically confirmed sne ia from pan-starrs1 and cosmological constraints from the combined pantheon sample. *The Astrophysical Journal*, 859(2):101, May 2018.

- [13] Adam G. Riess, Stefano Casertano, Wenlong Yuan, Lucas M. Macri, and Dan Scolnic. Large magellanic cloud cepheid standards provide a 1the determination of the hubble constant and stronger evidence for physics beyond cdm. *The Astrophysical Journal*, 876(1):85, May 2019.
- [14] B.P. Abbott, R. Abbott, T.D. Abbott, M.R. Abernathy, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R.X. Adhikari, and et al. Gw150914: First results from the search for binary black hole coalescence with advanced ligo. *Physical Review D*, 93(12), Jun 2016.
- [15] Bernard F. Schutz. Determining the Hubble Constant from Gravitational Wave Observations. *Nature*, 323:310–311, 1986.
- [16] Eleonora Di Valentino, Olga Mena, Supriya Pan, Luca Visinelli, Weiqiang Yang, Alessandro Melchiorri, David F Mota, Adam G Riess, and Joseph Silk. In the realm of the hubble tension—a review of solutions *. *Classical and Quantum Gravity*, 38(15):153001, Jul 2021.
- [17] Jing-Fei Zhang, Ming Zhang, Shang-Jie Jin, Jing-Zhao Qi, and Xin Zhang. Cosmological parameter estimation with future gravitational wave standard siren observation from the Einstein Telescope. *JCAP*, 09:068, 2019.
- [18] B.P. Abbott, R. Abbott, T.D. Abbott, S. Abraham, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, R.X. Adhikari, V.B. Adya, C. Affeldt, and et al. Gwtc-1: A gravitational-wave transient catalog of compact binary mergers observed by ligo and virgo during the first and second observing runs. *Physical Review X*, 9(3), Sep 2019.
- [19] R. Abbott, T.D. Abbott, S. Abraham, F. Acernese, K. Ackley, A. Adams, C. Adams, R.X. Adhikari, V.B. Adya, C. Affeldt, and et al. Gwtc-2: Compact binary coalescences observed by ligo and virgo during the first half of the third observing run. *Physical Review X*, 11(2), Jun 2021.
- [20] B.P. Abbott, R. Abbott, T.D. Abbott, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R.X. Adhikari, V.B. Adya, and et al. Gw170817: Observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. *Physical Review Letters*, 119(16), Oct 2017.
- [21] Rong-Gen Cai and Tao Yang. Estimating cosmological parameters by the simulated data of gravitational waves from the einstein telescope. *Physical Review D*, 95(4), Feb 2017.
- [22] Eric V. Linder. Exploring the expansion history of the universe. *Physical Review Letters*, 90(9), Mar 2003.

- [23] Sebastian Linden and Jean-Marc Virey. Test of the chevallier-polarski-linder parametrization for rapid dark energy equation of state transitions. *Physical Review D*, 78(2), Jul 2008.
- [24] Micol Benetti, Humberto Borges, Cassio Pigozzo, Saulo Carneiro, and Jailson Alcaniz. Dark sector interactions and the curvature of the universe in light of planck’s 2018 data, 2021.
- [25] Riis R.A. Bachega, André A. Costa, E. Abdalla, and K.S.F. Fornazier. Forecasting the interaction in dark matter-dark energy models with standard sirens from the einstein telescope. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2020(05):021–021, May 2020.
- [26] Bharat Ratra and P. J. E. Peebles. Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field. *Phys. Rev. D*, 37:3406–3427, Jun 1988.
- [27] Suresh Kumar, Rafael C. Nunes, and Santosh Kumar Yadav. Dark sector interaction: a remedy of the tensions between cmb and lss data. *The European Physical Journal C*, 79(7), Jul 2019.
- [28] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley and Sons, New York, 1972.
- [29] Thomas W. Baumgarte and Stuart L. Shapiro. *Numerical Relativity: Solving Einstein’s Equations on the Computer*. Cambridge University Press, 2010.
- [30] T. P. Cheng. *Relativity, gravitation, and cosmology: A basic introduction*. Oxford Univ. Pr., Oxford, UK, 2010.
- [31] Menon Márcio José Cyrillo, Márcio e José. Expansão Multipolar do Potencial Eletrostático e a definição do Momento de Quadrupolo. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 18(3):155–163, 1996.
- [32] Tjonnie Guang Feng Li. *Extracting Physics from Gravitational Waves: Testing the Strong-field Dynamics of General Relativity and Inferring the Large-scale Structure of the Universe*. PhD thesis, Vrije U., Amsterdam, 2013.
- [33] R S Gonçalves, G C Carvalho, C A P Bengaly Jr, J C Carvalho, A Bernui, J S Alcaniz, and R Maartens. Cosmic homogeneity: a spectroscopic and model-independent measurement. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 475(1):L20–L24, Dec 2017.
- [34] Rodrigo S. Gonçalves, Gabriela C. Carvalho, Uendert Andrade, Carlos A.P. Bengaly, Joel C. Carvalho, and Jailson Alcaniz. Measuring the cosmic

homogeneity scale with sdss-iv dr16 quasars. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2021(03):029, Mar 2021.

- [35] <https://www.iau.org/news/pressreleases/detail/iau1812/>. acesso em 17 ago. 2021.
- [36] Cormac O’Raifeartaigh, Michael O’Keeffe, Werner Nahm, and Simon Mitton. Einstein’s 1917 static model of the universe: a centennial review. *The European Physical Journal H*, 42(3):431–474, Jul 2017.
- [37] Adam G. Riess, Alexei V. Filippenko, Peter Challis, Alejandro Clocchiatti, Alan Diercks, Peter M. Garnavich, Ron L. Gilliland, Craig J. Hogan, Saurabh Jha, Robert P. Kirshner, and et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, 116(3):1009–1038, Sep 1998.
- [38] P. J. E. Peebles and Bharat Ratra. The cosmological constant and dark energy. *Reviews of Modern Physics*, 75(2):559–606, Apr 2003.
- [39] Thomas P. Sotiriou and Valerio Faraoni. $f(r)$ theories of gravity. *Rev. Mod. Phys.*, 82:451–497, Mar 2010.
- [40] Alexander Kamenshchik, Ugo Moschella, and Vincent Pasquier. An alternative to quintessence. *Physics Letters B*, 511(2-4):265–268, Jul 2001.
- [41] Tsuyoshi Nishioka. Decaying cosmological constant and cosmology. Other thesis, 1 1992.
- [42] Y. Fukuda et al. Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos. *Phys. Rev. Lett.*, 81:1562–1567, 1998.
- [43] Guido Fantini, Andrea Gallo Rosso, Francesco Vissani, and Vanessa Zema. The formalism of neutrino oscillations: an introduction, 2020.
- [44] Steven Weinberg. *Cosmology*. 2008.
- [45] R.S. Gonçalves, J.S. Alcaniz, J.C. Carvalho, and R.F.L. Holanda. Forecasting constraints on the cosmic duality relation with galaxy clusters. *Physical Review D*, 91(2), Jan 2015.
- [46] A. De Felice, T. Nakamura, and T. Tanaka. Possible existence of viable models of bi-gravity with detectable graviton oscillations by gravitational wave detectors. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2014(4):43E01–0, Apr 2014.

- [47] Emilio Bellini and Ignacy Sawicki. Maximal freedom at minimum cost: linear large-scale structure in general modifications of gravity. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2014(07):050–050, Jul 2014.
- [48] Xian Gao and Xun-Yang Hong. Propagation of gravitational waves in a cosmological background. *Physical Review D*, 101(6), Mar 2020.
- [49] T. Baker, E. Bellini, P.G. Ferreira, M. Lagos, J. Noller, and I. Sawicki. Strong constraints on cosmological gravity from gw170817 and grb 170817a. *Physical Review Letters*, 119(25), Dec 2017.
- [50] D. J. Fixsen, E. S. Cheng, J. M. Gales, J. C. Mather, R. A. Shafer, and E. L. Wright. The cosmic microwave background spectrum from the fullcoBEIRAS data set. *The Astrophysical Journal*, 473(2):576–587, Dec 1996.
- [51] Shadab Alam, Metin Ata, Stephen Bailey, Florian Beutler, Dmitry Bizyaev, Jonathan A. Blazek, Adam S. Bolton, Joel R. Brownstein, Angela Burden, Chia-Hsun Chuang, and et al. The clustering of galaxies in the completed sdss-iii baryon oscillation spectroscopic survey: cosmological analysis of the dr12 galaxy sample. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 470(3):2617–2652, Mar 2017.
- [52] Michael Boylan-Kolchin, Volker Springel, Simon D. M. White, Adrian Jenkins, and Gerard Lemson. Resolving cosmic structure formation with the millennium-ii simulation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 398(3):1150–1164, Sep 2009.
- [53] Joop Schaye, Robert A. Crain, Richard G. Bower, Michelle Furlong, Matthieu Schaller, Tom Theuns, Claudio Dalla Vecchia, Carlos S. Frenk, I. G. McCarthy, John C. Helly, and et al. The eagle project: simulating the evolution and assembly of galaxies and their environments. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 446(1):521–554, Nov 2014.
- [54] David N. Spergel and Paul J. Steinhardt. Observational evidence for self-interacting cold dark matter. *Physical Review Letters*, 84(17):3760–3763, Apr 2000.
- [55] Jürg Diemand and Ben Moore. The structure and evolution of cold dark matter halos. *Advanced Science Letters*, 4(2):297–310, Feb 2011.
- [56] Rudolf Kippenhahn, Alfred Weigert, and Achim Weiss. *Stellar structure and evolution*, volume 9783642303043. Springer, 8 2012.

- [57] Ashley J. Ruiter. Type ia supernova sub-classes and progenitor origin. *Proceedings of the International Astronomical Union*, 15(S357):1–15, Oct 2019.
- [58] Daniel J. Eisenstein, Idit Zehavi, David W. Hogg, Roman Scoccimarro, Michael R. Blanton, Robert C. Nichol, Ryan Scranton, Hee-Jong Seo, Max Tegmark, Zheng Zheng, and et al. Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of sdss luminous red galaxies. *The Astrophysical Journal*, 633(2):560–574, Nov 2005.
- [59] P. D’Avanzo. Short gamma ray bursts: A review. *Journal of High Energy Astrophysics*, 7, 07 2015.
- [60] EDMUND J. COPELAND, M. SAMI, and SHINJI TSUJIKAWA. Dynamics of dark energy. *International Journal of Modern Physics D*, 15(11):1753–1935, Nov 2006.
- [61] Adam G. Riess. The expansion of the universe is faster than expected. *Nature Reviews Physics*, 2(1):10–12, Dec 2019.
- [62] MICHEL CHEVALLIER and DAVID POLARSKI. Accelerating universes with scaling dark matter. *International Journal of Modern Physics D*, 10(02):213–223, Apr 2001.
- [63] M. Benetti, W. Miranda, H.A. Borges, C. Pigozzo, S. Carneiro, and J.S. Alcaniz. Looking for interactions in the cosmological dark sector. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2019(12):023–023, Dec 2019.
- [64] R. F. vom Marttens, L. Casarini, W. Zimdahl, W. S. Hipólito-Ricaldi, and D. F. Mota. Does a generalized chaplygin gas correctly describe the cosmological dark sector?, 2017.
- [65] W. Zhao, C. Van Den Broeck, D. Baskaran, and T. G. F. Li. Determination of dark energy by the einstein telescope: Comparing with cmb, bao, and snia observations. *Physical Review D*, 83(2), Jan 2011.
- [66] J. Abadie, B.P. Abbott, R. Abbott, M. Abernathy, C. Adams, R. Adhikari, P. Ajith, B. Allen, G. Allen, E. Amador Ceron, and et al. Calibration of the ligo gravitational wave detectors in the fifth science run. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 624(1):223–240, Dec 2010.
- [67] J Abadie, B P Abbott, R Abbott, M Abernathy, T Accadia, F Acernese, C Adams, R Adhikari, P Ajith, B Allen, and et al. Predictions for the rates

of compact binary coalescences observable by ground-based gravitational-wave detectors. *Classical and Quantum Gravity*, 27(17):173001, Jul 2010.

- [68] R. Schneider, V. Ferrari, S. Matarrese, and S. F. Portegies Zwart. Low-frequency gravitational waves from cosmological compact binaries. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 324(4):797–810, Jul 2001.
- [69] Roberto Trotta. Bayesian methods in cosmology, 2017.
- [70] Udo Toussaint. Bayesian inference in physics. *Reviews of Modern Physics - REV MOD PHYS*, 83:943–999, 09 2011.
- [71] Benjamin Audren, Julien Lesgourgues, Karim Benabed, and Simon Prunet. Conservative Constraints on Early Cosmology: an illustration of the Monte Python cosmological parameter inference code. *JCAP*, 1302:001, 2013.
- [72] Dootika Vats and Christina Knudson. Revisiting the gelman-rubin diagnostic, 2020.
- [73] Julien Lesgourgues. The cosmic linear anisotropy solving system (class) i: Overview, 2011.