



Observatório
Nacional

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

TESTE DO PRINCÍPIO COSMOLÓGICO UTILIZANDO RECONSTRUÇÕES
NÃO-PARAMÉTRICAS

MARIANA LOPES DA SILVA DIAS

RIO DE JANEIRO

2024

Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações

Observatório Nacional

Programa de Pós-Graduação

Dissertação de Mestrado

TESTE DO PRINCÍPIO COSMOLÓGICO UTILIZANDO RECONSTRUÇÕES
NÃO-PARAMÉTRICAS

por

Mariana Lopes da Silva Dias

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação em Astronomia do Observatório Nacional, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestre em Astronomia.

Orientador: Dr. Carlos Bengaly

Rio de Janeiro, RJ – Brasil

Agosto de 2024

L837

Lopes da Silva Dias, Mariana

Teste do Princípio Cosmológico utilizando reconstruções não-paramétricas [Rio de Janeiro] 2024.

xii, 48 p. 29,7 cm: graf. il.

Dissertação (mestrado) - Observatório Nacional - Rio de Janeiro, 2024.

1. Princípio Cosmológico. 2. Parâmetro de Curvatura. 3. Observações Cosmológicas. 4. Supernovas tipo Ia. I. Observatório Nacional. II. Título.

CDU 000.000.000

“TESTE DO PRINCÍPIO COSMOLÓGICO UTILIZANDO RECONSTRUÇÕES
NÃO-PARAMÉTRICAS”

MARIANA LOPES DA SILVA DIAS

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ASTRONOMIA DO OBSERVATÓRIO NACIONAL COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ASTRONOMIA.

Aprovada por:

Dr. Carlos Bengaly – Observatório Nacional
(Orientador)

Dra. Clarissa Siqueira – IFSC/USP

Dr. Ribamar Rondon de Rezende dos Reis – UFRJ

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

16 DE AGOSTO DE 2024

Eles não aguentam te ver livre,
imagina te ver rei. (Emicida)

Agradecimentos

Esta dissertação é fruto de dois anos de trabalho, que se tornou possível pela ajuda de pessoas extremamente importantes, as quais agradeço:

Primordialmente, à minha mãe, Elizabeth, que não deixa de acreditar em mim em nenhum momento.

Aos meus tios Vera Regina, Maria Ivone, Oswaldo (*in memoriam*) e Irene (*in memoriam*), que desde sempre me incentivaram a seguir no caminho que escolhi.

Ao meu orientador Carlos Bengaly, que de longe, foi o melhor orientador que eu poderia ter. Por toda dedicação, atenção, cuidado e paciência comigo; por responder minhas mensagens desesperadas independente do horário, e principalmente, por me mostrar que a Academia, às vezes, pode ser um ambiente cortês. Agradeço também, aos parceiros de trabalho Rodrigo Gonçalves e Antônio Cunha, pelo apoio e dedicação ao nosso trabalho.

À Christiane Garnier, que sempre torna o ambiente de trabalho um lugar mais confortável, cuidando de todos como se fosse da família. E, de fato, acabei ganhando uma família na Casa Branca - dizem que são os amigos que fazemos pelo caminho. Agradeço à Dinorah, Fernanda, Jonatã, Ester, Ayslana, Karyne, Thiago, Madalena, Bruno, Sousa, Jaiane, Shao, José Wesley e Juan.

Em especial, agradeço ao Rodolpho e às amigas da sala 05, Ellen e Thaís, por aturarem minhas reclamações diárias, estudarem comigo (e também fofocar), por toda preocupação, cuidado e carinho que vocês têm comigo.

Aos meus amigos que permanecem ao meu lado desde que eu estava aprendendo a calcular integrais, Yngrid e Dayvid. Não teria chegado até aqui sem vocês. E que bom que cheguei aqui junto com vocês!

Aos amigos, Thamires, Daiane, Gabriel, Ana Beatriz, Keyla, Marianne e Thiago Garbrig, que mesmo longe seguem me apoiando.

Ao cachorro mais lindo do mundo, Kepler, por sempre trazer alegria em todo e qualquer momento.

Ao apoio emocional da Casa Branca, Tangerina, por todo amor que um gato é capaz de dar.

À CAPES, pelo apoio financeiro por meio da bolsa de mestrado concedida durante este período de dois anos.

A todos, muito obrigada!

Mariana Lopes da Silva Dias

TESTE DO PRINCÍPIO COSMOLÓGICO UTILIZANDO RECONSTRUÇÕES
NÃO-PARAMÉTRICAS

RESUMO

Este trabalho tem como principal objetivo realizar um teste de consistência do Princípio Cosmológico, uma das hipóteses fundamentais do Modelo Cosmológico Padrão. Tal princípio postula que o Universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas, e, ao testá-lo, acaba-se por revisar os fundamentos do Modelo Cosmológico Padrão. Através de uma relação de consistência entre medidas de idades de galáxias e distâncias cosmológicas, verificamos neste trabalho se há evolução em *redshift* do parâmetro de curvatura, Ω_k . Em caso de encontrarmos que Ω_k não é constante, temos evidência de desvio da hipótese da homogeneidade, e por consequência, não temos consistência do Princípio Cosmológico. Utilizamos uma compilação de medidas de distâncias de Supernovas do tipo Ia da colaboração Pantheon+SH0ES, e uma compilação de medidas do parâmetro de Hubble, $H(z)$, obtidos via idade de galáxias e oscilações acústicas bariônicas, para realizar o cálculo de Ω_k . Por meio de reconstruções não-paramétricas via Processos Gaussianos, mostramos que não há evolução significativa do parâmetro de curvatura, Ω_k , em função do *redshift*, e que existe concordância com o Modelo Cosmológico Padrão. Contudo, as incertezas de nossas análises ainda são bastante elevadas. Mostramos também que estas incertezas podem ser reduzidas significativamente através de simulações de levantamentos de dados de *redshift*, bem como ondas gravitacionais.

Mariana Lopes da Silva Dias

TESTING THE COSMOLOGICAL PRINCIPLE USING NON-PARAMETRIC
RECONSTRUCTIONS

ABSTRACT

This work aims to conduct a consistency test of the Cosmological Principle, one of the fundamental hypotheses of the Standard Cosmological Model. This principle postulates that the Universe is homogeneous and isotropic on large scales. By testing it, we end up reviewing the foundations of the Standard Cosmological Model. Through a consistency relationship between measurements of ages and cosmological distances, we verify, in this work, whether there is evolution in the redshift of the curvature parameter, Ω_k . If we find that Ω_k is not constant, we have evidence of a deviation from the homogeneity hypothesis and, consequently, there is no consistency with the Cosmological Principle. We use a compilation of distance measurements from type Ia Supernovae from the Pantheon+SH0ES collaboration and a compilation of Hubble parameter measurements, $H(z)$, obtained by galaxy ages and baryon acoustic oscillations, to calculate Ω_k . Through non-parametric reconstructions via Gaussian Processes, we show that there is no significant evolution of the curvature parameter, Ω_k , as a function of redshift, and that there is in agreement with the Standard Cosmological Model. However, the uncertainties in our analyses are still quite high. We also show that these uncertainties can be significantly reduced through simulations of redshift survey data, as well as gravitational waves.

Lista de Figuras

2.1	Diagrama de propagação da luz ao longo do cone de luz passado. Este diagrama ilustra o que pode ser observado hoje em uma superfície de tempo constante no presente. A linha curva representa o caminho da luz desde sua emissão até sua detecção, delimitando nosso cone de luz passado. Quanto mais distante o evento, mais tempo a luz levou para nos alcançar, permitindo-nos observar o universo em diferentes épocas passadas de sua história (Adaptado de CLARKSON (2012)).	4
2.2	Diagrama de Hubble, velocidade <i>versus</i> distância. Gráfico que apresenta as observações de Hubble dos objetos astronômicos os quais chamou de nebulosas extragalácticas, apresentando uma relação entre as distâncias e suas respectivas velocidades radiais (HUBBLE, 1929).	7
2.3	Evolução dos valores da constante de Hubble, H_0 vs tempo. Revisões na escala de distância original feita por Hubble mostram mudanças significativas no valor da constante de Hubble com o passar dos anos. A partir da década de 90 houve uma estabilização, e atualmente seu valor varia entre 60 e 80 km/s/Mpc (KIRSHNER, 2004).	8
2.4	Caption for LOF	8
2.5	Evolução da densidade de energia de cada componente material do Universo ao longo do tempo. O gráfico ilustra as diferentes eras dominadas por radiação, matéria e energia escura. A era dominada pela radiação se estende desde o Big Bang até aproximadamente $z \approx 3300$, a era dominada pela matéria ocorre entre $3300 > z > 0.3$, e a era da energia escura prevalece para $z < 0.3$, abrangendo os últimos 6 bilhões de anos. Além disso, vemos a representação da densidade de radiação na curva em azul, da densidade de matéria em rosa, e da densidade de energia na curva em verde. (PACUCCI, 2016).	16
2.6	Diagrama de Hubble da colaboração Pantheon+ apresentando módulo de distância versus <i>redshift</i> de supernovas tipo Ia. A partir de dados deste tipo é utilizada a relação (2.43) para o cálculo de distâncias. Cada cor representa um compilado de dados e a linha tracejada em cinza é a tendência prevista por Hubble (BROUT <i>et al.</i> , 2022).	20

2.7	Mapa de anisotropia de temperatura da Radiação C3smica de Fundo da Colabora33o Planck (PLANCK COLLABORATION <i>et al.</i> , 2020).	21
2.8	Espectro de Pot4ncias de Temperaturas da Colabora33o Planck (PLANCK COLLABORATION <i>et al.</i> , 2020).	21
2.9	Fun33o de correla33o de 2 pontos de gal33xias utilizando dados do SDSS (do ingl4s, <i>Sloan Digital Sky Survey</i>). Destaque mostrando o pico das Oscila33es Ac3sticas de B3rions, que 4 a escala de horizonte ac3stico. (EISENSTEIN <i>et al.</i> , 2005)	22
2.10	Par3metros de Hubble, $H(z)$, medidos com m4todo de cron3metros c3smicos versus <i>redshift</i> (MORESCO <i>et al.</i> , 2022).	23
2.11	Constante de Hubble, H_0 , inferida a partir da onda gravitacional GW170817 (WANG <i>et al.</i> , 2023), representada pela curva em vermelho. Observa-se uma barra de incerteza alta para tal medi33o, que 4 ocasionada por conta de ter apenas uma onda gravitacional sendo utilizada para o c3lculo da constante de Hubble. Representado em outras cores, temos diferentes medi33es da mesma constante, H_0 , para comparativo.	24
3.1	$H(z)$ reconstru3do a partir de Processos Gaussianos com dados de MAGAÑA <i>et al.</i> (2018).	30
4.1	Par3metro de Hubble versus <i>redshift</i> . Reconstru3o dos dados de cron3metros c3smicos da refer4ncia BENGALY <i>et al.</i> (2023) a partir de Processos Gaussianos.	33
4.2	M3dulo de dist3ncia versus <i>redshift</i> . Reconstru3o dos dados de supernovas de tipo Ia da colabora33o Pantheon+SH0ES (BROUT <i>et al.</i> , 2022; RIESS <i>et al.</i> , 2022; SCOLNIC <i>et al.</i> , 2022) a partir de Processos Gaussianos.	33
4.3	Derivadas do par3metro de Hubble ao longo do <i>redshift</i> . No painel esquerdo observa-se a primeira derivada, $H'(z)$, e no painel direito observa-se a segunda derivada, $H''(z)$. Reconstru33es feitas a partir dos dados de BENGALY <i>et al.</i> (2023).	34
4.4	Derivadas do m3dulo de dist3ncia ao longo do <i>redshift</i> . No painel esquerdo observa-se a primeira derivada, μ' , e no painel direito observa-se a segunda derivada, μ'' . Reconstru33es feitas a partir dos dados de BROUT <i>et al.</i> (2022); RIESS <i>et al.</i> (2022); SCOLNIC <i>et al.</i> (2022).	34
4.5	Evolu33o de Ω_k ao longo do <i>redshift</i> a partir da reconstru33es de dados atuais. Em destaque uma 3rea ampliada no intervalo de <i>redshift</i> $0 < z < 1.0$	35
4.6	Par3metro de Hubble ao longo do <i>redshift</i> . Reconstru3o por Processos Gaussianos a partir de dados simulados da colabora33o J-PAS (APARICIO RESCO <i>et al.</i> , 2020; BENITEZ <i>et al.</i> , 2014).	36

4.7	Distância luminosa ao longo do <i>redshift</i> . Reconstrução por Processos Gaussianos a partir de dados simulados da colaboração LIGO (ABBOTT <i>et al.</i> , 2019, 2021).	37
4.8	Distância luminosa ao longo do <i>redshift</i> . Reconstrução por Processos Gaussianos a partir de dados simulados da colaboração ET (BRANCHESI <i>et al.</i> , 2023).	37
4.9	Derivadas do parâmetro de Hubble ao longo do <i>redshift</i> utilizando reconstruções de dados simulados do J-PAS (APARICIO RESCO <i>et al.</i> , 2020; BENITEZ <i>et al.</i> , 2014). No painel esquerdo observa-se a primeira derivada, $H'(z)$, e no painel direito observa-se a segunda derivada, $H''(z)$	38
4.10	Derivadas da distância de luminosidade ao longo do <i>redshift</i> utilizando reconstruções de dados simulados do LIGO (ABBOTT <i>et al.</i> , 2019, 2021). No painel esquerdo observa-se a primeira derivada, d'_L , e no painel direito observa-se a segunda derivada, d''_L	38
4.11	Derivadas da distância de luminosidade ao longo do <i>redshift</i> utilizando reconstruções de dados simulados do ET (BRANCHESI <i>et al.</i> , 2023). No painel esquerdo observa-se a primeira derivada, d'_L , e no painel direito observa-se a segunda derivada, d''_L	39
4.12	Evolução de Ω_k com reconstruções dos dados simulados do J-PAS (APARICIO RESCO <i>et al.</i> , 2020; BENITEZ <i>et al.</i> , 2014) e LIGO (ABBOTT <i>et al.</i> , 2019, 2021).	39
4.13	Evolução de Ω_k com reconstruções dos dados simulados do J-PAS (APARICIO RESCO <i>et al.</i> , 2020; BENITEZ <i>et al.</i> , 2014) e ET (BRANCHESI <i>et al.</i> , 2023).	40
4.14	Evolução de Ω_k com dados do Pantheon+SH0ES combinados com reconstruções dos dados simulados do LIGO, e dados de Bengaly.	41
4.15	Evolução de Ω_k com dados do Pantheon+SH0ES combinados com dados simulados do J-PAS. Em destaque uma área ampliada no intervalo de <i>redshift</i> $0 < z < 1.0$	41

Sumário

Lista de Figuras	ix
1 Introdução	1
2 Modelo Cosmológico Padrão	3
2.1 Geometria do Espaço-Tempo	4
2.2 Expansão do Universo	6
2.2.1 Lei de Hubble	6
2.2.2 <i>Redshift</i>	9
2.3 Dinâmica	10
2.3.1 Parâmetros Cosmológicos	13
2.3.2 Medidas de Distâncias Cosmológicas	16
2.4 Observáveis Cosmológicos	19
3 Metodologia	25
3.1 Testes Ω_k	25
3.2 Processos Gaussianos	29
4 Resultados	32
4.1 Dados atuais	32
4.2 Simulações de Dados Futuros	36
4.2.1 Testes com Simulações	40
5 Conclusões	42
Referências Bibliográficas	43
A Cosmografia	48

Capítulo 1

Introdução

O Modelo Cosmológico Padrão conhecido como modelo Λ CDM (*Lambda Cold Dark Matter*), tem sido dominante desde o final da década de 1990 (PERLMUTTER *et al.*, 1999; RIESS *et al.*, 1998). Este modelo descreve um Universo composto por aproximadamente 5% de matéria bariônica, ou seja, matéria feita de prótons, elétrons e nêutrons, sendo diretamente observável; 25% de matéria escura fria, que é uma componente que interage gravitacionalmente, governando a formação de estruturas e a dinâmica das galáxias, contudo não é observável diretamente e tem a sua natureza física ainda desconhecida; enquanto os demais 70% de seu conteúdo corresponde à energia escura, uma forma exótica de energia responsável pela aceleração cósmica nos últimos 3-4 bilhões de anos, tendo como melhor candidata a Constante Cosmológica, Λ , uma componente ainda não compreendida por completo (RYDEN, 2017).

Observações recentes como a radiação cósmica de fundo de PLANCK COLLABORATION *et al.* (2020) e a distância de luminosidade de supernovas do tipo Ia de SCOLNIC *et al.* (2018) confirmam com alta precisão que o Λ CDM é o modelo mais adequado para descrever os dados observacionais, assim o estabelecendo como o Modelo Cosmológico Padrão. No entanto, persistem desafios teóricos não resolvidos, como os problemas da singularidade primordial¹ e da coincidência cósmica². Além disso, existem tensões significativas nas medidas de certos parâmetros cosmológicos, destacando-se a discrepância de $\sim 5.0 \sigma$ no parâmetro de Hubble H_0 , obtida através de observações no Universo próximo por meio de supernovas de tipo Ia e a determinação primordial pela radiação cósmica de fundo (DI VALENTINO *et al.*, 2021; RIESS *et al.*, 2022; SHAH *et al.*, 2021). Portanto, é crucial testar e reexaminar os fundamentos do Modelo Cosmológico Padrão. Qualquer desvio estatisticamente significativo de suas previsões poderia indicar a necessidade de uma nova física e exigir uma revisão profunda de nosso entendimento cosmológico.

¹Se refere à um instante de tempo em que a densidade e a temperatura do Universo tendem à infinito. Geralmente associado à origem do Universo.

²Se refere ao fato das energia e matéria escuras terem a mesma ordem de magnitude de suas densidades atualmente, mesmo que cada uma delas evolua de forma contrária.

Para verificar a hipótese de desvio do Modelo Cosmológico Padrão, o teste do parâmetro de curvatura do espaço-tempo, Ω_k , desempenha um papel crucial na verificação do Princípio Cosmológico, que postula a homogeneidade e isotropia do Universo em grandes escalas e sustenta o modelo atual. O Modelo Cosmológico Padrão atual assume um Universo plano (curvatura espacial zero, $\Omega_k = 0$), o que é previsto pelo cenário inflacionário primordial, onde ocorreu uma rápida expansão acelerada do Universo, explicando assim por que a sua curvatura espacial é plana. Contudo, investigações recentes têm explorado a possibilidade de pequenos desvios dessa suposição, buscando testar a consistência do Princípio Cosmológico em escalas ainda maiores e com maior precisão (PERIVOLARO-POULOS e SKARA, 2022).

Uma possível abordagem para testar o Princípio Cosmológico consiste em analisar uma possível evolução do parâmetro de curvatura em termos de seu desvio para o vermelho (*redshift*), conforme apresentado em CLARKSON *et al.* (2008). Caso isto aconteça, teremos um indício imediato de um desvio desta hipótese fundamental do Modelo Cosmológico Padrão. Realizamos testes de consistência deste parâmetro a fim de verificar seu comportamento constante, utilizamos dados atuais do parâmetro de Hubble tal como compilados em BENGALY *et al.* (2023), além de dados do módulo da distância de supernovas do tipo Ia da colaboração Pantheon+SH0ES (BROUT *et al.*, 2022; RIESS *et al.*, 2022; SCOLNIC *et al.*, 2022). Verificamos que o Princípio Cosmológico está de acordo com estes dados dentro da incerteza de 1σ , embora as incertezas sejam grandes devido à limitação de nossa amostra observacional. Além disso, realizamos testes com dados simulados de ondas gravitacionais dos interferômetros LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*) (ABBOTT *et al.*, 2019, 2021) e ET (*Einstein Telescope*) (BRANCHESI *et al.*, 2023), e ainda utilizamos dados da colaboração J-PAS (*Javalambre Physics of the Accelerating Universe Astrophysical Survey*) (BENITEZ *et al.*, 2014) para a produção de dados simulados do parâmetro de Hubble via Oscilações Acústicas de Bárions. Nossas análises são feitas a partir do uso do método de reconstruções não-paramétricas via Processos Gaussianos (SEIKEL *et al.*, 2012), dentro de um intervalo de *redshift* de $0.1 < z < 2.5$, obtendo, então, incertezas significativamente reduzidas comparadas aos dados atuais.

Sendo assim, esta dissertação é dividida da seguinte forma: No capítulo 2 será abordado em detalhes o Modelo Cosmológico Padrão, desde seus fundamentos até a dinâmica que temos atualmente no Universo. Já no capítulo 3, é explicada a metodologia deste trabalho, como são realizados os testes do parâmetro de curvatura, Ω_k , e o método de Processos Gaussianos. No capítulo 4 são apresentados nossos resultados obtidos e fazemos uma discussão sobre os mesmos. E por fim, temos uma breve conclusão deste trabalho no capítulo 5.

Capítulo 2

Modelo Cosmológico Padrão

A fim de realizar observações cosmológicas no Universo, é necessário contar com um referencial para nos orientar. Quando estuda-se escalas de distância maiores que algumas centenas de Mpc é consenso que o Universo é estatisticamente homogêneo e isotrópico, o que significa dizer que ele deve parecer o mesmo em torno de cada ponto e em cada direção. Isto implica que não existem direções nem posições privilegiadas, este é o chamado Princípio Cosmológico (RYDEN, 2017). A rigor a isotropia do Universo pode ser testada diretamente através de observações, comprovando sua invariância de acordo com rotações, porém o mesmo não é válido para a homogeneidade. Temos um impedimento natural de testar diretamente a homogeneidade, pois não temos acesso aos eventos que ocorrem fora do nosso cone de luz. Isso significa que não podemos observar todas as partes do Universo simultaneamente, mas apenas aquelas onde a luz teve tempo de nos alcançar. A causalidade, portanto, nos limita a verificar a uniformidade espacial com base apenas nos eventos passados que podemos observar (HARTLE, 2003). A Figura 2.1 ilustra que só conseguimos observar os eventos que estão dentro do nosso cone de luz passado. Por conta desta limitação assumimos a validade do Princípio Cosmológico e junto com a evidência de que o Universo é isotrópico para grandes escalas, indiretamente poderíamos mostrar que o Universo também é homogêneo. Sendo assim, é necessário estabelecer quais observáveis cosmológicos devem ser consistentes com a isotropia para então mostrarmos a validade da homogeneidade.

Além disso, também é um consenso acadêmico que o Universo atualmente está em expansão (EINSTEIN, 1916). Quando se assume o Princípio Cosmológico, as equações que Einstein propôs em seu trabalho da Relatividade Geral, recaem nas equações de Friedmann (FRIEDMANN, 1922, 1924), elas descrevem a evolução temporal do Universo e, logo, se tornam umas das equações mais importantes da Cosmologia para descrever a curvatura do espaço-tempo a partir da presença de matéria e energia no Universo.

Neste capítulo serão abordadas características importantes do Modelo Cosmológico Padrão (PERLMUTTER *et al.*, 1999; RIESS *et al.*, 1998) que descreve o Universo, bem como as evidências observacionais para o mesmo. Tendo como seus pilares o Princípio

Cosmológico e a Relatividade Geral, este modelo é dominado por dois componentes: Λ que representa a energia escura e CDM, do inglês *cold dark matter*, que representa a matéria escura fria.

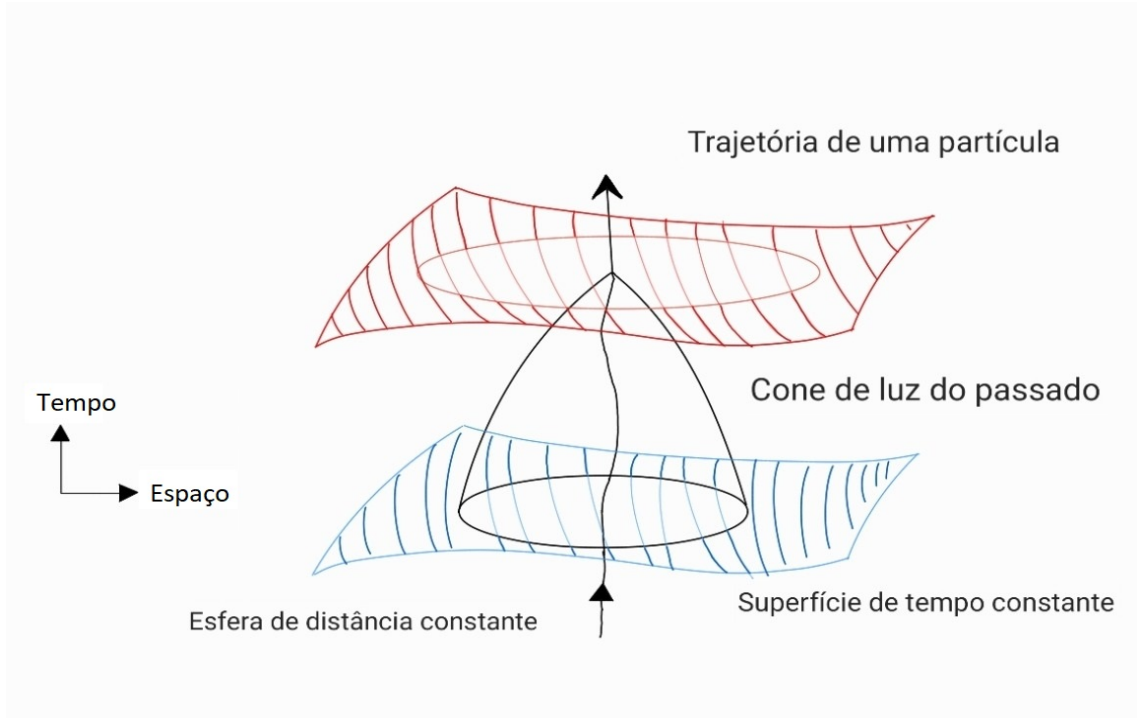


Figura 2.1: Diagrama de propagação da luz ao longo do cone de luz passado. Este diagrama ilustra o que pode ser observado hoje em uma superfície de tempo constante no presente. A linha curva representa o caminho da luz desde sua emissão até sua detecção, delimitando nosso cone de luz passado. Quanto mais distante o evento, mais tempo a luz levou para nos alcançar, permitindo-nos observar o universo em diferentes épocas passadas de sua história (Adaptado de [CLARKSON \(2012\)](#)).

2.1 Geometria do Espaço-Tempo

A geometria que melhor condiz com a simetria do Princípio Cosmológico é a métrica¹ de Friedmann-Leîmatre-Robertson-Walker (FLRW). Em sua forma pseudo-cartesiana podemos escrever da seguinte forma:

$$d\tau^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (2.1)$$

Já na sua forma esférica, e mais usual, temos o elemento de linha, $d\tau^2$, definido como,

$$d\tau^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2/R_0^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (2.2)$$

¹A métrica ou tensor métrico carrega informações sobre a geometria do espaço-tempo.

sendo t, r, θ, ϕ as coordenadas comóveis², $a(t)$ o fator de escala do Universo, adimensional que depende unicamente do tempo t (no tempo presente, $t = 0$ normalizamos $a(t) = 1$), e o parâmetro k é o fator de curvatura que possui dimensão de *distância*⁻² e irá determinar qual é o tipo de geometria assumida no Universo. Esse parâmetro pode assumir os valores:

- $k = 0 \Rightarrow$ Geometria Plana ou Euclidiana (Universo sem curvatura)
- $k > 0 \Rightarrow$ Geometria Esférica (Universo com curvatura fechada)
- $k < 0 \Rightarrow$ Geometria Hiperbólica (Universo com curvatura aberta)

Sendo a geometria espacial uma parte fundamental da composição do Universo, ao verificarmos que o Universo possui uma curvatura constante (independente do tipo de curvatura), estamos verificando a homogeneidade, e portanto, testando a consistência do Princípio Cosmológico.

Iremos consideramos um Universo fechado no sentido de ter um volume finito, enquanto que o Universo aberto teria um volume infinito. Consideraremos $R_0 = 1$, normalizando a métrica para fins práticos a partir daqui, e então podemos escrever o elemento de linha em coordenadas polares da seguinte forma,

$$d\tau^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (2.3)$$

onde a constante de curvatura, k será de extrema importância neste trabalho, como veremos no capítulo 3. Ainda podemos escrever esse elemento de linha em coordenadas hiperesféricas,

$$d\tau^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[dr^2 + S_k(r)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right],$$

$$S_k(r) = \begin{cases} \sqrt{k}^{-1} \sin(r\sqrt{k}), & k > 0 \\ r, & k = 0 \\ \sqrt{|k|}^{-1} \sinh(r\sqrt{|k|}), & k < 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

A partir do momento em que consideramos o Universo em expansão retornamos à métrica FLRW, Equação (2.2), este elemento de linha representa que a distância entre as galáxias irá depender apenas da variação do fator de escala no tempo (FOSTER *et al.*, 1995).

²Coordenadas comóveis são aquelas medidas pelo observador que está no mesmo referencial da expansão do Universo.

2.2 Expansão do Universo

2.2.1 Lei de Hubble

As observações astronômicas de Edwin Hubble, publicadas em 1929, motivaram uma nova visão sobre o Universo (HUBBLE, 1929). Intitulado “*Uma relação entre distância e velocidade radial entre nebulosas extragalácticas*”, este trabalho evidencia a grande descoberta de que o Universo está em expansão; as galáxias se afastam de nós em todas as direções e com velocidade proporcional à distância a qual se encontram (KIRSHNER, 2004).

Hubble, em seu artigo de 1929 (HUBBLE, 1929), apresenta um gráfico da velocidade³ em relação à distância, no qual temos um ajuste linear,

$$V = H_0 \cdot D, \quad (2.5)$$

hoje chamada de Lei de Hubble-Lemaître, sendo V a velocidade de recessão, D a distância e H_0 a constante do ajuste linear, chamada de constante de Hubble. Além disso, neste mesmo trabalho é apresentado o diagrama de velocidade *versus* distância, Figura 2.2. Note que a dimensão de H_0 é de inverso de tempo, portanto $1/H_0$ tem dimensão temporal; assim essa constante ficou conhecida por **tempo de Hubble**.

Como a ciência é uma atividade coletiva, para fazer suas medidas de distância, Hubble aplicou as descobertas da astrônoma Henrietta Leavitt sobre as estrelas variáveis Cefeidas (LEAVITT e PICKERING, 1912). Foi observando a Nuvem de Magalhães, galáxias visíveis a olho nu, que Henrietta descobriu que as estrelas de maior brilho possuíam um período de variação grande e as de menor brilho, um período pequeno. Já que todas as estrelas observadas estavam aproximadamente à mesma distância da Terra, essa relação simples entre a luminosidade e o período de vibração das estrelas variáveis era na verdade uma relação entre o brilho intrínseco da estrela e o seu período, a chamada *relação período-luminosidade* (RUBIN, 2007). Então, se medirmos o brilho aparente (intensidade da radiação) dessas estrelas e calibrarmos a partir de uma estrela-padrão no qual o brilho já é conhecido, conseguimos inferir a distância que ela está de nós, usando a lei do inverso do quadrado da distância ($I \propto r^{-2}$)⁴.

Hubble buscou pelas estrelas Cefeidas e as encontrou na Nebulosa de Andrômeda, usando o Telescópio Hooker de 100 polegadas (254 cm) localizado no Observatório Mount Wilson na Califórnia. Através do seu brilho observado, ele deduziu que essa nebulosa e outras “nebulosas extragalácticas” não compunham a Via Láctea e por isso as denominou como “Universos-ilhas”, que mais tarde viriam a ser descobertas e catalogadas como outras

³Hubble considera a velocidade até então como $V = cz$. Mais tarde observa-se que esta relação é válida para baixos *redshifts*.

⁴Veja também <http://lilith.fisica.ufmg.br/~dsoares/reino/hleavitt.htm> (acessado em 02/05/2024).

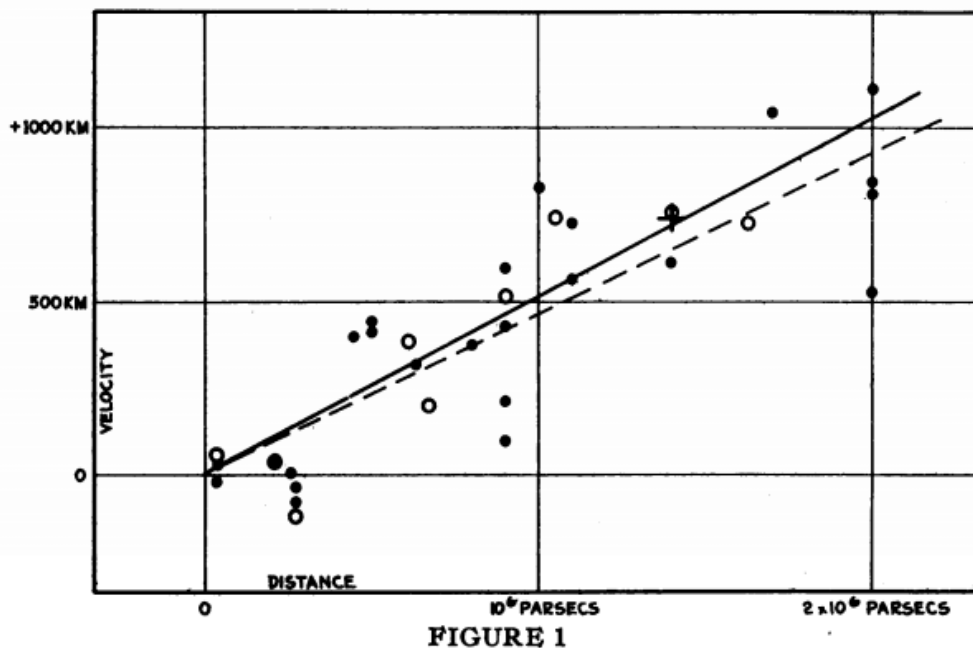


FIGURE 1
Velocity-Distance Relation among Extra-Galactic Nebulae.

Figura 2.2: Diagrama de Hubble, velocidade *versus* distância. Gráfico que apresenta as observações de Hubble dos objetos astronômicos os quais chamou de nebulosas extragalácticas, apresentando uma relação entre as distâncias e suas respectivas velocidades radiais (HUBBLE, 1929).

galáxias (KIRSHNER, 2004). Além disso, Vesto Slipher foi o pioneiro na medição precisa do *redshift* de galáxias distantes, evidenciando seu movimento de afastamento (SLIPHER, 1917), descoberta esta que foi crucial para a compreensão da expansão do Universo. Com estas contribuições, Hubble mostrou que a Via Láctea não era o Universo, mas sim uma parte dele.

Contudo, a maioria das distâncias calculadas por Hubble não foram determinadas pelo brilho de Cefeidas, e sim por estrelas mais brilhantes da galáxia ou pelo brilho da própria galáxia. Por este motivo, no final da década de 1920, a constante de Hubble foi sobrestimada como $H_0 \approx 500 \text{ km/s/Mpc}$. Anos depois, através do Telescópio Espacial Hubble (em sua homenagem), foi possível medir o brilho das Cefeidas de forma individual (KIRSHNER, 2004), ocasionando em uma melhor estimativa para a constante de Hubble, de $H_0 \approx 70 \text{ km/s/Mpc}$ ⁵ (FREEDMAN *et al.*, 2001). Na Figura 2.3, podemos observar medidas da constante de Hubble desde a década de 1920. Assim se deu o início dos estudos sobre a expansão do Universo, de modo que nas próximas sessões iremos introduzir o *redshift*, elemento crucial na Cosmologia e como a cosmografia descreve a cinemática desta expansão.

⁵Veja também https://www.roe.ac.uk/~jap/teaching/cos4notes/cos4_0102.pdf (acessado em 02/05/2024).

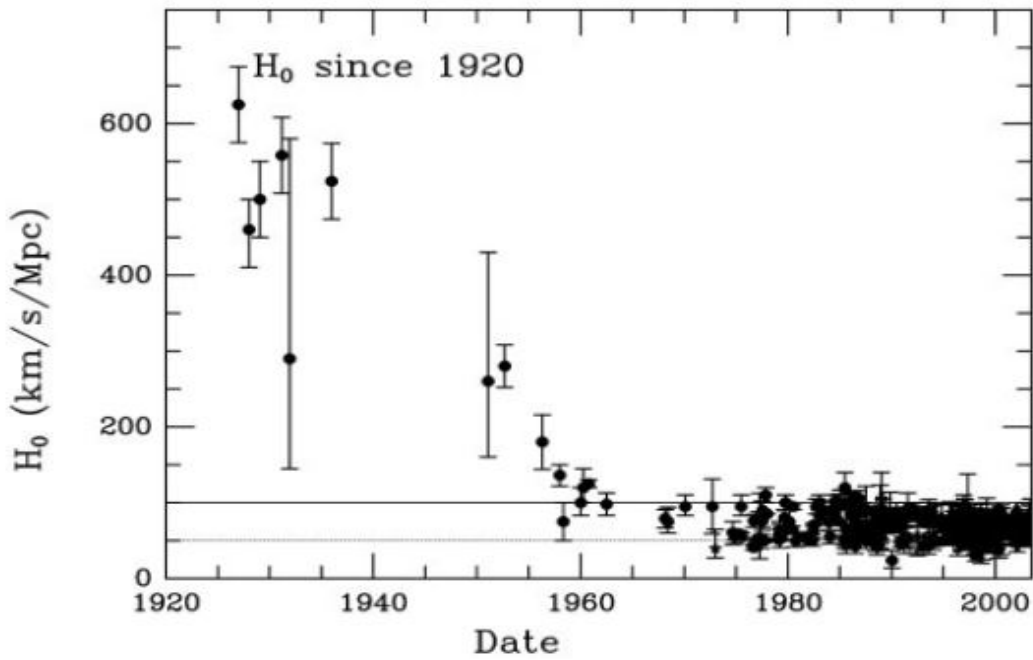


Figura 2.3: Evolução dos valores da constante de Hubble, H_0 vs tempo. Revisões na escala de distância original feita por Hubble mostram mudanças significativas no valor da constante de Hubble com o passar dos anos. A partir da década de 90 houve uma estabilização, e atualmente seu valor varia entre 60 e 80 km/s/Mpc (KIRSHNER, 2004).

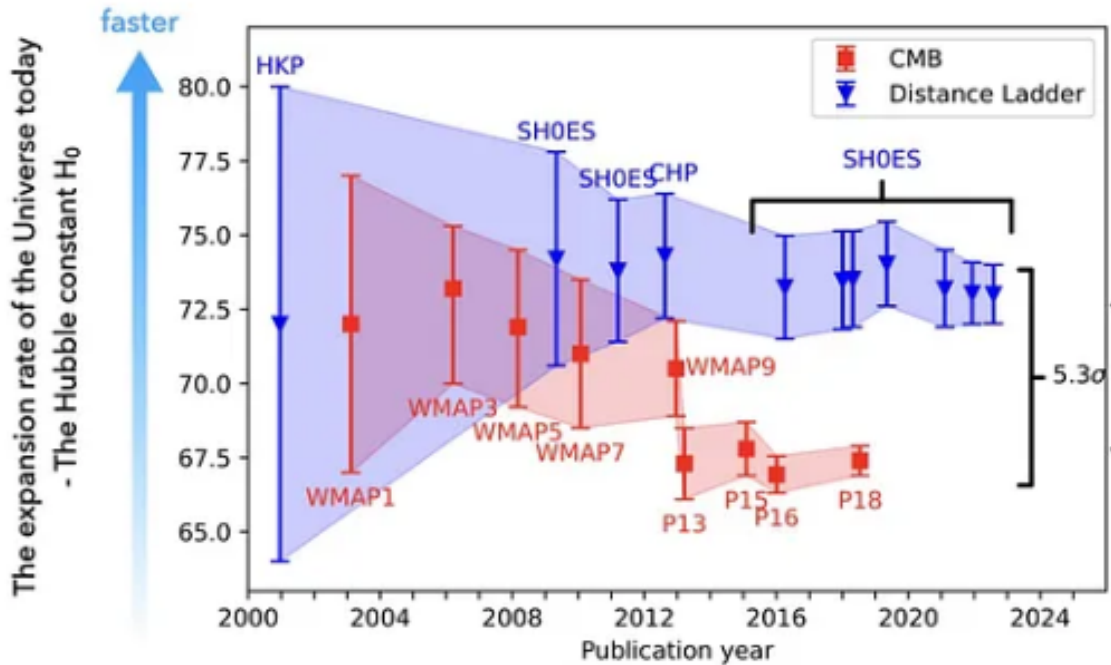


Figura 2.4: Evolução dos valores da constante de Hubble, H_0 vs tempo, no século XXI. Em vermelho temos medidas a partir da Radiação Cósmica de Fundo, e em azul as medidas realizadas a partir de Cefeidas. Observa-se os valores em comparativo, no qual ainda se vê uma tensão de 5.3σ entre os valores de H_0 (D’arcy Kenworthy⁷, 2023).

2.2.2 Redshift

Um dos conceitos mais básicos da Cosmologia é o *redshift*, desvio para o vermelho em português, que é o deslocamento espectral da luz emitida por um objeto astrofísico causado pelo movimento relativo entre a fonte e o observador. Existem duas causas distintas para esse deslocamento (BEDRAN, 2002): a primeira é o efeito Doppler cinemático (Relatividade Restrita), que está correlacionado com a velocidade relativa entre a fonte e o observador, e a segunda causa que está correlacionada com a expansão do Universo (Relatividade Geral)⁸. Referente à primeira causa, se a galáxia está se afastando de nós, temos *redshift*, se acontece o oposto e a galáxia está se aproximando, temos *blueshift*. Como vimos na seção 2.2.1, o Universo está em expansão, portanto só usaremos o conceito de *redshift*.

No efeito Doppler cinemático, o *redshift*, z , é definido como a variação da frequência (ou do comprimento de onda) das ondas eletromagnéticas em relação ao movimento entre o emissor e o observador (BEDRAN, 2002),

$$z \equiv \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_{\text{observador}} - \lambda_{\text{emissor}}}{\lambda_{\text{emissor}}}. \quad (2.6)$$

Utilizando o conceito de comprimento de onda como sendo $\lambda = c/\nu$, sendo ν a frequência e c a velocidade da luz, observamos que a equação (2.6) se reduz à

$$1 + z = \frac{v_{\text{emissor}}}{v_{\text{observador}}}. \quad (2.7)$$

A partir da Equação (2.7) e utilizando as transformações de Lorentz (CARMELI *et al.*, 2006), pois estamos trabalhando em um contexto de relatividade restrita, somos capazes de chegar na equação onde teremos o *redshift*, z , relacionado com a velocidade, v ,

$$1 + z = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}, \quad (2.8)$$

e, utilizando uma abordagem cosmográfica⁹ podemos expandir em série de Taylor, de forma a obter:

$$\frac{v}{c} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4} - \dots \quad (2.9)$$

Quando z é pequeno, ou seja, quando estamos tratando de distâncias próximas, considere-se a aproximação de primeira ordem, $v = cz$. Assim, conseguimos chegar a Lei de Hubble-

⁷Veja também bit.ly/4ds7KE1 (acessado em 17/08/2023).

⁸Sabe-se da existência do deslocamento devido ao *redshift* gravitacional, porém não será abordado neste estudo (BEDRAN, 2002).

⁹Esta é uma abordagem mais descritiva que utilizamos comumente quando trabalhamos com dados em baixos *redshifts* ($z \ll 0$).

Lemaître (equivalente à Equação (2.5)),

$$cz = H_0 \cdot d. \quad (2.10)$$

Em contrapartida, no tocante ao deslocamento devido à expansão do Universo, teremos o chamado *redshift* cosmológico, que segue o Princípio Cosmológico, isto é, em grandes escalas o Universo deve ser homogêneo e isotrópico, o que significa dizer que ele deve parecer o mesmo em torno de cada ponto e em cada direção. Isto implica que não existam extremidades e nem um ponto central no Universo (HARTLE, 2003).

Desta forma, descreveremos o *redshift* a partir de parâmetros cosmográficos. O primeiro parâmetro relevante é o fator de escala, $a(t)$, que irá nos mostrar como o Universo evolui com o passar do tempo. Este é definido como:

$$1 + z \equiv \frac{a(t_{\text{observador}})}{a(t_{\text{emissor}})}. \quad (2.11)$$

Este resultado, Equação 2.11, depende apenas da métrica FLRW e permanece válido para qualquer modelo cosmológico escolhido, e não apenas o atual, Λ CDM. Para o tempo atual, $a(t_{\text{observador}}) = 1$, e portanto temos que $a(t)$ de qualquer fonte é dado por:

$$a(t) = \frac{1}{(1 + z)}. \quad (2.12)$$

O fator de escala pode ser escrito em função de mais alguns outros parâmetros cosmográficos, como pode ser visto no apêndice A.

2.3 Dinâmica

Nesta seção, abordaremos a dinâmica do Universo a partir de uma análise detalhada das equações fundamentais que regem sua evolução. Iniciaremos com as equações de campo de Einstein, pilares da Teoria da Relatividade Geral, que descrevem como a gravidade influencia a curvatura do espaço-tempo. A partir dessas equações, procederemos à derivação das equações de Friedmann, que caracterizam a expansão do universo sob diferentes condições cosmológicas.

A Relatividade Geral de Einstein descreve de forma satisfatória a gravitação, prevendo corretamente o movimento de partículas e fótons, assim temos as equações de campo de Einstein (FOSTER *et al.*, 1995),

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \equiv G_{\mu\nu}, \quad (2.13)$$

onde do lado esquerdo da igualdade temos o termo de curvatura e do lado direito temos o termo de massa, sendo esse dado por,

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (2.14)$$

A constante cosmológica, Λ , é acrescentada ao termo de massa a fim de descrever a aceleração da expansão.

Ficamos então com as equações de campo de Einstein dadas por (considerando $c = 1$),

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.15)$$

Para escalas cosmológicas precisamos considerar o Universo como um fluido macroscópico simples, sem qualquer propriedade viscosa. Podemos assim descrever um tensor de energia-momento, $T_{\mu\nu}$, de um fluido perfeito,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu}, \quad (2.16)$$

onde ρ é a densidade própria, P é a sua pressão (sendo ρ e P relativos à soma de todas as componentes do Universo) e u_μ é a velocidade das partículas fluidas como as estrelas, e também é considerado unidades em que $c = 1$.

E estamos considerando a métrica FLRW, (2.2), com $c = 1$,

$$d\tau^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (2.17)$$

Feito isto, precisamos dos símbolos de Christoffel¹⁰ que são dados por:

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{im} (\partial_j g_{mk} + \partial_k g_{mj} - \partial_m g_{jk}). \quad (2.18)$$

A partir de (2.17) podemos escrever os termos não nulos de (2.18) (lembrando que $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \Gamma_{\sigma\nu}^\mu$):

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^t &= a\dot{a}/(1 - kr^2), & \Gamma_{\theta\theta}^t &= a\dot{a}r^2, & \Gamma_{\phi\phi}^t &= a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{tr}^r &= \dot{a}/a, & \Gamma_{rr}^r &= kr/(1 - kr^2), & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r(1 - kr^2), & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -r(1 - kr^2) \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{t\theta}^\theta &= \dot{a}/a, & \Gamma_{r\theta}^\theta &= 1/r, & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{t\phi}^\phi &= \dot{a}/a, & \Gamma_{r\phi}^\phi &= 1/r, & \Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \cot \theta. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Temos por definição o tensor de curvatura,

$$R_{kji}^l = \partial_i \Gamma_{kj}^l - \partial_j \Gamma_{ki}^l + \Gamma_{kj}^\lambda \Gamma_{\lambda i}^l - \Gamma_{ki}^\lambda \Gamma_{\lambda j}^l, \quad (2.20)$$

que quando contraído se transforma no tensor de Ricci, $R_{ki} = R_{kli}^l$.

¹⁰Também chamados de conexões de Christoffel, descrevem como as coordenadas de um espaço curvo variam em relação umas às outras. Dentro do contexto da Relatividade Geral, estes símbolos definem como partículas e luz se movem sob a influência da gravidade dentro de um espaço-tempo 4-dimensional.

A partir disso calculamos os termos não nulos do tensor de Ricci:

$$\begin{aligned}
 R_{tt} &= -3\ddot{a}/a, \\
 R_{rr} &= (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) / (1 - kr^2), \\
 R_{\theta\theta} &= (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) r^2, \\
 R_{\phi\phi} &= (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) r^2 \sin^2 \theta, \\
 R_{\mu\nu} &= 0, \mu \neq \nu.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Visto os termos não nulos, o tensor de Ricci é diagonal e portanto pode ser escrito como,

$$R_{tt} = -\frac{3\ddot{a}}{a}, \quad R_{ii} = -\frac{g_{ii}}{a^2} (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k), \quad \text{sendo } i = 1, 2, 3, \tag{2.22}$$

Logo, o escalar de Ricci é escrito como,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{tt} R_{tt} + g^{ii} R_{ii} = 6\frac{\ddot{a}}{a} + 6\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 6\frac{k}{a^2}, \tag{2.23}$$

ou apenas

$$R = \frac{6}{a^2} (\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k). \tag{2.24}$$

O tensor energia-momento tem forma geral dada por,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)\delta_{\mu}^0\delta_{\nu}^0 - Pg_{\mu\nu}, \tag{2.25}$$

por estarmos considerando um fluido perfeito, o tensor de energia-momento será escrito como:

$$T_{\mu\nu} = \text{dig}(\rho, -P, -P, -P). \tag{2.26}$$

Com isso, é possível escrever os termos temporal e espacial da equação de campo de Einstein (2.15),

- Temporal

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho + \Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}. \tag{2.27}$$

- Espacial

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{(-8\pi GP + \Lambda)}{2} - \frac{k}{2a^2}. \tag{2.28}$$

Quando substituimos (2.27) em (2.28) chegamos numa terceira relação,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3}, \tag{2.29}$$

assim ficamos com as 2 relações de Friedmann: (2.27) e (2.29), que também podem ser

escritas como,

$$H^2(t) = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.30)$$

$$\dot{H}(t) - H^2(t) = \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.31)$$

Estas relações, (2.30) e (2.31), permitem prever como o Universo evolui ao longo do tempo, desde o início até um futuro distante, e também são essenciais para entender a dinâmica cosmológica considerando diferentes cenários, incluindo universos com geometria aberta, fechada e plana.

Ainda é necessário descrever o comportamento das componentes materiais que compõem o fluido do tipo perfeito cosmológico. Na seção a seguir iremos discutir tal comportamento.

2.3.1 Parâmetros Cosmológicos

Dada a equação de continuidade de um fluido relativístico:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0, \quad (2.32)$$

a densidade de energia, ρ , é positiva, e ao analisar a Equação (2.31) isso fornece uma aceleração negativa para o Universo se não considerarmos o termo de Λ . Um fluido feito de matéria bariônica possui pressão, P , positiva, assim como um fluido de fótons ou de neutrinos, porém essa pressão positiva faz com que a expansão do Universo diminua (RYDEN, 2017). O que observamos é um Universo em expansão acelerada, portanto, o termo $(\rho + 3P)$ da Equação (2.31) precisa ser positivo,

$$\rho + 3P > 0$$

$$3P > -\rho$$

$$P < -\frac{1}{3}\rho, \quad (2.33)$$

considerar esta pressão nos mostra que o Universo está acelerando ao invés de desacelerar.

A partir disso precisamos de uma equação que relacione a pressão e a densidade de energia do material que compõe o Universo, a **equação de estado**, $P = \omega\rho$, onde ω é um número adimensional. Assim, é possível obter uma proporcionalidade entre os parâmetros ρ e a ,

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + \omega\rho) = 0$$

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(1 + \omega)\rho$$

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} &= -\frac{3}{a} \frac{da}{dt} (1 + \omega) \rho \\ \ln \rho &= -3(1 + \omega) \ln a \\ \rho &\propto a^{-3(1+\omega)}.\end{aligned}\tag{2.34}$$

No caso de um fluido com partículas não-relativísticas, obedece à lei dos gases ideais,

$$P \approx \frac{k_B T}{\mu c^2} \rho,\tag{2.35}$$

sendo μ a massa média do gás de partículas e k_B a constante de Boltzmann.

Para o gás não-relativístico, a temperatura, T se relaciona com a média quadrada da velocidade,

$$3k_B T = \mu \langle v^2 \rangle.\tag{2.36}$$

Ao juntarmos as equações (2.35), (2.36) e a equação de estado ($P = \omega\rho$), temos,

$$\begin{aligned}\omega\rho &\approx \frac{\langle v^2 \rangle}{3} \frac{1}{c^2} \rho \\ \omega &\approx \frac{\langle v^2 \rangle}{3c^2}.\end{aligned}\tag{2.37}$$

Considerando que ω é constante, tem-se que para partículas relativísticas (fótons e neutrinos) $\omega = 1/3$, para partículas não-relativísticas¹¹ (matéria bariônica e matéria escura) $\omega \approx 0$, e por definição¹² da equação de estado temos que um fluido puramente composto pela constante cosmológica (que possui este nome pois sua densidade de energia, ρ , não varia com o *redshift*, e logo também não varia com o fator de escala, como podemos ver na Equação (2.34)), sendo assim temos $\omega = -1$.

É definida então uma quantidade chamada de parâmetro de densidade, $\Omega_i \equiv \rho_i/\rho_c$. Cada uma das componentes i correspondem à radiação, matéria (bariônica + escura), curvatura e constante cosmológica, e temos que a densidade crítica¹³ é dada por $\rho_c \equiv 3H_0^2/(8\pi G)$. Os parâmetros de densidade (Ω_r , Ω_m , Ω_k e Ω_Λ) descrevem a quantidade destes componentes no Universo, o que é essencial para a compreensão da composição, estrutura e evolução do mesmo. Dados observacionais como a Radiação Cósmica de Fundo e Supernovas de tipo Ia são usados para medir estes parâmetros com precisão (RYDEN, 2017).

¹¹Estamos considerando que a pressão precisa ser aproximadamente nula, pois as partes do fluido interagem muito fracamente por sem muito pequenas (poeira).

¹²Esta definição refere-se à um fluido que possui pressão negativa ($P < 0$).

¹³Densidade necessária para que o Universo seja plano ($k = 0$).

Podemos reescrever a Equação (2.30) de tal forma onde definimos a densidade de energia para a constante cosmológica, ρ_Λ ,

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{8\pi G}{3} \left(\rho + \frac{\Lambda}{8\pi G} \right) - \frac{k}{a^2} \\ H^2 &= \frac{8\pi G}{3} \underbrace{(\rho + \rho_\Lambda)}_{\rho_{total}} - \frac{k}{a^2}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

A densidade de energia total agrega as densidades de energia de todas as componentes do Universo, logo, $\rho_{total} = \rho_r + \rho_m + \rho_\Lambda$. Ao substituirmos as densidades de energia na equação de Friedmann, (2.38), temos,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_r a^{-4} + \rho_m a^{-3} + \rho_\Lambda) - \frac{k}{a^2}, \quad (2.39)$$

multiplicando e dividindo por H_0^2 ,

$$H^2 = H_0^2 \left[\frac{8\pi G}{3H_0^2} (\rho_r a^{-4} + \rho_m a^{-3} + \rho_\Lambda) - \frac{k}{H_0^2 a^2} \right], \quad (2.40)$$

$$H^2 = H_0^2 \left[\frac{1}{\rho_c} (\rho_r a^{-4} + \rho_m a^{-3} + \rho_\Lambda) - \frac{k}{H_0^2 a^2} \right]. \quad (2.41)$$

A partir disso é definido o parâmetro de densidade de curvatura, $\Omega_k = -k/H_0^2$, sendo assim de forma semelhante ao feito na seção 2.1 podemos definir Ω_k como,

- $\Omega_k = 0 \Rightarrow$ Geometria Plana ou Euclidiana (Universo sem curvatura)
- $\Omega_k < 0 \Rightarrow$ Geometria Esférica (Universo com curvatura fechada)
- $\Omega_k > 0 \Rightarrow$ Geometria Hiperbólica (Universo com curvatura aberta).

A equação de Friedmann, (2.41), pode ser escrita de forma mais direta utilizando esta definição,

$$\left(\frac{H}{H_0} \right)^2 = \Omega_r (1+z)^4 + \Omega_m (1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_k (1+z)^2, \quad (2.42)$$

onde $\Omega_k = (1 - \Omega_m - \Omega_r - \Omega_\Lambda)$.

Ao longo do tempo as densidades de radiação, matéria e energia escura evoluíram, de acordo com a Figura 2.5, determinando diferentes eras de domínio no Universo. A primeira delas consiste na era da radiação que prevaleceu logo após o *Big Bang*, neste período a componente Ω_r era dominante. Depois tivemos a prevalência da componente Ω_m na era da matéria. E atualmente estamos no início da era da energia escura, representada pela componente Ω_Λ .

Os parâmetros H_0 , Ω_r , Ω_m , Ω_k e Ω_Λ caracterizam a dinâmica cosmológica no contexto do Modelo Cosmológico Padrão, que podemos impor vínculos através de observáveis cos-

mológicos como a Radiação Cósmica de Fundo, Supernovas tipo Ia, Oscilações Acústicas de Bárions, etc., conforme será descrito na seção a seguir.

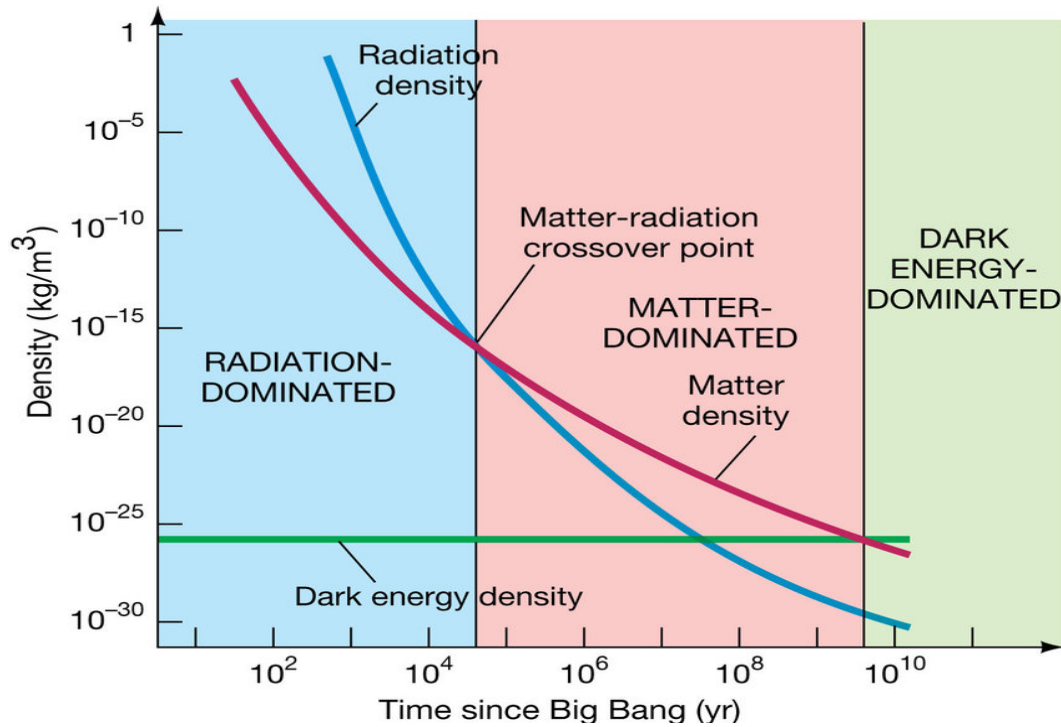


Figura 2.5: Evolução da densidade de energia de cada componente material do Universo ao longo do tempo. O gráfico ilustra as diferentes eras dominadas por radiação, matéria e energia escura. A era dominada pela radiação se estende desde o Big Bang até aproximadamente $z \approx 3300$, a era dominada pela matéria ocorre entre $3300 > z > 0.3$, e a era da energia escura prevalece para $z < 0.3$, abrangendo os últimos 6 bilhões de anos. Além disso, vemos a representação da densidade de radiação na curva em azul, da densidade de matéria em rosa, e da densidade de energia na curva em verde. (PACUCCI, 2016).

2.3.2 Medidas de Distâncias Cosmológicas

A medição de distâncias no Universo é essencial para várias vertentes de pesquisa em Cosmologia. Existem várias técnicas para essas medições (algumas delas serão discutidas na seção 2.4), cada uma adequada para diferentes escalas e contextos astronômicos, como por exemplo: paralaxe, cefeidas, supernovas Ia, oscilações acústicas de bárions (do inglês, *Baryon Acoustic Oscillations* - BAO), etc. Duas medidas importantes para este trabalho são (RYDEN, 2017):

- Distância de Luminosidade, d_L

Essa é uma das formas mais comuns de medir distâncias em cosmologia, usada para objetos muito distantes como supernovas. Dentro da Cosmologia, utilizam-se as velas padrões, que são objetos astronômicos com luminosidade intrínseca conhecida, como as supernovas de tipo Ia. A distância de luminosidade basicamente descreve

como a intensidade da luz desses objetos varia com a distância. Esta distância pode ser descrita em função do módulo da distância, μ ,

$$d_L = 10^{(\mu-25)/5}, \quad (2.43)$$

sendo μ a diferença de magnitudes aparente e absoluta, m e M respectivamente¹⁴.

Além disso considerando a métrica FLRW definida nas equações (2.4), podemos definir a distância comóvel, χ ,

$$d\chi^2 = dr^2 + S_k(r)^2 \underbrace{(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)}_{d\Omega^2}. \quad (2.44)$$

Se consideramos um fóton ($d\tau^2 = 0$) que viaja numa trajetória radial ($d\Omega^2 = 0$) e num espaço-tempo plano¹⁵ ($k = 0$), que foi emitido num tempo t_e e observado em t_o , temos:

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= -c^2 dt^2 + a^2(t) d\chi^2 \\ c^2 dt^2 &= a^2(t) d\chi^2 \\ d\chi^2 &= \frac{c^2}{a^2(t)} dt^2 \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\chi = \int_{t_e}^{t_o} \frac{cdt}{a(t)}. \quad (2.46)$$

Já a distância própria da fonte até nós, considera a expansão do Universo, portanto

$$d_p = a(t)\chi. \quad (2.47)$$

Podemos escrever o fluxo observado de uma fonte como a luminosidade por unidades de área, sendo a luminosidade a energia por unidade de tempo,

$$F = \frac{L}{A} = \frac{dE_o}{dt_o A_o}, \quad (2.48)$$

A_o é a área da superfície de uma esfera com raio igual a distância própria onde a radiação da fonte é espalhada, portanto,

$$A_o = 4\pi d_p^2 = 4\pi a_o^2 \chi^2, \quad (2.49)$$

¹⁴A magnitude aparente mede o fluxo de um objeto, enquanto que a magnitude absoluta mede a luminosidade de um objeto. O fluxo e a luminosidade medem a intensidade de um objeto, porém o fluxo é dependente da distância, e a luminosidade é intrínseca ao objeto.

¹⁵Um espaço-tempo plano é considerado afim de simplificar o entendimento, porém todas estas relações são válidas mesmo em um Universo não-plano.

desta forma temos,

$$F = \frac{dE_o}{dt_o 4\pi d_p^2} = \frac{dE_o}{dt_o 4\pi a_o^2 \chi^2}. \quad (2.50)$$

Algumas relações de proporcionalidade são importantes:

$$\begin{aligned} dE_o &= \frac{a(t)dE}{a_o} \\ dt_o &= \frac{a_o dt}{a(t)}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Substituindo (2.51) em (2.50):

$$F = \frac{(a(t)dE)/a_o}{(a_o dt/a(t))(4\pi a_o^2 \chi^2)} = \frac{a^2(t)dE}{4\pi a_o^4 \chi^2 dt}, \quad (2.52)$$

o fator de escala para os dias de hoje é definido $a_o = 1$, e substituindo (2.12) na equação acima temos,

$$F = \frac{dE}{4\pi \chi^2 (1+z)^2 dt}, \quad (2.53)$$

comparando as equações (2.50) e (2.53) chegamos na definição da distância de luminosidade em função do *redshift*,

$$d_L = \chi(1+z). \quad (2.54)$$

- Distância Angular, d_A

Esta medida relaciona o tamanho físico real com o tamanho angular observado no céu de um objeto. Podemos descrevê-la como,

$$d_A = \frac{dS}{d\theta}, \quad (2.55)$$

sendo dS o tamanho físico real e $d\theta$ o diâmetro angular observado no céu. Estruturas de tamanho conhecido como aglomerados de galáxias e oscilações acústicas de bárions são usados como réguas padrões. dS pode ser escrito em função da distância própria, d_p ,

$$dS = d_p d\theta = a(t)\chi d\theta, \quad (2.56)$$

desse modo a distância angular pode ser escrita como,

$$d_A = \frac{a(t)\chi d\theta}{d\theta}. \quad (2.57)$$

Substituindo (2.12) a distância angular fica em função do *redshift*,

$$d_A = \frac{\chi}{1+z}. \quad (2.58)$$

- Relação da Dualidade Cósmica

Esta dualidade relaciona as distâncias luminosa e angular por um fator de *redshift*, juntando as equações (2.54) e (2.58) temos,

$$\begin{aligned} \frac{d_L}{d_A} &= \frac{\chi(1+z)}{\chi/(1+z)} \\ \frac{d_L}{d_A} &= (1+z)^2. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Esta relação é válida quando temos conservação dos fótons em uma geodésica e a consideração de qualquer teoria métrica de gravidade.

2.4 Observáveis Cosmológicos

Utilizamos os observáveis cosmológicos como ferramentas para o estudo do Universo. Eles fornecem dados fundamentais para a estimativa dos parâmetros cosmológicos, como as densidades de energia, constante cosmológica, entre outros. A análise e integração de múltiplos observáveis nos permitem construir um modelo coeso, como o Modelo Cosmológico Padrão. Alguns dos principais observáveis são citados a seguir:

- Supernovas tipo Ia

As supernovas são eventos de explosões estelares extremamente luminosos e energéticos. Para a Cosmologia o interesse são nas classificadas pelo tipo Ia, cujas características são a ausência das linhas de hidrogênio no seu espectro e a presença de silício. O processo de formação de uma supernova do tipo Ia é conhecido, elas são geradas a partir de uma explosão termonuclear de anãs brancas em um sistema binário. Isto ocorre quando a anã branca acreta massa o suficiente para chegar no limite de Chandrasekhar ($M = 1.44M_\odot$) (CARROLL e OSTLIE, 2017) e então há a quebra do equilíbrio entre as pressões gravitacional e de elétrons fazendo com que a explosão termonuclear aconteça. Com isso garantimos que possamos estimar distâncias astronômicas a partir da medida da luminosidade das supernovas do tipo Ia, $L \approx 4 \cdot 10^9 L_\odot$ (CARROLL e OSTLIE, 2017), e utilizá-las como velas-padrão na Cosmologia, e então medir distâncias astronômicas com a relação (2.43). A Figura 2.6 exemplifica os dados que obtém-se ao utilizar Supernovas de tipo Ia como observáveis cosmológicos, módulo de distância, μ , sendo ele a diferença entre as magnitudes aparente e absoluta.

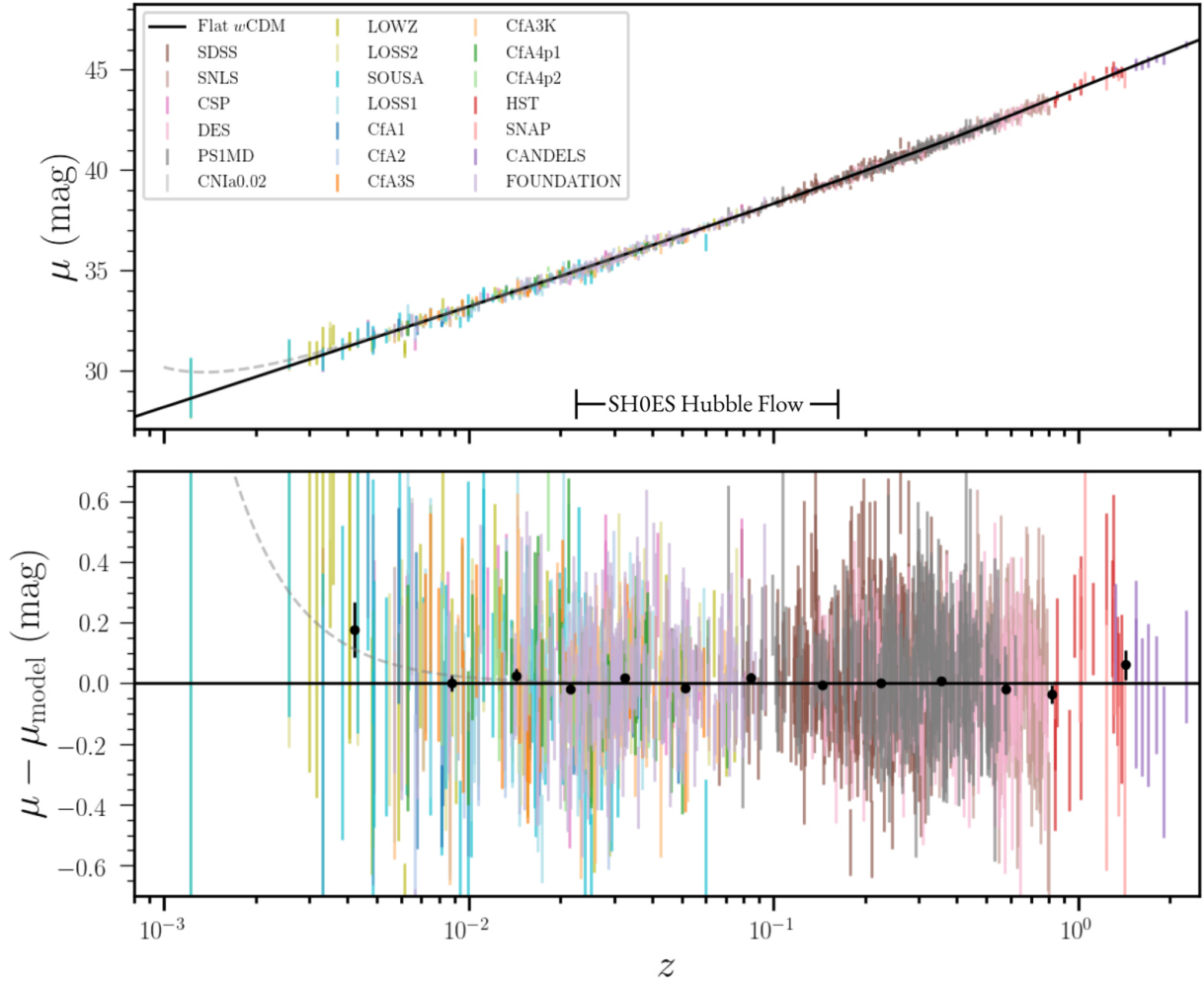


Figura 2.6: Diagrama de Hubble da colaboração Pantheon+ apresentando módulo de distância versus *redshift* de supernovas tipo Ia. A partir de dados deste tipo é utilizada a relação (2.43) para o cálculo de distâncias. Cada cor representa um compilado de dados e a linha tracejada em cinza é a tendência prevista por Hubble (BROUT *et al.*, 2022).

- Radiação Cósmica de Fundo

É a radiação remanescente da época da recombinação, no início do Universo. De acordo com o Modelo Cosmológico Padrão, a recombinação acontece quando o Universo tinha uma temperatura de aproximadamente $T \approx 3000\text{K}$ em um *redshift* aproximado de $z \approx 1090$; logo depois temos a fase do desacoplamento onde os fótons param de interagir com os bárions e então a radiação se desacopla da matéria. Com isso, os fótons são capazes de viajar livremente pelo espaço e hoje observamos estes mesmos fótons no espectro de micro-ondas como uma radiação de fundo. Atualmente a Radiação Cósmica de Fundo é aproximadamente isotrópica tendo uma temperatura média de $T \approx 2.73 \pm 0.002\text{K}$ (MATHER *et al.*, 1994), com anisotropias de temperatura tipicamente da ordem de $T \approx 10^{-5}\text{K}$ (PLANCK COLLABORATION *et al.*, 2020), conforme mostrada na Figura 2.7. Essas mesmas anisotropias de temperatura podem ser observadas no espectro de potências, Figura 2.8, no qual

podemos analisar como essas flutuações de temperatura na radiação são distribuídas em diferentes escalas angulares no céu.

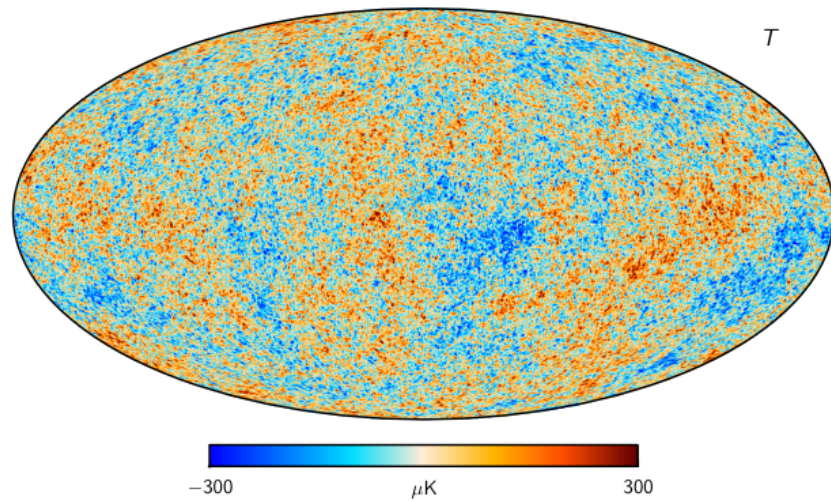


Figura 2.7: Mapa de anisotropia de temperatura da Radiação Cósmitica de Fundo da Colaboração Planck (PLANCK COLLABORATION *et al.*, 2020).

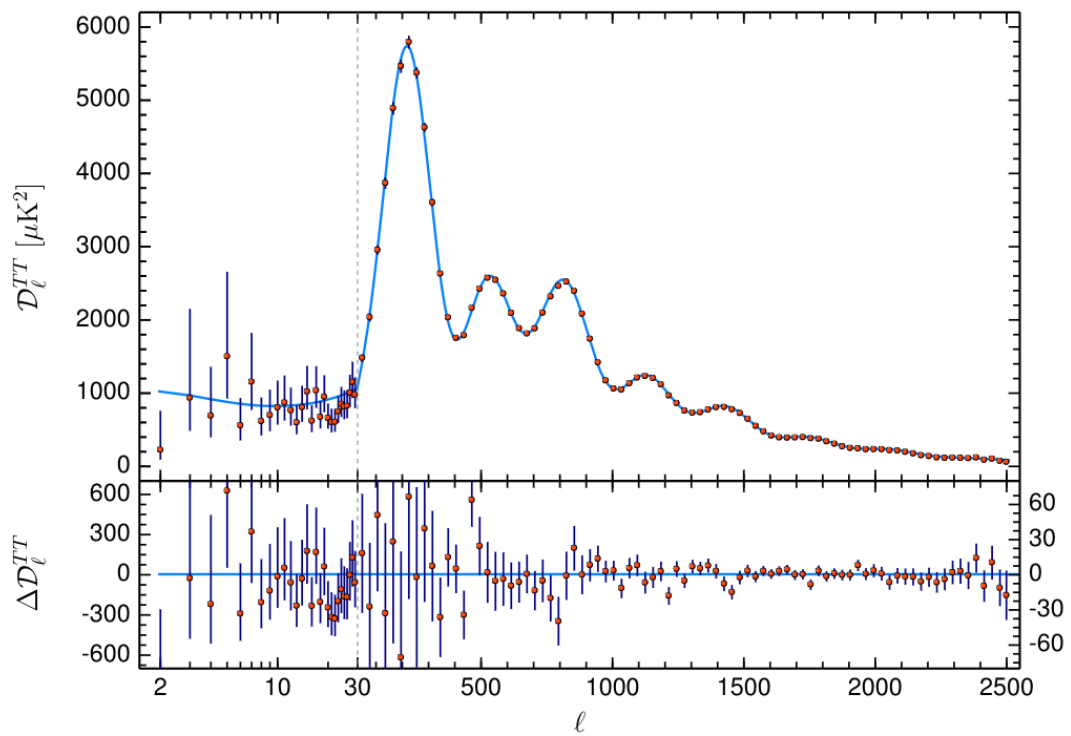


Figura 2.8: Espectro de Potências de Temperaturas da Colaboração Planck (PLANCK COLLABORATION *et al.*, 2020).

- Oscilações Acústicas de Bárions

As oscilações surgem durante a era da radiação. Nesta fase, o Universo era dominado por um fluido composto por fótons e bárions que interagem fortemente entre si, além da presença da matéria escura. Existiam poços de matéria escura que exerciam uma atração gravitacional que acabava por competir com a pressão de radiação gerada pelos fótons. Esta pressão de radiação mantinha os bárions em movimento, evitando que caíssem nos poços de potencial da matéria escura. Esta competição entre forças perturbava o fluido, gerando oscilações semelhantes a ondas acústicas. Com a expansão e conseqüente resfriamento do Universo, tivemos o desacoplamento deste fluido fóton-bárion, e não havia mais a competição entre forças para originar as perturbações, sendo assim as oscilações acústicas cessam. Portanto, a escala de horizonte do Universo na época em que estas oscilações cessam torna-se uma escala característica onde pares de galáxias podem ser encontrados com maior probabilidade, ou seja, a escala do horizonte acústico, sendo assim uma régua padrão estatística que nos permite testar modelos cosmológicos (NESSERIS e PERIVOLAROPOULOS, 2007), conforme mostrado na Figura 2.9.

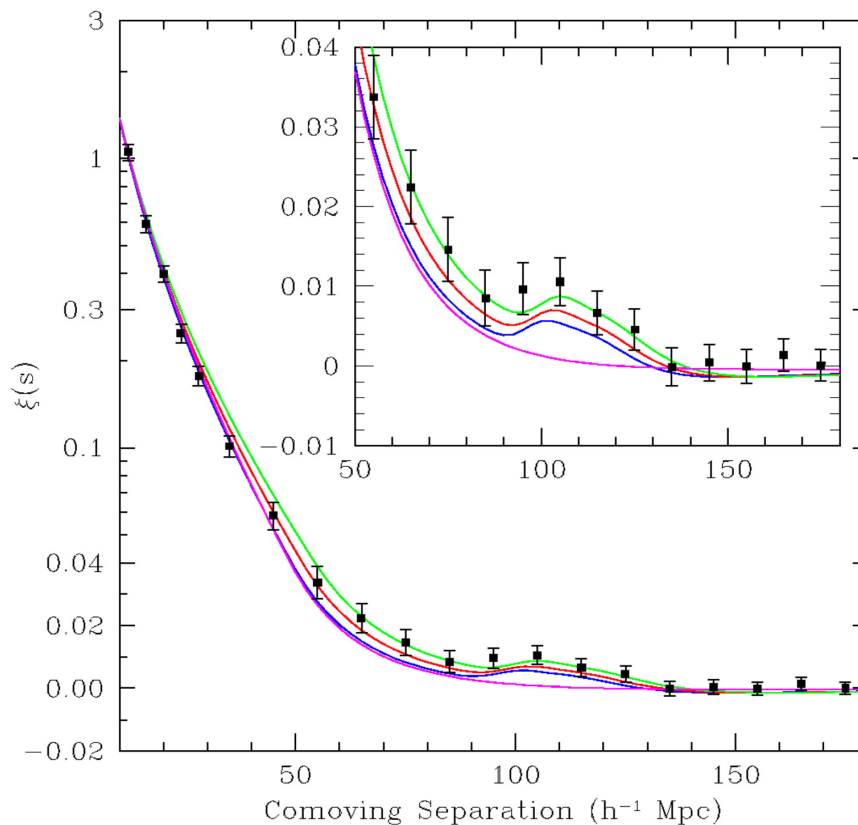


Figura 2.9: Função de correlação de 2 pontos de galáxias utilizando dados do SDSS (do inglês, *Sloan Digital Sky Survey*). Destaque mostrando o pico das Oscilações Acústicas de Bárions, que é a escala de horizonte acústico. (EISENSTEIN *et al.*, 2005)

- Cronômetros Cósmiticos

É possível medir o parâmetro de Hubble, $H(z)$, através da diferença entre as idades de galáxias, como observado na Figura 2.10. Inicialmente foi um método em que se media a diferença na idade entre dois conjuntos de galáxias em evolução passiva separadas por uma distância dz , ou seja, galáxias que não possuem mais formação estelar e portanto são suficientemente antigas (MORESCO *et al.*, 2022). A partir deste método podemos estimar o parâmetro de Hubble de forma independente de modelos cosmológicos,

$$H(z) = -\frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt}. \quad (2.60)$$

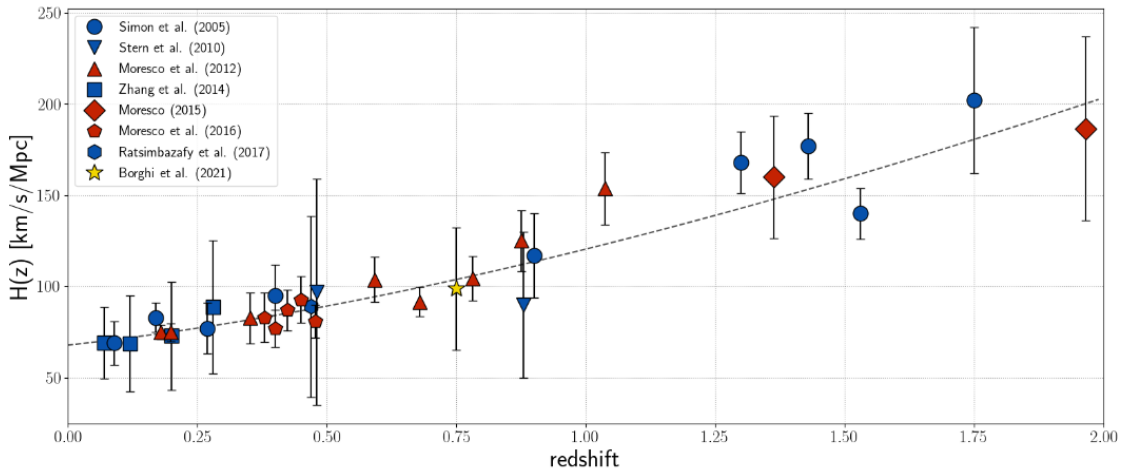


Figura 2.10: Parâmetros de Hubble, $H(z)$, medidos com método de cronômetros cósmicos versus *redshift* (MORESCO *et al.*, 2022).

- Ondas Gravitacionais

De acordo com a Teoria da Relatividade Geral, ondas gravitacionais podem ser produzidas, por exemplo, no processo de colisão de objetos compactos binários, bem como no Universo primordial. Ao detectar um sinal de onda gravitacional, podemos estimar sua distância de luminosidade através da sua forma de onda (CUTLER e FLANAGAN, 1994; HOLZ e HUGHES, 2005; MAGGIORE, 2018). Quando há a detecção da sua contraparte eletromagnética, detecção esta feita por meio de instrumentos como o *Fermi Gamma-Ray Space Telescope* (THOMPSON e WILSON-HODGE, 2022), podemos medir o *redshift* do evento, logo, testar modelos cosmológicos pela relação d_L vs z (Equação (2.54)); analogamente às supernovas, de modo que estas ondas gravitacionais podem ser utilizadas então como sirenes padrão (SCHUTZ, 1986). O interferômetro LIGO, em conjunto com VIRGO (ABBOTT *et al.*, 2019, 2021), e o KAGRA (KAGRA COLLABORATION *et al.*, 2019) já detectaram 50 ondas gravitacionais, sendo apenas uma detecção com contraparte

eletromagnética (ABBOTT *et al.*, 2017), o que significa que apenas esta detecção nos permite medir distâncias até agora. A partir desta única detecção foi estimada a constante de Hubble, H_0 , como apresentada na Figura 2.11 retirada de WANG *et al.* (2023).

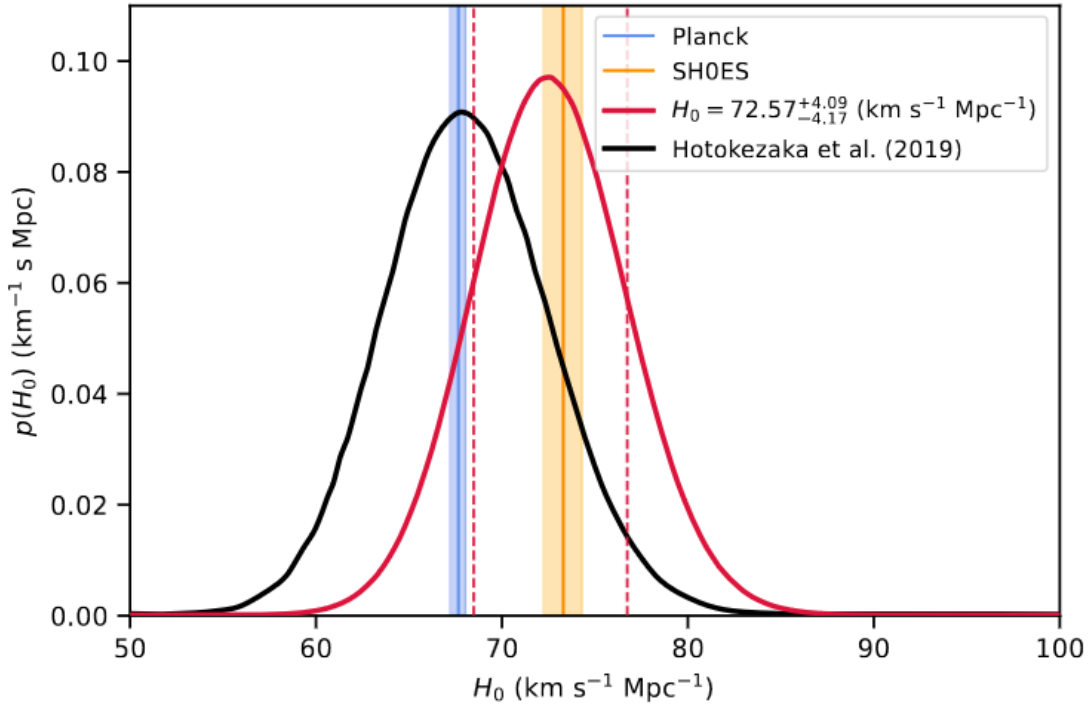


Figura 2.11: Constante de Hubble, H_0 , inferida a partir da onda gravitacional GW170817 (WANG *et al.*, 2023), representada pela curva em vermelho. Observa-se uma barra de incerteza alta para tal medição, que é ocasionada por conta de ter apenas uma onda gravitacional sendo utilizada para o cálculo da constante de Hubble. Representado em outras cores, temos diferentes medições da mesma constante, H_0 , para comparativo.

O Modelo Cosmológico Padrão nos oferece uma visão coerente e robusta do Universo, unificando observações e teorias em um quadro abrangente. No próximo capítulo, nos aprofundaremos na metodologia deste trabalho, explorando as ferramentas matemáticas e computacionais que utilizamos para realizar a pesquisa.

Capítulo 3

Metodologia

Testar o Princípio Cosmológico é de extrema importância para validar e aprimorar o Modelo Cosmológico Padrão. Afinal, a confirmação de sua validade fortalece a base teórica do modelo, dessa forma garantindo mais fidedignidade nas interpretações de observações astronômicas. Sendo assim, o foco neste trabalho é testar a consistência do Princípio Cosmológico, uma das formas de efetuar-lo é com o teste de consistência do parâmetro de densidade de curvatura, Ω_k , ao longo do *redshift*.

3.1 Testes Ω_k

Em CLARKSON *et al.* (2008), os autores buscam uma alternativa para explicar a aceleração cósmica, no qual a hipótese seria uma inhomogeneidade radial nos dados, ou seja, eles realizam um teste observacional do princípio copernicano de forma a testar a homogeneidade do Universo. Este teste é independente de modelos de energia escura e também da relatividade geral. Se há a violação do princípio de Copérnico, poderíamos então explicar os dados observacionais sem a necessidade de introduzir a energia escura, porém não resolveríamos o problema da constante cosmológica¹. Para este teste temos a dependência da relação de consistência que existe dentro da métrica FLRW, que são a homogeneidade e isotropia. No modelo FLRW temos a distância de luminosidade², d_L , visto na Equação (2.59), e o parâmetro de Hubble, $H(z)$, ambas dependentes do *redshift*.

Temos a seguinte relação de consistência:

$$d_L(z) = \frac{(1+z)}{H_0\sqrt{-\Omega_k}} \sin\left(\sqrt{-\Omega_k} \int_0^z dz' \frac{H_0}{H(z')}\right), \quad (3.1)$$

invertendo a equação,

¹Este é um problema relacionado com a grande discrepância entre observações cosmológicas e a teoria quântica de campos (cerca de 120 ordens de magnitude) quando comparamos o Λ com a densidade de energia do vácuo.

²Também pode ser usado a distância angular, d_A , sabendo da relação $d_L = (1+z)^2 d_A$.

$$\frac{H_0\sqrt{-\Omega_k}d_L(z)}{(1+z)} = \sin\left(\sqrt{-\Omega_k}\int_0^z dz' \frac{H_0}{H(z')}\right), \quad (3.2)$$

como a referência [CLARKSON *et al.* \(2008\)](#) não especifica quais parâmetros de densidade são considerados, supomos um Universo apenas com curvatura. Logo, a equação de Friedmann tem a seguinte forma:

$$H^2(z) = H_0^2 [\Omega_k(1+z)^2] \rightsquigarrow (1+z)^2 = \frac{H^2(z)}{H_0^2\Omega_k}. \quad (3.3)$$

Substituindo na equação (3.2),

$$\begin{aligned} \frac{H_0\sqrt{-\Omega_k}d_L(z)}{(1+z)} &= \sin\left(\sqrt{-\Omega_k}\int_0^z dz' \frac{H_0}{H_0\sqrt{\Omega_k}(1+z)}\right) \\ \frac{H_0\sqrt{-\Omega_k}d_L(z)}{1+z} &= \sin\left(\frac{\sqrt{-\Omega_k}}{\sqrt{\Omega_k}} \ln(1+z')\Big|_0^z\right) \\ \frac{H_0\sqrt{-\Omega_k}}{1+z}d_L(z) &= \sin(i \ln(1+z)). \end{aligned}$$

Sabendo que $d_L = (1+z)^2 d_A$, como visto na relação de dualidade cósmica, (2.59), e que $D = (1+z)d_A$, sendo D uma quantidade de distância definida por [CLARKSON *et al.* \(2008\)](#), temos,

$$d_L = (1+z)D \quad (3.4)$$

$$\frac{H_0\sqrt{-\Omega_k}}{(1+z)} \cdot (1+z)D = \sin(i \ln(1+z)),$$

assim,

$$\begin{aligned} -\Omega_k &= \frac{1}{H_0^2 D^2} \sin^2(i \ln(1+z)) \\ -\Omega_k &= \frac{1}{H_0^2 D^2} \left(-\frac{((1+z)^2 - 1)^2}{4(1+z)^2} \right). \end{aligned}$$

Usando da equação de Friedmann que: $(1+z)^2 = H^2(z)/(H_0^2\Omega_k)$, temos,

$$\begin{aligned}
\Omega_k &= \frac{1}{H_0^2 D^2} \left[\frac{H_0^2 \Omega_k}{4H^2(z)} \left(\frac{H^2(z) - H_0^2 \Omega_k}{H_0^2 \Omega_k} \right)^2 \right] \\
\Omega_k &= \left[\frac{H^4(z) - 2H^2(z)H_0^2 \Omega_k + H_0^4 \Omega_k^2}{4H^2(z)H_0^4 D^2 \Omega_k} \right] \\
\Omega_k &= \frac{H^2(z)}{4H_0^4 D^2 \Omega_k} - \frac{1}{2H_0^2 D^2} + \frac{\Omega_k}{4H^2(z)D^2} \\
\Omega_k &= \frac{1}{H_0^2 D^2} \left[\frac{H^2(z)}{4H_0^2 \Omega_k} - \frac{1}{2} + \frac{H_0^2 \Omega_k}{4H^2(z)} \right]. \tag{3.5}
\end{aligned}$$

Usando as definições de distância $D = (1+z)d_A$ e $d_L = (1+z)^2 d_A$ podemos derivar a quantidade D em função de z ,

$$D = \frac{(1+z)d_L}{(1+z)^2} = \frac{d_L}{(1+z)} \tag{3.6}$$

$$D = \frac{d_L}{(1+z)}$$

$$\begin{aligned}
D &= \frac{(1+z)}{H_0 \sqrt{-\Omega_k}} \sin \left(\sqrt{-\Omega_k} \int_0^z \frac{dz' H_0}{H(z')} \right) \frac{1}{(1+z)} \\
D &= \frac{1}{H_0 \sqrt{-\Omega_k}} \sin(i \ln(1+z)) \\
\frac{dD}{dz} &= \frac{1}{H_0 \sqrt{-\Omega_k}} \cdot \frac{i(z^2 + 2z + 2)}{2(1+z)^2} \equiv D',
\end{aligned}$$

elevando D' ao quadrado temos,

$$D'^2 = \frac{1}{-H_0^2 \Omega_k} \cdot (-1) \cdot \frac{(z^2 + 2z + 2)^2}{4(1+z)^4},$$

$$D'^2 = \frac{1}{H_0^2 \Omega_k} \frac{((1+z)^2 + 1)^2}{4(1+z)^4}, \text{ da equação de Friedmann } (1+z)^2 = \frac{H^2(z)}{H_0^2 \Omega_k},$$

$$\begin{aligned}
D'^2 &= \frac{1}{H_0^2 \Omega_k} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{H_0^4 \Omega_k^2}{H^4(z)} \left(\frac{H^2(z)}{H_0^2 \Omega_k} + 1 \right)^2 \\
D'^2 &= \frac{1}{4} \frac{H_0^2 \Omega_k}{H^4(z)} \left(\frac{H^4(z)}{H_0^4 \Omega_k^2} + \frac{2H^2(z)}{H_0^2 \Omega_k} + 1 \right) \\
D'^2 &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{H_0^2 \Omega_k} + \frac{2}{H^2(z)} + \frac{H_0^2 \Omega_k}{H^4(z)} \right],
\end{aligned}$$

multiplicando por $H^2(z)$ nos dois lados,

$$\begin{aligned} D'^2 H^2(z) &= \frac{1}{4} \left[\frac{H^2(z)}{H_0^2 \Omega_k} + 2 + \frac{H_0^2 \Omega_k}{H^2(z)} \right] \\ D'^2 H^2(z) &= \frac{H^2(z)}{4H_0^2 \Omega_k} + \frac{1}{2} + \frac{H_0^2 \Omega_k}{4H^2(z)}, \end{aligned}$$

subtraindo 1 nos dois lados,

$$\begin{aligned} D'^2 H^2(z) - 1 &= \frac{H^2(z)}{4H_0^2 \Omega_k^2} + \frac{1}{2} + \frac{H_0^2 \Omega_k}{4H^2(z)} - 1 \\ D'^2 H^2(z) - 1 &= \frac{H^2(z)}{4H_0^2 \Omega_k} - \frac{1}{2} + \frac{H_0^2 \Omega_k}{4H^2(z)}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

voltando e substituindo (3.7) em (3.5),

$$\begin{aligned} \Omega_k &= \frac{1}{H_0^2 D^2} \cdot (D'^2 H^2(z) - 1) \\ \Omega_k &= \frac{[H(z)D'(z)]^2 - 1}{[H_0 D(z)]}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

A partir de (3.8), podemos escrever a incerteza de Ω_k como

$$\sigma_{\Omega_k} = \left[\left(\frac{\partial \Omega_k}{\partial H(z)} \right)^2 \sigma_H^2 + \left(\frac{\partial \Omega_k}{\partial D'} \right)^2 \sigma_{D'}^2 + \left(\frac{\partial \Omega_k}{\partial H_0} \right)^2 \sigma_{H_0}^2 + \left(\frac{\partial \Omega_k}{\partial D} \right)^2 \sigma_D^2 + \left(\frac{\partial \Omega_k}{\partial z} \right)^2 \sigma_z^2 \right]^{1/2}, \quad (3.9)$$

porém D e conseqüentemente D' tem dependência de d_L (Equação (2.43)), portanto iremos reescrever a Equação (3.8) para então reescrevermos a incerteza, (3.9):

$$\Omega_k = \left(H^2(z) \cdot \frac{d_L^2}{(1+z)^4} - 1 \right) / \left(H_0^2 \cdot \frac{d_L^2}{(1+z)^2} \right), \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\Omega_k} &= \left[\left(\frac{\partial \Omega_k}{\partial H(z)} \right)^2 \sigma_H^2 + \left(\frac{\partial \Omega_k}{\partial D'} \right)^2 \left(\frac{\partial D'}{\partial d_L} \right)^2 \left(\frac{\partial d_L}{\partial \mu} \right)^2 \sigma_\mu^2 + \left(\frac{\partial \Omega_k}{\partial H_0} \right)^2 \sigma_{H_0}^2 + \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{\partial \Omega_k}{\partial D} \right)^2 \left(\frac{\partial D}{\partial d_L} \right)^2 \left(\frac{\partial d_L}{\partial \mu} \right)^2 \sigma_\mu^2 + \left(\frac{\partial \Omega_k}{\partial z} \right)^2 \sigma_z^2 \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\Omega_k} = & \left[\left(\frac{2H(z)D'^2(z)}{H_0^2 D^2(z)} \right)^2 \sigma_H^2 + \left(\frac{2H^2(z)D'(z)}{H_0^2 D^2(z)} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{(1+z)^2} \right)^2 \cdot \left(2^{\frac{\mu}{5}-5} \cdot 5^{\frac{\mu}{5}-6} \cdot \ln(10) \right)^2 \sigma_\mu^2 + \right. \\
& + \left(\frac{-2(H^2(z)D'^2(z) - 1)}{H_0^3 D^2(z)} \right)^2 \sigma_{H_0}^2 + \left(\frac{-2(H^2(z)D'^2(z) - 1)}{H_0^2 D^3(z)} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{1+z} \right)^2 \cdot \\
& \left. \cdot \left(2^{\frac{\mu}{5}-5} \cdot 5^{\frac{\mu}{5}-6} \cdot \ln(10) \right)^2 \sigma_\mu^2 \right]^{1/2},
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\Omega_k} = & \left[\left(\frac{2H(z)D'^2(z)}{H_0^2 D^2(z)} \right)^2 \sigma_H^2 + \left(\frac{2H^2(z)D'(z)}{H_0^2 D^2(z)} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{(1+z)^2} \right)^2 \cdot \left(2^{\frac{\mu}{5}-5} \cdot 5^{\frac{\mu}{5}-6} \cdot \ln(10) \right)^2 \sigma_\mu^2 + \right. \\
& + \left(\frac{-2(H^2(z)D'^2(z) - 1)}{H_0^3 D^2(z)} \right)^2 \sigma_{H_0}^2 + \left(\frac{-2(H^2(z)D'^2(z) - 1)}{H_0^2 D^3(z)} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{1+z} \right)^2 \cdot \\
& \left. \cdot \left(2^{\frac{\mu}{5}-5} \cdot 5^{\frac{\mu}{5}-6} \cdot \ln(10) \right)^2 \sigma_\mu^2 + \underbrace{\left(\frac{2H^2(z)D^2(z)D''(z) - 2H^2(z)D'^3(z) + 2D'(z)}{H_0^2 D^4(z)} \right)}_* \sigma_z^2 \right]^{1/2},
\end{aligned} \tag{3.13}$$

como as incertezas do *redshift*, σ_z^2 , são pequenas podemos desconsiderar todo o termo (*).

Com isso podemos calcular o Ω_k e σ_{Ω_k} de forma mais direta, a partir das equações (3.10) e (3.13), que obtemos nesta seção. A partir desses cálculos poderemos construir gráficos com nossos resultados que serão apresentados no capítulo 4. Apresentada a parte matemática, na seção seguinte, 3.2, veremos a parte computacional da metodologia.

3.2 Processos Gaussianos

A regressão é um método comumente utilizado em estudos estatísticos, cuja ideia por trás dele é a seguinte: colocamos os dados de entrada e são consideradas todas as funções possíveis, e suas probabilidades correspondentes, que possam descrever esses dados. A partir disso nós podemos considerar quais dessas funções (como linear, polinomial, etc.) são mais prováveis que as outras.

Quando pensamos em Processos Gaussianos, estamos assumindo uma regressão com forma não paramétrica, o que significa dizer que esse método pode adaptar sua provável função à complexidade dos dados sem categorizar uma forma específica a priori. Neste processo, além de prever uma função (que representa, em média, a curva que melhor ajusta os dados), também irá fornecer uma estimativa das incertezas relacionadas a essa

previsão, o que torna esse método extremamente útil para analisar o tipo de dados presentes nesse trabalho, limitados e com a relação entre eles desconhecida previamente.

A grande vantagem de utilizar a regressão por Processos Gaussianos está na flexibilidade da incerteza, regressões comuns não costumam ter uma medida tão bem explícita das incertezas associadas aos dados. E como nossos dados observacionais são limitados em quantidade, utilizar os Processos Gaussianos nos permite ter uma boa ideia do comportamento que iremos obter ao conseguir mais dados.

Para realizar este método foi utilizado o pacote *python* GAPP, que é comumente utilizado em pesquisas na área de Cosmologia. Para mais detalhes sobre o código vide [SEIKEL et al. \(2012\)](#)³. Além disso, as reconstruções são realizadas no intervalo de *redshift* $0.1 < z < 2.5$.

Construímos um gráfico, Figura 3.1, com a reconstrução de $H(z)$ dos dados obtidos da referência [MAGAÑA et al. \(2018\)](#), para exemplificar uma reconstrução por Processos Gaussianos. Nele podemos observar uma faixa de possíveis valores dentro de 1σ , 2σ e 3σ , e assim compreender o quanto os dados coincidem com a reconstrução.

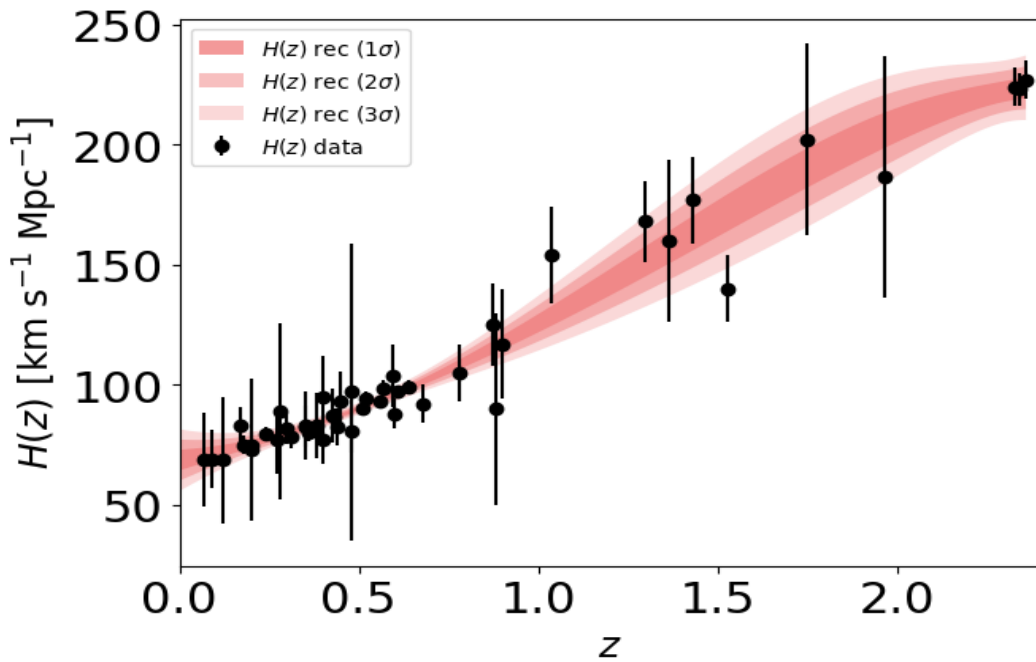


Figura 3.1: $H(z)$ reconstruído a partir de Processos Gaussianos com dados de [MAGAÑA et al. \(2018\)](#).

Dentro do método de Processos Gaussianos temos um ponto importante que é a escolha do *kernel*. O *kernel* é uma função que irá identificar a similaridade entre vários pontos dos dados de entrada, dentro dos Processos Gaussianos ele irá modelar a covariância⁴ dos dados e assim podemos saber como que a proximidade dos pontos irá se refletir nas

³Veja também <https://github.com/astrobengaly/GaPP> (acessado em 03/07/2024).

⁴Medida estatística onde é possível comparar duas variáveis, permitindo entender como elas se relacionam entre si.

previsões. Neste trabalho escolhemos o *kernel Squared Exponential*, pois foi o que melhor se adequou aos dados, este *kernel* modela os dados de forma não linear como é discutido nas referências⁵ WILLIAMS e RASMUSSEN (2006) e SEIKEL *et al.* (2012),

$$k(x_i, x_j) = \sigma_f^2 \exp\left(-\frac{\|x_i - x_j\|^2}{2l^2}\right), \quad (3.14)$$

onde x_i e x_j são os dados de entrada para o cálculo da covariância, $\|x_i - x_j\|^2$ é a distância Euclidiana ao quadrado dos dados de entrada, σ_f^2 é a variância⁶ do processo gaussiano e l é a escala de variação das previsões. As quantidades citadas correspondem aos hiperparâmetros dos processos gaussianos que serão otimizados durante o processo de reconstrução, conforme descrito na documentação do pacote GAPP. Além disto, foi testado o *kernel Matern92* neste trabalho, este também faz modelagens não lineares levando em consideração os parâmetros anteriores,

$$k(x_i, x_j) = \sigma_f^2 \exp\left(-\frac{3\|x_i - x_j\|}{l}\right) \left(1 + \frac{3\|x_i - x_j\|}{l} + \frac{27\|x_i - x_j\|^2}{7l^2} + \frac{18\|x_i - x_j\|^3}{7l^3} + \frac{27\|x_i - x_j\|^4}{35l^4}\right). \quad (3.15)$$

⁵Veja também <https://gaussianprocess.org/gpml/chapters/RW.pdf> (acessado em 20/06/2024).

⁶Medida de dispersão que mostra o quão distante cada valor do conjunto de dados está do valor médio.

Capítulo 4

Resultados

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos da análise do parâmetro de curvatura, Ω_k , a partir do teste de consistência do mesmo. Mostramos como os dados atuais se comportam em uma tendência de concordância com o Modelo Cosmológico Padrão atual, Λ CDM, e também como simulações apresentam possíveis resultados para nossos testes de consistência.

4.1 Dados atuais

Primeiramente são realizadas reconstruções via Processos Gaussianos, conforme visto na seção 3.2. Tais reconstruções são feitas utilizando dados de valores do parâmetro de Hubble de [BENGALY *et al.* \(2023\)](#), valores estes medidos a partir de cronômetros cósmicos (veja seção 2.4), que vemos na Figura 4.1; além disso são reconstruídos também os valores de módulo da distância de supernovas do tipo Ia (veja seção 2.4), da colaboração Pantheon+SH0ES ([BROUT *et al.*, 2022](#); [RIESS *et al.*, 2022](#); [SCOLNIC *et al.*, 2022](#)), que podemos observar na Figura 4.2.

Também apresentamos as derivadas numéricas de cada reconstrução dos dados utilizados, observados nas Figuras 4.3 e 4.4, respectivamente as derivadas do parâmetro de Hubble e do módulo de distância. Estas são necessárias para o cálculo de Ω_k e sua incerteza.

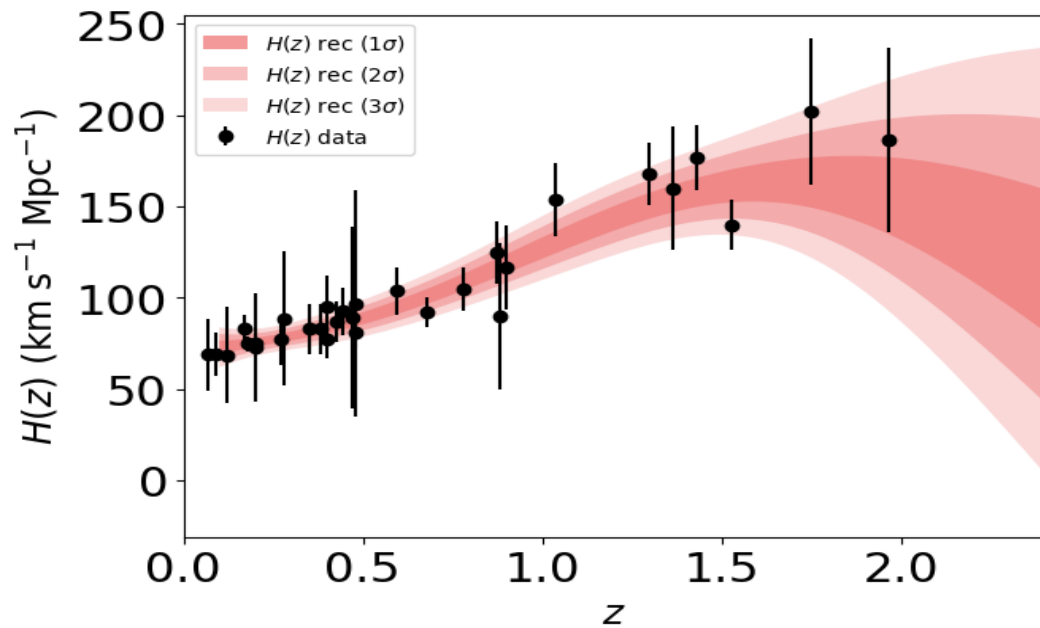


Figura 4.1: Parâmetro de Hubble versus *redshift*. Reconstrução dos dados de cronômetros cósmicos da referência [BENGALY *et al.* \(2023\)](#) a partir de Processos Gaussianos.

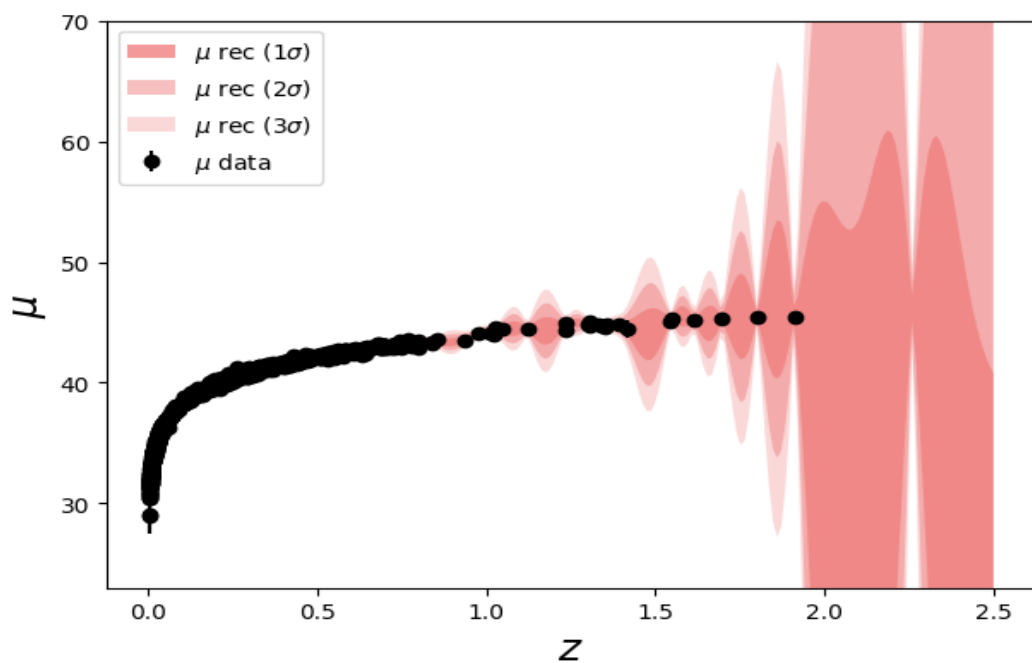


Figura 4.2: Módulo de distância versus *redshift*. Reconstrução dos dados de supernovas de tipo Ia da colaboração Pantheon+SH0ES ([BROUT *et al.*, 2022](#); [RIESS *et al.*, 2022](#); [SCOLNIC *et al.*, 2022](#)) a partir de Processos Gaussianos.

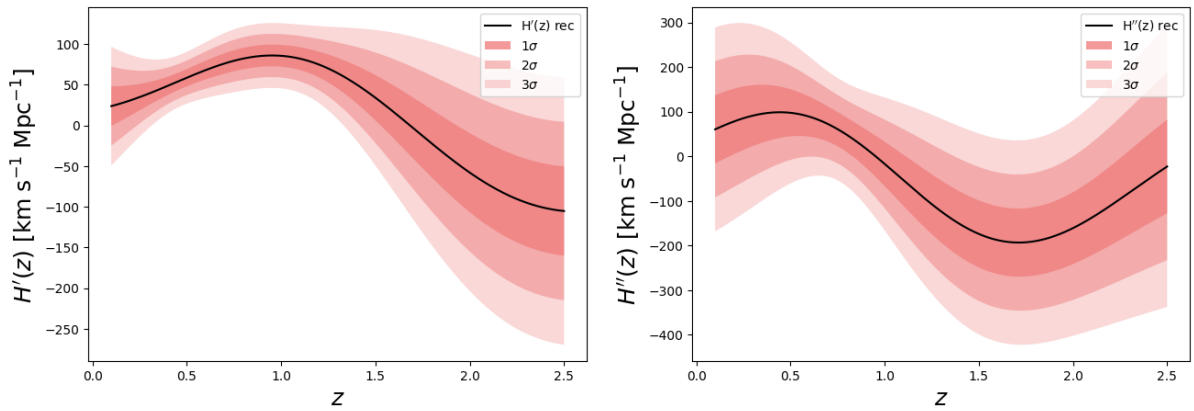


Figura 4.3: Derivadas do parâmetro de Hubble ao longo do *redshift*. No painel esquerdo observa-se a primeira derivada, $H'(z)$, e no painel direito observa-se a segunda derivada, $H''(z)$. Reconstruções feitas a partir dos dados de [BENGALY *et al.* \(2023\)](#).

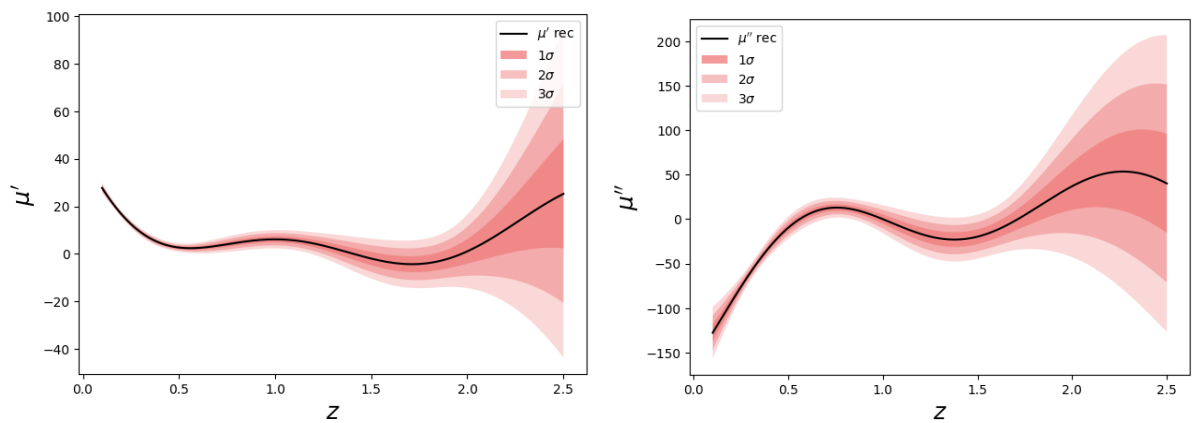


Figura 4.4: Derivadas do módulo de distância ao longo do *redshift*. No painel esquerdo observa-se a primeira derivada, μ' , e no painel direito observa-se a segunda derivada, μ'' . Reconstruções feitas a partir dos dados de [BROUT *et al.* \(2022\)](#); [RIESS *et al.* \(2022\)](#); [SCOLNIC *et al.* \(2022\)](#).

Ao juntar as reconstruções, tanto dos dados como as derivadas, podemos calcular o parâmetro de curvatura, Ω_k . Este cálculo é feito no intervalo de *redshift* entre 0.1 e 2.0, visto que para um *redshift* localmente próximo de nós ($z \rightarrow 0.0$) não conseguimos ter uma análise coesa sobre a curvatura, pois $D(z) \rightarrow 0.0$ e portanto a equação que define Ω_k , (3.8), fica com valor indeterminado.

Podemos observar na Figura 4.5 um comportamento constante na evolução de Ω_k além de incertezas calculadas dentro de 1σ que também se mantém constantes até aproximadamente $z \approx 0.8$, com isso não observamos um desvio do Princípio Cosmológico visto a constância da curvatura. A partir do valor de *redshift* $z \approx 0.8$ observamos uma variação maior na incerteza de Ω_k que acontece por termos uma quantidade menor de dados disponíveis para este intervalo. Temos um resultado consistente com um Universo de geometria plana ($\Omega_k = 0$) considerando as incertezas dentro de 1σ , o que concorda com o modelo padrão atual, Λ CDM. Porém também observamos incertezas muito altas, visto que o valor máximo da incerteza na Figura 4.5 é de aproximadamente $\Omega_k \approx 10.0$, estes valores altos não agregam para nossas análises.

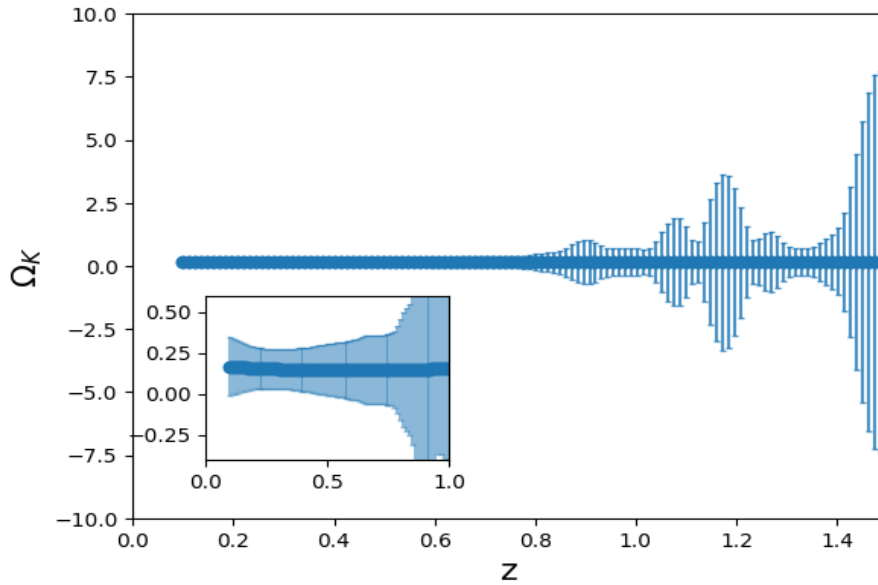


Figura 4.5: Evolução de Ω_k ao longo do *redshift* a partir da reconstruções de dados atuais. Em destaque uma área ampliada no intervalo de *redshift* $0 < z < 1.0$.

Visto o problema com as altas incertezas no parâmetro de curvatura, decidimos realizar algumas simulações, para observar se iremos ter alguma melhora em nossos resultados, conforme será visto na próxima seção, 4.2.

4.2 Simulações de Dados Futuros

Como nossos resultados com dados atuais tem incertezas extremamente altas, partimos para a análise utilizando simulações para assim ter algumas perspectivas do que esperar com dados futuros. Primeiro escolhemos a colaboração J-PAS, do inglês *Javalambre Physics of the Accelerating Universe Astrophysical Survey* (BENITEZ *et al.*, 2014), onde produzimos dados simulados de $H(z)$ via Oscilações Acústicas de Bárions (veja seção 2.4), seguindo as especificações do levantamento fornecidas em APARICIO RESCO *et al.* (2020). Realizamos o mesmo procedimento de reconstrução por Processos Gaussianos, obtendo o resultado apresentado na Figura 4.6.

Além disso utilizamos dados simulados de Ondas Gravitacionais (veja seção 2.4) que são tratadas como sirenes padrão, logo podem ser comparáveis às velas padrões. Foram escolhidos dois interferômetros como base de dados: LIGO, do inglês *Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory* (ABBOTT *et al.*, 2019, 2021) e ET, do inglês *Einstein Telescope* (BRANCHESI *et al.*, 2023). Estas simulações foram produzidas seguindo o método descrito em ZHANG *et al.* (2019) (veja também CUTLER e HOLZ (2009); ZHAO *et al.* (2011)). Estas ondas gravitacionais tem como fonte sistemas binários: estrela de nêutrons - buraco negro ou estrela de nêutrons - estrela de nêutrons; o sistema binário do tipo buraco negro - buraco negro não tem suas ondas gravitacionais detectadas pelo LIGO pois o mesmo opera em uma frequência mais baixa do que o esperado de uma colisão entre dois buracos negros massivos. Além disso o modelo fiducial assumido em ambas as simulações de $H(z)$ e $d_L(z)$ correspondem ao melhor ajuste do modelo Λ CDM plano, obtido pelo Pantheon+SH0ES (BROUT *et al.*, 2022), ou seja, assumimos $H_0 = 73.30 \pm 1.04$ km/s/Mpc e $\Omega_m = 0.334 \pm 0.018$.

Novamente é realizado o procedimento de reconstrução por Processos Gaussianos, e obtemos os resultados mostrados nas figuras 4.7 e 4.8.

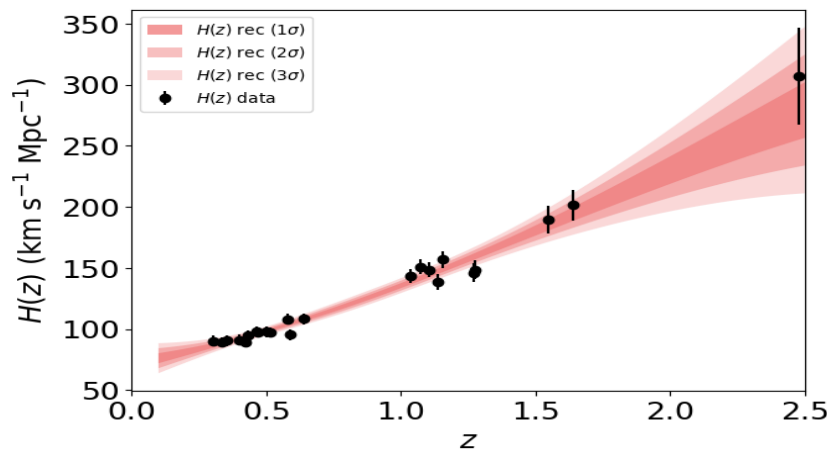


Figura 4.6: Parâmetro de Hubble ao longo do *redshift*. Reconstrução por Processos Gaussianos a partir de dados simulados da colaboração J-PAS (APARICIO RESCO *et al.*, 2020; BENITEZ *et al.*, 2014).

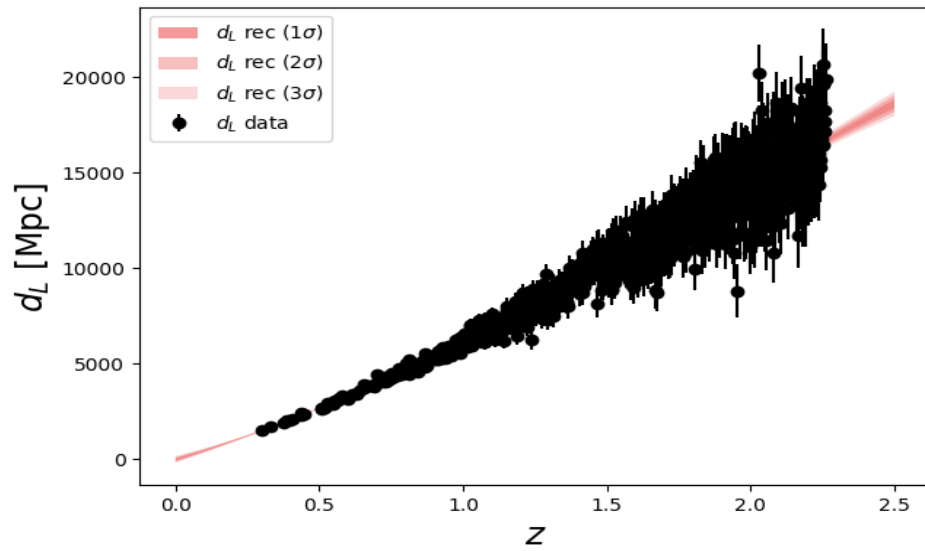


Figura 4.7: Distância luminosa ao longo do *redshift*. Reconstrução por Processos Gaussianos a partir de dados simulados da colaboração LIGO (ABBOTT *et al.*, 2019, 2021).

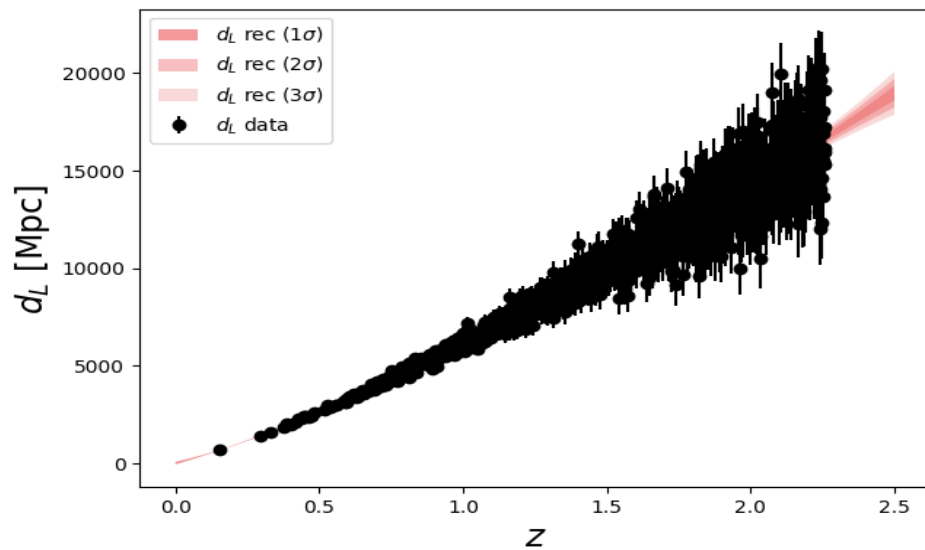


Figura 4.8: Distância luminosa ao longo do *redshift*. Reconstrução por Processos Gaussianos a partir de dados simulados da colaboração ET (BRANCHESI *et al.*, 2023).

As derivadas numéricas de cada reconstrução, $H(z)$ e d_L , são apresentadas na sequência. Na Figura 4.9 temos as derivadas do parâmetro de Hubble, e nas figuras a seguir, 4.10 e 4.11, temos as derivadas da distância de luminosidade. Estas derivadas são necessárias para o cálculo de Ω_k e sua incerteza.

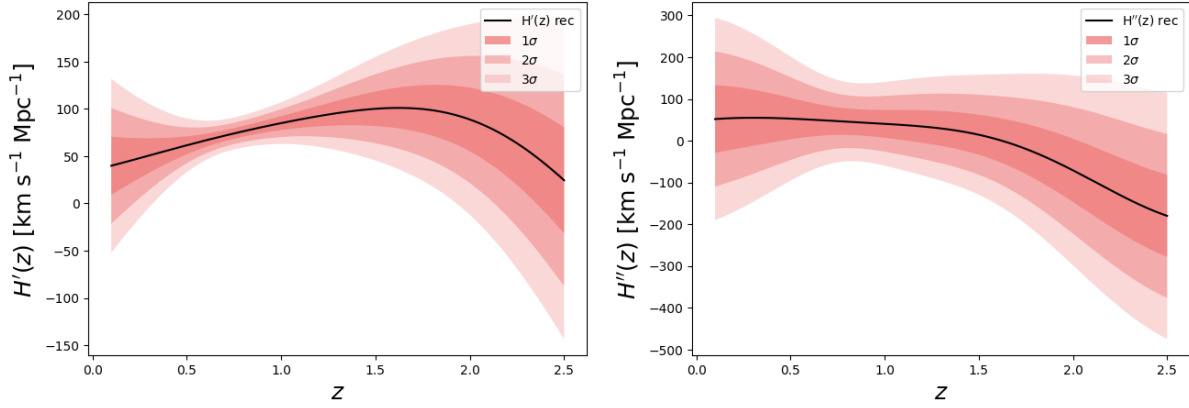


Figura 4.9: Derivadas do parâmetro de Hubble ao longo do *redshift* utilizando reconstruções de dados simulados do J-PAS (APARICIO RESCO *et al.*, 2020; BENITEZ *et al.*, 2014). No painel esquerdo observa-se a primeira derivada, $H'(z)$, e no painel direito observa-se a segunda derivada, $H''(z)$.

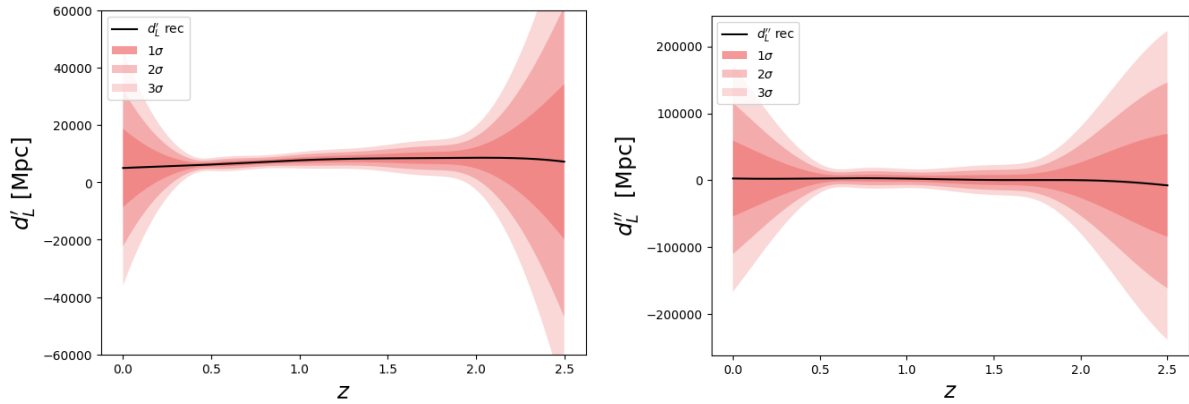


Figura 4.10: Derivadas da distância de luminosidade ao longo do *redshift* utilizando reconstruções de dados simulados do LIGO (ABBOTT *et al.*, 2019, 2021). No painel esquerdo observa-se a primeira derivada, d'_L , e no painel direito observa-se a segunda derivada, d''_L .

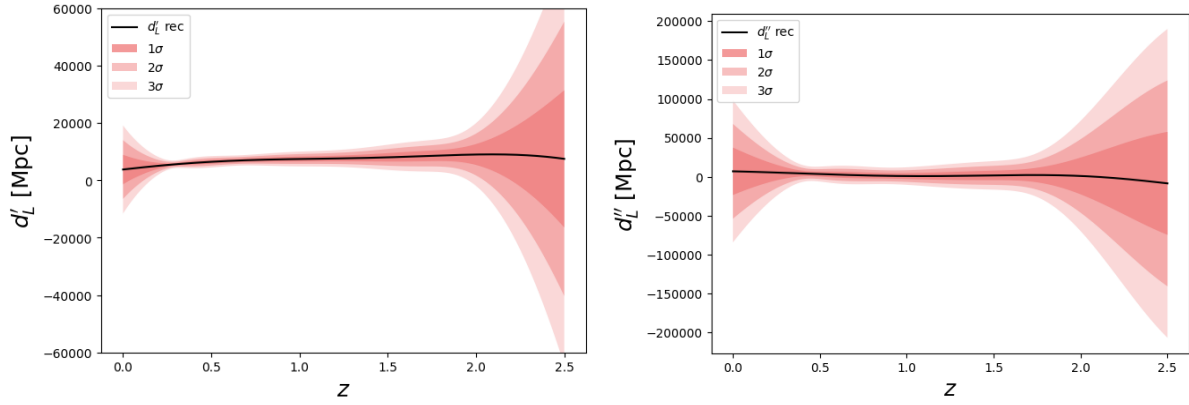


Figura 4.11: Derivadas da distância de luminosidade ao longo do *redshift* utilizando reconstruções de dados simulados do ET (BRANCHESI *et al.*, 2023). No painel esquerdo observa-se a primeira derivada, d'_L , e no painel direito observa-se a segunda derivada, d''_L .

Após estes processos, foi realizado o cálculo da constante de curvatura, Ω_k . O que obtivemos foi uma distribuição com incertezas significativamente melhores do que tivemos na seção 4.1, sendo agora o valor máximo da barra de erro próximo de $\Omega_k \approx 0.8$ dentro de 1σ . Observamos na Figura 4.12, o resultado da junção das simulações do J-PAS com LIGO e na Figura 4.13 os resultados da junção do J-PAS com o ET. Ambos os resultados se apresentam ao redor de um valor positivo do parâmetro de curvatura, o que nos indicaria um Universo com curvatura hiperbólica (veja seção 2.3.1), porém dentro da incerteza de 1σ temos concordância com o modelo padrão, ou seja, $\Omega_k = 0$, em baixos e altos *redshifts*. Já no intervalo de aproximadamente $0.5 < z < 1.50$, teremos concordância com o Λ CDM se expandirmos a incerteza para 2σ .

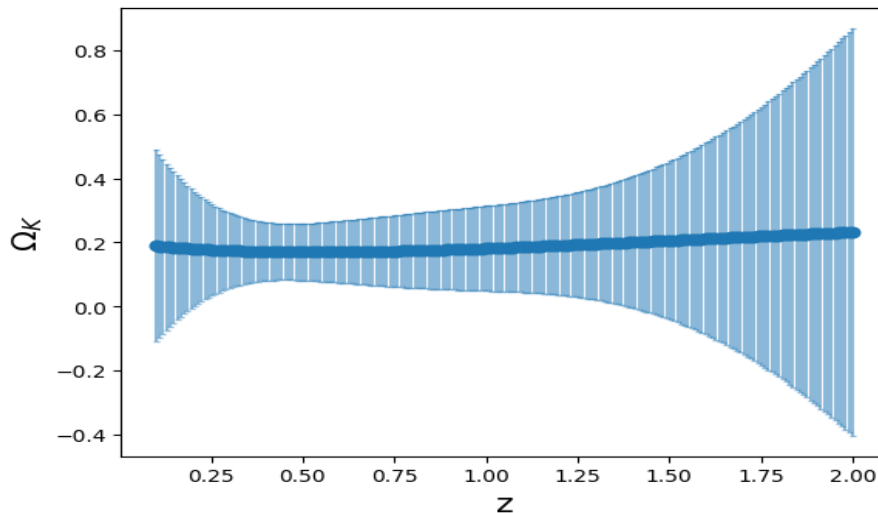


Figura 4.12: Evolução de Ω_k com reconstruções dos dados simulados do J-PAS (APARICIO RESCO *et al.*, 2020; BENITEZ *et al.*, 2014) e LIGO (ABBOTT *et al.*, 2019, 2021).

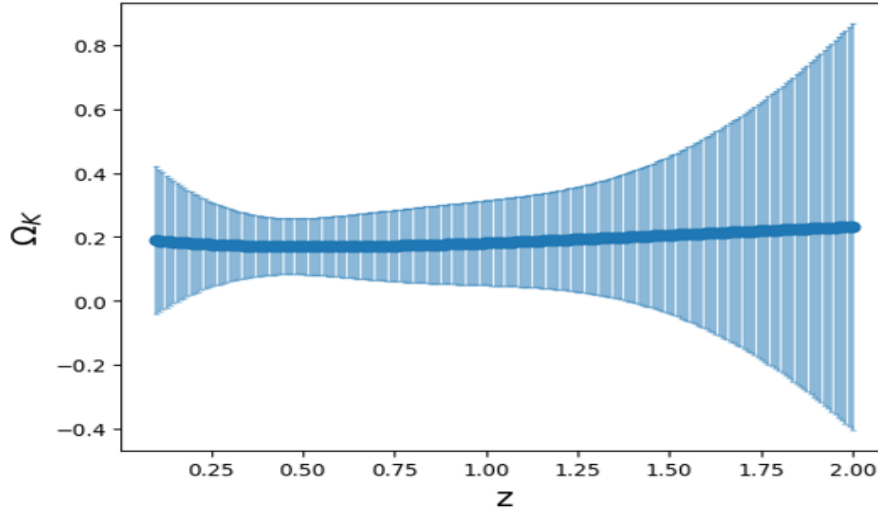


Figura 4.13: Evolução de Ω_k com reconstruções dos dados simulados do J-PAS (APARICIO RESCO *et al.*, 2020; BENITEZ *et al.*, 2014) e ET (BRANCHESI *et al.*, 2023).

Com esses resultados obtemos concordância com o Princípio Cosmológico. Não obtendo evidências para uma evolução do parâmetro de curvatura, conseguimos manter a validade da homogeneidade dentro do intervalo de *redshift* testado.

4.2.1 Testes com Simulações

Nesta seção mostramos mais resultados obtidos a partir da combinação de dados simulados com dados reais. A começar por um resultado bastante interessante e otimista de um parâmetro de curvatura, Ω_k , obtido a partir da combinação do módulo de distância da colaboração Pantheon+SH0ES (BROUT *et al.*, 2022; RIESS *et al.*, 2022; SCOLNIC *et al.*, 2022) com as simulações da distância de luminosidade de ondas gravitacionais do LIGO (ABBOTT *et al.*, 2019, 2021), junto com o parâmetro de Hubble obtido com cronômetros cósmicos de Bengaly (BENGALY *et al.*, 2023). A Figura 4.14 apresenta uma barra de incerteza muito bem comportada com seu máximo atingindo aproximadamente $\Omega_k \approx 1.0$, além disso temos um Ω_k levemente positivo que dentro de 1σ concorda com o modelo padrão Λ CDM ($\Omega_k = 0$). Além disso mantemos a validade do Princípio Cosmológico.

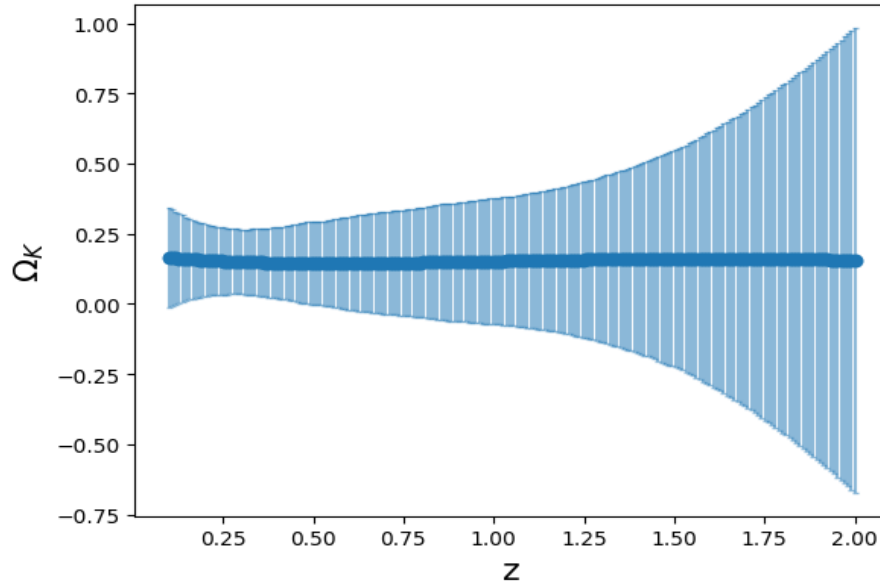


Figura 4.14: Evolução de Ω_k com dados do Pantheon+SH0ES combinados com reconstruções dos dados simulados do LIGO, e dados de Bengaly.

Outro teste interessante a ser feito é usar os valores do parâmetro de Hubble simulados pela colaboração J-PAS em conjunto com os dados de supernovas tipo Ia do Pantheon+SH0ES. A Figura 4.15 apresenta um resultado muito similar ao que vemos na Figura 4.5 que foi produzida a partir de reconstruções de dados puramente observacionais, isso nos leva a concluir que a mudança dos dados de entrada do parâmetro de Hubble não influenciam significativamente no resultado de Ω_k .

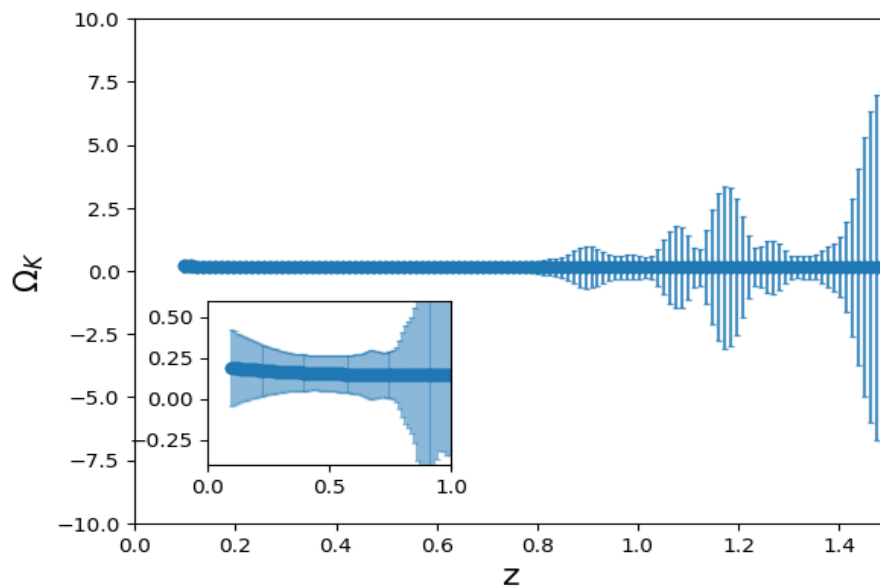


Figura 4.15: Evolução de Ω_k com dados do Pantheon+SH0ES combinados com dados simulados do J-PAS. Em destaque uma área ampliada no intervalo de *redshift* $0 < z < 1.0$.

Capítulo 5

Conclusões

O Modelo Cosmológico Padrão é o modelo mais adequado para descrever os dados observacionais atualmente. Porém, existem problemas teóricos e tensões em parâmetros cosmológicos dentro de seu próprio paradigma ainda não resolvidos. Portanto, é extremamente importante verificar os fundamentos deste modelo, a exemplo do Princípio Cosmológico, pois qualquer desvio estatístico poderia indicar uma nova física.

Neste trabalho, testamos se há algum indício de evolução do parâmetro de curvatura, Ω_k , em função do *redshift*. Sendo este o caso, teríamos um indicativo de que o Princípio Cosmológico não é uma hipótese válida para descrever o Universo observável, indicando assim uma evidência para uma nova física além do modelo padrão. Através de dados de Supernovas do tipo Ia e idade de galáxias, não encontramos evidência a favor da evolução deste parâmetro, confirmando as previsões do Modelo Cosmológico Padrão. Ainda assim, as incertezas de nossa análise são bastante elevadas, devido à limitação dos dados atuais. Em vista disso, utilizamos dados que simulamos de ondas gravitacionais e de oscilações acústicas bariônicas, obtendo incertezas bem menores neste caso. Estes resultados mostram, então, que não há evidência de desvio de um dos pilares fundamentais do Modelo Cosmológico Padrão e que este teste poderá ser realizado com precisão significativamente melhor com a próxima geração de observações cosmológicas.

Referências Bibliográficas

- ABBOTT, B. P., ABBOTT, R., ABBOTT, T. D., et al., 2017, “GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral”, *Phys. Rev. Lett.*, 119(16):161101. doi: 10.1103/PhysRevLett.119.161101.
- ABBOTT, B. P., ABBOTT, R., ABBOTT, T. D., et al., 2019, “GWTC-1: A Gravitational-Wave Transient Catalog of Compact Binary Mergers Observed by LIGO and Virgo during the First and Second Observing Runs”, *Physical Review X*, 9(3):031040. doi: 10.1103/PhysRevX.9.031040.
- ABBOTT, R., ABBOTT, T. D., ABRAHAM, S., et al., 2021, “GWTC-2: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo during the First Half of the Third Observing Run”, *Physical Review X*, 11(2):021053. doi: 10.1103/PhysRevX.11.021053.
- APARICIO RESCO, M., MAROTO, A. L., ALCANIZ, J. S., et al., 2020, “J-PAS: forecasts on dark energy and modified gravity theories”, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 493, n. 3 (abr.), pp. 3616–3631. doi: 10.1093/mnras/staa367.
- BEDRAN, M. L., 2002, “A comparison between the Doppler and cosmological redshifts”, *American Journal of Physics*, v. 70, n. 4, pp. 406–408.
- BENGALY, C., ALDINEZ DANTAS, M., CASARINI, L., et al., 2023, “Measuring the Hubble constant with cosmic chronometers: a machine learning approach”, *European Physical Journal C*, 83(6):548. doi: 10.1140/epjc/s10052-023-11734-1.
- BENITEZ, N., DUPKE, R., MOLES, M., et al., 2014, “J-PAS: The Javalambre-Physics of the Accelerated Universe Astrophysical Survey”, *arXiv e-prints*, art. arXiv:1403.5237. doi: 10.48550/arXiv.1403.5237.
- BRANCHESI, M., MAGGIORE, M., ALONSO, D., et al., 2023, “Science with the Einstein Telescope: a comparison of different designs”, *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 2023(7):068. doi: 10.1088/1475-7516/2023/07/068.
- BROUT, D., SCOLNIC, D., POPOVIC, B., et al., 2022, “The Pantheon+ Analysis: Cosmological Constraints”, *Astrophys. J.*, 938(2):110. doi: 10.3847/1538-4357/ac8e04.

- CARMELI, M., HARTNETT, J. G., OLIVEIRA, F. J., 2006, “The Cosmic Time in Terms of the Redshift”, *Foundations of Physics Letters*, v. 19, n. 3, pp. 277–283.
- CARROLL, B. W., OSTLIE, D. A., 2017, *An introduction to modern astrophysics*. Cambridge University Press.
- CLARKSON, C., 2012, “Establishing homogeneity of the universe in the shadow of dark energy”, *Comptes Rendus Physique*, v. 13, n. 6-7 (jul.), pp. 682–718. doi: 10.1016/j.crhy.2012.04.005.
- CLARKSON, C., BASSETT, B., LU, T. H.-C., 2008, “A general test of the Copernican Principle”, *Physical Review Letters*, v. 101, n. 1, pp. 011301.
- CUTLER, C., FLANAGAN, É. E., 1994, “Gravitational waves from merging compact binaries: How accurately can one extract the binary’s parameters from the inspiral waveform\?” *Phys. Rev. D*, v. 49, n. 6 (mar.), pp. 2658–2697. doi: 10.1103/PhysRevD.49.2658.
- CUTLER, C., HOLZ, D. E., 2009, “Ultrahigh precision cosmology from gravitational waves”, *Phys. Rev. D*, 80(10):104009. doi: 10.1103/PhysRevD.80.104009.
- DI VALENTINO, E., MENA, O., PAN, S., et al., 2021, “In the realm of the Hubble tension-a review of solutions”, *Classical and Quantum Gravity*, 38(15):153001. doi: 10.1088/1361-6382/ac086d.
- EINSTEIN, A., 1916, “Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie”, *Annalen der Physik*, v. 354, n. 7 (jan.), pp. 769–822. doi: 10.1002/andp.19163540702.
- EISENSTEIN, D. J., ZEHAVID, I., HOGG, D. W., et al., 2005, “Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies”, *Astrophys. J.*, v. 633, n. 2 (nov.), pp. 560–574. doi: 10.1086/466512.
- FOSTER, J., NIGHTINGALE, J. D., FOSTER, J., 1995, *A short course in General Relativity*. Springer.
- FREEDMAN, W. L., MADORE, B. F., GIBSON, B. K., et al., 2001, “Final Results from the Hubble Space Telescope Key Project to Measure the Hubble Constant”, *Astrophys. J.*, v. 553, n. 1 (maio), pp. 47–72. doi: 10.1086/320638.
- FRIEDMANN, A., 1922, “Über die Krümmung des Raumes”, *Zeitschrift für Physik*, v. 10 (jan.), pp. 377–386. doi: 10.1007/BF01332580.

- FRIEDMANN, A., 1924, “Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes”, *Zeitschrift für Physik*, v. 21, n. 1 (dez.), pp. 326–332. doi: 10.1007/BF01328280.
- HARTLE, J. B., 2003. “Gravity: an introduction to Einstein’s general relativity”. .
- HOLZ, D. E., HUGHES, S. A., 2005, “Using Gravitational-Wave Standard Sirens”, *Astrophys. J.*, v. 629, n. 1 (ago.), pp. 15–22. doi: 10.1086/431341.
- HUBBLE, E., 1929, “A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae”, *Proceedings of the national academy of sciences*, v. 15, n. 3, pp. 168–173.
- KAGRA COLLABORATION, AKUTSU, T., ANDO, M., et al., 2019, “KAGRA: 2.5 generation interferometric gravitational wave detector”, *Nature Astronomy*, v. 3 (jan.), pp. 35–40. doi: 10.1038/s41550-018-0658-y.
- KIRSHNER, R. P., 2004, “Hubble’s diagram and cosmic expansion”, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 101, n. 1, pp. 8–13.
- LEAVITT, H. S., PICKERING, E. C., 1912, “Periods of 25 Variable Stars in the Small Magellanic Cloud.” *Harvard College Observatory Circular*, v. 173, pp. 1–3.
- MAGAÑA, J., AMANTE, M. H., GARCIA-ASPEITIA, M. A., et al., 2018, “The Cardassian expansion revisited: constraints from updated Hubble parameter measurements and type Ia supernova data”, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 476, n. 1 (maio), pp. 1036–1049. doi: 10.1093/mnras/sty260.
- MAGGIORE, M., 2018, *Gravitational Waves: Volume 2: Astrophysics and Cosmology*. Oxford University Press.
- MATHER, J. C., CHENG, E. S., COTTINGHAM, D. A., et al., 1994, “Measurement of the Cosmic Microwave Background Spectrum by the COBE FIRAS Instrument”, *Astrophys. J.*, v. 420 (jan.), pp. 439. doi: 10.1086/173574.
- MORESCO, M., AMATI, L., AMENDOLA, L., et al., 2022, “Unveiling the Universe with emerging cosmological probes”, *Living Reviews in Relativity*, 25(1):6. doi: 10.1007/s41114-022-00040-z.
- NESSERIS, S., PERIVOLAROPOULOS, L., 2007, “Crossing the phantom divide: theoretical implications and observational status”, *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 2007(1):018. doi: 10.1088/1475-7516/2007/01/018.
- PACUCCI, F., 2016, *The First Black Holes in the Cosmic Dark Ages*. Tese de Doutorado, Scuola Normale Superiore, Pisa, Italy, ago.

- PERIVOLAROPOULOS, L., SKARA, F., 2022, “Challenges for Λ CDM: An update”, *New Astron. Rev.*, 95:101659. doi: 10.1016/j.newar.2022.101659.
- PERLMUTTER, S., ALDERING, G., GOLDHABER, G., et al., 1999, “Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae”, *Astrophys. J.*, v. 517, n. 2 (jun.), pp. 565–586. doi: 10.1086/307221.
- PLANCK COLLABORATION, AKRAMI, Y., ASHDOWN, M., et al., 2020, “Planck 2018 results. IV. Diffuse component separation”, *Astron. Astrophys.*, 641:A4. doi: 10.1051/0004-6361/201833881.
- RIESS, A. G., FILIPPENKO, A. V., CHALLIS, P., et al., 1998, “Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant”, *Astron. J.*, v. 116, n. 3 (set.), pp. 1009–1038. doi: 10.1086/300499.
- RIESS, A. G., YUAN, W., MACRI, L. M., et al., 2022, “A Comprehensive Measurement of the Local Value of the Hubble Constant with 1 km s⁻¹ Mpc⁻¹ Uncertainty from the Hubble Space Telescope and the SH0ES Team”, *Astrophys. J. Lett.*, 934(1):L7. doi: 10.3847/2041-8213/ac5c5b.
- RUBIN, V., 2007, “Miss Leavitt’s Stars: The Untold Story of the Woman Who Discovered How to Measure the Universe”, *Biography*, v. 30, n. 1, pp. 142–143.
- RYDEN, B., 2017, *Introduction to cosmology*. Cambridge University Press.
- SCHUTZ, B. F., 1986, “Determining the Hubble Constant from Gravitational Wave Observations”, *Nature*, v. 323, pp. 310–311. doi: 10.1038/323310a0.
- SCOLNIC, D. M., JONES, D. O., REST, A., et al., 2018, “The Complete Light-curve Sample of Spectroscopically Confirmed SNe Ia from Pan-STARRS1 and Cosmological Constraints from the Combined Pantheon Sample”, *Astrophys. J.*, 859(2):101. doi: 10.3847/1538-4357/aab9bb.
- SCOLNIC, D., BROUT, D., CARR, A., et al., 2022, “The Pantheon+ Analysis: The Full Data Set and Light-curve Release”, *Astrophys. J.*, 938(2):113. doi: 10.3847/1538-4357/ac8b7a.
- SEIKEL, M., CLARKSON, C., SMITH, M., 2012, “Reconstruction of dark energy and expansion dynamics using Gaussian processes”, *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 2012(6):036. doi: 10.1088/1475-7516/2012/06/036.
- SHAH, P., LEMOS, P., LAHAV, O., 2021, “A buyer’s guide to the Hubble constant”, *Astron. Astrophys. Rev.*, 29(1):9. doi: 10.1007/s00159-021-00137-4.

- SLIPHER, V. M., 1917, “Spectrographic Observations of Nebulae and Star Clusters”, *Popular Astronomy*, v. 25 (jan.), pp. 36.
- THOMPSON, D. J., WILSON-HODGE, C. A., 2022, “Fermi Gamma-Ray Space Telescope”. In: *Handbook of X-ray and Gamma-ray Astrophysics*, p. 29. doi: 10.1007/978-981-16-4544-0_58-1.
- VISSER, M., 2004, “Jerk, snap and the cosmological equation of state”, *Classical and Quantum Gravity*, v. 21, n. 11, pp. 2603.
- WANG, Y.-Y., TANG, S.-P., JIN, Z.-P., et al., 2023, “The Late Afterglow of GW170817/GRB 170817A: A Large Viewing Angle and the Shift of the Hubble Constant to a Value More Consistent with the Local Measurements”, *Astrophys. J.*, 943(1):13. doi: 10.3847/1538-4357/aca96c.
- WILLIAMS, C. K., RASMUSSEN, C. E., 2006, *Gaussian processes for machine learning*, v. 2. MIT press Cambridge, MA.
- ZHANG, J.-F., ZHANG, M., JIN, S.-J., et al., 2019, “Cosmological parameter estimation with future gravitational wave standard siren observation from the Einstein Telescope”, *J. Cosmology Astropart. Phys.*, 2019(9):068. doi: 10.1088/1475-7516/2019/09/068.
- ZHAO, W., VAN DEN BROECK, C., BASKARAN, D., et al., 2011, “Determination of dark energy by the Einstein Telescope: Comparing with CMB, BAO, and SNIa observations”, *Phys. Rev. D*, 83(2):023005. doi: 10.1103/PhysRevD.83.023005.

Apêndice A

Cosmografia

O fator de escala depende dos parâmetros cosmológicos, ou seja, do conteúdo material do Universo. No entanto, para $z \ll 1$, podemos expandir o fator de escala em uma série de Taylor,

$$a(t) = a_0 \left\{ 1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0 H_0^2(t - t_0)^2 + \frac{1}{3!}j_0 H_0^3(t - t_0)^3 + \frac{1}{4!}s_0 H_0^4(t - t_0)^4 + O([t - t_0]^5) \right\}, \quad (\text{A.1})$$

sendo as derivadas

$$H(t) \equiv +\frac{1}{a} \frac{da}{dt}, \quad (\text{A.2})$$

$$q(t) \equiv -\frac{1}{a} \frac{d^2 a}{dt^2} \left[\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right]^{-2}, \quad (\text{A.3})$$

$$j(t) \equiv +\frac{1}{a} \frac{d^3 a}{dt^3} \left[\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right]^{-3}, \quad (\text{A.4})$$

$$s(t) \equiv +\frac{1}{a} \frac{d^4 a}{dt^4} \left[\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right]^{-4}, \quad (\text{A.5})$$

onde $H(t)$, $q(t)$, $j(t)$ e $s(t)$ são parâmetros cosmográficos (cinemáticos) que representam as derivadas do fator de escala (VISSER, 2004). Temos que os parâmetros com índice 0, são relativos ao tempo presente, desta forma, q_0 , j_0 , s_0 , são as derivadas do fator de escala medido no tempo atual, a_0 . Dos quatro parâmetros cosmográficos, $H(t)$ e $q(t)$ apresentam interpretações físicas (dinâmicas): sendo o primeiro a taxa com o que o Universo se expande e o último representa a desaceleração do Universo. Desta forma, tem-se como objetivo entender a dinâmica da expansão do Universo a partir destes parâmetros. Enfatizamos que a cosmografia tem validade no intervalo aproximado $0 < z < 0.2$, devido ao comportamento divergente da série de Taylor (A.1).