

COSMOGRAFIA - DETERMINAÇÃO DE PARÂMETROS COSMOLÓGICOS
A PARTIR DE SUPERNOVA IA E DO PARÂMETRO DE HUBBLE

Thaís da Silva Guerini

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Astronomia do Observatório Nacional/MCTIC, como parte dos requisitos necessários à obtenção do Grau de Mestre em Astronomia.

Orientador: Joel Câmara de Carvalho Filho

Rio de Janeiro
Outubro de 2022

COSMOGRAFIA - DETERMINAÇÃO DE PARÂMETROS COSMOLÓGICOS
A PARTIR DE SUPERNOVA IA E DO PARÂMETRO DE HUBBLE

Thaís da Silva Guerini

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ASTRONOMIA DO OBSERVATÓRIO NACIONAL/MCTIC COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM ASTRONOMIA.

Examinada por:

Prof. Nome do Primeiro Examinador Sobrenome, D.Sc.

Prof. Nome da Segunda Examinadora Sobrenome, Ph.D.

Dr. Nome da Terceira Examinadora Sobrenome, D.Sc.

Prof. Nome do Quarto Examinador Sobrenome, Ph.D.

Prof. Nome do Quinto Examinador Sobrenome, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
OUTUBRO DE 2022

da Silva Guerini, Thaís

Cosmografia - Determinação de parâmetros cosmológicos a partir de Supernova Ia e do parâmetro de Hubble/Thaís da Silva Guerini. – Rio de Janeiro: ON/MCTIC, 2022.

XII, 52 p.: il.; 29,7cm.

Orientador: Joel Câmara de Carvalho Filho

Dissertação (mestrado) – ON/MCTIC/Programa de Pós-graduação em Astronomia, 2022.

Referências Bibliográficas: p. 50 – 52.

1. Primeira palavra-chave. 2. Segunda palavra-chave. 3. Terceira palavra-chave. I. , . II. Observatório Nacional/MCTIC, Programa de Pós-graduação em Astronomia. III. Título.

*A ciência é muito mais do que
um corpo de conhecimento. É
uma maneira de pensar.
- Carl Sagan*

Agradecimentos

À minha mãe, Dirceléa, por todo o carinho, apoio, incentivo e dedicação voltados à minha formação acadêmica e pessoal. Ao meu pai, Lourival, por todos os sacrifícios e investimentos financeiros para que fosse possível minha jornada até aqui. À minha irmã, por toda inspiração, discussões, incentivos e cuidado com minha saúde mental, sem os quais esse trabalho seria impossível.

A todos os meus amigos, pelo apoio, carinho e confiança. Também agradeço por terem me lembrado várias vezes de minha própria capacidade. Em especial, agradeço a Tatiane Corrêa por todo o auxílio com os programas computacionais, motivação e companhia; e a Thaís Lemos por compartilhar suas experiências na área e me guiar durante esse processo.

Ao meu orientador, Joel, por todos os ensinamentos, orientações e dedicação despendidos neste trabalho.

Ao professor Jailson, que possibilitou o começo de meus estudos nessa instituição.

Ao PCI Carlos Bengaly por todo auxílio, apoio e confiança essenciais para que eu conseguisse continuar com meus planos de carreira apesar de todas as dificuldades encontradas nos últimos tempos.

Aos colegas do Observatório Nacional por toda a ajuda concedida e por todas as ricas discussões nos eventos ocorridos e nas reuniões do Journal Club.

A toda a equipe do Observatório Nacional que possibilita que esta e muitas outras pesquisas sejam realizadas.

A todos os professores que, de alguma forma, contribuíram para meu crescimento profissional e pessoal, em especial ao professor Dr. Rafael Aranha, por me apresentar a área e me motivar a escolher minha carreira.

À CAPES pela bolsa de estudos concedida.

Resumo da Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Astronomia do Observatório Nacional/MCTIC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Astronomia (M.Sc.)

COSMOGRAFIA - DETERMINAÇÃO DE PARÂMETROS COSMOLÓGICOS A PARTIR DE SUPERNOVA IA E DO PARÂMETRO DE HUBBLE

Thaís da Silva Guerini

Outubro/2022

Orientador: Joel Câmara de Carvalho Filho

Programa: Astronomia

Em 1970 o cosmólogo Allan Sandage descreveu a Cosmologia como "a procura por dois números", se referindo aos parâmetros de Hubble H_0 e o parâmetro de desaceleração q_0 [1]. A Cosmografia se mostra útil para testar modelos e estimar esses parâmetros cosmológicos por ser uma abordagem puramente cinemática da Cosmologia.

O primeiro objetivo deste trabalho é estimar os parâmetros H_0 , q_0 e j_0 a partir do uso de dados de supernovas do tipo Ia (SNIa) e relacioná-los ao modelo Λ CDM. O segundo objetivo é estudar diferentes parametrizações do parâmetro de desaceleração $q(z)$ utilizando dados de SNIa e de cronômetros cósmicos. Com isso, podemos estimar q_0 , $H(z)$ e $d_L(z)$. Também é possível calcular o parâmetro da equação de estado no modelo w CDM e estimar quando houve a transição da expansão do Universo de desacelerado para acelerado.

Os resultados mais significativos relativos ao primeiro objetivo foram aqueles com *redshift* máximo de $z_{lim} = 0,7$. Nesse regime, obtivemos $H_0 = 74,38 \pm 0,39$, $q_0 = -0,69 \pm 0,09$ e $j_0 = 1,74 \pm 0,79$ e o ajuste cosmográfico teve uma diferença percentual máxima do ajuste do modelo padrão de 1%. Com relação ao segundo objetivo, os resultados da análise das parametrizações de $q(z)$ indicaram uma expansão acelerada do Universo em $z = 0$, com w_0 em concordância com o esperado pelo modelo padrão. O modelo que levou ao melhor ajuste aos dados favoreceu uma expansão acelerada mais recente do que aquela prevista pelo modelo de concordância.

Palavras-Chave: Cosmografia; Parâmetro de desaceleração; Cosmologia; Parâmetros cosmológicos; Supernovas do tipo Ia

Abstract of Dissertation presented to Observatório Nacional/MCTIC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Astronomy (M.Sc.)

COSMOGRAPHY - DETERMINATION OF COSMOLOGICAL
PARAMETERS FROM TYPE IA SUPERNOVAE AND HUBBLE PARAMETER

Thaís da Silva Guerini

October/2022

Advisor: Joel Câmara de Carvalho Filho

Department: Astronomy

In 1970 the cosmologist Allan Sandage described Cosmology as " the search for two numbers", referring to the Hubble parameter H_0 and the deceleration parameter q_0 [1]. Cosmography is a useful tool to test models and estimate these parameters as it is a kinematics approach of Cosmology.

The first goal of this study is to estimate the parameters H_0 , q_0 e j_0 using type Ia supernovae data and relate them to the Λ CDM model. The second goal is to study different parametrizations of the deceleration parameter $q(z)$ using type Ia supernovae and cosmic chronometers data. With this, we can estimate q_0 , $H(z)$ e $d_L(z)$. It is also possible to calculate the equation of state parameter in the w CDM model and estimate the transition *redshift*, when the Universe expansion turned from a decelerated to an accelerated one.

The most significant results regarding the first goal were the ones with maximum *redshift* of $z_{lim} = 0,7$. In this regime, we obtained $H_0 = 74.38 \pm 0.39$, $q_0 = -0.69 \pm 0.09$ and $j_0 = 1.74 \pm 0.79$ and the cosmographic fit had a maximum percentage difference of 1% to the standard model. As for the second goal, the results of $q(z)$ parametrizations indicated an accelerated expansion of the Universe in $z = 0$, with w_0 concordant with the expected by the standard model. The model with the best fit to the data favored an accelerated expansion more recent than the one predicted by the concordance model.

Keywords: Cosmography; Deceleration parameter; Cosmology; Cosmological parameters; Type Ia supernovae

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xii
1 Introdução	1
2 Modelo cosmológico padrão	3
2.1 Expansão do Universo	3
2.1.1 Lei de Hubble-Lemaître	3
2.1.2 Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	4
2.1.3 <i>Redshift</i> e $H(z)$	5
2.1.4 Expansão acelerada do Universo	6
2.2 Dinâmica cósmica	6
2.2.1 Equações de Friedmann	6
2.2.2 Equação de Estado	7
2.2.3 Parâmetros Cosmológicos	8
2.3 Distâncias em Cosmologia	9
2.3.1 Distância própria	9
2.3.2 Distância comóvel	9
2.3.3 Distância de luminosidade	9
2.3.4 Distância de diâmetro angular	10
2.4 Observáveis cosmológicos	11
2.4.1 Setor escuro	11
2.4.2 Radiação Cósmica de Fundo	11
2.5 Inflação	14
2.5.1 Problema da planeza	14
2.5.2 Problema do horizonte	15
2.5.3 Solução inflacionária	15
3 Cosmografia	17
3.1 Parâmetros cosmográficos e a Lei de Hubble	17
3.2 Parâmetro de desaceleração	18

3.2.1	Parametrização de $q(z)$	19
3.2.2	Parâmetro da equação de estado	22
4	Expansão Cosmográfica - Resultados Numéricos	24
4.1	Metodologia	24
4.2	Resultados e discussão	25
5	Parametrização de $q(z)$ - Resultados Numéricos	30
5.1	Metodologia	30
5.2	Resultados e discussão	34
5.2.1	Usando $H(z)$	34
5.2.2	Distância luminosidade	35
5.3	Conclusão	39
6	Conclusões	48
	Referências Bibliográficas	50

Lista de Figuras

2.1	Lei de Hubble	4
2.2	Espectro de corpo negro	12
2.3	<i>Freeze-out</i>	13
2.4	CMB	13
2.5	Espectro de potência	14
2.6	Inflação	16
4.1	Ajuste do modelo cosmográfico aos dados de $d_L(z)$	26
4.2	Diferença percentual entre os ajustes do modelos Λ CDM e cosmográfico com limite superior de $z = 0,15$	26
4.3	Contornos para os níveis de confiança dos parâmetros cosmográficos estimados, utilizando dados de $d_L(z)$ com $z < 0,15$. Os pontos negros indicam os <i>best-fit</i> para esses parâmetros.	27
4.4	Ajuste do modelo cosmográfico aos dados de $d_L(z)$	28
4.5	Diferença percentual entre os ajustes dos modelos Λ CDM e cosmográfico com limite superior de $z = 0,7$	28
4.6	Contornos para os níveis de confiança dos parâmetros cosmográficos estimados, utilizando dados de $d_L(z)$ com $z < 0,7$. Os pontos negros indicam os <i>best-fit</i> para esses parâmetros.	29
5.1	Ajuste do modelo 1 aos dados de $H(z)$	35
5.2	Parâmetro de desaceleração $q(z)$ dada pelo modelo 1 a partir do ajuste aos dados de $H(z)$	36
5.3	Parâmetro da equação de estado de energia escura $w(z)$ para o modelo 1 estimado a partir do ajuste aos dados de $H(z)$	36
5.4	Regiões de confiança para os parâmetros H_0 e q_0 estimados a partir do ajuste aos dados de $H(z)$ para o modelo 1	37
5.5	Ajuste do modelo 2 aos dados de $H(z)$	37
5.6	Parâmetro de desaceleração $q(z)$ dada pelo modelo 2 a partir do ajuste aos dados de $H(z)$	38

5.7	Parâmetro da equação de estado de energia escura $w(z)$ para o modelo 2 estimado a partir do ajuste aos dados de $H(z)$	38
5.8	Regiões de confiança para os parâmetros estimados a partir do ajuste aos dados de $H(z)$ para o modelo 2	39
5.9	Ajuste do modelo 3 aos dados de $H(z)$	39
5.10	Parâmetro de desaceleração $q(z)$ dada pelo modelo 3 a partir do ajuste aos dados de $H(z)$	40
5.11	Parâmetro da equação de estado de energia escura $w(z)$ para o modelo 3 estimado a partir do ajuste aos dados de $H(z)$	40
5.12	Regiões de confiança para os parâmetros H_0 e q_0 estimados a partir do ajuste aos dados de $H(z)$ para o modelo 3	41
5.13	Ajuste do modelo 1 aos dados de $d_L(z)$	41
5.14	Parâmetro de desaceleração $q(z)$ dada pelo modelo 1 a partir do ajuste aos dados de $d_L(z)$	42
5.15	Parâmetro da equação de estado de energia escura $w(z)$ para o modelo 1 estimado a partir do ajuste aos dados de $d_L(z)$	42
5.16	Regiões de confiança para os parâmetros H_0 e q_0 estimados a partir do ajuste aos dados de $d_L(z)$ para o modelo 1	43
5.17	Ajuste do modelo 2 aos dados de $d_L(z)$	43
5.18	Parâmetro de desaceleração $q(z)$ dada pelo modelo 2 a partir do ajuste aos dados de $d_L(z)$	44
5.19	Parâmetro da equação de estado de energia escura $w(z)$ para o modelo 2 estimado a partir do ajuste aos dados de $d_L(z)$	44
5.20	Regiões de confiança para os parâmetros estimados a partir do ajuste aos dados de $d_L(z)$ para o modelo 2	45
5.21	Ajuste do modelo 3 aos dados de $d_L(z)$	45
5.22	Parâmetro de desaceleração $q(z)$ dada pelo modelo 3 a partir do ajuste aos dados de $d_L(z)$	46
5.23	Parâmetro da equação de estado de energia escura $w(z)$ para o modelo 3 estimado a partir do ajuste aos dados de $d_L(z)$	46
5.24	Regiões de confiança para os parâmetros H_0 e q_0 estimados a partir do ajuste aos dados de $d_L(z)$ para o modelo 3	47

Lista de Tabelas

4.1	Resultados obtidos através do ajuste do modelo Λ CDM.	25
4.2	Resultados obtidos através do ajuste do modelo cosmológico.	25
5.1	Resultados obtidos através do ajuste aos dados de $H(z)$	34
5.2	Resultados obtidos através do ajuste aos dados de $H(z)$	35
5.3	Resultados obtidos através do ajuste aos dados de $d_L(z)$	39
5.4	Resultados obtidos através do ajuste aos dados de $d_L(z)$	41

Capítulo 1

Introdução

A Cosmologia padrão se baseia em duas hipóteses: a de que o Universo pode ser considerado homogêneo e isotrópico em largas escalas (acima de 100 Mpc), o que é chamado de Princípio Cosmológico e de que nessas escalas o campo gravitacional é descrito pela Relatividade Geral. O modelo padrão da cosmologia moderna é conhecido como Λ CDM, no qual Λ é a constante cosmológica, considerada a componente de energia escura e CDM corresponde à matéria escura fria (do inglês Cold Dark Matter), componente que interage apenas gravitacionalmente.

Desde a descoberta da expansão do Universo por Edwin Hubble em 1929, determinar o parâmetro de Hubble $H(z)$ se mostrou uma tarefa muito útil, uma vez que assim podemos determinar o fator de escala $a(t)$, indicador dessa expansão.

Muitas medições foram realizadas para a determinação desse parâmetro cosmológico, sendo os principais os que utilizaram dados de supernovas do tipo Ia, oscilações acústicas de bárions (BAO) e estudos da radiação cósmica de fundo (CMB). No entanto, há dificuldades e divergências entre os resultados obtidos através das análises citadas, fazendo com que se faça necessária a realização de outras análises.

A Cosmografia é uma abordagem puramente cinemática da Cosmologia, totalmente independente das Equações de Campo de Einstein e, portanto, da dinâmica que governa a evolução do Universo. Isso faz com que ela seja uma interessante ferramenta para testar modelos e estimar parâmetros cosmológicos. Torna-se apenas necessário assumir o princípio cosmológico para se escrever uma equação para a métrica, que se supõe ser a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW).

A partir desta métrica, podemos definir uma série de parâmetros como, por exemplo, desaceleração q e *jerk* j com base em derivadas do fator de escala $a(t)$, com os quais podemos fazer uma expansão em série da Lei de Hubble em função do *redshift* z . Com isso calculamos, por exemplo, a distância luminosidade e o parâmetro de Hubble em termos de z .

O primeiro objetivo deste trabalho é fazer uso de dados de supernovas do tipo

la para calcular H_0 , q_0 e j_0 , utilizando o método de minimização da função χ^2 . Ainda é possível relacionar estes parâmetros no modelo Λ CDM com o parâmetro de densidade $\Omega_{m,0}$, de forma a estimá-lo.

Visto que as séries obtidas em função dos parâmetros cosmográficos tem validade apenas no regime de $z < 1$, diferentes limites de *redshifts* devem ser adotados nos cálculos citados anteriormente.

O segundo objetivo é estudar diferentes parametrizações do parâmetro de desaceleração $q(z)$ fazendo uso de dados das supernovas e de cronômetros cósmicos. Para cada modelo de $q(z)$ proposto é possível reconstruir $H(z)$ e $d_L(z)$, com o uso também do método de simulação de Monte Carlo, e obter o parâmetro de desaceleração atual q_0 .

Além disso, é interessante determinar o *redshift* de transição z_t para cada modelo, isto é, o momento em que o Universo passa de uma expansão desacelerada para uma expansão acelerada. Uma comparação com o previsto pelo modelo padrão se mostra necessária.

Por fim, se propõe estudar o parâmetro da equação de estado no modelo w CDM em cada uma dessas parametrizações.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: O capítulo 2 expõe o paradigma do modelo padrão de forma teórica e suas principais bases observacionais. O terceiro capítulo se trata de uma abordagem teórica da Cosmografia, parâmetro de desaceleração e parâmetro da equação de estado da energia escura, necessários para este trabalho. No quarto capítulo são expostos e discutidos os resultados numéricos obtidos para o primeiro objetivo do trabalho e no capítulo 5 são mostrados os resultados relativos às parametrizações do parâmetro de desaceleração. No capítulo 6 são expostas as principais conclusões desta pesquisa.

Capítulo 2

Modelo cosmológico padrão

A Cosmologia moderna se estabelece após o desenvolvimento da Relatividade Geral por Albert Einstein em 1915[2], e se baseia na hipótese de que essa teoria descreve o campo gravitacional em grandes escalas (superiores a 100 Mpc). Outra hipótese é a do Princípio Cosmológico, que prevê que o universo pode ser considerado isotrópico e homogêneo nessas escalas.

Com o avanço da tecnologia, observações puderam ser realizadas a fim de testar modelos e determinar parâmetros cosmológicos.[3]

Atualmente, o modelo que mais está em concordância com as observações é o Modelo Λ CDM, também conhecido como Modelo Padrão, que será tratado neste capítulo.

2.1 Expansão do Universo

2.1.1 Lei de Hubble-Lemaître

A primeira evidência que temos de o Universo estar em expansão ocorreu em 1927 e 1929 quando George Lemaître [4] e Edwin Hubble [5], respectivamente, observaram espectros de galáxias e perceberam que elas estão se distanciando com velocidade de recessão v proporcional à distância entre elas r . Matematicamente, podemos expressar essa relação como

$$v = H(t)r, \tag{2.1}$$

sendo $H(t)$ conhecido como *parâmetro de Hubble*, que no momento presente é expresso por $H(t_0) = H_0$ e denominado *constante de Hubble*. Essa relação é a chamada *lei de Hubble-Lemaître*.

Observacionalmente medimos o *redshift* ou desvio para o vermelho, definido como

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e}, \quad (2.2)$$

onde λ_0 é o comprimento de onda observado e λ_e o comprimento de onda emitido pela fonte de luz. A partir, então, de um ajuste linear realizado a partir dos dados da figura 2.1, Hubble obteve

$$cz = H_0 r, \quad (2.3)$$

sendo c a velocidade da luz no vácuo. A expressão acima é o limite da lei de Hubble-Lemaître, válida apenas para $z \ll 1$.

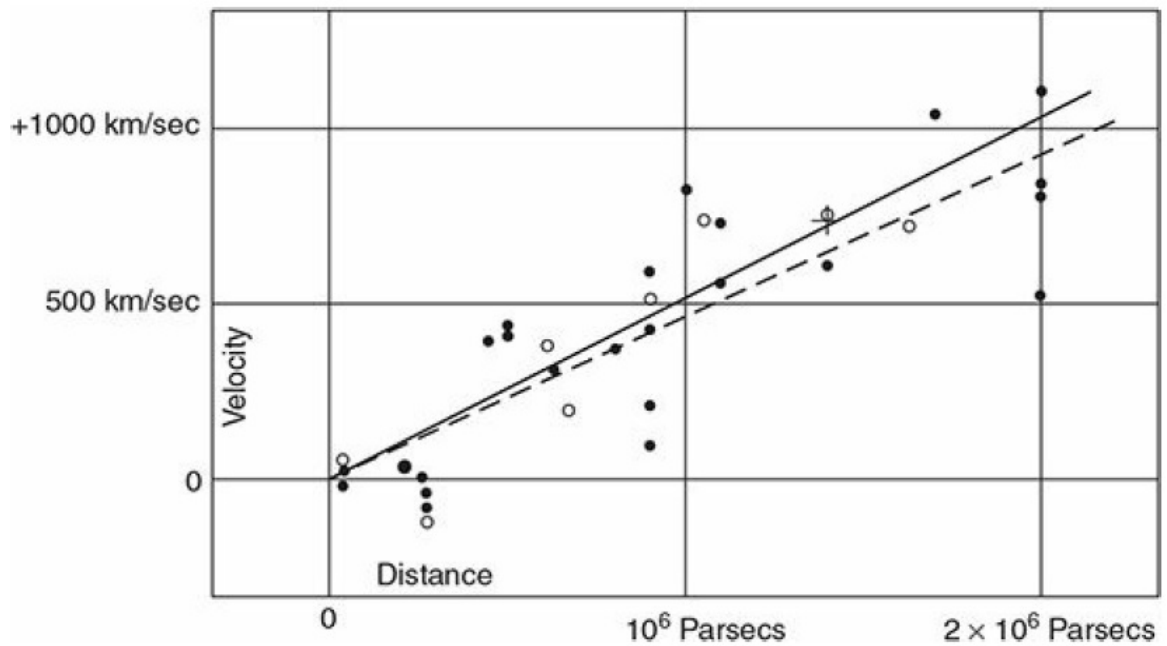


Figura 2.1: Relação entre a velocidade $v = cz$ e a distância r encontrada por Hubble.[5]

2.1.2 Métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Uma vez que sabemos da expansão do Universo e consideramos o Princípio Cosmológico como hipótese, passamos a descrever a geometria do espaço-tempo segundo a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), definida pelo elemento de linha [6]

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{1}{1 - \kappa r^2} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (2.4)$$

onde

$$d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2 \theta d\Phi^2, \quad (2.5)$$

t é tempo cósmico, a é o fator de escala e κ a constante de curvatura, que pode assumir os valores $-1, 0$ e $+1$ para geometrias hiperbólica (Universo espacialmente aberto), plana e esférica (Universo espacialmente fechado), respectivamente.

2.1.3 *Redshift e H(z)*

Visto que sabemos descrever a geometria do espaço-tempo, podemos escrever o parâmetro de Hubble em função do *redshift* a partir da análise de uma onda que viaja no Universo em expansão.

A partir da métrica FLRW, considerando uma frente de onda radial da luz, isto é, geodésica nula com θ e ϕ fixos, que viaja até o observador na origem, ficamos com

$$0 = dt^2 - a^2(t) \frac{dr^2}{1 - \kappa r^2}, \quad (2.6)$$

onde consideramos $c = 1$. Portanto,

$$\frac{dt}{a} = - \frac{dr}{\sqrt{1 - \kappa r^2}}, \quad (2.7)$$

onde escolhemos o sinal negativo da raiz quadrada pelo fato das coordenadas t e r serem inversamente proporcionais.

Se a onda parte de uma galáxia localizada em r_e, θ_e, ϕ_e em um instante de tempo t_e , ela chegará até o observador em t_0 dado por

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a} = \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - \kappa r^2}}. \quad (2.8)$$

A frente de onda seguinte que parte de r_e em $t_e + \delta t_e$ chegará até o observador em $t_0 + \delta t_0$, onde

$$\int_{t_e + \delta t_e}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a} = \int_0^{r_e} \frac{dr}{\sqrt{1 - \kappa r^2}}. \quad (2.9)$$

Subtraindo 2.9 de 2.8, e fazendo uso de algumas manipulações podemos obter

$$\int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{a} = \int_{t_e}^{t_e + \delta t_e} \frac{dt}{a}. \quad (2.10)$$

Uma vez que $a(t)$ varia muito pouco entre as duas frentes de onda, temos que

$$\frac{\delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\delta t_e}{a(t_e)}. \quad (2.11)$$

As frequências observada e emitida, respectivamente, ν_0 e ν_e , são relacionadas segundo

$$\frac{\nu_0}{\nu_e} = \frac{\delta t_e}{\delta t_0} = \frac{a(t_e)}{a(t_0)} \quad (2.12)$$

Utilizando a definição de *redshift* e

$$\frac{\nu_0}{\nu_e} = \frac{\lambda_e}{\lambda_0}, \quad (2.13)$$

a equação 2.12 se torna

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = z + 1, \quad (2.14)$$

isto é,

$$a(t_e) = a(t) = \frac{1}{1+z}, \quad (2.15)$$

onde fizemos $a(t_0) = 1$.

Por outro lado, definindo a taxa de expansão como $H \equiv \dot{a}/a$. De 2.15, temos

$$\dot{a} = \frac{d}{dt}(1+z)^{-1} = -(1+z)^{-2} \frac{dz}{dt}, \quad (2.16)$$

e, portanto,

$$H = -\frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt}. \quad (2.17)$$

2.1.4 Expansão acelerada do Universo

Em 1998 e 1999 dois grupos de pesquisa independentes, *High-Z Supernova Search Team* [7] e *Supernova Cosmology Project* [8], respectivamente, estudaram se a expansão do Universo era acelerada, desacelerada ou constante.

Nessas pesquisas, supernovas do tipo Ia (SNIa) foram analisadas para restringir parâmetros cosmológicos e os resultados obtidos demonstraram que o Universo está em expansão acelerada. Por não sabermos o que causa essa aceleração, essa componente foi chamada de *energia escura*. No modelo padrão, isto é, Λ CDM, a energia escura é representada por Λ , possui densidade constante e pressão negativa.

2.2 Dinâmica cósmica

2.2.1 Equações de Friedmann

Antes mesmo de se saber sobre o comportamento de expansão do Universo, em 1922 o físico russo Alexander Friedmann obteve equações de movimento para um universo isotrópico e homogêneo em expansão ou contração a partir das equações de campo de Einstein. Posteriormente, essas equações ficaram conhecidas como as *equações de Friedmann*. [1]

Começemos pelas equações de campo de Einstein, que são dadas por

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2.18)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, $R_{\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu}$ são os tensores de Ricci e de energia-momentum, respectivamente, $g_{\mu\nu}$ é a métrica, $R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ é o escalar de curvatura e G a constante gravitacional. Assim, temos uma relação de como a geometria do espaço-tempo (lado esquerdo) influencia o conteúdo material e energético do Universo (lado direito) e vice-versa.

A fim de resolvermos essas equações devemos determinar o tensor momentum-energia e a métrica a serem utilizados. Escolhemos a métrica de FLRW juntamente com o tensor momentum-energia de um fluido perfeito, por simplicidade, dado por:

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) U_\mu U_\nu + P g_{\mu\nu}, \quad (2.19)$$

onde ρ é a densidade, P a pressão e U_μ o vetor 4-velocidade, que satisfaz $U^\mu U_\mu = -c^2 = -1$.

Com isso, obtemos as equações de Friedmann:

$$\frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho(t) - \frac{\kappa c^2}{a^2(t)}, \quad (2.20)$$

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi G}{3c^2} (\rho(t) + 3P), \quad (2.21)$$

com ρ representando a densidade total de energia do Universo, isto é, a soma das densidades de cada componente.

2.2.2 Equação de Estado

Substituindo a equação 2.20 em 2.21, obtemos a equação de conservação de energia, chamada também de *equação do fluido*, dada por:

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P). \quad (2.22)$$

Podemos escrever $P = P(\rho)$, segundo a *equação de estado*

$$P = w\rho, \quad (2.23)$$

onde w é um número adimensional.

A fim de determinar a densidade de energia em função do fator de escala, podemos substituir 2.22 em 2.23 e integrar, obtendo

$$\rho(a) = \rho_0 a^{-3(1+w)}, \quad (2.24)$$

onde $\rho_0 = \rho(t_0)$ e $a_0 = a(t_0) = 1$.

Para cada componente do Universo, o parâmetro w possui um valor diferente, sendo $w = 1/3$ para a radiação, $w = 0$ para a matéria e $w = -1$ para a constante cosmológica Λ .

Definimos a densidade crítica ρ_c como a densidade de energia necessária para o Universo ter geometria plana, isto é,

$$\rho_c \equiv \frac{3c^2}{8\pi G} H(t)^2. \quad (2.25)$$

Logo, para $\rho > \rho_c$ temos um Universo com curvatura positiva e para $\rho < \rho_c$ temos curvatura negativa. A partir daí, podemos escrever o *parâmetro de densidade* como

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}. \quad (2.26)$$

2.2.3 Parâmetros Cosmológicos

Com o que construímos até agora, podemos escrever alguns importantes parâmetros cosmológicos:

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.27)$$

$$\Omega_m \equiv \frac{8\pi G}{3c^2 H(t)^2} \rho_m = \frac{8\pi G}{3c^2 H(t)^2} \rho_{m,0} a^{-3}, \quad (2.28)$$

$$\Omega_r \equiv \frac{8\pi G}{3c^2 H(t)^2} \rho_r = \frac{8\pi G}{3c^2 H(t)^2} \rho_{r,0} a^{-4}, \quad (2.29)$$

$$\Omega_\Lambda \equiv \frac{8\pi G}{3c^2 H(t)^2} \rho_\Lambda = \frac{8\pi G}{3c^2 H(t)^2} \rho_{\Lambda,0}, \quad (2.30)$$

$$\Omega_\kappa \equiv 1 - \Omega_m - \Omega_r - \Omega_\Lambda, \quad (2.31)$$

$$q \equiv -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}. \quad (2.32)$$

Os parâmetros acima são denominados, respectivamente, de parâmetro de Hubble, de densidade de matéria, de densidade de radiação, de densidade de energia escura, de densidade de curvatura e parâmetro de desaceleração.

A partir dos parâmetros de densidade atuais, podemos reescrever a equação de Friedmann 2.20 como

$$H^2 = H_0^2 [\Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{\kappa,0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda,0}]. \quad (2.33)$$

2.3 Distâncias em Cosmologia

2.3.1 Distância própria

Consideremos dois observadores em coordenadas genéricas distintas, um na origem e outro em (r, θ, ϕ) . Uma vez que tais observadores possuem um movimento relativo entre si, podemos definir a distância física ou *distância própria* d_p , no instante t fixo, entre os observadores como o comprimento da geodésica entre eles, isto é,

$$d_p(t) = \int_0^{d_p} ds^2. \quad (2.34)$$

Considerando a métrica de FLRW e que ao longo da geodésica espacial entre os observadores o ângulo (θ, ϕ) permanece constante temos

$$ds = \frac{a(t)}{\sqrt{1 - \kappa r^2}} dr \quad (2.35)$$

e, portanto,

$$d_p(t) = \int_0^r \frac{a(t)}{\sqrt{1 - \kappa r'^2}} dr'. \quad (2.36)$$

2.3.2 Distância comóvel

A distância comóvel d_c é a distância entre dois eventos de acordo com um observador comóvel à expansão do Universo, isto é, a distância própria no instante t dividida pelo fator de escala nesse instante

$$d_c = \frac{d_p(t)}{a(t)}, \quad (2.37)$$

o que implica em ser independente do tempo.

Podemos também escrever a distância comóvel em termos da trajetória de um fóton. Considerando os instantes de emissão (t_e) e absorção (t_0) desse fóton e de que sua trajetória se dá em uma geodésica nula ($ds^2 = 0$), ficamos com:

$$d_c = \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_0^z \frac{cdz'}{H(z')}. \quad (2.38)$$

2.3.3 Distância de luminosidade

Uma vez que as distâncias própria e comóvel não podem ser observadas, se faz necessário introduzir conceitos de distâncias que tenham essa propriedade. Uma importante definição de distância que tem essa característica é a distância de luminosidade, que utiliza velas padrão ou padronizáveis, objetos cujas luminosidades são conhecidas.

Consideremos a definição de fluxo

$$F \equiv \frac{dE_o}{dt_o dA_o} = \frac{L}{4\pi d_L^2}, \quad (2.39)$$

onde L é a luminosidade, d_L a distância de luminosidade, E a energia do fóton, A a área da superfície na qual a radiação é espalhada e F o fluxo. O subíndice o indica as grandezas observadas.

Já que

$$A_o = 4\pi a_o^2 d_c^2 \quad e \quad \frac{dt}{dt_o} = \frac{a}{a_o} \quad (2.40)$$

e $E = h\nu \propto a^{-1}$, o que leva a

$$\frac{dE_o}{dE} = \frac{a}{a_o}, \quad (2.41)$$

ficamos com

$$\frac{dE_o}{dt_o dA_o} = \frac{a^2 dE}{a_o^2 dt 4\pi a_o^2 d_c^2}. \quad (2.42)$$

Usando que

$$L = \frac{dE}{dt} \quad e \quad \frac{a}{a_o} = \frac{1}{1+z}, \quad (2.43)$$

chegamos em

$$F = \frac{L}{4\pi a_o^2 d_c^2 (1+z)^2}. \quad (2.44)$$

Comparando 2.44 com 2.39, obtemos

$$d_L = a_o(1+z)d_c = a_o(1+z) \int_{t_e}^{t_o} \frac{cdt}{a(t)} = (1+z) \int_0^z \frac{cdz'}{H(z')}. \quad (2.45)$$

2.3.4 Distância de diâmetro angular

A distância de diâmetro angular d_A se mostra interessante quando temos uma régua padrão, isto é, um objeto cujo comprimento próprio ℓ é conhecido. Considerando o ângulo entre este objeto e o observador $\delta\theta$ tal que $\delta\theta \ll 1$, definimos

$$d_A \equiv \frac{\ell}{\delta\theta}. \quad (2.46)$$

Considerando que o objeto está perpendicular à linha de visada, a uma distância comóvel d_c , colocando o observador no centro do sistema de referência e utilizando a métrica de FRLW, temos:

$$ds = \ell = a(t)d_c\delta\theta. \quad (2.47)$$

Substituindo 2.49 em 2.46, temos

$$d_A = \frac{1}{1+z} \int_0^z \frac{cdz'}{H(z')}. \quad (2.48)$$

Podemos perceber que as distâncias de luminosidade e de diâmetro angular não coincidem, mas que podem ser relacionadas segundo a chamada *relação de dualidade das distâncias*

$$d_A = \frac{d_L}{(1+z)^2}. \quad (2.49)$$

2.4 Observáveis cosmológicos

2.4.1 Setor escuro

Como mencionado anteriormente, a expansão acelerada do Universo é atribuída, no modelo padrão, à constante cosmológica Λ , de $w = -1$ e possui densidade de cerca de 70%, sendo a principal componente do Universo atualmente.

Outra grandeza que compõe o setor escuro é a *matéria escura*. Em 1933, Fritz Zwicky, ao analisar as velocidades peculiares de galáxias pertencentes ao aglomerado de Coma, percebeu que as velocidades de dispersão ao longo da linha de visada eram superiores ao que seriam caso estivessem apenas sujeitas à produção pela interação gravitacional da matéria luminosa. [9] Com isso, foi proposta a existência de uma outra componente, que interage gravitacionalmente mas não com a radiação eletromagnética, conhecida por matéria escura.

Outra evidência da presença dessa componente foi observada por Vera Rubin, em 1980, que ao analisar curvas de rotação em galáxias, percebeu um comportamento diferente do esperado para o decaimento da velocidade de rotação das estrelas em torno do centro das galáxias. [10]

Segundo o modelo padrão da cosmologia, a melhor hipótese é de que a matéria escura seja fria, ou CDM da sigla em inglês *Cold Dark Matter*, o que implica que seja constituída de partículas não-relativísticas. Essa componente é prevista de corresponder a aproximadamente 24% da densidade total do Universo.

Dessa forma, por considerar a energia escura Λ e a matéria escura fria, o modelo padrão é designado por modelo Λ CDM.

2.4.2 Radiação Cósmica de Fundo

A radiação cósmica de fundo, CMB da sigla em inglês, foi observada pela primeira vez por Arno Penzias e Robert Wilson, que publicaram sua interpretação do efeito em 1965, e estimaram sua temperatura entre 2,5 K e 3,5 K [11]. Embora à época de sua descoberta não estivessem procurando detectá-la, uma explicação foi dada para essa radiação por Dicke, Peebles, Roll e Wilkinson [1].

Na época da equipartição matéria-radiação, momento no qual as densidades de radiação e matéria eram iguais, fótons e elétrons estavam acoplados em um fluido em equilíbrio térmico. Dessa forma, os fótons se comportavam segundo o espectro

de corpo negro com uma temperatura de $2,72548 \pm 0,00057$ K [12], como mostra a figura 2.2 do experimento *Far InfraRed Absolute Spectrophotometer* (FIRAS), do satélite COsmic Background Explorer (COBE), lançado em 1989.

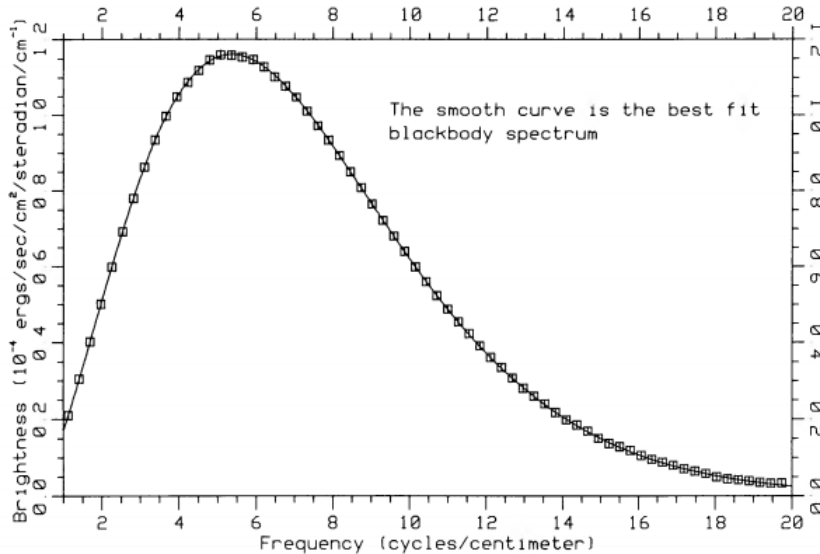


Figura 2.2: Espectro da CMB segundo FIRAS. Os quadrados indicam os dados obtidos por FIRAS e a curva representa o melhor ajuste de corpo negro [13].

A medida que o Universo se expande sua temperatura diminui, de acordo com

$$T = T_0 \left(\frac{a_0}{a} \right). \quad (2.50)$$

Podemos definir a taxa de interação de partículas Γ como

$$\Gamma \equiv n\sigma c, \quad (2.51)$$

onde n é a densidade numérica, σ a seção de choque média e c a velocidade da luz no vácuo. Se $\Gamma \gg H$ o equilíbrio entre as partículas é mantido, enquanto que se $\Gamma \lesssim H$ temos o *freeze-out*, como mostrado na figura 2.3.

No momento de *freeze-out* os elétrons são diluídos pela expansão mais rapidamente que os fótons podem interagir com eles, ocorrendo, assim, o desacoplamento, quando $T \approx 3000$ K. Após esse momento, fótons se propagam livremente pelo universo, podendo ser observados por nós através da CMB.

Para um observador com velocidade peculiar diferente de zero, o espectro da CMB apresenta pequenas anisotropias, como podemos ver na figura 2.4.

Devido a limitações na resolução angular das observações, costuma-se expandir as anisotropias de temperatura em harmônicos esféricos $Y_{\ell m}$, segundo

$$\Theta(\hat{n}) \equiv \frac{T(\hat{n}) - \bar{T}}{\bar{T}} = \sum_{\ell m} \Theta_{\ell m} Y_{\ell m}(\hat{n}), \quad (2.52)$$

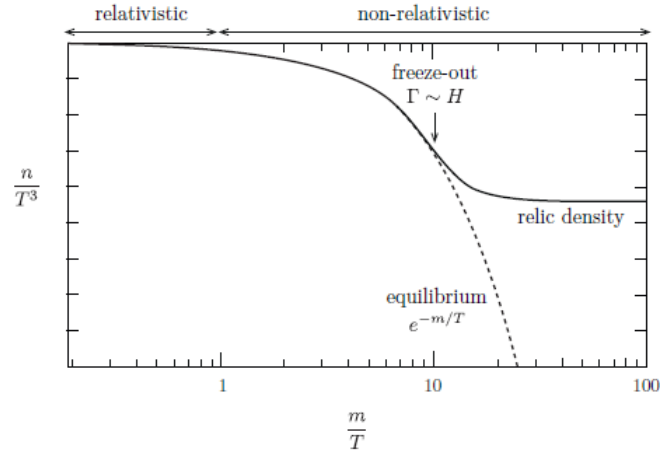


Figura 2.3: Esquema de equilíbrio e *freeze-out* de partículas. [14]

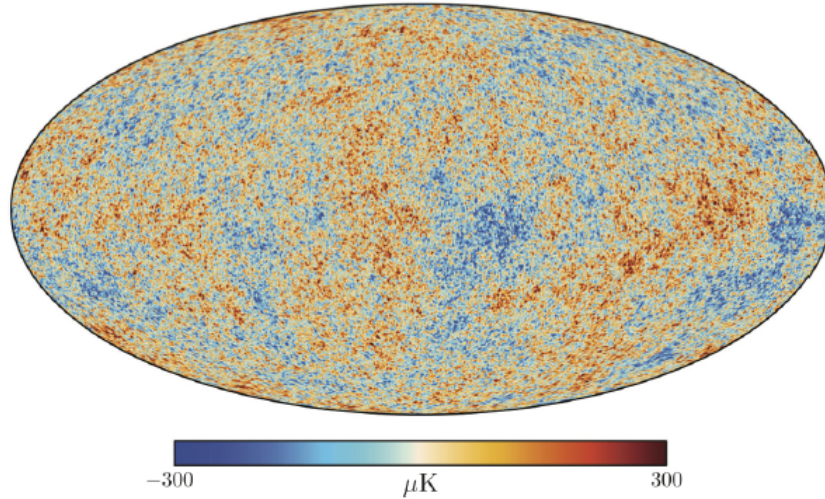


Figura 2.4: Medidas de variação de temperatura da CMB pelo satélite Planck. [14]

onde \bar{T} é a temperatura média. Podemos relacionar a escala ℓ à escala angular θ como $\ell = 180^\circ/\theta$.

Para flutuações estatisticamente isotrópicas, podemos definir o espectro de potência como

$$\langle \Theta_{\ell m}^* \Theta_{\ell' m'} \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} C_\ell. \quad (2.53)$$

como podemos ver no gráfico da figura 2.5.

A partir da CMB é possível inferir dados de parâmetros cosmológicos como, por exemplo, a densidade relativa de bárions e de matéria escura, que atualmente são, respectivamente, $\Omega_b h^2 = 0.02233 \pm 0.00015$ e $\Omega_c h^2 = 0.1198 \pm 0.0012$ [15].

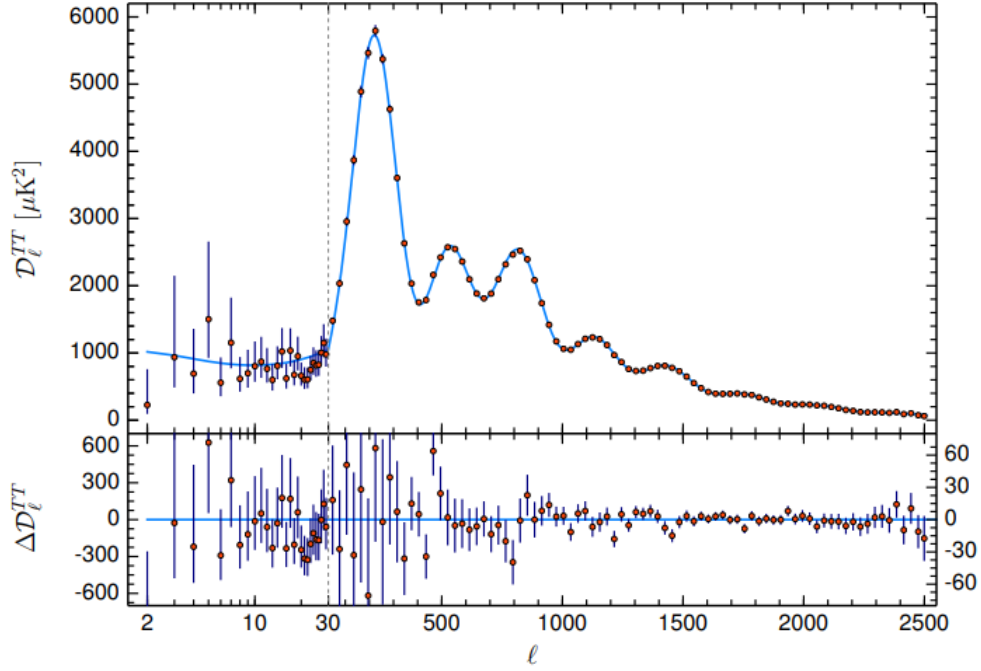


Figura 2.5: Espectro de potência da temperatura da CMB medidas por Planck 2018. Na figura, $D_\ell = \ell(\ell + 1)C_\ell/2\pi$. [15]

2.5 Inflação

Alguns problemas do modelo motivaram a inserção de um modelo inflacionário. Os principais problemas são conhecidos como problema da planeza e problema do horizonte.

2.5.1 Problema da planeza

Podemos relacionar a curvatura espacial com a densidade relativa Ω a partir das equações de Friedmann, obtendo

$$1 - \Omega(t) = -\kappa \left(\frac{c/H(t)}{a(t)R_0} \right)^2, \quad (2.54)$$

que, no presente, será escrita como

$$1 - \Omega_0 = -\kappa \left(\frac{c/H_0}{R_0} \right)^2. \quad (2.55)$$

Combinando essas duas equações, temos

$$1 - \Omega(t) = \left(\frac{H_0}{H(t)a(t)} \right)^2 (1 - \Omega_0). \quad (2.56)$$

Atualmente temos que $|1 - \Omega_0| \lesssim 1$, o que implica que o parâmetro de densidade total deve ter sido muito próximo da unidade em tempos primordiais, isto é, se o universo é espacialmente plano hoje em dia, ele também o era em seus primórdios.

Assim, se faz necessário que haja algum mecanismo que tenha feito com que o universo se tornasse plano ainda em seu estágio primordial.

2.5.2 Problema do horizonte

A fim de enunciar o problema do horizonte, analisemos o horizonte à época da recombinação, momento em que núcleos capturam elétrons e formam átomos de hidrogênio neutros.

Podemos escrever a distância comóvel que a luz viaja até um momento t como

$$d_C(z) = \int_0^t \frac{cdt}{a(t)} = \int_0^{(1+z)^{-1}} \frac{cda}{a^2 H(a)}. \quad (2.57)$$

À época da recombinação, $z \approx 1100$, temos $H(a) \approx H_0 \sqrt{\Omega_m} a^{-3/2}$ e

$$d_C(z) \approx 2 \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{(1+z)\Omega_m}}, \quad (2.58)$$

e a distância própria $d_p = ad_C$

$$d_p(z_{rec}) \approx 2 \frac{c}{H_0} \Omega_m^{-1/2} (1 + z_{rec})^{-3/2}. \quad (2.59)$$

Considerando $\Omega_\Lambda = 0$, a distância angular no céu será

$$\theta_{rec} = \frac{d_p(z_{rec})}{D_A(z_{rec})} \approx 2^\circ \sqrt{\Omega_m}, \quad (2.60)$$

que é aproximadamente um grau no céu.

Dessa forma, o problema do horizonte consiste em que regiões distantes por mais que cerca de um grau no céu hoje não estariam conectadas causalmente à época da CMB e não teriam, portanto, motivo para terem propriedades semelhantes, em especial a temperatura. Sabemos, entretanto, que as variações de temperatura são apenas da ordem de $\Delta T/T \approx 10^{-5}$.

2.5.3 Solução inflacionária

A solução encontrada para os problemas citados foi a de considerar que, em momentos iniciais do universo, havia a dominação da densidade de energia escura.

Assim, $\dot{a}/a \approx \sqrt{\Lambda/3}$ e teríamos uma expansão exponencial do universo:

$$a(t) \propto \exp \sqrt{\Lambda/3} t. \quad (2.61)$$

A expansão exponencial eventualmente teria fim com o processo de reaquecimento e o fator de escala passaria a ser governado através das eras de radiação e de matéria regidas pelas equações de Friedmann. Na figura 2.6 podemos ver um esquema de como esse processo se daria.

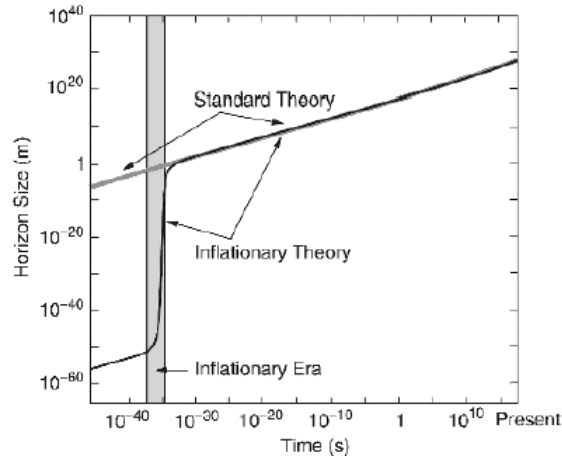


Figura 2.6: Esquema representativo da inflação. Nele, a teoria padrão representa o crescimento do fator de escala através das equações de Friedmann e a área hachurada o período inflacionário. [16]

A inflação soluciona o problema da planeza pois independentemente da sua curvatura inicial o universo se tornaria espacialmente plano após a expansão exponencial. Em outras palavras, no período inflacionário,

$$\Omega_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{3H^2} = 1, \quad (2.62)$$

que é a densidade total do universo naquele período.

Também soluciona o problemas do horizonte, uma vez que um período de expansão exponencial faz com que o tamanho do horizonte aumente exponencialmente.

Apesar da inflação ser um cenário plausível, não temos ainda muitos detalhes sobre o funcionamento de seus mecanismos.

Capítulo 3

Cosmografia

A Cosmografia é uma abordagem puramente cinemática da Cosmologia, totalmente independente das Equações de Campo de Einstein e, portanto, da dinâmica que governa o Universo. [17] Isso faz com que ela seja uma interessante ferramenta para testar modelos e estimar parâmetros cosmológicos.

Sendo assim, torna-se apenas necessário assumir o Princípio Cosmológico para se escrever uma equação para a métrica, que se supõe ser a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), dada pela equação 2.4.

3.1 Parâmetros cosmográficos e a Lei de Hubble

O princípio básico da Cosmografia é utilizar expansões em série de Taylor em termos do fator de escala $a(t)$ e de suas derivadas com respeito ao tempo cósmico t , inferindo, assim, a história do fator de escala.

Podemos definir os seguintes parâmetros cosmográficos, respectivamente denominados de Hubble, desaceleração e *jerk*, como [17], [18]

$$H(t) = \frac{1}{a} \frac{da}{dt}, \quad (3.1)$$

$$q(t) = -\frac{1}{a} \frac{d^2a}{dt^2} \left[\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right]^{-2}, \quad (3.2)$$

$$j(t) = \frac{1}{a} \frac{d^3a}{dt^3} \left[\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right]^{-3}, \quad (3.3)$$

onde os parâmetros $q(t)$ e $j(t)$ são adimensionais.

Utilizando esses parâmetros cosmográficos, podemos escrever o fator de escala $a(t)$ como

$$a(t) = a_0 \left[1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2}q_0 H_0^2(t - t_0)^2 + \frac{1}{3!}j_0 H_0^3(t - t_0)^3 + O[(t - t_0)^4] \right], \quad (3.4)$$

e obter uma expansão para $H(z)$, dada por:

$$H(z) = H_0 \left[1 + (1 + q_0)z + \frac{1}{2}(-q_0^2 + j_0)z^2 + O(z^3) \right]. \quad (3.5)$$

Alem disso, é possível derivar uma versão da lei de Hubble utilizando a distância luminosidade:

$$d_L = \frac{cz}{H_0} \left[1 + \frac{1}{2}(1 - q_0)z - \frac{1}{6} \left(1 - q_0 - 3q_0^2 + j_0 + \frac{kc^2}{H_0^2 a_0^2} \right) z^2 + O(z^3) \right], \quad (3.6)$$

onde k indica os possíveis sinais de curvatura espacial.

Uma vez que os resultados da colaboração Planck de 2018 [15] indicam que o Universo é espacialmente plano, a equação 3.6 se torna

$$d_L = \frac{cz}{H_0} \left[1 + \frac{1}{2}(1 - q_0)z - \frac{1}{6}(1 - q_0 - 3q_0^2 + j_0)z^2 + O(z^3) \right]. \quad (3.7)$$

Portanto, a partir de dados observacionais e da equação 3.7, podemos estimar os parâmetros H_0 , q_0 e j_0 de forma independente de modelo e comparar os valores obtidos com aqueles previstos pelo modelo Λ CDM. Isso será feito em detalhe no Capítulo 4.

3.2 Parâmetro de desaceleração

Em 1970 o cosmólogo Allan Sandage descreveu a cosmologia como "a procura por dois números", se referindo aos parâmetros H_0 e q_0 [1], e, embora o escopo da cosmologia tenha se mostrado mais amplo, ainda é possível descrever a expansão recente do Universo em termos desses parâmetros.

Tradicionalmente supôs-se que o Universo estivesse desacelerando, o que nos leva a medir sua aceleração através de uma grandeza denominada "parâmetro de desaceleração" dada por

$$q \equiv -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -\frac{\ddot{a}}{aH^2}, \quad (3.8)$$

em que, por convenção, sinais negativos de q correspondem a aceleração.

Como comentado no capítulo 2, observações indicam uma expansão acelerada do Universo no momento atual, o que geralmente é atribuída a uma espécie de energia

escura ainda não compreendida. Diversos modelos tratam de buscar entender a origem e a natureza da energia escura. Entre estes, os modelos de campo escalar têm um papel significativo. Nesse cenário, é interessante estudar funções paramétricas do parâmetro de desaceleração, o momento de transição do Universo de desacelerado para acelerado e o parâmetro de equação de estado de energia escura em modelos w CDM, em que temos w constante mas não necessariamente $w = -1$.

3.2.1 Parametrização de $q(z)$

A técnica de parametrização consiste em escolher uma expressão analítica para a evolução de um parâmetro cosmológico e estimar os valores dos parâmetros a partir de diferentes dados observacionais. Essa abordagem tem a vantagem de não necessitar de um modelo do conteúdo energético do Universo, assumindo apenas o Princípio Cosmológico e a métrica de FLRW. Uma vez que a natureza da energia escura é desconhecida, a escolha de parametrização de $q(z)$ é arbitrária, desde que seja coerente com alguns limites, como por exemplo $q(0) = q_0$. Além disso, todas devem possibilitar uma fase de expansão acelerada e outra de expansão desacelerada visto que as observações cosmológicas indicam uma aceleração cósmica recente e que devemos ter uma fase desacelerada no período inicial da era da matéria para garantir a formação de estruturas.

A parametrização mais simples é a linear

$$q(z) = q_0 + q_1 z, \quad (3.9)$$

onde q_1 representa a primeira derivada de $q(z)$ calculada em $z = 0$. Tal parametrização foi proposta por Riess et. al [19] em 2004 e encontrou que $q_0 \lesssim -0,3$ e $q_1 \gtrsim 0$ com 95% de confiança, o que foi interpretado como prova de que o Universo estava em expansão desacelerada em mais altos *redshifts*. Entretanto, esse estudo foi realizado levando em consideração dados em $z > 1$, onde deveriam ser considerados termos de mais alta ordem na expansão de Taylor. Ademais, essa parametrização diverge para altos *redshifts* e por isso não leva a resultados interessantes, como mostrado em [20].

Em 2007, Gong e Wang [21] propuseram um modelo de parametrização de $q(z)$ com dois parâmetros dado por

$$q(z) = \frac{1}{2} + \frac{q_1 z + q_2}{(1+z)^2}. \quad (3.10)$$

Nesse modelo, $q_0 = 1/2 + q_2$ de tal forma que q_2 determina o valor de q_0 . Para $z \gg 1$, $q(z) \rightarrow 1/2$, como esperado na era dominada pela matéria [22].

Em 2009, Mortsell e Clarkson [23] sugeriram

$$q(z) = q_0 + q_1 \frac{z}{1+z} = q_0 + q_1(1-a), \quad (3.11)$$

onde a é o fator de escala. Com essa parametrização, para $z = 0$ temos $q(a = 1) = q_0$ e em um passado muito distante $q(a = 0) = q_0 + q_1$. Tal escolha foi inspirada em uma das mais conhecidas parametrizações da equação de estado de energia escura [24] e pode ser aplicada a diferentes modelos de aceleração [23], [25].

A parametrização proposta na equação 3.11 foi posteriormente utilizada em outros trabalhos, como é o caso do artigo de Santos, Carvalho e Alcaniz [25]. Nesse trabalho, os autores utilizam a definição do parâmetro de desaceleração escrita como

$$q(z) = \frac{1}{2} \frac{d \ln H^2}{d \ln (1+z)} - 1 \quad (3.12)$$

juntamente com a parametrização em 3.11 para obter o parâmetro de Hubble para este caso, isto é,

$$H(z) = H_0(1+z)^{1+q_0+q_1} \exp\left(-q_1 \frac{z}{1+z}\right). \quad (3.13)$$

Outro aspecto interessante é analisar o *redshift* z_t , em que o Universo passou de uma expansão desacelerada para uma expansão acelerada. Isso pode contribuir para testes de modelos, visto que, por exemplo, modelos em que a energia escura evolui com o tempo possuem diferentes z_t quando comparados ao modelo Λ CDM. Para a parametrização 3.11, temos

$$z_t = -\frac{q_0}{q_0 + q_1}, \quad (3.14)$$

pois $q(z_t) = 0$.

Para garantir a existência da era da matéria, essencial para a formação de estruturas, podemos assumir que $q(z \gg 1) = 1/2$. Nesse caso, a equação 3.11 se reduz a

$$q(z) = \left(q_0 + \frac{z}{2}\right) \frac{1}{1+z}, \quad (3.15)$$

que tem a vantagem de simplificar a análise para um parâmetro. O *redshift* de transição para expansão acelerada passa a ser $z_t = -2q_0$.

Nair, Jhingan e Jain [20] utilizaram, além das parametrizações 3.9 e 3.11,

$$q(z) = \frac{1}{2} + \frac{q_1}{(1+z)^2}, \quad (3.16)$$

que também converge a $1/2$ em altos *redshifts*. Em geral, para qualquer parame-

trização, podemos escrever o parâmetro de Hubble como

$$H(z) = H_0 \exp \left(\int_0^z \frac{1 + q(z')}{1 + z'} dz' \right). \quad (3.17)$$

Em 2017, Mamon e Das [26] generalizam as parametrizações segundo

$$q(z) = q_0 + q_1 X(z), \quad (3.18)$$

onde $X(z)$ é uma função do *redshift*.

Para estudar toda a história de expansão do Universo podemos considerar uma parametrização de $q(z)$ que não diverge, ou seja,

$$q(z) = q_0 + q_1 \left(\frac{\ln(N + z)}{1 + z} - \kappa \right), \quad (3.19)$$

onde q_0 , q_1 , N e κ são parâmetros arbitrários e os casos limites são de $q(z) = q_0 - q_1 \kappa$ para $z \rightarrow \infty$ e $q(z) = q_0 + q_1(\ln N - \kappa)$ para a época presente ($z = 0$).

Para baixos *redshifts* ($z \ll 1$), a parametrização 3.19 se torna

$$q(z) = q_0 + q_1 \left(\frac{\ln N}{1 + z} + \frac{z}{N(1 + z)} - \kappa \right), \quad (3.20)$$

de onde podemos obter os seguintes casos particulares:

(i) Para $\kappa = \ln N$, podemos obter uma expressão similar à equação 3.11:

$$q(z) = q_0 + \tilde{q}_1 \frac{z}{1 + z}, \quad (3.21)$$

$$\text{onde } \tilde{q}_1 = q_1 \left(\frac{1}{N} - \ln N \right).$$

(ii) Para $\kappa = 0$, temos

$$q(z) = q_0 + \frac{q_1 z + q_2}{N(1 + z)}, \quad (3.22)$$

onde $q_2 = q_1 N \ln N$. Esse caso é similar à equação 3.10.

(iii) Para $\kappa = 1/N$, encontramos

$$q(z) = q_0 + \frac{q_1^*}{1 + z}, \quad (3.23)$$

com $q_1^* = \frac{q_1}{N}(N \ln N - 1)$. Essa forma é similar à parametrização 3.16.

Outra parametrização interessante advém de fazer $\kappa = \ln N$ na equação 3.19,

que leva a

$$q(z) = q_0 + q_1 \left(\frac{\ln(N+z)}{1+z} - \ln N \right), \quad (3.24)$$

para $N > 1$. Tal escolha é justificável pois $q(z=0) = q_0$. Para garantir a era dominada pela matéria, em altos *redshifts* $q_0 - q_1 \ln N = 1/2$, o que reduz a equação 3.24 a

$$q(z) = q_0 + \frac{2q_0 - 1}{2 \ln N} \left(\frac{\ln(N+z)}{1+z} - \ln N \right), \quad (3.25)$$

reduzindo a parametrização a dois parâmetros, q_0 e N .

3.2.2 Parâmetro da equação de estado

A fim de encontrar uma expressão para o parâmetro da equação de estado da energia escura w consideremos a métrica de FLRW e a composição de dois fluidos perfeitos: a matéria bariônica, com pressão desprezível, e o campo escalar candidato a energia escura. Para esse caso, as equações de Friedmann são (fazendo $8\pi G = c = 1$)

$$3H^2 = \rho_m + \rho_\phi, \quad (3.26)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -p_\phi, \quad (3.27)$$

onde ρ_m é a densidade de matéria e ρ_ϕ e p_ϕ são a densidade e a pressão do campo escalar, respectivamente.

Por outro lado, as equações de conservação do campo escalar e da matéria são dados por

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + p_\phi) = 0, \quad (3.28)$$

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0. \quad (3.29)$$

De 3.29, vemos que

$$\rho_m = \rho_{m0}(1+z)^3, \quad (3.30)$$

como esperado, onde ρ_{m0} representa a densidade de matéria atualmente.

O parâmetro da equação de estado será

$$w = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = -\frac{(2\dot{H} + 3H^2)}{(3H^2 - \rho_m)}, \quad (3.31)$$

o que leva a

$$w = \frac{2q - 1}{3 - 3\Omega_{m0}(1+z)^3 \left(\frac{H_0}{H}\right)^2}, \quad (3.32)$$

onde Ω_{m0} é dado por $\Omega_{m0} = \frac{\rho_{m0}}{3H_0^2}$.

Calcularemos w para diferentes parametrizações de $q(z)$, uma vez que podemos determinar $H(z)$ a partir da equação 3.17.

Nós escolhemos três parametrizações que consideramos representativas daquelas apresentadas na seção 3.2.1 e que permitem o cálculo analítico da integral 3.17 para $H(z)$. Elas são baseadas em 3.11, 3.10 e 3.16 e serão referidas futuramente como modelos 1, 2 e 3, respectivamente.

$$q(z) = q_0 + q_1 \frac{z}{1+z}, \quad (3.33)$$

$$q(z) = \frac{1}{2} + \frac{q_1 z + q_2}{(1+z)^2}. \quad (3.34)$$

$$q(z) = \frac{1}{2} + \frac{q_1}{(1+z)^2}. \quad (3.35)$$

Podemos usar o limite

$$\lim_{z \gg 1} q(z) = 1/2$$

para reescrever os modelos propostos acima como

$$q(z) = q_0 + \left(\frac{1}{2} - q_0 \right) \frac{z}{1+z}, \quad (3.36)$$

$$q(z) = \frac{1}{2} + \frac{q_1 z + q_0 - 1/2}{(1+z)^2}. \quad (3.37)$$

$$q(z) = \frac{1}{2} + \frac{q_1}{(1+z)^2}. \quad (3.38)$$

Para cada parametrização será calculado $H(z)$, através da expressão 3.17, e os valores das distâncias de luminosidade das supernovas $d_L(z)$, o *redshift* de transição z_t e o parâmetro da equação de estado no modelo w CDM, através da equação 3.32.

No próximo capítulo faremos a determinação dos parâmetros para cada caso através do ajuste dos dados observacionais de $H(z)$ e de supernovas do tipo Ia do catálogo do Pantheon [27]. No caso dos dados de $H(z)$, utilizaremos dados de cronômetros cósmicos, isto é, galáxias passivas e antigas que permitem estimar $H(z)$ através da evolução diferencial de suas idades, segundo a equação 2.17. Os dados foram obtidos através de [28].

Capítulo 4

Expansão Cosmográfica - Resultados Numéricos

4.1 Metodologia

A fim de estimar os parâmetros cosmológicos por meio da expansão cosmográfica escolhemos trabalhar com os dados do catálogo Pantheon, que relaciona o *redshift* com a magnitude relativa já ajustadas das supernovas do tipo Ia. Essa escolha é justificada por termos um conjunto de 1048 observáveis e, portanto, conseguirmos resultados estatisticamente mais significativos quando comparado com os dados de $H(z)$.

Sabemos que o módulo de distância pode ser obtido através da relação empírica [29]

$$\mu = m_B^* + \alpha X_1 - \beta C - M_B, \quad (4.1)$$

onde m_B^* é a magnitude aparente na banda B, X_1 e C são, respectivamente, os parâmetros de alongamento e de cor, M_B é a magnitude absoluta e α e β são *nuisance parameters*.

Os dados do Pantheon utilizam o método BEAMS com *Bias Correction* (BBC) para calibrar as supernovas, sendo então tabeladas as magnitudes aparentes já corrigidas, isto é, $m_{B,corr}^* = m_B^* + \alpha X_1 - \beta C$ [29]. Sendo assim, necessitamos apenas da magnitude absoluta que, por sua vez, possui os valores de $-19,25 \pm 0,01$ usando H_0 de Riess 2018 e $-19,42 \pm 0,01$ segundo os resultados do Planck [30]. Logo, podemos obter d_L com a relação

$$d_L = 10^{\frac{m_{B,corr}^* + M_B}{5} - 5}. \quad (4.2)$$

Munidos das magnitudes relativas, resultados preliminares foram obtidos com o uso das distâncias de luminosidade com as magnitudes absolutas com H_0 de

Planck e de Riess [30]. Entretanto, visto que os valores dessas magnitudes são muito próximos, não houve diferenças significativas, o que nos levou a escolher utilizar apenas os que supunham a magnitude absoluta com H_0 de Riess de 2018. Nesse caso, temos $H_0 = 73,52 \pm 1,62 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ e $M_B = -19,25 \pm 0,01$.

Visto que a série dada por 3.7 tem validade no regime de $z < 1$, estipulamos diferentes limites superiores de *redshift* (z_{lim}) para análise. Em cada um desses regimes, foram estimados os valores dos parâmetros H_0 , q_0 , j_0 , bem como uma comparação com o ajuste do modelo Λ CDM aos dados.

Para realizar os ajustes aos dados, utilizamos o método de minimização da função χ^2 , dada por

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^N \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k}, \quad (4.3)$$

onde O_k é o valor observado e E_k o valor previsto pelo modelo estudado e N é o número de pontos da amostra. Também foi calculado o *chi* quadrado reduzido χ_{red}^2 , que é a razão entre o χ^2 e o número de graus de liberdade (diferença entre o número de dados e o número de parâmetros). O melhor valor para essa quantidade é de $\chi_{red}^2 = 1$. Para essas análises foram utilizados códigos em Python.

4.2 Resultados e discussão

Os resultados encontrados para os parâmetros estudados constam nas tabelas 4.1 e 4.2, indicando os valores numéricos para os ajustes ao modelo Λ CDM e cosmográfico, respectivamente.

z_{lim}	Nº de observáveis	H_0 (km s ⁻¹ Mpc ⁻¹)	Ω_m
0,15	297	73,52 ± 1,62	0,23 ± 0,05
0,2	411	73,52 ± 1,62	0,29 ± 0,03
0,3	630	73,52 ± 1,62	0,33 ± 0,02
0,5	832	73,52 ± 1,62	0,30 ± 0,01
0,7	924	73,52 ± 1,62	0,30 ± 0,01

Tabela 4.1: Resultados obtidos através do ajuste do modelo Λ CDM.

z_{lim}	H_0 (km s ⁻¹ Mpc ⁻¹)	q_0	j_0	χ^2	χ_{red}^2
0,15	75,09 ± 0,93	-0,84 ± 0,85	-5,81 ± 19,11	299,23	1,02
0,2	75,87 ± 0,74	-1,79 ± 0,52	22,47 ± 12,39	695,53	1,70
0,3	75,59 ± 0,55	-1,52 ± 0,26	15,49 ± 4,63	1894,27	3,02
0,5	74,55 ± 0,45	-0,78 ± 0,14	2,68 ± 1,42	3935,09	4,74
0,7	74,38 ± 0,39	-0,69 ± 0,09	1,74 ± 0,79	5118,28	5,55

Tabela 4.2: Resultados obtidos através do ajuste do modelo cosmográfico.

No chamado modelo de concordância, com $\Omega_m = 0,3$ e $\Omega_\Lambda = 0,7$, os valores dos parâmetros de desaceleração e *jerk* são, respectivamente, $q_0 = -0,55$ e $j_0 = 1$ [31]. Dessa forma, os resultados que são mais consistentes com o modelo de concordância são aqueles obtidos com o *redshift* limite de $z_{lim} = 0,7$. Por outro lado, os resultados que levam a um melhor χ^2_{red} são os obtidos com $z_{lim} = 0,15$, e, portanto, também são mostrados. Os ajustes aos dados, a diferença percentual entre o modelo cosmográfico e o Λ CDM e os contornos de confiança de 1σ , 2σ e 3σ são dados nas figuras 4.1 - 4.6 para esses dois casos de z_{lim} .

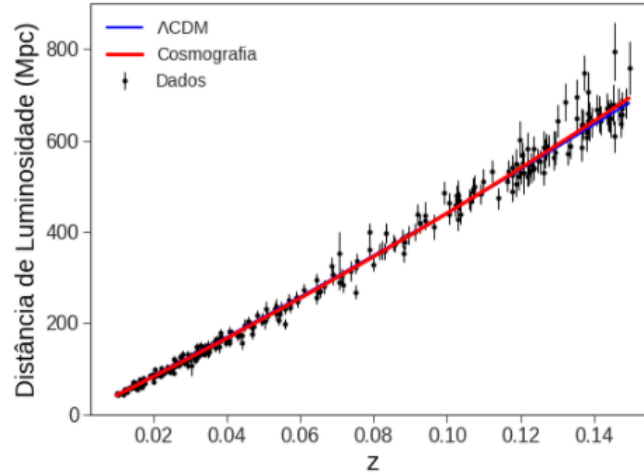


Figura 4.1: Comparação dos ajustes do modelos Λ CDM (curva azul) e cosmográfico (curva vermelha) aos dados de $d_L(z)$, com limite superior de $z = 0,15$. As barras de erro estão representadas pelas linhas verticais.

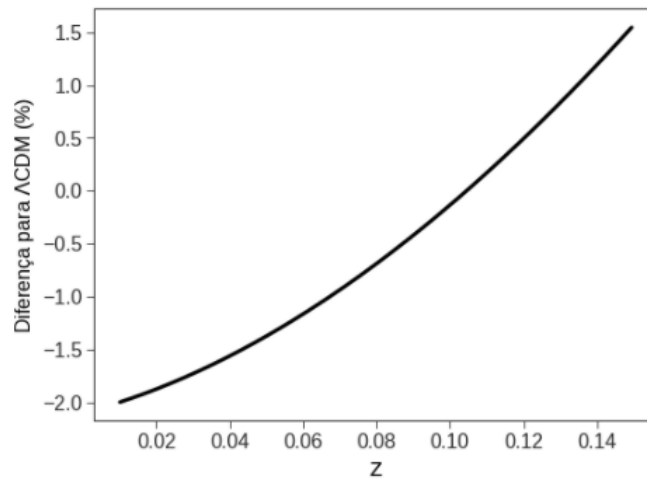


Figura 4.2: Diferença percentual entre os ajustes do modelos Λ CDM e cosmográfico para os dados de $d_L(z)$, com limite superior de $z = 0,15$.

Nas figuras 4.1 e 4.2 podemos ver que o modelo cosmográfico se ajusta bem aos dados e difere pouco do modelo padrão, mesmo com um *redshift* limite mais baixo. Entretanto, visto que é necessário *redshifts* mais altos para que as contribuições de

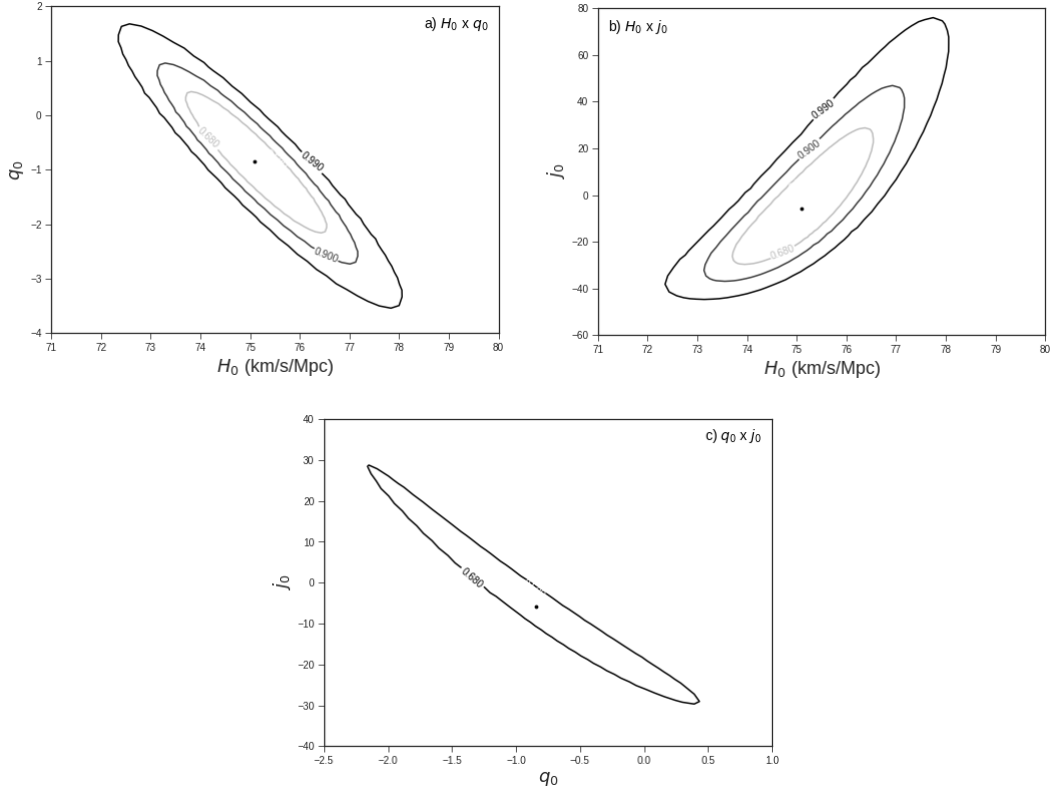


Figura 4.3: Contornos para os níveis de confiança dos parâmetros cosmográficos estimados, utilizando dados de $d_L(z)$ com $z < 0,15$. Os pontos negros indicam os *best-fit* para esses parâmetros.

q_0 e, principalmente, j_0 possam ser consideradas, os resultados numéricos desses parâmetros não se mostraram consistentes com o esperado (vide tabela 4.2 e figura 4.3).

Já quando observamos a tabela 4.2 e as figuras 4.4, 4.5 e 4.6, vemos um ajuste aos dados que é mais consistente com o modelo padrão e melhores resultados numéricos para os parâmetros cosmológicos analisados. Nesse caso temos $j_0 > 0$, o que indica que o Universo passou por uma transição de fase, de expansão desacelerada para acelerada, o que será investigado na próxima etapa do trabalho. Vemos também que o valor de H_0 se aproxima do valor estimado por Riess em 2018, mantendo a tensão com o valor obtido pela colaboração Planck [15].

Portanto, ainda que para o caso de $z_{lim} = 0,7$ tenhamos um maior χ_{red}^2 em função de um maior número de observáveis, esse limite nos retorna os resultados mais interessantes dessa análise.

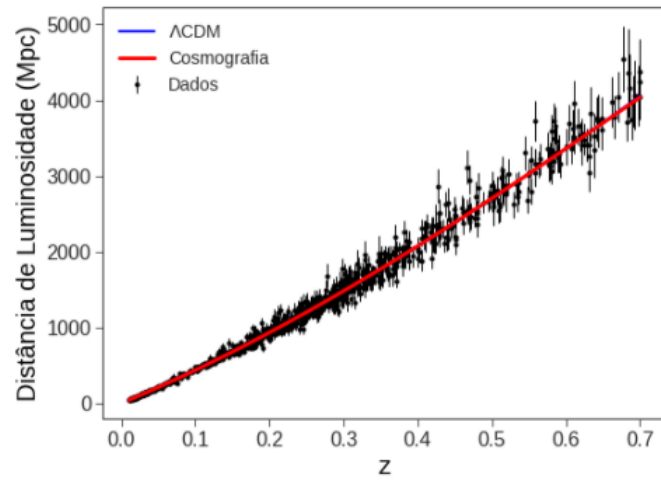


Figura 4.4: Comparação dos ajustes dos modelos Λ CDM (curva azul) e cosmológico (curva vermelha) aos dados de $d_L(z)$, com limite superior de $z = 0,7$. As barras de erro estão representadas pelas linhas verticais.

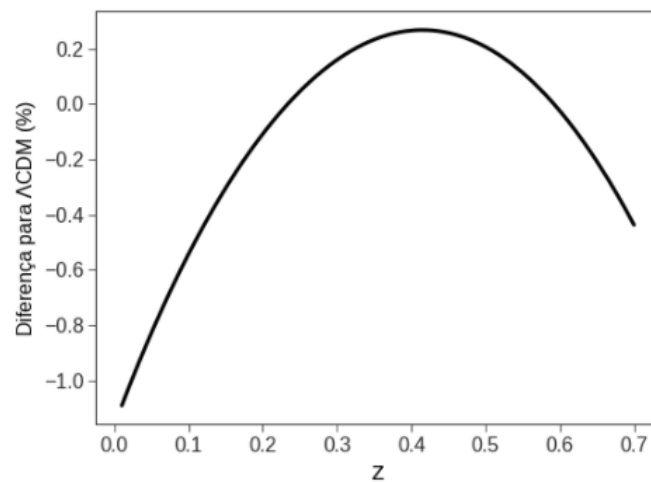


Figura 4.5: Diferença percentual entre os ajustes dos modelos Λ CDM e cosmológico aos dados de $d_L(z)$, com limite superior de $z = 0,7$.

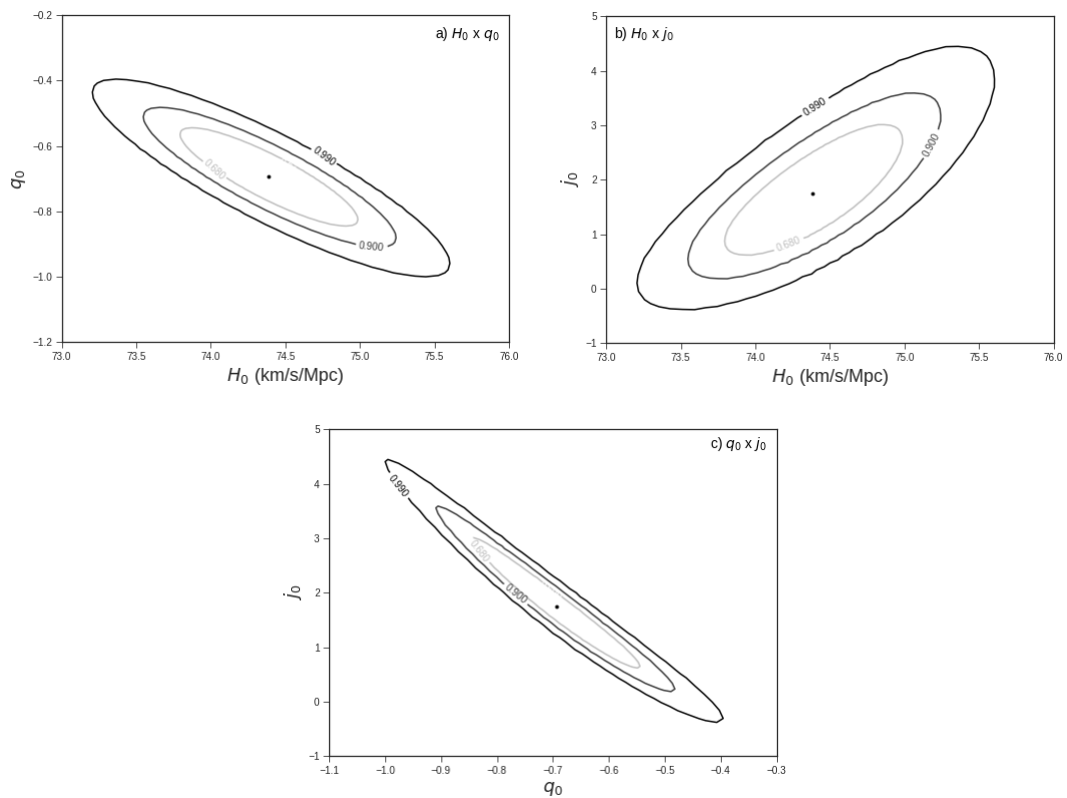


Figura 4.6: Contornos para os níveis de confiança dos parâmetros cosmográficos estimados, utilizando dados de $d_L(z)$ com $z < 0,7$. Os pontos negros indicam os *best-fit* para esses parâmetros.

Capítulo 5

Parametrização de $q(z)$ - Resultados Numéricos

5.1 Metodologia

A partir dos dados de distância de luminosidade das supernovas do tipo Ia do catálogo Pantheon e de cronômetros cósmicos supracitados, foram feitos os ajustes, através do método de minimização da função χ^2 , às equações de $H(z)$ e $d_L(z)$ para cada modelo de parametrização de $q(z)$ estudado.

As expressões de $H(z)$ são dadas pela equação 3.17 que foram integradas analiticamente. Conseqüentemente, suas incertezas também puderam ser assim estimadas, através da propagação de erros.

Para uma função $f = f(x_1, x_2, x_3, \dots)$, o erro de f pode ser calculado a partir da expressão

$$\sigma_f^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2, \quad (5.1)$$

para cada i -ésima variável.

Dessa forma, as expressões de $H(z)$ e suas incertezas $\sigma_{H(z)}$ para o modelos 1 são

$$H_1(z) = H_0(1+z)^{3/2} \exp \left[(q_0 - 1) \frac{z}{z+1} \right], \quad (5.2)$$

$$\sigma_{H_1(z)} = \left(\frac{z}{1+z} \right)^2 H_1(z)^2 \sigma_{q_0}^2 + \left(\frac{H_1(z)}{H_0} \right)^2 \sigma_{H_0}^2. \quad (5.3)$$

Para o modelo 2,

$$H_2(z) = H_0(1+z)^{3/2} \exp \left(\frac{q_0 - 1/2}{2} + \frac{q_1 z^2 - q_0 + 1/2}{2(1+z)^2} \right), \quad (5.4)$$

$$\sigma_{H_2(z)} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(1+z)^2} \right)^2 H_2(z)^2 \sigma_{q_0}^2 + \left(\frac{z^2}{2(1+z)^2} \right)^2 H_2(z)^2 \sigma_{q_1}^2 + \left(\frac{H_2(z)}{H_0} \right)^2 \sigma_{H_0}^2 \quad (5.5)$$

E para o modelo 3,

$$H_3(z) = H_0(1+z)^{3/2} \exp \left[\frac{q_1}{2} \left(1 - \frac{1}{(z+1)^2} \right) \right], \quad (5.6)$$

$$\sigma_{H_3(z)} = \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{(z+1)^2} \right) \right]^2 H_3(z)^2 \sigma_{q_1}^2 + \left(\frac{H_3(z)}{H_0} \right)^2 \sigma_{H_0}^2. \quad (5.7)$$

Já as expressões de $d_L(z)$ foram obtidas através da integração numérica

$$d_L = (1+z) \int_0^z \frac{cdz'}{H(z')} \quad (5.8)$$

para cada caso.

Os erros de $d_L(z)$ foram obtidos através do método de simulação de Monte Carlo. Tal método utiliza a lei de grandes números (LGN) para estimar uma população de parâmetros através de valores simulados. Segundo a LGN, conforme o tamanho da amostra aumenta, a probabilidade de que a média das variáveis seja igual ao valor esperado é 1.

Usando o método de Monte Carlo nós calculamos as curvas apresentadas nas figuras 5.1, 5.2, 5.5, 5.6, 5.9, 5.10, 5.13, 5.14, 5.17, 5.18, 5.21 e 5.22, sorteando 1000 valores diferentes de H_0 , q_1 , q_2 distribuídos aleatoriamente segundo uma distribuição gaussiana com largura igual a σ_{H_0} , σ_{q_0} e σ_{q_1} . Calculando a média dessas curvas para cada valor de z , nós podemos obter a dispersão das curvas e, portanto, o erro para os valores de $H(z)$, $q(z)$ e $d_L(z)$. Vale salientar que o cálculo do erro de $H(z)$, $q(z)$ e $w(z)$ podem ser calculados analiticamente, o que é mostrado em cada figura; porém o cálculo analítico do erro da distância de luminosidade é bem mais complexo, por isso optamos por calculá-lo usando o método de Monte Carlo. As estimativas através desse método foram implementadas em Python.

Utilizando a expressão analítica 5.1, os erros relativos aos parâmetros de desaceleração para cada modelo são

$$\sigma_q^2 = \left(1 - \frac{z}{1+z} \right)^2 \sigma_{q_0}^2 \quad (\text{Modelo 1}), \quad (5.9)$$

$$\sigma_q^2 = \left(\frac{z}{(1+z)^2} \right)^2 \sigma_{q_1}^2 + \left(\frac{1}{(1+z)^2} \right)^2 \sigma_{q_2}^2 \quad (\text{Modelo 2}), \quad (5.10)$$

$$\sigma_q^2 = \left(\frac{1}{(1+z)^2} \right)^2 \sigma_{q_1}^2 \quad (\text{Modelo 3}). \quad (5.11)$$

As expressões analíticas do *redshift* de transição $z(t)$ para os modelos 1,2 e 3 são dadas respectivamente por

$$z_{t,1} = -2q_0, \quad (5.12)$$

$$z_{t,2} = -(1+q_1) + \sqrt{2(q_1 - q_2) + q_1^2}, \quad (5.13)$$

$$z_{t,3} = \sqrt{-2q_1} - 1, \quad (5.14)$$

enquanto suas incertezas são

$$\sigma_{z_{t,1}} = 2\sigma_{q_0}, \quad (5.15)$$

$$\sigma_{z_{t,2}} = \sqrt{\left(-1 + \frac{1+q_1}{\sqrt{2(q_1 - q_2) + q_1^2}} \right)^2 \sigma_{q_1}^2 + \left(\frac{-1}{\sqrt{2(q_1 - q_2) + q_1^2}} \right)^2} \quad (5.16)$$

$$\sigma_{z_{t,3}} = \frac{1}{\sqrt{-2q_1}} \sigma_{q_1}. \quad (5.17)$$

A partir da equação 3.32 e da propagação de erros 5.1, temos que os parâmetros da equação de estado da energia escura e suas incertezas são:

- Para o modelo 1,

$$w_1 = \frac{\frac{2}{1+z}(q_0 + \frac{z}{2}) - 1}{3 - 3\Omega_{m,0}(1+z)^3 \left(\frac{H_0}{H(z)} \right)^2}, \quad (5.18)$$

$$\sigma_{w_1}^2 = \left(\frac{\frac{2}{1+z}}{3 - 3\Omega_{m,0}(1+z)^3 \left(\frac{H_0}{H(z)} \right)^2} \right)^2 \sigma_{q_0}^2 + \left(\frac{\left[\frac{2}{1+z}(q_0 + \frac{z}{2}) - 1 \right] \left[\frac{6\Omega_{m,0}(1+z)^3 H_0}{H(z)^2} \right]}{\left[3 - 3\Omega_{m,0}(1+z)^3 \left(\frac{H_0}{H(z)} \right)^2 \right]^2} \right)^2 \sigma_{H_0}^2. \quad (5.19)$$

- Para o modelo 2,

$$w_2 = \frac{2\left(\frac{1}{2} + \frac{q_1 z + q_0 - 1/2}{(1+z)^2}\right) - 1}{3 - 3\Omega_{m,0}(1+z)^3 \left(\frac{H_0}{H(z)} \right)^2}, \quad (5.20)$$

$$\sigma_{w_2}^2 = \left(\frac{\frac{2}{(1+z)^2}}{3 - 3\Omega_{m,0}(1+z)^3 \left(\frac{H_0}{H(z)}\right)^2} \right)^2 \sigma_{q_0}^2 + \left(\frac{\frac{2z}{(1+z)^2}}{3 - 3\Omega_{m,0}(1+z)^3 \left(\frac{H_0}{H(z)}\right)^2} \right)^2 \sigma_{q_1}^2 + \left(\frac{\left[2\left(\frac{1}{2} + \frac{q_1 z + q_0 - 1/2}{(1+z)^2}\right) - 1 \right] \left[\frac{6\Omega_{m,0}(1+z)^3 H_0}{H(z)^2} \right]}{\left[3 - 3\Omega_{m,0}(1+z)^3 \left(\frac{H_0}{H(z)}\right)^2 \right]^2} \right)^2 \sigma_{H_0}^2. \quad (5.21)$$

- Para o modelo 3,

$$w_3 = \frac{2\left(\frac{1}{2} + \frac{q_1}{(1+z)^2}\right) - 1}{3 - 3\Omega_{m,0}(1+z)^3 \left(\frac{H_0}{H(z)}\right)^2}, \quad (5.22)$$

$$\sigma_{w_3}^2 = \left(\frac{\frac{2}{(1+z)^2}}{3 - 3\Omega_{m,0}(1+z)^3 \left(\frac{H_0}{H(z)}\right)^2} \right)^2 \sigma_{q_1}^2 + \left(\frac{\left[2\left(\frac{1}{2} + \frac{q_1}{(1+z)^2}\right) - 1 \right] \left[\frac{6\Omega_{m,0}(1+z)^3 H_0}{H(z)^2} \right]}{\left[3 - 3\Omega_{m,0}(1+z)^3 \left(\frac{H_0}{H(z)}\right)^2 \right]^2} \right)^2 \sigma_{H_0}^2. \quad (5.23)$$

Para $z = 0$, o parâmetro da equação de estado e seu erro são dados por

$$w_0 = \frac{2q_0 - 1}{3 - 3\Omega_{m,0}} \quad (5.24)$$

e

$$\sigma_{w_0} = \frac{2}{3 - 3\Omega_{m,0}} \sigma_{q_0} \quad (5.25)$$

para os três modelos analisados.

É interessante fazer a comparação dos modelos estudados com o Λ CDM. No modelo padrão, temos [23]

$$q(z) = \frac{1}{2} \frac{\Omega_{m,0}(1+z)^3 - 2(1 - \Omega_{m,0} - \Omega_\kappa)}{2\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_\kappa(1+z^2)^2 + 1 - \Omega_{m,0} - \Omega_\kappa}. \quad (5.26)$$

Logo, para $\Omega_\kappa = 0$ o parâmetro de desaceleração é dado por

$$q(z) = \frac{1}{2} \frac{\Omega_{m,0}(1+z)^3 - 2(1 - \Omega_{m,0})}{\Omega_{m,0}(1+z)^3 + 1 - \Omega_{m,0}}. \quad (5.27)$$

Nesse modelo, o *redshift* de transição e o parâmetro da equação de estado da energia escura em $z = 0$ são, respectivamente,

$$z_t = \left[2 \frac{(1 - \Omega_{m,0})}{\Omega_{m,0}} \right]^{1/3} - 1 \quad \text{e} \quad w = -1. \quad (5.28)$$

Ao longo dos cálculos consideramos o valor do parâmetro de densidade de matéria do modelo de concordância, isto é, $\Omega_{m,0} = 0,3$.

Para o modelo de concordância, $z_t = 0,7$.

5.2 Resultados e discussão

5.2.1 Usando $H(z)$

Os parâmetros obtidos com o uso dos dados de cronômetros cósmicos para cada um dos modelos desse estudo se encontram nas tabelas 5.1 e 5.2. É possível perceber que o menor valor de χ_{red}^2 se dá no terceiro modelo, e o que possui maiores incertezas é o modelo 2.

As figuras 5.1, 5.5 e 5.9 mostram a evolução do parâmetro de Hubble nos modelos 1, 2 e 3. Nelas, são mostrados os erros (1σ) calculados analiticamente através das equações 5.3, 5.5 e 5.7, respectivamente, e também os erros calculados através do método de Monte Carlo. Como esperado, ambos são equivalentes. É notável a grande dispersão no segundo modelo, especialmente para *redshifts* mais altos.

As figuras 5.2, 5.6 e 5.10 apresentam as curvas do parâmetro de desaceleração para cada caso. A curva de $q(z)$ descrita pelo modelo padrão também é mostrada em cada um dos gráficos. É possível visualizar que o momento em que o Universo passa de expansão desacelerada para acelerada ($q(z_t) = 0$) nos modelos propostos ocorre mais recentemente do que no modelo Λ CDM, sendo o modelo 1 aquele com menor diferença.

Nas figuras 5.3, 5.7 e 5.11 apresentamos as curvas para $w(z)$ nesses modelos. Podemos ver que os gráficos relativos aos modelos 1 e 3 são similares, sendo $w < -2$ para $z > 2$. Já para o modelo 2, temos uma curva bem distinta que se mantém aproximadamente constante até $z \approx 0,5$ e decai no Universo mais recente. Os erros desse parâmetro são muito significativos em todos os três modelos.

As figuras 5.3, 5.7 e 5.11 apresentam os contornos de confiança em 1σ , 2σ e 3σ de confiança para os parâmetros H_0 , q_0 e q_1 em cada parametrização. Podemos ver que, também para esses parâmetros, o modelo 2 apresenta piores resultados.

Parametrização	H_0	q_0	q_1	q_2
Modelo 1	$65,54 \pm 2,36$	$-0,31 \pm 0,09$	$0,81 \pm 0,09$	-
Modelo 2	$71,44 \pm 5,62$	$-0,93 \pm 0,52$	$0,29 \pm 0,91$	$-1,43 \pm 0,52$
Modelo 3	$69,91 \pm 2,89$	$-0,77 \pm 0,15$	$-1,27 \pm 0,15$	-

Tabela 5.1: Resultados obtidos através do ajuste aos dados de $H(z)$.

Parametrização	z_t	w_0	χ^2	χ_{red}^2
Modelo 1	$0,62 \pm 0,19$	$-0,77 \pm 0,09$	34,88	1,20
Modelo 2	$0,59 \pm 0,39$	$-1,36 \pm 0,51$	34,75	1,24
Modelo 3	$0,59 \pm 0,09$	$-1,21 \pm 0,14$	34,44	1,19

Tabela 5.2: Resultados obtidos através do ajuste aos dados de $H(z)$.

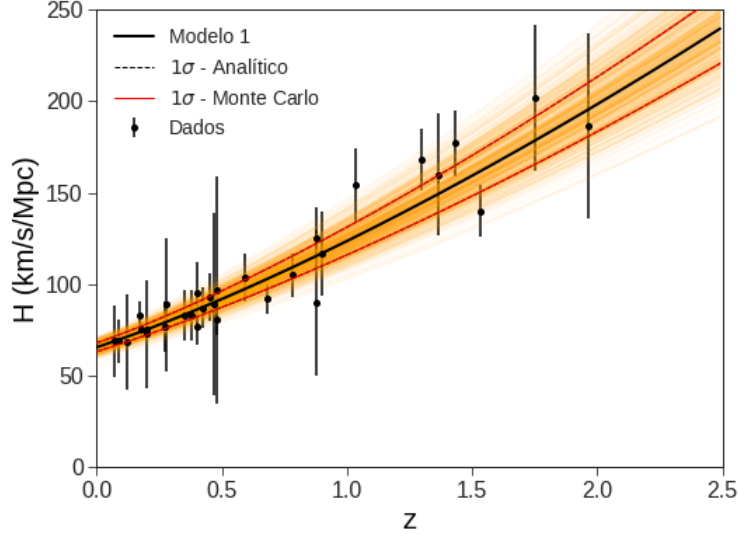


Figura 5.1: Ajuste do modelo 1 aos dados de $H(z)$ (curva preta). As curvas preta tracejada e vermelha contínua representam os limites da região de 1σ de confiança calculados de forma analítica e através do método de Monte Carlo, respectivamente. As curvas em laranja representam as calculadas randomicamente pelo método de Monte Carlo.

5.2.2 Distância luminosidade

Os parâmetros obtidos com o uso dos dados de supernovas do tipo Ia se encontram nas tabelas 5.3 e 5.4. O menor valor de χ_{red}^2 é aquele encontrado para o terceiro modelo indicando ser esse o modelo em que houve melhor ajuste aos dados, enquanto que o modelo 2 possui as maiores incertezas.

As figuras 5.13, 5.17 e 5.21 mostram a evolução da distância de luminosidade em cada um dos modelos. Temos que os modelos 1 e 3 têm um bom ajuste aos dados enquanto que o modelo 2 apresenta uma maior dispersão, principalmente em altos *redshifts*.

As figuras 5.14, 5.18 e 5.22 indicam as curvas do parâmetro de desaceleração para cada parametrização assim como aquela dada pelo modelo Λ CDM. Para o modelo 1, vemos que para $z \gtrsim 0,3$ o modelo padrão prevê uma maior desaceleração do que o modelo proposto e que no Universo mais recente os dois modelos descrevem a mesma aceleração. Já no modelo 2, temos que a expansão desacelerada do Universo em altos *redshifts* corresponde àquela do modelo padrão mas atualmente os valores de $q(z)$ são distintos nesses modelos. Em *redshifts* intermediários ($z \approx 1,4$) o modelo

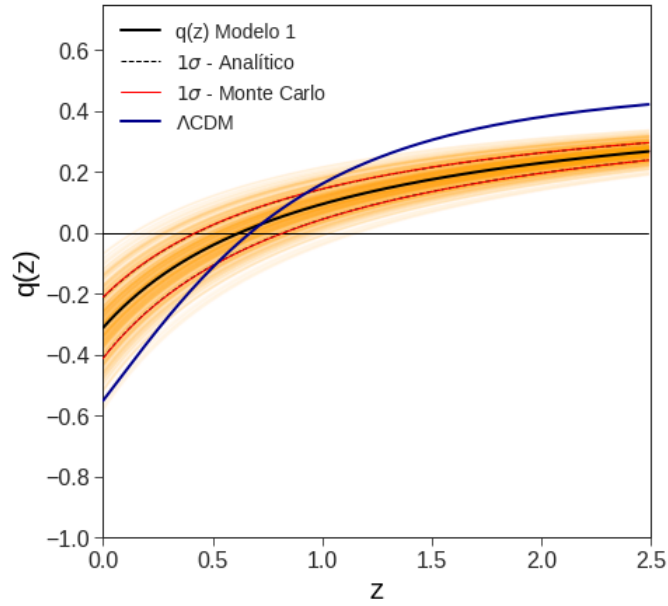


Figura 5.2: Parâmetro de desaceleração $q(z)$ dada pelo modelo 1 a partir do ajuste aos dados de $H(z)$ (curva preta) e pelo modelo Λ CDM (curva azul). As curvas preta tracejada e vermelha contínua representam os limites da região de 1σ de confiança calculados de forma analítica e através do método de Monte Carlo, respectivamente. As curvas em laranja representam as calculadas randomicamente pelo método de Monte Carlo.

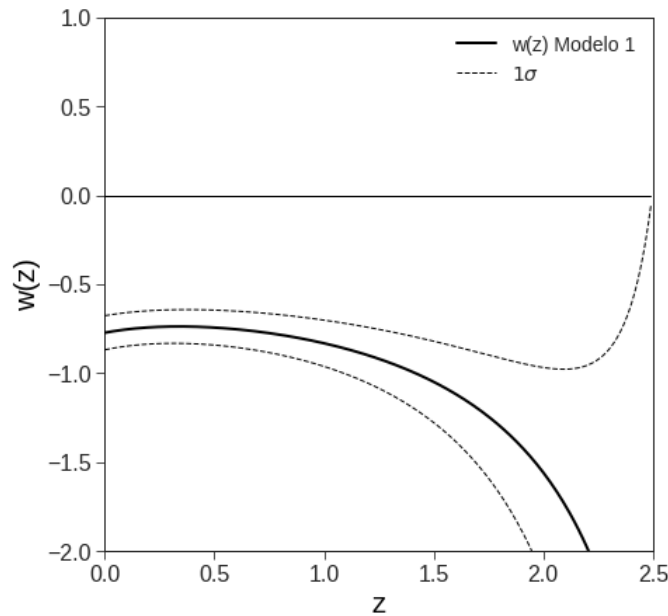


Figura 5.3: Parâmetro da equação de estado de energia escura $w(z)$ para o modelo 1 estimado a partir do ajuste aos dados de $H(z)$. A curva preta tracejada indica os limites das regiões de 1σ de confiança calculados de forma analítica.

3 e o Λ CDM estão em concordância.

Com relação ao parâmetro da equação de estado da energia escura, os três modelos levam a w_0 próximo daquele esperado pelo modelo padrão. Nas figuras 5.15,

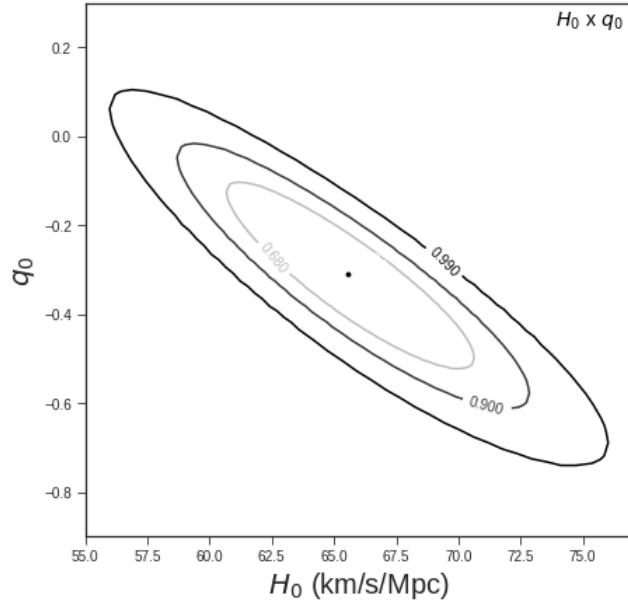


Figura 5.4: Regiões de 1σ , 2σ e 3σ de confiança para os parâmetros H_0 e q_0 estimados a partir do ajuste aos dados de $H(z)$ para o modelo 1. Os pontos negros indicam os *best-fit* para esses parâmetros.

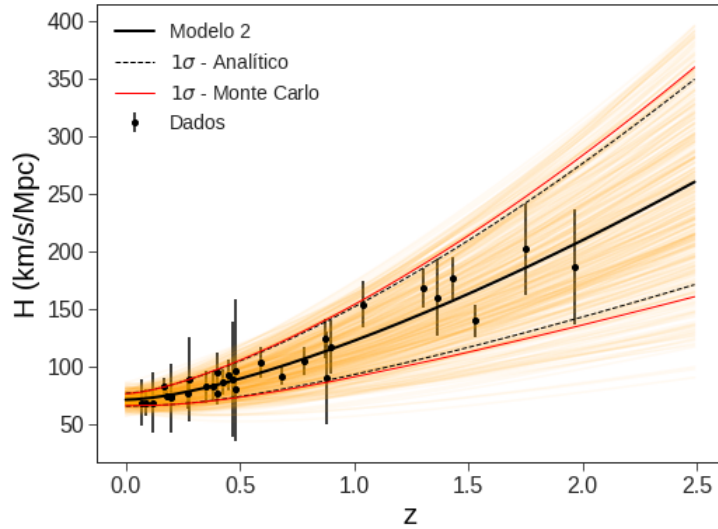


Figura 5.5: Ajuste do modelo 2 aos dados de $H(z)$ (curva preta). As curvas preta tracejada e vermelha contínua representam os limites da região de 1σ de confiança calculados de forma analítica e através do método de Monte Carlo, respectivamente. As curvas em laranja representam as calculadas randomicamente pelo método de Monte Carlo.

5.19 e 5.23 é possível ver a evolução desse parâmetro com relação ao *redshift* nesses modelos. No modelo 1, temos que $w(z)$ decresce conforme z aumenta, havendo descontinuidades para $z > 1,0$. No modelo 2, temos que $w(z)$ cresce com z e as incertezas são bastante significativas. No modelo 3 $w(z)$ cresce até $z \approx 0,5$ e em seguida começa a decrescer.

As figuras 5.16, 5.20 e 5.24 indicam os contornos de confiança em 1σ , 2σ e 3σ

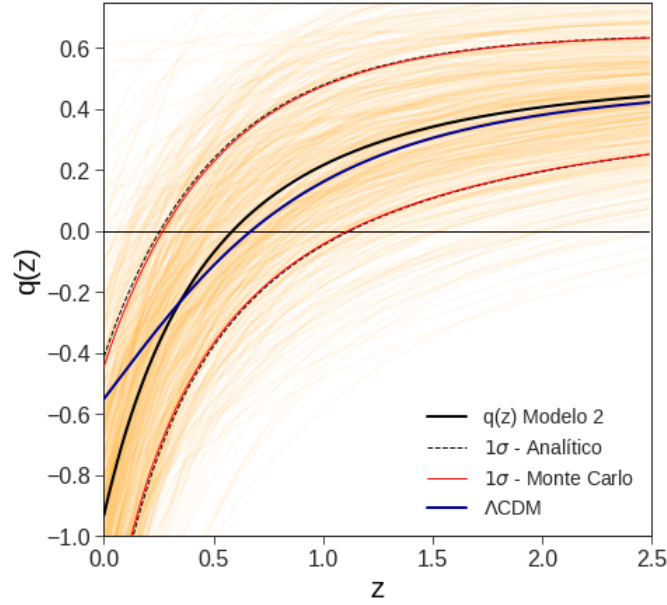


Figura 5.6: Parâmetro de desaceleração $q(z)$ dada pelo modelo 2 a partir do ajuste aos dados de $H(z)$ (curva preta) e pelo modelo Λ CDM (curva azul). As curvas preta tracejada e vermelha contínua representam os limites da região de 1σ de confiança calculados de forma analítica e através do método de Monte Carlo, respectivamente. As curvas em laranja representam as calculadas randomicamente pelo método de Monte Carlo.

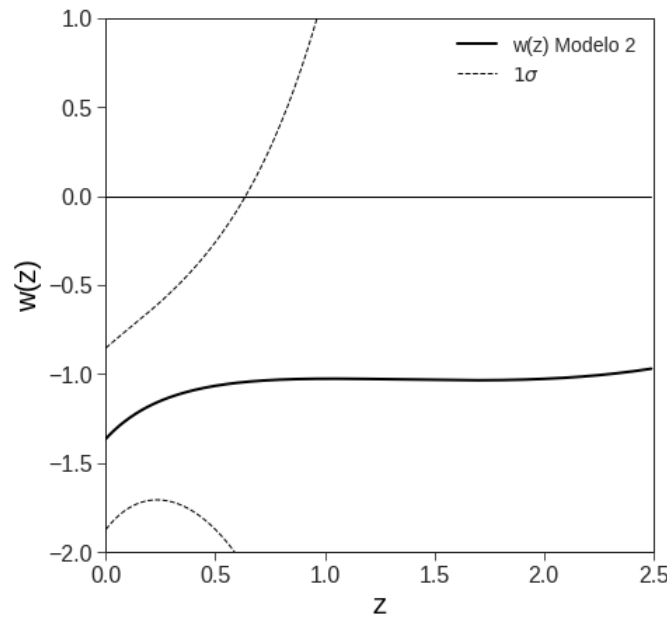


Figura 5.7: Parâmetro da equação de estado de energia escura $w(z)$ para o modelo 2 estimado a partir do ajuste aos dados de $H(z)$. A curva preta tracejada indica os limites das regiões de 1σ de confiança calculados de forma analítica.

para os parâmetros H_0 , q_0 e q_1 em cada parametrização. Para esses parâmetros, o modelo 2 foi o que apresentou maiores erros.

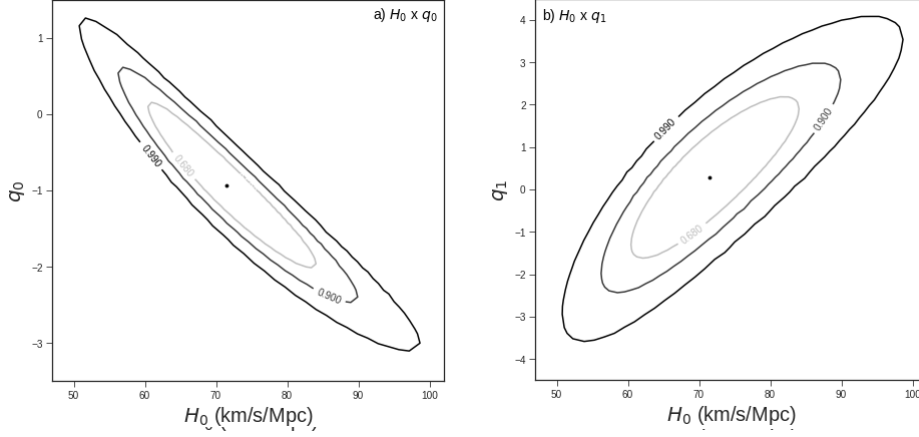


Figura 5.8: Regiões de 1σ , 2σ e 3σ de confiança para os parâmetros estimados a partir do ajuste aos dados de $H(z)$ para o modelo 2. Os pontos negros indicam os *best-fit* para esses parâmetros.

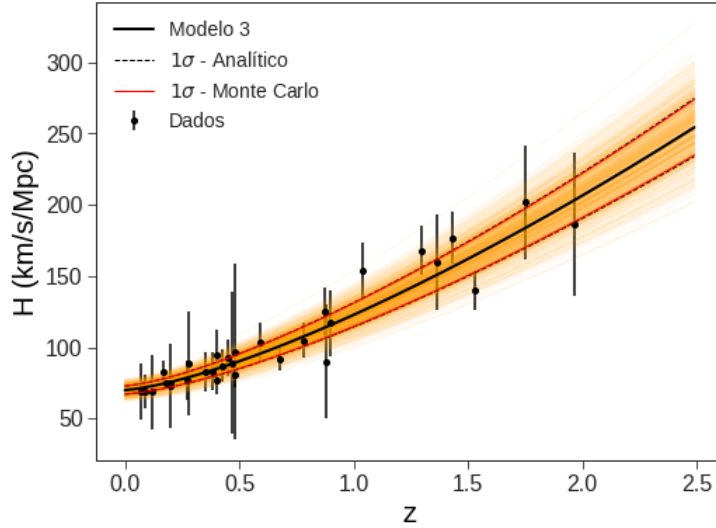


Figura 5.9: Ajuste do modelo 3 aos dados de $H(z)$ (curva preta). As curvas preta tracejada e vermelha contínua representam os limites da região de 1σ de confiança calculados de forma analítica e através do método de Monte Carlo, respectivamente. As curvas em laranja representam as calculadas randomicamente pelo método de Monte Carlo.

Parametrização	H_0	q_0	q_1	q_2
Modelo 1	$73,75 \pm 0,25$	$-0,54 \pm 0,03$	$1,04 \pm 0,03$	-
Modelo 2	$74,55 \pm 0,37$	$-0,78 \pm 0,08$	$0,12 \pm 0,39$	$-1,28 \pm 0,08$
Modelo 3	$74,47 \pm 0,27$	$-0,76 \pm 0,03$	$-1,26 \pm 0,03$	-

Tabela 5.3: Resultados obtidos através do ajuste aos dados de $d_L(z)$.

5.3 Conclusão

De forma resumida, os resultados da análise das parametrizações de $q(z)$ indicam uma expansão acelerada do Universo no momento presente, corroborada pelo

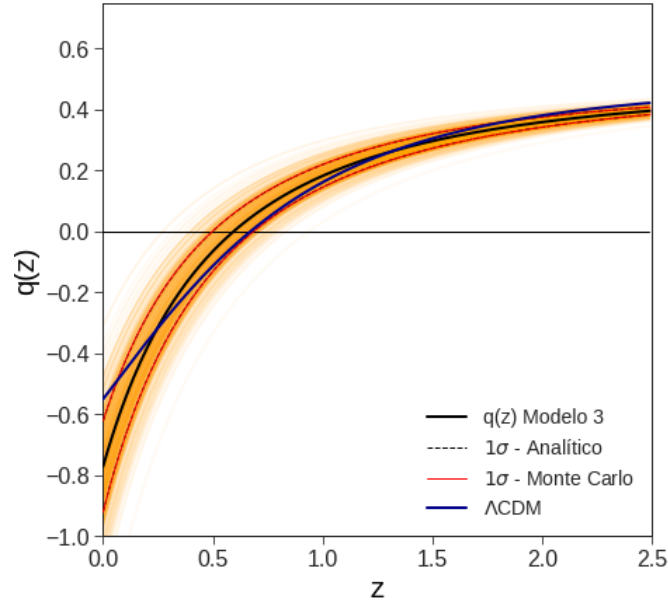


Figura 5.10: Parâmetro de desaceleração $q(z)$ dada pelo modelo 3 a partir do ajuste aos dados de $H(z)$ (curva preta) e pelo modelo Λ CDM (curva azul). As curvas preta tracejada e vermelha contínua representam os limites da região de 1σ de confiança calculados de forma analítica e através do método de Monte Carlo, respectivamente. As curvas em laranja representam as calculadas randomicamente pelo método de Monte Carlo.

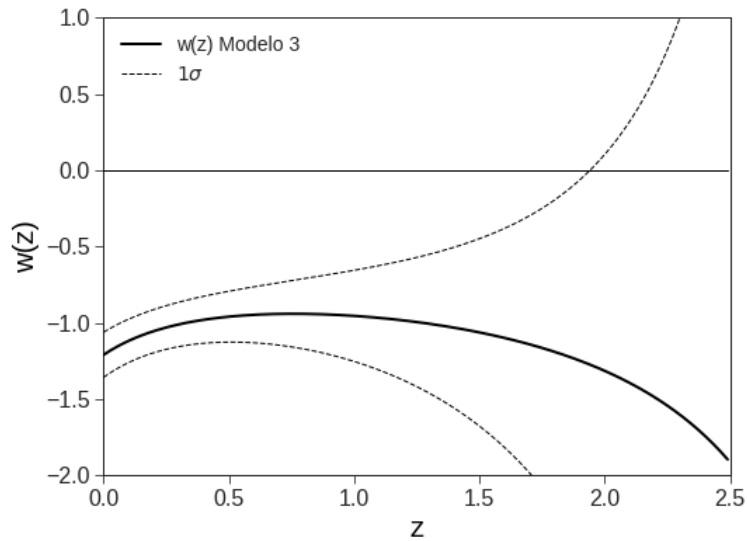


Figura 5.11: Parâmetro da equação de estado de energia escura $w(z)$ para o modelo 3 estimado a partir do ajuste aos dados de $H(z)$. A curva preta tracejada indica os limites das regiões de 1σ de confiança calculados de forma analítica.

parâmetro da equação de estado de energia escura.

Com relação ao *redshift* de transição, os resultados indicaram um valor inferior a z_t dado pelo modelo de concordância, com excessão do modelo 1 quando usamos dados de $d_L(z)$. Isso indica que esses modelos favorecem uma expansão acelerada mais recente. Os valores de w_0 nas parametrizações propostas correspondem ao

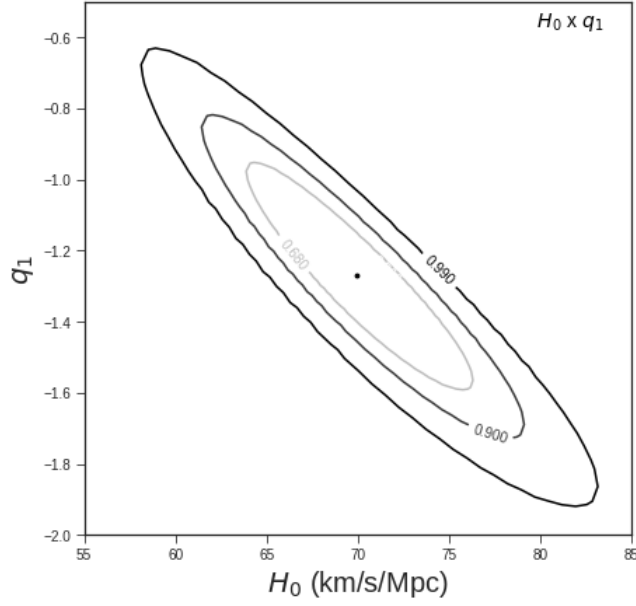


Figura 5.12: Regiões de 1σ , 2σ e 3σ de confiança para os parâmetros H_0 e q_0 estimados a partir do ajuste aos dados de $H(z)$ para o modelo 3. Os pontos negros indicam os *best-fit* para esses parâmetros.

Parametrização	z_t	w_0	χ^2	χ_{red}^2
Modelo 1	$1,09 \pm 0,05$	$-0,99 \pm 0,02$	9605,09	9,18
Modelo 2	$0,56 \pm 0,14$	$-1,22 \pm 0,08$	9318,55	8,92
Modelo 3	$0,59 \pm 0,02$	$-1,19 \pm 0,03$	9319,18	8,91

Tabela 5.4: Resultados obtidos através do ajuste aos dados de $d_L(z)$.

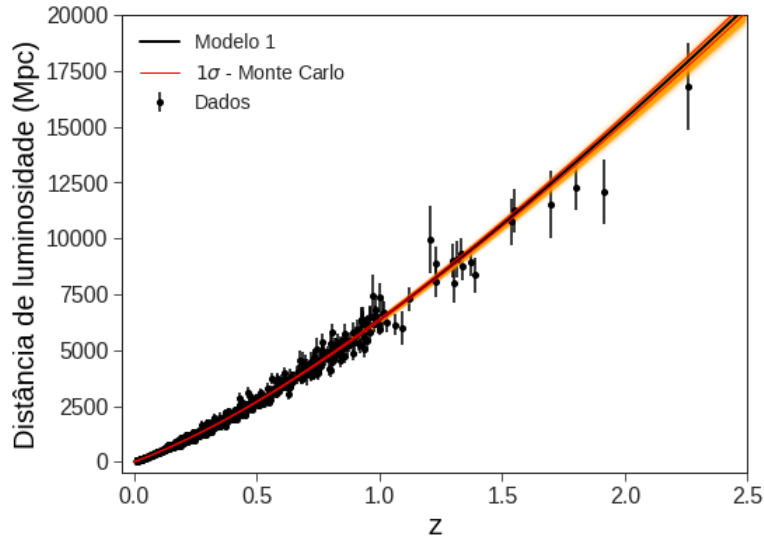


Figura 5.13: Ajuste do modelo 1 aos dados de $d_L(z)$ (curva preta). As curvas preta tracejada e vermelha contínua representam os limites da região de 1σ de confiança calculados de forma analítica e através do método de Monte Carlo, respectivamente. As curvas em laranja representam as calculadas randomicamente pelo método de Monte Carlo.

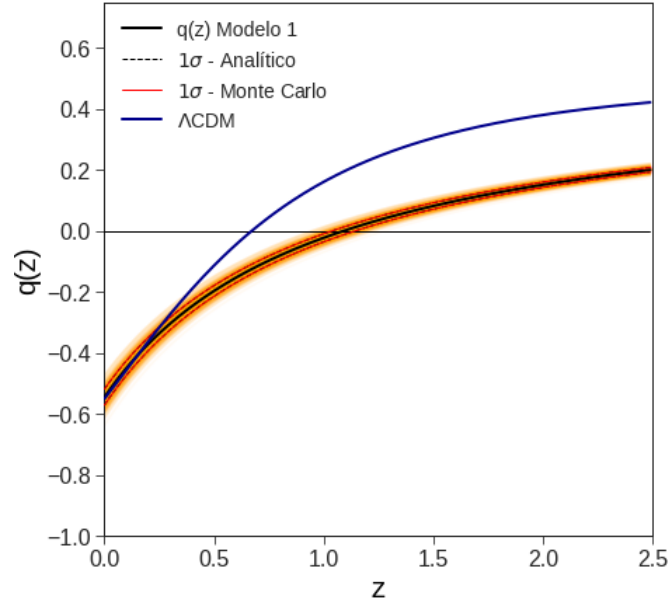


Figura 5.14: Parâmetro de desaceleração $q(z)$ dada pelo modelo 1 a partir do ajuste aos dados de $d_L(z)$ (curva preta) e pelo modelo Λ CDM (curva azul). As curvas preta tracejada e vermelha contínua representam os limites da região de 1σ de confiança calculados de forma analítica e através do método de Monte Carlo, respectivamente. As curvas em laranja representam as calculadas randomicamente pelo método de Monte Carlo.

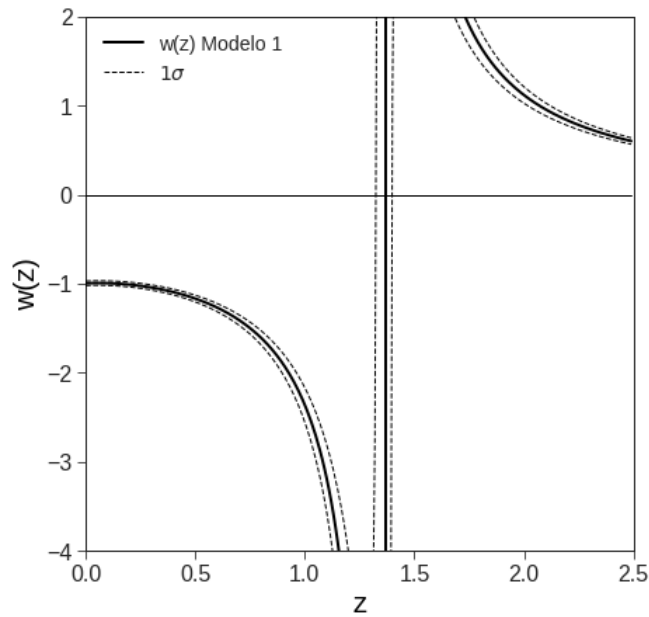


Figura 5.15: Parâmetro da equação de estado de energia escura $w(z)$ para o modelo 1 estimado a partir do ajuste aos dados de $d_L(z)$. A curva preta tracejada indica os limites das regiões de 1σ de confiança calculados de forma analítica.

esperado.

Dentre os modelos estudados, temos que o modelo 2 apresenta os piores resultados enquanto que o modelo 3 é aquele que apresenta um melhor ajuste aos dados,

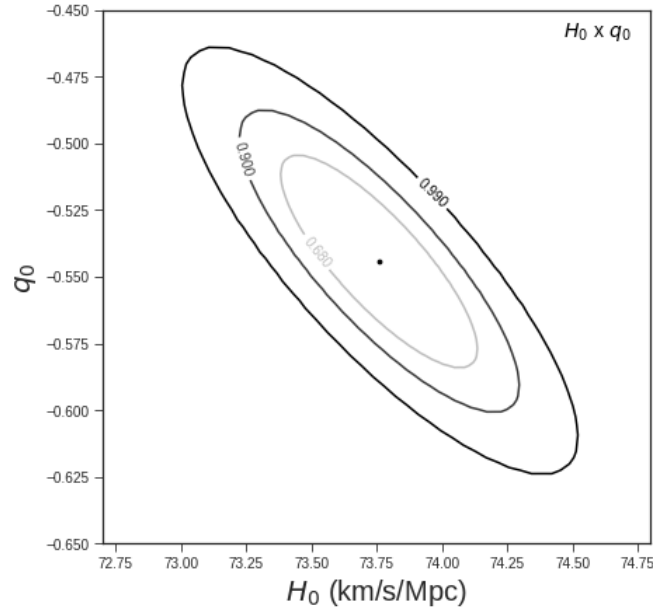


Figura 5.16: Regiões de 1σ , 2σ e 3σ de confiança para os parâmetros H_0 e q_0 estimados a partir do ajuste aos dados de $d_L(z)$ para o modelo 1. Os pontos negros indicam os *best-fit* para esses parâmetros.

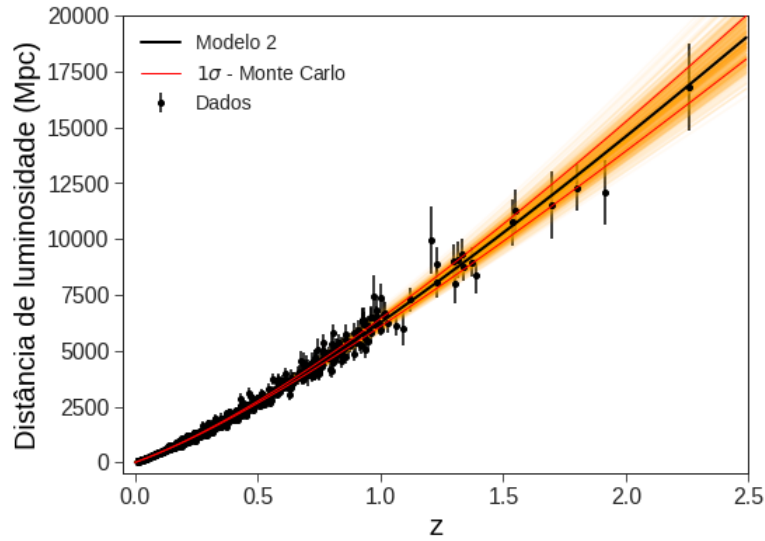


Figura 5.17: Ajuste do modelo 2 aos dados de $d_L(z)$ (curva preta). As curvas preta tracejada e vermelha contínua representam os limites da região de 1σ de confiança calculados de forma analítica e através do método de Monte Carlo, respectivamente. As curvas em laranja representam as calculadas randomicamente pelo método de Monte Carlo.

tanto de supernovas quanto de cronômetros cósmicos. Além disso, este modelo contém apenas dois parâmetros livres, H_0 e q_1 .

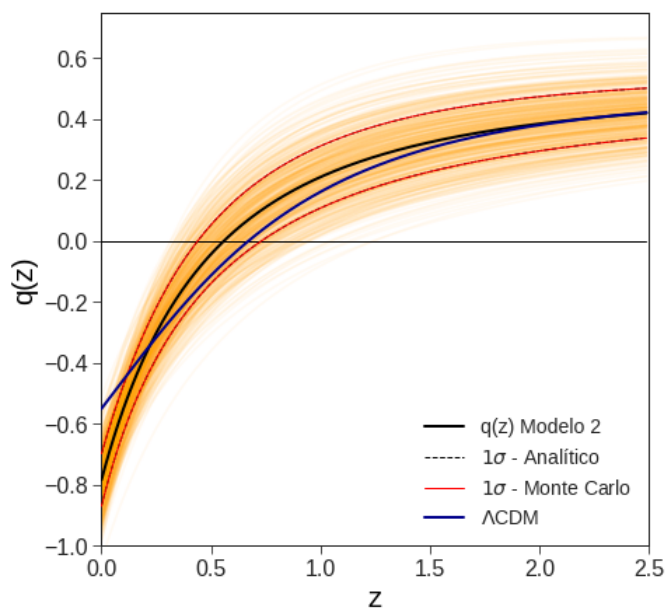


Figura 5.18: Parâmetro de desaceleração $q(z)$ dada pelo modelo 2 a partir do ajuste aos dados de $d_L(z)$ (curva preta) e pelo modelo Λ CDM (curva azul). As curvas preta tracejada e vermelha contínua representam os limites da região de 1σ de confiança calculados de forma analítica e através do método de Monte Carlo, respectivamente. As curvas em laranja representam as calculadas randomicamente pelo método de Monte Carlo.

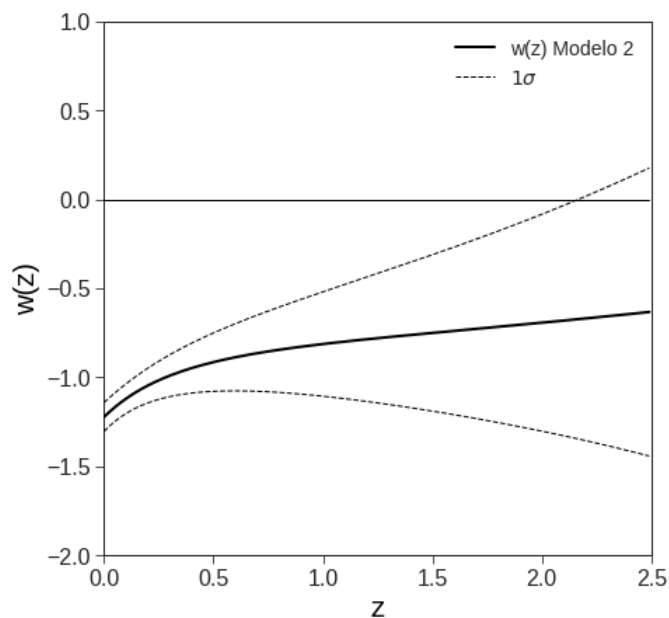


Figura 5.19: Parâmetro da equação de estado de energia escura $w(z)$ para o modelo 2 estimado a partir do ajuste aos dados de $d_L(z)$. A curva preta tracejada indica os limites das regiões de 1σ de confiança calculados de forma analítica.

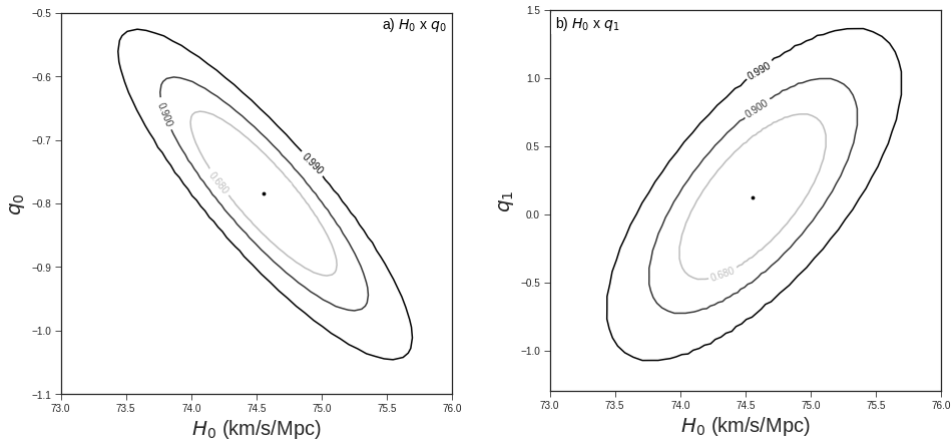


Figura 5.20: Regiões de 1σ , 2σ e 3σ de confiança para os parâmetros estimados a partir do ajuste aos dados de $d_L(z)$ para o modelo 2. Os pontos negros indicam os *best-fit* para esses parâmetros.

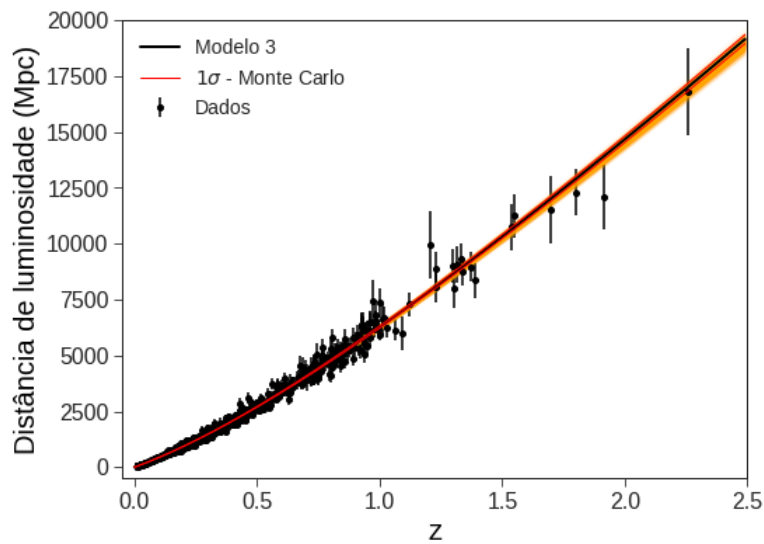


Figura 5.21: Ajuste do modelo 3 aos dados de $d_L(z)$ (curva preta). As curvas preta tracejada e vermelha contínua representam os limites da região de 1σ de confiança calculados de forma analítica e através do método de Monte Carlo, respectivamente. As curvas em laranja representam as calculadas randomicamente pelo método de Monte Carlo.

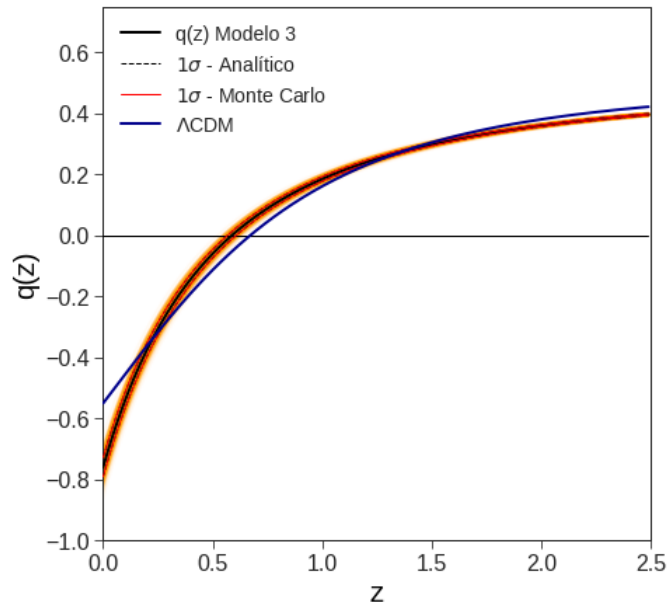


Figura 5.22: Parâmetro de desaceleração $q(z)$ dada pelo modelo 3 a partir do ajuste aos dados de $d_L(z)$ (curva preta) e pelo modelo Λ CDM (curva azul). As curvas preta tracejada e vermelha contínua representam os limites da região de 1σ de confiança calculados de forma analítica e através do método de Monte Carlo, respectivamente. As curvas em laranja representam as calculadas randomicamente pelo método de Monte Carlo.

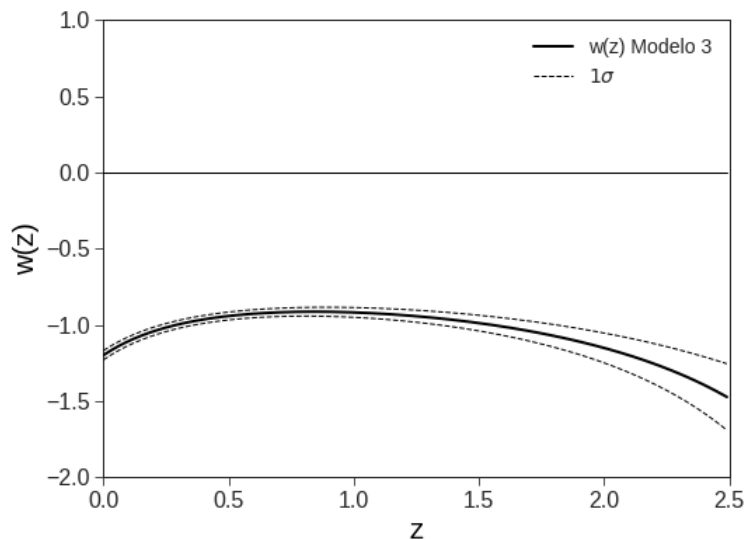


Figura 5.23: Parâmetro da equação de estado de energia escura $w(z)$ para o modelo 3 estimado a partir do ajuste aos dados de $d_L(z)$. A curva preta tracejada indica os limites das regiões de 1σ de confiança calculados de forma analítica.

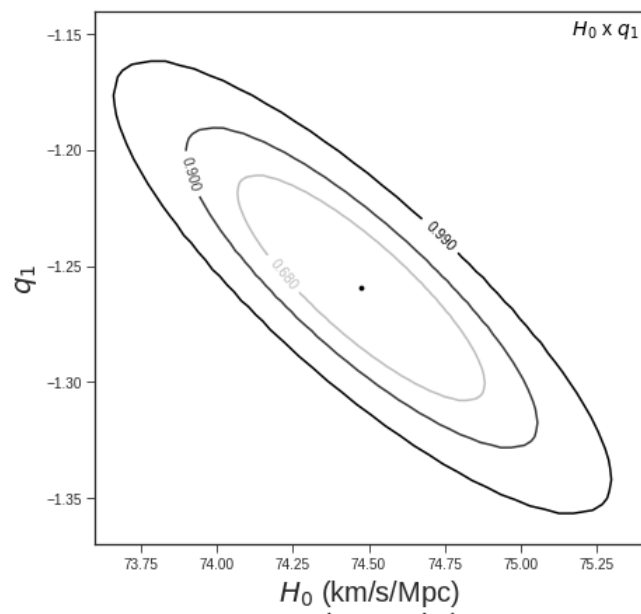


Figura 5.24: Regiões de 1σ , 2σ e 3σ de confiança para os parâmetros H_0 e q_0 estimados a partir do ajuste aos dados de $d_L(z)$ para o modelo 3. Os pontos negros indicam os *best-fit* para esses parâmetros.

Capítulo 6

Conclusões

A Cosmografia é o setor da Cosmologia em que são usados princípios de simetria, como o Princípio Cosmológico, e que possibilita uma análise puramente cinemática do Universo. Dessa forma, a Cosmografia é completamente independente das equações de campo de Einstein, e, portanto, das equações de Friedmann. Isso faz com que essa abordagem seja muito útil para estimar parâmetros cosmológicos de forma independente de modelo e também para testar modelos cosmológicos.

Nesse trabalho, o primeiro objetivo era estimar os parâmetros H_0 , q_0 e j_0 utilizando a expansão cosmográfica da distância de luminosidade $d_L(z)$ a partir de dados de supernovas do tipo Ia, e compará-los com o modelo padrão da Cosmologia Λ CDM.

O segundo objetivo era estudar diferentes parametrizações do parâmetro de desaceleração e , com o uso dos dados de supernovas e de cronômetros cósmicos, obter os parâmetros cosmológicos H_0 e q_0 , o *redshift* de transição z_t , o parâmetro da equação de estado da energia escura atual w_0 , bem como estudar a evolução desse parâmetro com relação ao *redshift*, $w(z)$, e reconstruir através dessas parametrizações o $H(z)$ e $d_L(z)$.

Na primeira parte do trabalho, utilizamos os dados de supernovas do catálogo Pantheon [27], que já estão calibrados, obtivemos a distância luminosidade a partir do módulo de distância e fizemos o ajuste da expansão cosmográfica de $d_L(z)$ aos dados utilizando o método de minimização da função χ^2 . Diferentes limites de *redshifts* z_{lim} foram estabelecidos para garantir que a expansão fosse convergente.

Os resultados mais interessantes dessa análise foram aqueles obtidos para o caso de $z_{lim} = 0,7$. Como há um maior número de observáveis que os outros limites, conseguimos resultados com menores incertezas apesar de não retornar o menor χ_{red}^2 . Os resultados foram consistentes com o modelo Λ CDM, com diferença percentual máxima do ajuste do modelo padrão de 1%.

Com o ajuste cosmográfico obtivemos, nesse limite, $H_0 = 74,38 \pm 0,39$, $q_0 = -0,69 \pm 0,09$ e $j_0 = 1,74 \pm 0,79$. O valor de H_0 se aproximou do valor estimado por

Riess em 2018, mantendo a tensão com o valor obtido pela colaboração Planck. O valor de q_0 é consistente com o valor $q_0 = -0,55$, do modelo de concordância. Para que o valor do parâmetro *jerk* se aproximasse ainda mais do valor de j_0 do modelo concordância seria necessário estudar *redshifts* mais altos, pois esse parâmetro se manifesta mais nesses regimes. O valor de $j_0 > 0$ indica que o Universo passou por uma transição de fase, de expansão desacelerada para acelerada, o que foi investigado em mais detalhes posteriormente.

Na segunda parte do trabalho, reconstruímos $H(z)$ e $d_L(z)$ para três modelos propostos de $q(z)$ e fizemos os ajustes aos dados utilizados através da minimização do χ^2 . Com isso, estimamos os valores dos parâmetros livres de cada modelo e também de H_0 , z_t e analisamos a função $w(z)$ correspondente. Aqui também se fez necessário utilizar o método de simulação de Monte Carlo a fim de estimar as incertezas das curvas de forma numérica e determinar a acurácia dos ajustes. Para os casos possíveis, também foram estimados os erros analíticos.

Os códigos de programação foram realizados na linguagem Python para ambos os estudos realizados nesse trabalho.

As parametrizações estudadas indicam uma expansão acelerada do Universo no momento presente. Dentre esses modelos, o primeiro e o terceiro se mostraram mais coerentes com o esperado, sendo o modelo 3 aquele que levou ao melhor ajuste aos dados. Nesse último, os parâmetros estudados resultaram em valores próximos nas análises com os diferentes dados, com exceção do parâmetro de Hubble. O parâmetro de desaceleração indica uma taxa de expansão maior daquela obtida através da expansão cosmológica, e também ligeiramente maior que a esperada pelo modelo de concordância, no qual $q_0 = -0,55$. O *redshift* de transição $z(t)$ nesse modelo é mais baixo daquele do modelo de concordância com $\Omega_m = 0,3$, no qual $z_t = 0,75$, favorecendo uma recente expansão acelerada do Universo. Como indicado pelo desvio do parâmetro *jerk* de 1, é favorável um modelo de energia escura dinâmica, cujo valor atual do seu parâmetro de estado se aproximam do esperado.

É esperado que os resultados se tornem mais precisos conforme os conjuntos dos dados se atualizem e outros estudos relativos à expansão acelerada do Universo possam ser realizados.

Referências Bibliográficas

- [1] B. Ryden. *Introduction to Cosmology*. Pearson, Ohio, 2006.
- [2] A. Einstein. Die feldgleichungen der gravitation. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, pages 844–847, 1915.
- [3] G. Pordeus da Silva Neto. Estimando parâmetros cosmológicos a partir de dados observacionais. *Revista Brasileira de Ensino de Física*,, pages 1–12, 2017.
- [4] G. Lemaître. L’univers en expansion. *Publications du Laboratoire d’Astronomie et de Geodesie de l’Universite de Louvain*, 10:1–19, 1933.
- [5] E. Hubble. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 15(3):168–173, 1929.
- [6] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. Massachusetts Institute of Technology, 1972.
- [7] A. Riess et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astronomical Journal*, 1998.
- [8] S. Perlmutter et al. Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae. *Astrophysical Journal*, 517(2), 1999.
- [9] H. Andernach and F. Zwicky. English and Spanish translation of Zwicky’s (1933) The Redshift of Extragalactic Nebulae, 2017.
- [10] V. C. Rubin, Jr. Ford, W. K., and N. Thonnard. Rotational properties of 21 SC galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605 (R=4kpc) to UGC 2885 (R=122kpc). , 238:471–487, 1980.
- [11] A. A. Penzias and R. W. Wilson. A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s. *Astrophysical Journal*, 142:419–421, 1965.
- [12] D. J. Fixsen. The temperature of the cosmic microwave background. *The Astrophysical Journal*, 707(2):916–920, 2009.

- [13] J. C. Mather, E. S. Cheng, et al. A Preliminary Measurement of the Cosmic Microwave Background Spectrum by the Cosmic Background Explorer (COBE) Satellite. , 354:L37, 1990.
- [14] D. Baumann. Primordial Cosmology. *PoS*, TASI2017:009, 2018.
- [15] Planck Collaboration: N. Aghanim et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters, 2018.
- [16] P. Schneider. *Extragalactic Astronomy and Cosmology*. Springer, Universität Bonn, 2006.
- [17] M. Visser. Cosmography: Cosmology without the Einstein equations. *General Relativity and Gravitation*, 37(9):1541–1548, 2005.
- [18] S. Capozziello, R. Lazkoz, and V. Salzano. Comprehensive cosmographic analysis by markov chain method. *Physical Review D*, 84(12), 2012.
- [19] A. G. Riess et al. Type ia supernova discoveries at $z \leq 1$ from the Hubble Space Telescope: Evidence for past deceleration and constraints on dark energy evolution. *The Astrophysical Journal*, 607(2):665–687, 2004.
- [20] R. Nair, S. Jhingan, and D. Jain. Cosmokinetics: a joint analysis of standard candles, rulers and cosmic clocks. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2012(01):018–018, 2012.
- [21] Y. Gong and A. Wang. Reconstruction of the deceleration parameter and the equation of state of dark energy. *Physical Review D*, 75(4), 2007.
- [22] Y. Bolotin, V. Cherkaskiy, O. Lemets, D. Yerokhin, and L. Zazunov. Cosmology in terms of the deceleration parameter. part I. Technical report, A.I. Akhiezer Institute of Theoretical Physics, 2015.
- [23] E. Mörtzell and C. Clarkson. Model independent constraints on the cosmological expansion rate. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2009(01):044–044, 2009.
- [24] M. Chevallier and D. Polarski. Accelerating Universes with Scaling Dark Matter. *International Journal of Modern Physics D*, 10(2):213–223, 2001.
- [25] B. Santos, J.C. Carvalho, and J.S. Alcaniz. Current constraints on the epoch of cosmic acceleration. *Astroparticle Physics*, 35(1):17–20, 2011.
- [26] A. Mamon and S. Das. A parametric reconstruction of the deceleration parameter. *The European Physical Journal C*, 77(7), 2017.

- [27] D. M. Scolnic, D. O. Jones, A. Rest, Y. C. Pan, R. Chornock, R. J. Foley, M. E. Huber, R. Kessler, G. Narayan, Riess, et al. The complete light-curve sample of spectroscopically confirmed SNe Ia from Pan-STARRS1 and Cosmological constraints from the combined Pantheon sample. *Astrophysical Journal*, 859(2), 2018.
- [28] J. Wei. Model-independent curvature determination from gravitational-wave standard sirens and cosmic chronometers. *The Astrophysical Journal*, 868(1):29, Nov 2018.
- [29] H. Lin, X. Li, and L. Tang. Non-parametric reconstruction of dark energy and cosmic expansion from the Pantheon compilation of type Ia supernovae. *Chinese Physics C*, 43(7):075101, 2019.
- [30] R. von Marttens, V. Marra, L. Casarini, J.E. Gonzalez, and J. Alcaniz. Null test for interactions in the dark sector. *Physical Review D*, 99(4), 2019.
- [31] V. Vitagliano, J. Xia, S. Liberati, and M. Viel. High-redshift cosmography. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2010(03):005–005, Mar 2010.