

UM TESTE INDEPENDENTE DE MODELO DA VARIABILIDADE DA  
VELOCIDADE DA LUZ COM OBSERVAÇÕES COSMOLÓGICAS

Gabriel da Silva Rodrigues

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Astronomia do Observatório Nacional/MCTIC, como parte dos requisitos necessários à obtenção do Grau de Mestre em Astronomia.

Orientador: Carlos André Paes Bengaly Junior

Rio de Janeiro  
Agosto de 2022

UM TESTE INDEPENDENTE DE MODELO DA VARIABILIDADE DA  
VELOCIDADE DA LUZ COM OBSERVAÇÕES COSMOLÓGICAS

Gabriel da Silva Rodrigues

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ASTRONOMIA DO OBSERVATÓRIO NACIONAL/MCTIC COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE  
EM ASTRONOMIA.

Examinada por:

---

Prof. Nome do Primeiro Examinador Sobrenome, D.Sc.

---

Prof. Nome da Segunda Examinadora Sobrenome, Ph.D.

---

Dr. Nome da Terceira Examinadora Sobrenome, D.Sc.

---

Prof. Nome do Quarto Examinador Sobrenome, Ph.D.

---

Prof. Nome do Quinto Examinador Sobrenome, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

AGOSTO DE 2022

da Silva Rodrigues, Gabriel

Um teste independente de modelo da variabilidade da velocidade da luz com observações cosmológicas/Gabriel da Silva Rodrigues. – Rio de Janeiro: ON/MCTIC, 2022.

XII, 56 p.: il.; 29,7cm.

Orientador: Carlos André Paes Bengaly Junior

Dissertação (mestrado) – ON/MCTIC/Programa de Pós-graduação em Astronomia, 2022.

Referências Bibliográficas: p. 48 – 56.

1. Cosmologia. 2. Supernova do tipo Ia. 3. Distância de diâmetro angular. 4. Velocidade da luz. I. , . II. Observatório Nacional/MCTIC, Programa de Pós-graduação em Astronomia. III. Título.



“The progress of science has been largely a matter of discovering what questions  
should be asked.”  
- Steven Weinberg

# Agradecimentos

- Ao meu orientador, Carlos Bengaly, por todas as conversas e ensinamentos sobre ciência ou sobre a vida acadêmica, pelo companheirismo que foi fundamental para desenvolvermos um trabalho da forma mais tranquila possível em um período tão diferente. Tenho absoluta certeza que isso contribuiu enormemente para minha formação científica e acadêmica.
- A todo o Grupo de Cosmologia do Observatório Nacional, por todas as discussões científicas semanais e pela ajuda científica de forma direta ou indireta.
- Aos professores que lecionaram disciplinas para mim, por todos os valiosos ensinamentos. Em especial o Prof. Rodrigo Gonçalves, Prof. Jailson Alcaniz e Prof. Nilson Antunes.
- A minha namorada, Vanderlânia, por estar ao meu lado em todos os momentos, por me ensinar muita coisa e melhorar minha vida em todos os aspectos possíveis. Sem dúvida isso foi essencial para que eu conseguisse alcançar meus objetivos.
- A minha família, mãe, pai e irmãos, por ter me dado toda a base para chegar aqui.
- Aos meus amigos de infância, Jordan, Jhonata, Michael e Luanna, por estarem comigo mesmo que distantes, e me proporcionarem vários momentos de descontração.
- Aos meus grandes amigos, Gabriel e Ayslana, que partilham comigo este caminho desde a graduação com conversas sobre física e sobre a vida, dividindo risadas e conselhos.

Resumo da Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Astronomia do Observatório Nacional/MCTIC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Astronomia (M.Sc.)

## UM TESTE INDEPENDENTE DE MODELO DA VARIABILIDADE DA VELOCIDADE DA LUZ COM OBSERVAÇÕES COSMOLÓGICAS

Gabriel da Silva Rodrigues

Agosto/2022

Orientador: Carlos André Paes Bengaly Junior

Programa: Astronomia

Testar a variabilidade das constantes fundamentais na Natureza consiste em um dos testes mais fortes da Física fundamental. Qualquer evolução significativa desses valores sugeriria imediatamente uma nova física e exigiria uma profunda reformulação do modelo padrão da Cosmologia e de Partículas, sem falar do Eletromagnetismo, da Termodinâmica e da Gravitação. Esses testes foram exaustivamente realizados na Terra e em sua vizinhança solar por vários anos, com grande precisão, apresentando evidência nula de evolução nas constantes fundamentais. No entanto, testes cosmológicos desse tipo ainda são escassos, dada a dificuldade de fazer observações precisas em altos *redshifts*. Portanto, existe um interesse nesse tipo de teste com o objetivo de desafiar a validade modelo padrão da Cosmologia. Neste trabalho fizemos uma medida cosmológica da velocidade da luz usando as últimas observações da Supernova Tipo Ia e de cronômetros cósmicos no limiar de *redshift*  $0 < z < 2$ . Nosso método baseia-se na reconstrução numérica desses dados para contornar suposições *a priori* da Cosmologia fundamental. Confirmamos a constância da velocidade da luz nesse limiar de *redshift*, obtendo duas medições de precisão  $\sim 5\%$  de  $c = (3.20 \pm 0.16) \times 10^5 \text{ km s}^{-1}$  em  $z \simeq 1,58$ , e  $c = (2.67 \pm 0.14) \times 10^5 \text{ km s}^{-1}$  em  $z \simeq 1.36$ , dependendo do método de reconstrução, com um nível de confiança de  $1\sigma$ .

**Palavras-Chave:** Cosmologia; Supernovas do tipo Ia; Distância de diâmetro angular; Velocidade da luz

Abstract of Dissertation presented to Observatório Nacional/MCTIC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Astronomy (M.Sc.)

A MODEL-INDEPENDENT TEST OF SPEED OF LIGHT VARIABILITY  
WITH COSMOLOGICAL OBSERVATIONS

Gabriel da Silva Rodrigues

August/2022

Advisor: Carlos André Paes Bengaly Junior

Department: Astronomy

Testing the variability of fundamental constants in Nature consists in one of the strongest tests of fundamental Physics. Any significant evolution of these values would immediately hint at new physics, and demand a profound reformulation of the standard model of Cosmology and Particles, not to mention Electromagnetism, Thermodynamics and Gravitation. Such tests have been thoroughly carried out on Earth and its surrounding Solar neighbourhood for decades with exquisite precision, providing no evidence for their evolution. However, cosmological tests of this kind are still sparse given the difficulty of taking precise observations at high redshifts. Hence, there is an urge to seek them as a means to challenge the validity of the standard cosmological model. In this work we perform a cosmological measurement of the speed of light using the latest Type Ia Supernova and cosmic chronometer observations at the redshift range  $0 < z < 2$ . Our method relies on the numerical reconstruction of these data in order to circumvent *a priori* assumptions of the underlying cosmology. We confirm the constancy of the speed of light at such redshift range, reporting two  $\sim 5\%$  precision measurements of  $c = (3.20 \pm 0.16) \times 10^5 \text{ km s}^{-1}$  in  $z \simeq 1.58$ , and  $c = (2.67 \pm 0.14) \times 10^5 \text{ km s}^{-1}$  in  $z \simeq 1.36$ , depending on the reconstruction method, at a  $1\sigma$  confidence level.

**Keywords:** Cosmology; Type Ia Supernovae; Angular diameter distance; Speed of light



# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 O modelo cosmológico padrão</b>	<b>3</b>
2.1 Geometria do espaço-tempo . . . . .	3
2.2 O Universo em expansão . . . . .	6
2.3 O desvio para o vermelho cosmológico . . . . .	9
2.4 As equações fundamentais da Cosmologia . . . . .	11
2.5 Parâmetros Cosmológicos . . . . .	17
2.6 Medidas de distância na Cosmologia . . . . .	20
2.6.1 Distância própria e distância comóvel . . . . .	20
2.6.2 Distância de luminosidade . . . . .	21
2.6.3 Distância de diâmetro angular . . . . .	23
<b>3 Observáveis cosmológicos</b>	<b>24</b>
3.1 Supernovas do tipo Ia . . . . .	24
3.2 Radiação cósmica de fundo . . . . .	28
3.3 Oscilações acústicas de bárions . . . . .	31
3.4 Idades de galaxias . . . . .	33
<b>4 Processos Gaussianos</b>	<b>34</b>
4.1 Regressão de processo gaussiano . . . . .	35
4.2 Previsão sem ruído . . . . .	36
4.3 Previsão na presença de ruído . . . . .	37
4.4 Funções de covariância . . . . .	38
4.5 Otimização de hiperparâmetros . . . . .	40
<b>5 Metodologia</b>	<b>41</b>
5.1 Medindo a velocidade da luz . . . . .	41
5.2 Análise de dados . . . . .	42

<b>6 Resultados</b>	<b>44</b>
<b>7 Conclusões</b>	<b>47</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>48</b>

# Lista de Figuras

2.1	Lei de Hubble-Lemaître . . . . .	8
3.1	Curvas de luz de supernovas do Tipo Ia na banda B do levantamento Calán/Tololo. Na figura de cima, observamos diferenças nas luminosidades máximas das SN Ia e na figura de baixo observamos as diferentes curvas de luz após calibração. Figura retirada de [1] . . . . .	25
3.2	Curvas de luz de supernovas do Tipo Ia, Ib, II-L, II-P. Figura retirada de [2] . . . . .	26
3.3	Espectros de três SN Ia, cerca de uma semana após o seu brilho máximo. Figura retirada de [2] . . . . .	27
3.4	Espectro de corpo negro obtido pelo WMAP/FIRAS. Figura retirada de [3] . . . . .	29
3.5	Espectro de potência angular da temperatura da RCF. Figura retirada de [4] . . . . .	30
3.6	Casca esférica no espaço de <i>redshift</i> . Figura retirada de [5] . . . . .	33
6.1	O painel superior esquerdo mostra os 50 pontos de dados de $H(z)$ junto com sua respectiva reconstrução usando os dois Kernels, <i>squared exponential</i> (cinza) e <i>Matérn(9/2)</i> (roxo). O painel superior direito exibe a distância de diâmetro angular $D_A(z)$ reconstruída com os dois Kernels, assim como os 1048 pontos obtidos através da relação de dualidade cósmica. O painel inferior esquerdo mostra a primeira derivada do parâmetro Hubble $H'(z)$ , e no painel inferior direito a primeira derivada da distância de diâmetro angular $D'_A(z)$ . Os pontos azul e laranja denotam o redshift onde $D'_A(z) = 0$ para os Kernels <i>squared exponential</i> e <i>Matérn(9/2)</i> , respectivamente. As áreas sombreadas são as regiões de confiança de $1\sigma$ para as mais escuras e $2\sigma$ para as mais claras. . . . .	45

6.2 A reconstrução da velocidade da luz  $c(z)$  no limiar de redshift  $0 < z < 2$  para os Kernels *squared exponential* (cinza) e *Matérn(9/2)* (roxo). A escala do eixo vertical, é de  $10^7$ . As áreas sombreadas são as regiões de confiança de  $1\sigma$  para as mais escuras e  $2\sigma$  para as mais claras. . . 46

# Capítulo 1

## Introdução

O modelo cosmológico padrão (MCP) é o modelo  $\Lambda$ CDM plano, desde o final da década de 1990 [6, 7]. Este modelo descreve um Universo dominado por matéria escura fria, responsável pela formação da estrutura e dinâmica das galáxias, e pela constante cosmológica  $\Lambda$  - um fluido desconhecido que é responsável pela expansão acelerada do Universo. O MCP tem como base dois principais pontos, o primeiro é a suposição de um Universo que é descrito pela métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) em grandes escalas [8–11], e o segundo é a teoria da relatividade geral como a teoria da gravidade por trás deste modelo [12–15]. Observações recentes da radiação cósmica de fundo (RCF) [16], distância de luminosidade de Supernovas do tipo Ia (SNIa) [17], além de aglomerados de galáxias e de lentes fracas [18–21], confirmam, com grande precisão, o MCP como o melhor modelo que descreve os dados. Apesar disso, este modelo ainda sofre com alguns problemas não resolvidos - como os problemas da coincidência cósmica e de singularidade primordial, para citar alguns. Além desses, temos tensões em medidas de alguns parâmetros cosmológicos - a mais em evidência no momento é a tensão de  $(4.5 - 5.0)\sigma$  entre o parâmetro de Hubble  $H_0$  medido no Universo próximo com SNIa e no primordial com RCF [22–24].

É, portanto, crucial propor e testar modelos alternativos e revisitar os fundamentos do MCP. Qualquer desvio estatisticamente significativo de suas previsões sugeriria uma nova física e levaria a uma reformulação completa de seu cenário. Trabalhos recentes confirmaram a validade tanto da métrica FLRW quanto da relatividade geral como teoria da gravidade em grandes escalas cosmológicas, mas alguns resultados podem afirmar o contrário [25].

Uma das formas de propor e testar modelos alternativos ao MCP é considerando a variação em constantes fundamentais da natureza e usando o estudo da variabilidade dessas constantes como um teste de física fundamental [26–29]. Experimentos na Terra e no Sistema Solar foram realizados durante séculos para medir essas quantidades, com resultados nulos para suas variações - e extrema precisão

em suas medições. Ainda assim, testes cosmológicos de variações de constantes fundamentais são muito mais escassos e menos precisos, dada a dificuldade em obter dados cosmológicos em altos redshifts que permitiriam suas realizações.

Deve-se ter cuidado ao desenvolver tais modelos, pois eles podem levar a problemas adicionais nas leis físicas que foram construídas sobre essas constantes físicas. Modelos que usam a velocidade da luz variável, por exemplo, devem ser capazes de reproduzir o sucesso da Teoria da Relatividade Especial em explicar o eletromagnetismo e a termodinâmica, pelo menos. Alguns deles atendem a esses requisitos e podem fornecer soluções viáveis para os problemas do MCP [30–55].

Sob esta motivação, realizamos um teste de variação da velocidade da luz com observações cosmológicas. Algumas análises recentes focadas neste tópico não relataram evidências significativas para uma velocidade da luz variável [56–76]. Neste trabalho usamos um conjunto de dados atualizados e uma abordagem metodológica diferente para medir a velocidade da luz de uma forma independente de modelo em um limiar de redshift de  $0 < z < 2$ . Partindo da relação de distância de diâmetro angular para um Universo plano chegamos a uma relação para a velocidade da luz em um valor de redshift onde a distância de diâmetro angular atinge seu valor máximo. Essa relação depende apenas de dados da distância de diâmetro angular e do parâmetro de Hubble neste redshift.

Foram utilizadas 1048 medidas de distância de luminosidade obtidas por Supernovas do tipo Ia da compilação de dados do Pantheon e 48 medidas do parâmetro de Hubble obtidas através de idades de galáxias e modo radial das oscilações acústicas de bárions (OAB). Através desses dados, reconstruímos as curvas da distância de diâmetro angular e do parâmetro de Hubble utilizando um método de aprendizado de máquina chamado processos gaussianos, onde também não é necessário presumir um modelo cosmológico. Usando essas medidas de distância e taxa de expansão cosmológica reconstruídas, confirmamos a constância da velocidade da luz no limiar de redshift  $0 < z < 2$ , com uma medida de precisão  $\sim 5\%$  de  $c = (3.20 \pm 0.16) \times 10^5 \text{ km s}^{-1}$  em  $z \simeq 1,58$ , e  $c = (2.67 \pm 0.14) \times 10^5 \text{ km s}^{-1}$  em  $z \simeq 1.36$ , dependendo do método de reconstrução usado, com um intervalo de confiança de  $1\sigma$ .

No capítulo 2 desse trabalho introduzimos o modelo cosmológico padrão. No capítulo 3 falamos sobre alguns importantes observáveis cosmológicos. No capítulo 4 mostramos as principais características do processo gaussiano e da regressão do processo gaussiano. No capítulo 5 mostramos a metodologia utilizada. No capítulo 6 mostramos nossos resultados obtidos e, por fim, no capítulo 7 fazemos uma breve reflexão acerca dos resultados.

# Capítulo 2

## O modelo cosmológico padrão

No final de 1915, a ideia de que a interação gravitacional se dava de uma forma universal levou Albert Einstein ao princípio de equivalência e às equações da relatividade geral. Estas equações, diferente do que antes era proposto por Newton, estabeleciam que duas massas não sofreriam uma ação de uma força à distância, e sim que a própria presença da matéria curvava o espaço-tempo, mudando a sua geometria, se tornando assim não euclidiana. Portanto, a teoria da relatividade geral (TRG) nos trouxe uma reinterpretação da interação gravitacional.

A teoria proposta por Einstein teve um enorme impacto em vários aspectos da física conhecida. Uma das aplicações direta dela foi a Cosmologia física. Ao modelar o conteúdo de matéria e energia do Universo, podemos resolver as equações da relatividade geral para determinar a geometria e a dinâmica do Universo.

Além da TRG, o MCP também tem como hipótese fundamental o Princípio Cosmológico, que diz que o Universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas ( $\sim 100\text{Mpc}$ ). O Princípio Cosmológico por sua vez se baseia no postulado de Weyl, que afirma que uma substância permeia o Universo, tal qual um fluido do tipo perfeito, onde as galáxias se movem ao longo dele como partículas fundamentais. Neste capítulo mostraremos os fundamentos do MCP.

### 2.1 Geometria do espaço-tempo

Devemos obter uma métrica que descreva um Universo homogêneo, isotrópico e em expansão. Quando olhamos o Universo em grandes escalas, podemos desprezar o movimento local das galáxias, considerando então que a velocidade com que elas se afastam é devido apenas à expansão do espaço. Com isso, podemos adotar o sistema de coordenadas comóveis, de maneira que as galáxias estão fixas neste referencial. Logo, podemos construir uma sequência de superfícies do tipo espaço ortogonais às linhas de mundo das galáxias, onde cada seção espacial está associada a um único valor do parâmetro tempo. Sendo assim, as linhas de mundo das galáxias formam um

conjunto de geodésicas que não se cruzam e são ortogonais a uma série de superfícies do tipo espaço.

Podemos então caracterizar as coordenadas da geodésica do fluido que permeia o Universo como  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$ , sendo  $x^0 = t$ . As hiper-superfície espaciais variando através das geodésicas de cada galaxia são dadas por,  $t = \text{constante}$  e  $(x^1, x^2, x^3)$ , temos então que um valor  $x^0 = \text{constante}$  que esta localizado em uma das hiper-superfícies do tipo espaço, e uma galaxia qualquer desta seção espacial, com sua própria geodésica, se encontra fixando-se  $x^i = \text{constante}$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Devido a essa ortogonalidade entre as linhas de mundo e as seções espaciais, temos que,  $g_{0i} = 0$ . Além disso,  $x^i = \text{constante}$  satisfaz uma geodésica

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^i \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0, \quad (2.1)$$

onde  $\mu, \nu = (1, 2, 3, 4)$ , temos então,  $\frac{dx^i}{ds} = 0$ , logo,

$$\Gamma_{00}^i = 0,$$

tendo  $g_{0i} = 0$  e a expressão para conexão em termos da métrica,

$$\Gamma_{\mu\nu}^i = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}), \quad (2.2)$$

temos então que,

$$\partial_i g_{00} = 0,$$

logo  $g_{00}$  vai depender exclusivamente de  $x^0$  e podemos eliminar essa dependência redefinindo o parâmetro temporal que ela representa, fazendo  $g_{00} = 1$ . Portanto, temos o elemento de linha do Universo da forma,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

sendo  $x^0 = ct$ , temos,

$$ds^2 = c^2 dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.3)$$

Agora devemos olhar para os elementos  $g_{ij}$  do tensor métrico. Existem três possíveis formas geométricas para o universo que satisfazem as condições de isotropia e homogeneidade, impostas pelo princípio cosmológico. Um plano com curvatura nula, uma esfera com curvatura positiva e um parabolóide hiperbólico com curvatura negativa.

Uma superfície tri-dimensional de um parabolóide hiperbólico com curvatura negativa, imersa em um espaço quadri-dimensional e pseudo-euclidiano, em coorde-



nadas cartesianas, pode ser representada por,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = -a^2, \quad (2.4)$$

$a$  é uma constante. Temos as coordenadas intrínsecas a superfície como,

$$\begin{aligned} x_1 &= a \sinh \chi \cos \theta, \\ x_2 &= a \sinh \chi \sin \theta \cos \phi, \\ x_3 &= a \sinh \chi \sin \theta \sin \phi, \\ x_4 &= a \cosh \chi, \end{aligned} \quad (2.5)$$

diferenciando cada coordenada temos,

$$d\sigma^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2 = a^2 [d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (2.6)$$

considerando então que  $r = \sinh \chi$ , podemos substituir na equação (2.6) e obter,

$$d\sigma^2 = a^2 \left[ \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (2.7)$$

Vamos pensar agora em uma esfera quadri-dimensional de raio  $a$ , a equação para sua superfície tri-dimensional em coordenadas cartesianas é dada por,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2, \quad (2.8)$$

neste caso temos as coordenadas intrínsecas da superfície da forma,

$$\begin{aligned} x_1 &= a \sin \chi \cos \theta, \\ x_2 &= a \sin \chi \sin \theta \cos \phi, \\ x_3 &= a \sin \chi \sin \theta \sin \phi, \\ x_4 &= a \cos \chi, \end{aligned} \quad (2.9)$$

diferenciando cada coordenada temos,

$$d\sigma^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_4^2 = a^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)], \quad (2.10)$$

considerando que  $r = \sin \chi$ , temos,

$$d\sigma^2 = a^2 \left[ \frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]. \quad (2.11)$$

Os elementos de linha espaciais tanto para a curvatura negativa, quanto para a

positiva. Observamos que a única diferença entre as equações (2.7) e (2.11) é um sinal no denominador. Dito isso, podemos escrever os elementos de linha das duas superfícies em uma única expressão inserindo um parâmetro de curvatura que vai ser a única diferença entre elas, da forma,

$$d\sigma^2 = a^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (2.12)$$

sendo  $k = 1$  para a superfície esférica com e  $k = -1$  para o parabolóide hiperbólico. Para o elemento de linha do terceiro caso que satisfaz as condições do princípio cosmológico, que é a superfície plana, basta fazermos  $k = 0$ . Afim de determinar  $d\sigma^2$  vale notar que o tempo  $t$  foi fixado, ou seja, tomamos apenas a superfície do tipo espaço associada a este valor fixo. Considerando o intervalo quadrático global,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\sigma^2, \quad (2.13)$$

neste caso,  $a$  que antes era considerada apenas uma constante, agora pode depender do tempo cósmico. Quando consideramos que o tempo não é mais fixo, podemos usar uma expressão mais geral, no qual  $a = a(t)$ :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (2.14)$$

onde  $r, \theta, \phi$  são as coordenadas comóveis,  $t$  é o tempo próprio,  $a(t)$  é o fator de escala cósmico e  $k$  o parâmetro de curvatura. Essa é a métrica responsável por descrever o Universo, conhecida como métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker.

## 2.2 O Universo em expansão

Em 1917, Einstein, no artigo *Considerações cosmológicas sobre a teoria da relatividade*, propôs um modelo esférico e estático de Universo, inaugurando a era da Cosmologia Moderna. O modelo proposto por Einstein era esférico, fechado, finito, e estático. No entanto, devido ao caráter atrativo da gravidade isso resultaria em um universo instável. E foi verificado que as equações da teoria da relatividade geral não tinham soluções estáticas quando estudadas em escalas cosmológicas. Einstein tentou explicar isso inserindo a constante cosmológica  $\Lambda$  nas equações de campo da TRG.

No mesmo ano em que Einstein apresentou seu modelo de Universo o astrônomo holandês De Sitter apresentou a *Royal Astronomical Society* de 1917, um modelo de universo isotrópico que, para ser estático, não poderia conter matéria. Apesar desse modelo ser o primeiro que indicava algum tipo de expansão no Universo, para

o próprio De Sitter e para a comunidade científica da época ele representava um espaço-tempo estático.

Quando o modelo de De Sitter foi apresentado a Einstein, ele aceitou apenas como uma solução matemática para as equações de campo. Einstein acreditava que o modelo de De Sitter deveria ser rejeitado por alguma contradição com a física.

Em 1922, o matemático russo Friedmann concluiu que a equação original de Einstein não necessitava da constante cosmológica. Ao contrário, Friedman apresentou uma solução das equações relativísticas na qual o universo estava em expansão. Deve-se ressaltar que o trabalho de Friedman era visto pela comunidade científica da época como um trabalho puramente teórico.

Em 1927, o astrônomo e físico belga Lemaître também indicou um Universo que se expandia. Hoje podemos dizer que as contribuições de Friedmann e Lemaître foram de grande importância para a Cosmologia Moderna.

Apenas em 1929 foi que a ideia de um Universo que se expandia foi aceita totalmente, nesse ano Hubble publicou dados de 46 galáxias. Seus dados evidenciaram que quase todas as galáxias, exceto algumas muito próximas e ainda sujeitas ao campo gravitacional da nossa galáxia, estavam se afastando.

Medindo o deslocamento das linhas espectrais de galáxias para o vermelho, Hubble concluiu que essas galáxias estavam se afastando com velocidades proporcionais às suas distâncias. Logo, quanto mais distante a galáxia se encontrava, maior era sua velocidade de afastamento,

$$V = H(t)r, \tag{2.15}$$

onde  $V$  é a velocidade radial da galáxia,  $r$  a distância da mesma ao observador e  $H(t)$  o parâmetro de Hubble. O parâmetro de Hubble para o tempo atual  $H(t_0) = H_0$  é chamado de Constante de Hubble, que tem um valor de  $H_0 = 67,37 \pm 0.54 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  [16].

Velocity-Distance Relation among Extra-Galactic Nebulae.

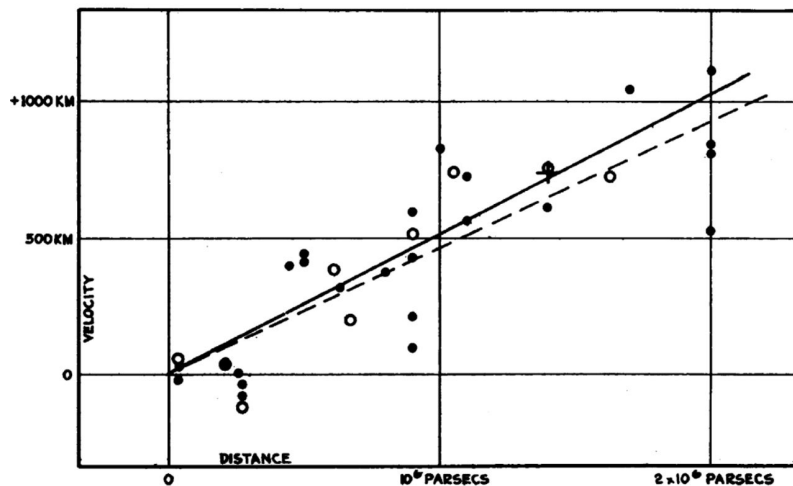


Figura 2.1: Relação velocidade-distância para nebulosas extragalácticas encontrada por Hubble. Figura retirada de [77]

Quando consideramos uma distância muito grande, temos que a velocidade de recessão será maior do que a própria velocidade da luz. Sendo assim, definimos uma distância da qual qualquer objeto está se afastando mais rápido do que a luz, chamada de raio de Hubble.

É importante ressaltar que já havia indícios das conclusões de Hubble no trabalho de Vesto M. Slipher de 1912, o qual mostrava que as linhas espectrais de Andrômeda estavam deslocadas para o azul e, o de 1925 que mostravam o desvio para o vermelho de 41 objetos, cujas distâncias eram conhecidas.

Lemaître também havia deduzido teoricamente uma relação entre o desvio para o vermelho e a expansão do Universo,  $V = \frac{c}{R_0\sqrt{3}}r$ , onde  $V$  é a velocidade radial,  $c$  é a velocidade da luz,  $R_0$  é o raio de curvatura do universo e  $r$  é a distância do objeto. Ele inclusive estimou o valor da constante de proporcionalidade (a constante de Hubble). Em 1928, antes de Hubble publicar seu trabalho, o matemático Howard Robertson, utilizando as observações de Slipher e as observações de nebulosas que Hubble havia publicado anteriormente, mostrou que estes resultados eram consistentes com a relação entre velocidade e distância deduzida por Lemaître. As observações de Slipher e Hubble deram às primeiras evidências de que o Universo estava se expandindo, como previsto teoricamente por Friedmann e Lemaître [78]. A equação (2.15) mostrada anteriormente era chamada de Lei de Hubble e foi renomeada em 2018 em uma Assembleia Geral da União Astronômica Internacional para Lei de Hubble-Lemaître.

## 2.3 O desvio para o vermelho cosmológico

Observando o espectro de uma galáxia em um comprimento de onda visível, vemos que usualmente contém linhas de absorção que são devido à parte superior, mais fria, da atmosfera das estrelas, e às vezes observamos também linhas de emissão em galáxias que contém núcleos galácticos ativos, devido ao gás quente em seu núcleo.

Ao medirmos o comprimento de onda de uma dessas linhas de absorção em um laboratório, o qual chamaremos de  $\lambda_e$  e compararmos com o comprimento de onda desta mesma linha observado, o qual chamaremos de  $\lambda_o$ , temos que  $\lambda_o$  não é igual á  $\lambda_e$ . Apenas para algumas galáxias próximas no nosso grupo local eles são iguais. Portanto, quase todas as galáxias têm  $\lambda_o > \lambda_e$ . Sabendo que, no espectro eletromagnético, o comprimento de onda da luz vermelha ( $\sim 630 \text{ nm}$ ) é maior do que o comprimento da luz azul ( $\sim 450 \text{ nm}$ ), o fenômeno  $\lambda_o > \lambda_e$  é o que conhecemos como *redshift* ou desvio para o vermelho. O *redshift* pode ser expresso da seguinte forma:

$$z = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e}. \quad (2.16)$$

Observaremos agora a relação do *redshift* com o fator de escala do Universo no momento da emissão da linha na qual o comprimento de onda está sendo medido. Imaginemos uma galáxia localizada em  $(r, \theta, \phi)$ , que está emitindo luz em nossa direção em um tempo  $t_e$  e observada por nós em um tempo  $t_0$ , nós estamos localizados em  $(r = 0, \theta, \phi)$ , a luz viaja até nós através de uma geodésica nula. Temos, portanto,  $\theta$  e  $\phi$  são constantes, ou seja,  $ds^2 = d\theta = d\phi = 0$ , da equação (2.14) temos,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \frac{dr^2}{1 - kr^2} = 0, \quad (2.17)$$

logo chegamos na relação,

$$c \frac{dt}{a(t)} = \pm \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (2.18)$$

observando que  $r$  tem uma relação inversamente proporcional com o tempo, ou seja,  $r$  diminui a medida que o tempo aumenta, podemos escolher o sinal negativo. Além disso, digamos que a galáxia emite luz com um comprimento de onda  $\lambda_e$ , o comprimento de onda é emitido no tempo  $t_e$  e observado no tempo  $t_0$ , integrando então a equação (2.18) no intervalo de tempo transcorrido entre o instante em que houve a emissão do fóton da galáxia e o instante em que ocorre a sua observação, temos,

$$c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = - \int_r^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \chi, \quad (2.19)$$

onde,

$$\chi = \begin{cases} \sin^{-1}(\sqrt{kr})/\sqrt{k} & \text{Para } k > 0 \\ r & \text{Para } k = 0 \\ \sinh^{-1}(\sqrt{|k|r})/\sqrt{|k|} & \text{Para } k < 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

Agora se a galáxia emite outro raio de luz em outro instante  $t_e + \lambda_e/c$  e é observado em um instante  $t_0 + \lambda_0/c$ , temos que,

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e + \lambda_e/c}^{t_0 + \lambda_0/c} \frac{dt}{a(t)} \quad (2.21)$$

dividindo o intervalo de integração de ambos os lados da equação acima,

$$\int_{t_e}^{t_e + \lambda_e/c} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_e + \lambda_e/c}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e + \lambda_e/c}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_0}^{t_0 + \lambda_0/c} \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.22)$$

temos então,

$$\int_{t_e}^{t_e + \lambda_e/c} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_0}^{t_0 + \lambda_0/c} \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.23)$$

A equação (2.23) nos diz que a integral de  $dt/a(t)$  entre a emissão de sucessivos raios de luz, ou cristas de comprimentos de ondas, é igual a integral de  $dt/a(t)$  entre observação de sucessivos raios de luz. O universo não tem tempo o suficiente para se expandir, significativamente, durante o tempo entre a emissão ou observação de duas cristas de onda sucessivas. A escala de tempo para a expansão do Universo é o tempo de Hubble,  $H_0^{-1} \approx 14 \text{ Gyr}$ , já o tempo entre cristas de onda para a luz visível é  $\lambda/c \approx 2 \times 10^{-15} \text{ s} \approx 10^{-32} H_0^{-1}$ . Temos então que  $a(t)$  é considerado constante na equação (2.23), logo:

$$\frac{1}{a(t_e)} \int_{t_e}^{t_e + \lambda_e/c} dt = \frac{1}{a(t_0)} \int_{t_0}^{t_0 + \lambda_0/c} dt \quad (2.24)$$

$$\frac{1}{a(t_e)} \left[ t_e + \frac{\lambda_e}{c} - t_e \right] = \frac{1}{a(t_0)} \left[ t_0 + \frac{\lambda_0}{c} - t_0 \right], \quad (2.25)$$

considerando  $c = 1$ , temos,

$$\frac{\lambda_e}{a(t_e)} = \frac{\lambda_0}{a(t_0)}, \quad (2.26)$$

temos portanto,

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}, \quad (2.27)$$

e da equação (2.16) temos que,

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = 1 + z \quad (2.28)$$

logo chegamos que,

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \frac{1}{a(t_e)}, \quad (2.29)$$

onde  $a(t_0) = 1$  é o fator de escala no tempo presente. Logo, o *redshift* que observamos depende apenas do fator de escala no tempo de emissão e no tempo de observação. Não depende de como a transição entre  $a(t_e)$  e  $a(t_0)$  foi feita, não importa se a expansão foi gradual ou repentina. A única coisa que importa é o fator de escala no tempo de emissão e no tempo de observação.

## 2.4 As equações fundamentais da Cosmologia

Aqui nesta seção vamos apresentar as equações que descrevem a dinâmica de um Universo homogêneo e isotrópico. Trabalharemos a seguir em unidades onde  $c = 1$  a menos que se diga o contrario. A dinâmica do Universo é descrita pelo uso da métrica de FLRW nas equações de campo da TRG. Isso nos permite determinar a evolução do fator de escala em termos do conteúdo energético do Universo, ou seja,

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \chi_G T_{\mu\nu}, \quad (2.30)$$

onde  $G_{\mu\nu}$  é o que conhecemos como tensor de Einstein, dado por,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (2.31)$$

$R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha}$  é tensor de Ricci,  $R \equiv R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$  é o escalar de curvatura de Ricci,  $\chi_G = 8\pi G$  é a constante de gravitação de Einstein,  $\Lambda$  é a constante cosmológica,  $g_{\mu\nu}$  é a métrica de fundo e  $T_{\mu\nu}$  é o tensor energia-momento. Temos então a equação essencial da TRG, que descreve a relação entre a distribuição de matéria e energia e a geometria do espaço-tempo,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (2.32)$$

Da métrica FLRW (2.14), temos o tensor métrico dado por,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a(t)^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

podemos escrever também o tensor métrico na forma contravariante,

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{a(t)^2}{1-kr^2}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^{-2}r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^{-2}r^{-2}\sin^{-2}\theta \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

O primeiro passo para obter as equações que descrevem a dinâmica do Universo é obter os símbolos de Christoffel não nulos. Da equação (2.2), fazendo  $\lambda = \rho = 0$ ,

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_1g_{10} + \partial_1g_{10} - \partial_0g_{11}) = -\frac{1}{2}g^{00}\partial_0g_{11} = -\frac{1}{2}\left[-\frac{\partial_t a^2}{1-kr^2}\right] = \boxed{\frac{a\dot{a}}{1-kr^2}} \\ \Gamma_{22}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_2g_{20} + \partial_2g_{20} - \partial_0g_{22}) = -\frac{1}{2}g^{00}\partial_0g_{22} = -\frac{1}{2}\left[-\partial_t a^2 r^2\right] = \boxed{a\dot{a}r^2} \\ \Gamma_{33}^0 &= \frac{1}{2}g^{00}(\partial_3g_{30} + \partial_3g_{30} - \partial_0g_{33}) = -\frac{1}{2}g^{00}\partial_0g_{33} = -\frac{1}{2}\left[\partial_t a^2 r^2 \sin^2\theta\right] = \boxed{a\dot{a}r^2 \sin^2\theta} \end{aligned}$$

para  $\lambda = \rho = 1$ ,

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{10}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1g_{01} + \partial_0g_{11} - \partial_1g_{10}) = -\frac{1}{2}g^{11}\partial_0g_{11} = \frac{1}{2}\frac{1-kr^2}{-a^2}\partial_t\frac{-a^2}{1-kr^2} = \boxed{\frac{\dot{a}}{a}} \\ \Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_3g_{31} + \partial_3g_{31} - \partial_1g_{33}) = -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1g_{33} = -\frac{1}{2}\frac{1-kr^2}{-a^2}\partial_r(-a^2r^2\sin^2\theta) = \boxed{-r(1-kr^2)\sin^2\theta} \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_2g_{21} + \partial_2g_{21} - \partial_1g_{22}) = -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1g_{22} = \frac{1}{2}\frac{1-kr^2}{-a^2}\partial_r(-a^2r^2) = \boxed{-r(1-kr^2)} \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}(\partial_1g_{11} + \partial_1g_{11} - \partial_1g_{11}) = -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1g_{11} = \frac{1}{2}\frac{1-kr^2}{-a^2}\partial_r\frac{-a^2}{1-kr^2} = \boxed{\frac{kr}{1-kr^2}} \end{aligned}$$

para  $\lambda = \rho = 2$ ,

$$\begin{aligned} \Gamma_{02}^2 &= \Gamma_{20}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2g_{02} + \partial_0g_{22} - \partial_2g_{20}) = -\frac{1}{2}g^{22}\partial_0g_{22} = \frac{1}{2}\frac{\partial_t(-a^2r^2)}{-a^2r^2} = \boxed{\frac{\dot{a}}{a}} \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2}g^{22}(\partial_2g_{12} + \partial_1g_{22} - \partial_2g_{21}) = \frac{1}{2}g^{22}\partial_1g_{22} = \frac{1}{2}\frac{\partial_r(-a^2r^2)}{-a^2r^2} = \boxed{\frac{1}{r}} \\ \Gamma_{33}^2 &= \frac{1}{2}g^{22}(\partial_3g_{32} + \partial_3g_{32} - \partial_2g_{33}) = \frac{1}{2}g^{22}\partial_2g_{33} = -\frac{1}{2}\frac{1}{-a^2r^2}\partial_\theta(-a^2r^2\sin^2\theta) = \boxed{-\sin\theta\cos\theta} \end{aligned}$$

para  $\lambda = \rho = 3$ ,

$$\begin{aligned} \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3g_{13} + \partial_1g_{33} - \partial_3g_{31}) = \frac{1}{2}g^{33}\partial_1g_{33} = \frac{1}{2}\frac{\partial_r(-a^2r^2\sin^2\theta)}{-a^2r^2\sin^2\theta} = \boxed{\frac{1}{r}} \\ \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3g_{32} + \partial_2g_{33} - \partial_3g_{32}) = \frac{1}{2}g^{33}\partial_2g_{33} = \frac{1}{2}\frac{\partial_\theta(-a^2r^2\sin^2\theta)}{-a^2r^2\sin^2\theta} = \boxed{\cot\theta} \\ \Gamma_{03}^3 &= \Gamma_{30}^3 = \frac{1}{2}g^{33}(\partial_3g_{03} + \partial_0g_{33} - \partial_3g_{30}) = -\frac{1}{2}g^{33}\partial_0g_{33} = \frac{1}{2}\frac{\partial_t(-a^2r^2\sin^2\theta)}{-a^2r^2\sin^2\theta} = \boxed{\frac{\dot{a}}{a}} \end{aligned}$$



Após encontrar os símbolos de Christoffel, o segundo passo é obter as componentes não nulas do tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$ . Neste caso temos quatro componentes não nulas,  $R_{00}, R_{11}, R_{22}, R_{33}$ . Para  $R_{00}$ , temos,

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\partial_0\Gamma_{01}^1 - \partial_0\Gamma_{02}^2 - \partial_0\Gamma_{03}^3 - \Gamma_{01}^1\Gamma_{10}^1 - \Gamma_{02}^2\Gamma_{20}^2 - \Gamma_{03}^3\Gamma_{30}^3 = -3\partial_t\frac{\dot{a}}{a} - 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \\ &= -3\frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2} - 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -3\frac{\ddot{a}}{a} + 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \boxed{-3\frac{\ddot{a}}{a}}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

para  $R_{11}$  temos,

$$\begin{aligned} R_{11} &= \partial_0\Gamma_{11}^0 - \partial_1\Gamma_{12}^2 - \partial_1\Gamma_{13}^3 + \Gamma_{11}^0\Gamma_{02}^2 + \Gamma_{11}^0\Gamma_{03}^3 - \Gamma_{10}^1\Gamma_{11}^0 + \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1\Gamma_{13}^3 - \Gamma_{12}^2\Gamma_{21}^2 - \Gamma_{13}^3\Gamma_{31}^3 \\ &= \partial_t\frac{a\dot{a}}{1-kr^2} - \partial_r\frac{1}{r} - \partial_r\frac{1}{r} + \frac{a\dot{a}}{1-kr^2}\frac{\dot{a}}{a} + \frac{a\dot{a}}{1-kr^2}\frac{\dot{a}}{a} - \frac{a\dot{a}}{1-kr^2}\frac{\dot{a}}{a} + \frac{kr}{1-kr^2}\frac{1}{r} \\ &+ \frac{kr}{1-kr^2}\frac{1}{r} - \left(\frac{1}{r}\right)^2 - \left(\frac{1}{r}\right)^2 = \partial_t\frac{a\dot{a}}{1-kr^2} - 2\partial_r\frac{1}{r} + \frac{\dot{a}^2}{1-kr^2} + \frac{2k}{1-kr^2} - 2\left(\frac{1}{r}\right)^2 \\ &= \frac{a\ddot{a}}{1-kr^2} + \frac{\dot{a}^2}{1-kr^2} + \frac{\dot{a}^2}{1-kr^2} + 2\frac{1}{r^2} + \frac{2k}{1-kr^2} - 2\left(\frac{1}{r}\right)^2 \\ &= \frac{a\ddot{a}}{1-kr^2} + \frac{2\dot{a}^2}{1-kr^2} + \frac{2k}{1-kr^2} = \boxed{\frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1-kr^2}}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

para  $R_{22}$  temos,

$$\begin{aligned} R_{22} &= \partial_0\Gamma_{22}^0 + \partial_1\Gamma_{22}^1 - \partial_2\Gamma_{23}^3 + \Gamma_{22}^0\Gamma_{01}^1 + \Gamma_{22}^0\Gamma_{03}^3 + \Gamma_{22}^1\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1\Gamma_{13}^3 - \Gamma_{02}^2\Gamma_{22}^0 - \Gamma_{21}^2\Gamma_{22}^1 - \Gamma_{23}^3\Gamma_{32}^3 \\ &= \partial_t(a\dot{a}r^2) + \partial_r[-r(1-kr^2)] - \partial_\theta \cot \theta + a\dot{a}r^2\frac{\dot{a}}{a} + a\dot{a}r^2\frac{\dot{a}}{a} - r(1-kr^2)\frac{kr}{1-kr^2} - r(1-kr^2)\frac{1}{r} \\ &- \frac{\dot{a}}{a}a\dot{a}r^2 + r(1-kr^2)\frac{1}{r} - \cot^2 \theta = \partial_t(a\dot{a}r^2) + \partial_r[-r(1-kr^2)] - \partial_\theta \cot \theta + \dot{a}^2r^2 - kr^2 - \cot^2 \theta \\ &= r^2(a\ddot{a} + \dot{a}^2) + 3kr^2 - 1 + \csc^2 \theta + \dot{a}^2r^2 - kr^2 - \cot^2 \theta \\ &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) - 1 + \csc^2 \theta - \cot^2 \theta = \boxed{r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

e por fim, para  $R_{33}$  temos,

$$\begin{aligned}
R_{33} &= \partial_0 \Gamma_{33}^0 + \partial_1 \Gamma_{33}^1 + \partial_2 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{33}^0 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{30}^3 \Gamma_{33}^0 - \Gamma_{13}^3 \Gamma_{33}^1 - \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2 \\
&= \partial_t (a \dot{a} r^2 \sin^2 \theta) + \partial_r [-r(1 - kr^2) \sin^2 \theta] - \partial_\theta (\sin \theta \cos \theta) + a \dot{a} r^2 \sin^2 \theta \frac{\dot{a}}{a} \\
&+ a \dot{a} r^2 \sin^2 \theta \frac{\dot{a}}{a} - r(1 - kr^2) \sin^2 \theta \frac{kr}{1 - kr^2} - r(1 - kr^2) \sin^2 \theta \frac{1}{r} \\
&- a \dot{a} r^2 \sin^2 \theta \frac{\dot{a}}{a} + r(1 - kr^2) \sin^2 \theta \frac{1}{r} + \cot \theta \sin \theta \cos \theta \\
&= r^2 \sin^2 \theta \partial_t (\dot{a} a) - \sin^2 \theta [\partial_r (r) - \partial_r (kr^3)] - \partial_\theta (\sin \theta \cos \theta) + \dot{a}^2 r^2 \sin^2 \theta - \sin^2 \theta kr^2 + \cos^2 \theta \\
&= r^2 \sin^2 \theta [a \ddot{a} + \dot{a}^2] - \sin^2 \theta [1 - 3kr^2] + \sin^2 \theta - \cos^2 \theta + \dot{a}^2 r^2 \sin^2 \theta - \sin^2 \theta kr^2 + \cos^2 \theta \\
&= r^2 \sin^2 \theta [a \ddot{a} + \dot{a}^2] + \sin^2 \theta 2kr^2 + \dot{a}^2 r^2 \sin^2 \theta = \boxed{(a \ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2 \sin^2 \theta}.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Então podemos escrever o tensor de Ricci como,

$$R_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -3\frac{\ddot{a}}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \tag{2.39}$$

Tendo o tensor de Ricci podemos obter o escalar de Ricci,  $R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu}$ ,

$$\begin{aligned}
R &= R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = R_{00} g^{00} + R_{11} g^{11} + R_{22} g^{22} + R_{33} g^{33} = -3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2} \frac{1 - kr^2}{a^2} \\
&+ (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2 \frac{1}{a^2 r^2} + (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k)r^2 \sin^2 \theta \frac{1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} \\
&= -3\frac{\ddot{a}}{a} - 3\frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{a^2} = \boxed{-6 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right)}.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

Tendo tudo isso em mãos, podemos facilmente obter a componente  $G_{00}$  do tensor de Einstein, que é exatamente a componente que precisamos para chegar as equações de Friedmann,

$$\begin{aligned}
G_{00} &= R_{00} - \frac{1}{2} R g_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} + 3\frac{\ddot{a}}{a} + 3 \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \\
G_{00} &= 3 \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right).
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Agora devemos trabalhar em cima do tensor energia-momento, considerando um fluido homogêneo e isotrópico, consistente com o Universo descrito pela métrica de

FLRW, temos o que ele é dado da forma [79],

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}, \quad (2.42)$$

onde  $p$  é a pressão e  $\rho$  é a densidade de matéria do fluido,  $u^\mu$  representa a quadri-velocidade de um elemento do fluido, dada por,

$$u^\mu = u_\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.43)$$

podemos escrever o tensor energia momento na forma mista,

$$T_\nu^\mu = g_{\nu\alpha}T^{\mu\alpha} = (p + \rho)u^\mu u^\alpha g_{\nu\alpha} - pg^{\mu\alpha}g_{\nu\alpha} = (p + \rho)u^\mu u_\nu - p\delta_\nu^\mu,$$

e também na forma covariante,

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}T_\nu^\alpha = (p + \rho)u^\alpha u_\nu g_{\mu\alpha} - p\delta_\nu^\alpha g_{\mu\alpha} = (p + \rho)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}. \quad (2.44)$$

Logo, da equação (2.44) a componente 00, é dada por,

$$\begin{aligned} T_{00} &= (p + \rho)u_0 u_0 - pg_{00} \\ T_{00} &= \rho, \end{aligned} \quad (2.45)$$

temos então que,

$$T_\nu^\mu = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

e o traço da forma covariante do tensor energia-momento,

$$T = T_\mu^\mu = \rho - 3p. \quad (2.47)$$

Vamos agora voltar a equação de campo de Einstein (2.30),

$$G_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} + \chi_G T_{\mu\nu},$$

onde a componente 00 é dada por,

$$G_{00} = \Lambda g_{00} + 8\pi G T_{00}, \quad (2.48)$$

substituindo os valores obtidos (2.41)(2.45) na equação acima, temos,

$$\begin{aligned}
3 \left( \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} \right) &= \Lambda + 8\pi G\rho \\
\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} &= \frac{\Lambda}{3} + \frac{8\pi G\rho}{3} \\
\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 &= \frac{\Lambda}{3} + \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2}.
\end{aligned} \tag{2.49}$$

A equação (2.49) é a primeira equação de Friedmann. As componentes 00 do traço-invertido da equação de campo de Einstein nos dá a segunda equação de Friedmann. Tomando o traço da equação de campo de Einstein (2.32), sendo o traço da métrica apenas a dimensionalidade do espaço-tempo, ou seja,  $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \delta_\nu^\nu = 4$ , temos,

$$\begin{aligned}
R - \frac{4}{2}R &= 8\pi GT + 4\Lambda \\
R &= -8\pi GT - 4\Lambda,
\end{aligned}$$

multiplicando ambos os lados por  $-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}$ ,

$$-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}8\pi GT + g_{\mu\nu}2\Lambda,$$

subtraindo a equação (2.32) da equação acima,

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right) - g_{\mu\nu}\Lambda, \tag{2.50}$$

logo, substituindo as componentes 00 (2.35)(2.41)(2.45) e o traço do tensor energia momento (2.47) na equação (2.50), temos,

$$\begin{aligned}
R_{00} &= 8\pi G \left( T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T \right) - g_{00}\Lambda \\
-3\frac{\ddot{a}}{a} &= 8\pi G \left[ \rho - \frac{1}{2}(\rho + 3p) \right] - \Lambda \\
\frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

A equação (2.51) é a segunda equação de Friedmann, também conhecida como equação de aceleração. Outra equação fundamental da Cosmologia que podemos obter, tanto tomando a derivada temporal da primeira equação de Friedmann, como diretamente pela conservação de energia do tensor energia-momento  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ , é a equação de continuidade,

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \tag{2.52}$$

## 2.5 Parâmetros Cosmológicos

Na subseção anterior mostramos as equações fundamentais da Cosmologia. Agora vamos introduzir parâmetros que se relacionam com essas equações. Digamos que o universo seja composto por  $w$  componentes, como por exemplo, matéria bariônica, neutrinos, fótons, entre outros. Seja  $\rho_w$  a densidade de energia do componente  $w$ , a densidade total de energia  $\rho$  será,

$$\rho = \sum_w \rho_w. \quad (2.53)$$

As componentes do Universo podem ser parametrizadas em termos de uma equação de estado barotrópica, da forma,

$$p = w\rho. \quad (2.54)$$

A pressão total é a soma da pressão de todas as componentes,

$$p = \sum_w p_w = \sum_w w\rho_w. \quad (2.55)$$

Então a equação de continuidade (2.52) que leva em conta todo o conteúdo material do Universo toma a forma,

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_w + 3\frac{\dot{a}}{a} \sum_w (\rho_w + w\rho_w) &= 0 \\ \dot{\rho}_w + 3\frac{\dot{a}}{a} \sum_w \rho_w(1 + w) &= 0, \end{aligned} \quad (2.56)$$

resolvendo a equação diferencial acima obtemos,

$$\rho_w = \rho_{w,0} a^{-3(1+w)}. \quad (2.57)$$

Onde  $\rho_{w,0}$  é a densidade de energia atual de um determinado componente  $w$ . Podemos observar que a densidade de energia do Universo decai com o fator de escala. Considerando as componentes: matéria não relativística, que é um fluido que possui sua pressão muito menor do que a densidade de energia, ou seja  $|p| \ll \rho$ , logo  $w = 0$ , a radiação, que possui sua pressão como um terço da densidade de energia  $p = \frac{1}{3}\rho$ , logo  $w = \frac{1}{3}$ , e a energia escura que possui uma pressão negativa e densidade de energia constante  $p = -\rho$ , logo  $w = -1$ , temos,

$$\rho_m = \rho_{m,0} a^{-3} \quad (2.58)$$

$$\rho_r = \rho_{r,0} a^{-4} \quad (2.59)$$

$$\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda,0}. \quad (2.60)$$

Onde  $\rho_m$  é a densidade de energia para matéria não relativística,  $\rho_r$  para radiação e  $\rho_\Lambda$  para energia escura. Outro importante ponto a se definir é a densidade crítica do Universo, la da equação de Friedman (2.49),

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= H^2 = \frac{\Lambda}{3} + \frac{8\pi G}{3} \sum_w \rho_w - \frac{k}{a^2} \\ H^2 &= \frac{8\pi G}{3} \left( \frac{\Lambda}{8\pi G} + \sum_w \rho_w \right) - \frac{k}{a^2} \\ H^2 &= \frac{8\pi G}{3} \left( \rho_\Lambda + \sum_w \rho_w \right) - \frac{k}{a^2}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

onde  $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}$  é a densidade de energia do vácuo e  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  é o parâmetro de Hubble. Considerando o Universo plano, ou seja,  $k = 0$  a equação 2.61 fica da forma,

$$\frac{3H^2}{8\pi G} = \sum_w \rho_w + \rho_\Lambda, \quad (2.62)$$

onde a densidade crítica é dada por,

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (2.63)$$

sendo seu valor atual,

$$\rho_{c,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (2.64)$$

Se a densidade de energia é maior do que o valor da densidade crítica, temos um Universo com curvatura positiva, i.e.,  $k = 1$ , e se é menor, temos um Universo com curvatura negativa, dada por  $k = -1$ . É mais conveniente utilizar a proporção entre a densidade e a densidade crítica, ao invés de uma densidade absoluta. isto é definido como o parâmetro de densidade adimensional, que é dado da forma,

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad (2.65)$$

com isso, podemos obter o parâmetro de densidade para matéria, radiação e energia escura,

$$\begin{aligned}\Omega_{m,0} &= \frac{\rho_{m,0}}{\rho_{c,0}} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{m,0} \\ \Omega_{r,0} &= \frac{\rho_{r,0}}{\rho_{c,0}} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{r,0} \\ \Omega_{\Lambda,0} &= \frac{\rho_{\Lambda,0}}{\rho_{c,0}} = \frac{\Lambda}{3H_0^2}.\end{aligned}\tag{2.66}$$

Substituindo a densidade de energia de cada componente do Universo na equação de Friedmann (2.61),

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_r a^{-4} + \rho_m a^{-3} + \rho_\Lambda) - \frac{k}{a^2},$$

multiplicando e dividindo por  $H_0^2$ ,

$$H^2 = H_0^2 \left[ \frac{8\pi G}{3H_0^2} (\rho_r a^{-4} + \rho_m a^{-3} + \rho_\Lambda) - \frac{k}{H_0^2 a^2} \right],\tag{2.67}$$

onde definimos o parâmetro de curvatura como,

$$\Omega_k = -\frac{k}{H_0^2}.\tag{2.68}$$

Com isso temos,

$$\begin{aligned}H^2 &= H_0^2 \left( \frac{\rho_{r,0} a^{-4}}{\rho_{c,0}} + \frac{\rho_{m,0} a^{-3}}{\rho_{c,0}} + \frac{\rho_{\Lambda,0}}{\rho_{c,0}} - \frac{k}{H_0^2} a^{-2} \right), \\ H^2 &= H_0^2 (\Omega_{r,0} a^{-4} + \Omega_{m,0} a^{-3} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0} a^{-2}), \\ H &= H_0 \sqrt{\Omega_{r,0} a^{-4} + \Omega_{m,0} a^{-3} + \Omega_{\Lambda,0} + \Omega_{k,0} a^{-2}},\end{aligned}\tag{2.69}$$

usando relação do *redshift* com o fator de escala (2.29), podemos obter  $H(z)$ ,

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{k,0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda,0}}.\tag{2.70}$$

E por fim um outro importante parâmetro cosmológico é o parâmetro de desaceleração, que auxilia na compreensão do processo de expansão do Universo e é definido por,

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}.\tag{2.71}$$

## 2.6 Medidas de distância na Cosmologia

As medidas de distância entre dois pontos no Universo podem ser feitas de diversas formas por consequência da mudança constante da distância entre esses pontos em função da expansão do Universo. Sendo assim, é de fundamental importância especificar um procedimento para determinar a distância entre dois objetos no espaço.

### 2.6.1 Distância própria e distância comóvel

Como em um universo em expansão a distância entre dois objetos aumenta com o tempo, devemos especificar o tempo  $t$  em que a distância medida é a correta, isto é o que chamamos de distância própria. Esta distância própria é igual ao comprimento da geodésica entre os dois pontos quando o fator de escala é fixado em um valor  $a(t)$ .

Suponha que estamos localizados na origem e estamos observando uma galáxia localizada em uma coordenada comóvel  $(r, \theta, \phi)$ . A distância própria entre nós (o observador) e a galáxia pode ser determinada utilizando a métrica FLRW (2.14). Dado que  $(\theta, \phi)$  e  $t$  são constantes, podemos escrever a métrica como,

$$\begin{aligned} ds^2 &= -a(t)^2 \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} \right) \\ ds &= -a(t) \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \end{aligned} \quad (2.72)$$

podemos obter a distância própria dessa galáxia até nós integrando sobre a coordenada radial,

$$d_p(t) = a(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (2.73)$$

da equação (2.19) vimos que,

$$c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \chi, \quad (2.74)$$

sendo  $\chi$  a distância comóvel, que é a distância entre dois eventos ou observadores comóveis, isto é, em repouso em relação à expansão do Universo. Podemos escrever a distância própria como,

$$d_p(t) = a(t)\chi = a(t)c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.75)$$



da relação entre o fator de escala e o *redshift* (2.29),

$$dt = -\frac{dz}{H(z)(1+z)}, \quad (2.76)$$

logo podemos substituir na distância comóvel e escrever como,

$$\chi = c \int_0^z \frac{dz}{H(z)}, \quad (2.77)$$

temos então que a distância própria vai ser dada por,

$$d_p(t) = a(t)\chi = a(t)c \int_0^z \frac{dz}{H(z)},$$

de forma que a distância própria hoje  $t = t_0$ , será igual a distância comovel,

$$\begin{aligned} d_p(t_0) &= a_0 c \int_0^z \frac{dz}{H(z)} \\ d_p(t_0) &= c \int_0^z \frac{dz}{H(z)} = \chi. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Tanto a distância comóvel como a distância própria introduzidas acima não são diretamente mensuráveis. E como a Cosmologia é uma ciência baseada em observações, para calcular a distância de um objeto no Universo, precisamos de alguma maneira, calcular a distância de propriedades observáveis deste objeto.

## 2.6.2 Distância de luminosidade

A distância de luminosidade é uma medida de distância obtida diretamente através de informações dos objetos astrofísicos observados. Uma dessas propriedades observáveis que podemos utilizar é o fluxo aparente e para isso devemos conhecer a luminosidade absoluta do objeto. Então, através de velas padronizáveis <sup>1</sup>, podemos utilizar o fluxo destes objetos para definir a distância de luminosidade:

$$D_L = \left( \frac{L}{4\pi f} \right)^2. \quad (2.79)$$

Uma fonte luminosa fornece um fluxo aparente dado por,

$$f = \frac{L}{4\pi d^2}. \quad (2.80)$$

Podemos reescrever o elemento de linha da métrica de FLRW (2.14) da forma,

---

<sup>1</sup>Chamamos de vela padronizável objetos com luminosidades intrínsecas bem conhecidas.

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 [d\chi^2 + S_k(\chi)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)], \quad (2.81)$$

onde  $S_k(\chi)$ ,

$$S_k(\chi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}\chi) & \text{Para } k > 0 \\ \chi & \text{Para } k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{|k|}} \sinh(\sqrt{|k|}\chi) & \text{Para } k < 0. \end{cases} \quad (2.82)$$

Agora imagine que um observador se encontra na origem e está observando um objeto de luminosidade bem definida localizado em  $(r, \theta, \phi)$ , que emite a luz no momento  $t_e$ , e é observado no momento presente  $t = t_0$ . Os fótons que foram emitidos, ao chegar no momento presente, estão espalhados sobre uma esfera de raio próprio  $d_p(t_0) = \chi$  e superfície própria  $A_p(t_0) = 4\pi S_k(\chi)^2$ . Se o espaço é plano, temos a superfície própria dada por uma relação euclidiana,  $A_p(t_0) = 4\pi\chi^2$ . Se tem uma curvatura positiva,  $A_p(t_0) < 4\pi\chi^2$  e os fótons estarão espalhados em uma área menor do que se fosse em um plano. Se tem uma curvatura negativa,  $A_p(t_0) > 4\pi\chi^2$ , os fótons estarão espalhados em uma área maior do que se fosse em um plano.

Além disso, a expansão do Universo faz com que o fluxo de luz observado de uma vela padronizável em um *redshift*  $z$ , diminua com um fator adicional  $(1+z)^{-2}$ . Das equação (2.28) e (2.29), temos que o comprimento de onda de um fóton emitido com  $\lambda_e$  é alterado para,

$$\lambda_0 = \frac{1}{a(t_e)} \lambda_e = (1+z)\lambda_e. \quad (2.83)$$

Devido a expansão do Universo, o tempo entre a observação de fótons será maior, ou seja, se dois fótons são emitidos na mesma direção, separados por um intervalo de tempo  $\Delta_{t_e}$ , a distância própria entre eles será aumentada para  $\Delta_{t_e}(1+z)$  e será observado em um intervalo de tempo  $\Delta_{t_0} = \Delta_{t_e}(1+z)$ . Logo, temos que em um Universo espacialmente curvo, em expansão, a relação entre o fluxo aparente e a luminosidade de uma fonte distante é dada por,

$$f = \frac{L}{4\pi S_k(\chi)^2 (1+z)^2}, \quad (2.84)$$

com isso a distância de luminosidade é dada por,

$$D_L(z) = S_k(\chi)(1+z). \quad (2.85)$$

Para o MCP, onde temos um Universo plano  $k = 0$ , vamos ter a distância de luminosidade da forma,

$$D_L(z) = (1+z) \int_0^z \frac{cdz}{H(z)}. \quad (2.86)$$

### 2.6.3 Distância de diâmetro angular

Outra medida de distância que pode ser obtida usando propriedades observáveis de objetos cosmológicos é a distância de diâmetro angular. Ela está associada ao tamanho intrínseco do objeto. Esses objetos cujo comprimento intrínseco é definido são chamados de régua padrão. Digamos que um objeto possua comprimento  $l$  e se encontre ortogonal á linha de visada, de forma que suas extremidades produzem uma abertura angular  $\delta\theta$  pequena o suficiente para que possamos definir a distância de diâmetro angular como,

$$D_A = \frac{l}{\delta\theta}. \quad (2.87)$$

Em um Universo descrito pela métrica FLRW (2.81), considerando que no instante em que dois fótons desse objeto são emitidos, suas coordenadas comoveis são,  $(r, \theta_1, \phi)$  e  $(r, \theta_2, \phi)$ . Esses fótons seguem geodésicas nulas ao longo da dimensão do objeto, onde  $r = \phi = cte$ . Temos então a distância entre essas duas extremidades como,

$$ds = l = a(t)S_k(\chi)\delta\theta, \quad (2.88)$$

com isso temos a distância de diâmetro angular dada por,

$$\begin{aligned} D_A &= a(t)S_k(\chi) \\ D_A &= \frac{S_k(\chi)}{(1+z)}. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Para o MCP, onde temos um Universo plano  $k = 0$ , a distância de diâmetro angular é da forma,

$$D_A = \frac{1}{(1+z)} \int_0^z \frac{cdz}{H(z)}. \quad (2.90)$$

Podemos observar ainda uma relação entre a distância de diâmetro angular (2.89) e a distância de luminosidade (2.85), chamada de relação de dualidade das distâncias cósmicas (RDDC).

$$D_L = D_A(1+z)^2. \quad (2.91)$$

Obtemos a RDDC num contexto da métrica de FLRW, mas ela é originalmente derivada do Teorema da Reciprocidade [43]. A RDDC independe do principio cosmológico, das equações de campo de Einstein e da natureza da matéria, exigindo apenas que o observador e a fonte estejam conectados por geodésicas nulas num espaço Riemanniano e que o numero de fótons seja conservado.

# Capítulo 3

## Observáveis cosmológicos

### 3.1 Supernovas do tipo Ia

As supernovas são fenômenos extremamente energéticos e repentinos. Elas são classificadas em dois tipos principais, as supernovas de tipo I, que tem como característica a ausência de linhas de hidrogênio em seu espectro, e as supernovas de tipo II, que tem como característica a presença de linhas de emissão ou absorção de hidrogênio em seu espectro.

Temos ainda uma importante subdivisão referente às supernovas tipo I, que tem como característica principal presença ou ausência de elementos químicos específicos. As supernovas que tem presença de silício são chamadas de supernovas tipo Ia (SN Ia), as que possuem presença de hélio e ausência de silício chamamos de supernovas tipo Ib (SN Ib), as que possuem ausência de hidrogênio e de silício mas exibem uma fraca evidencia de hélio chamamos de supernovas do tipo Ic (SN Ic).

No caso das supernovas de tipo II, o formato de suas curvas de luz é usado para separa-las em subtipos. As de tipo II-L (linear) possuem uma curva de luz que, ao atingir seu valor máximo, decai continuamente com o tempo. As de tipo II-P (platô) consegue manter sua luminosidade próxima da máxima por um tempo maior.

A luz emitida pelas explosões de supernova é uma das principais fontes de informação sobre a natureza desses fenômenos. Por meio das curvas de luz, é possível ter informação sobre o mecanismo físico pelo qual foi gerada a supernova, medir fontes de energia, obter informação sobre os arredores da supernova, além de outras informações pertinentes.

O modelo que explica os mecanismos físicos responsável pela SN Ia nos diz que elas são geradas por anãs brancas em sistemas binários. A anã branca começa a retirar matéria de sua companheira. Com o aumento de sua massa, a pressão em seu interior aumenta até que seja suficiente para que se inicie um processo de fusão de parte considerável da matéria da estrela, ocorrendo então, uma ignição explosiva

do carbono, causando a explosão em supernova. A massa limite para que ocorra a explosão, chamamos de massa de Chandrasekhar, que é cerca de  $1,4M_{\odot}$  [80].

As SN Ia não ocorrem frequentemente localmente, em média temos a ocorrência na nossa galáxia de uma SN Ia por século. No entanto, são eventos extraordinariamente luminosos, podendo ser observado a distâncias muito grandes. A luminosidade média de uma SN Ia é de aproximadamente  $L \approx 4 \times 10^9 L_{\odot}$ , podendo ofuscar o brilho de todas as estrelas de uma galáxia juntas.

Os dados observacionais de supernovas cresceram extremamente nas duas ultimas décadas, principalmente os de curvas de luz das de Tipo Ia. Como podemos observar na Figura 3.1, as curvas de luz das supernovas de tipo Ia são todas similares.

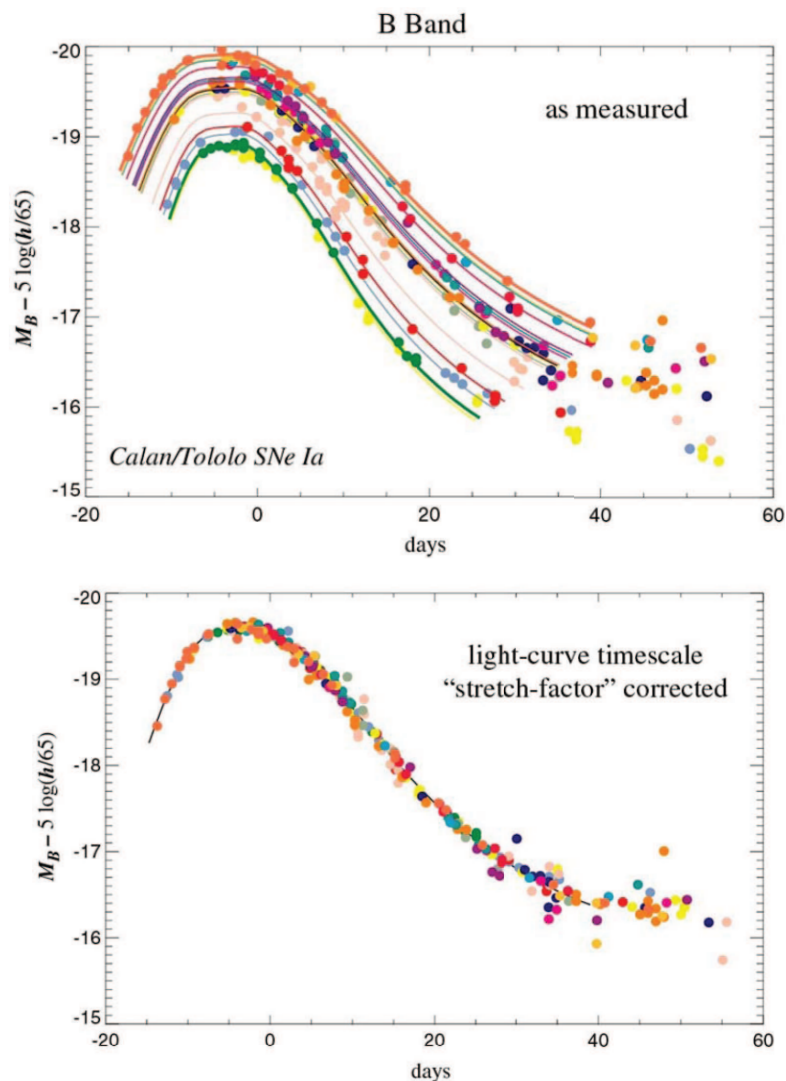


Figura 3.1: Curvas de luz de supernovas do Tipo Ia na banda B do levantamento Calán/Tololo. Na figura de cima, observamos diferenças nas luminosidades máximas das SN Ia e na figura de baixo observamos as diferentes curvas de luz após calibração. Figura retirada de [1]

Além disso a análise das curvas de luz de Supernovas nos mostra que as SN Ia possuem a curva de luz com maior pico de luminosidade, como podemos observar na Figura 3.2.

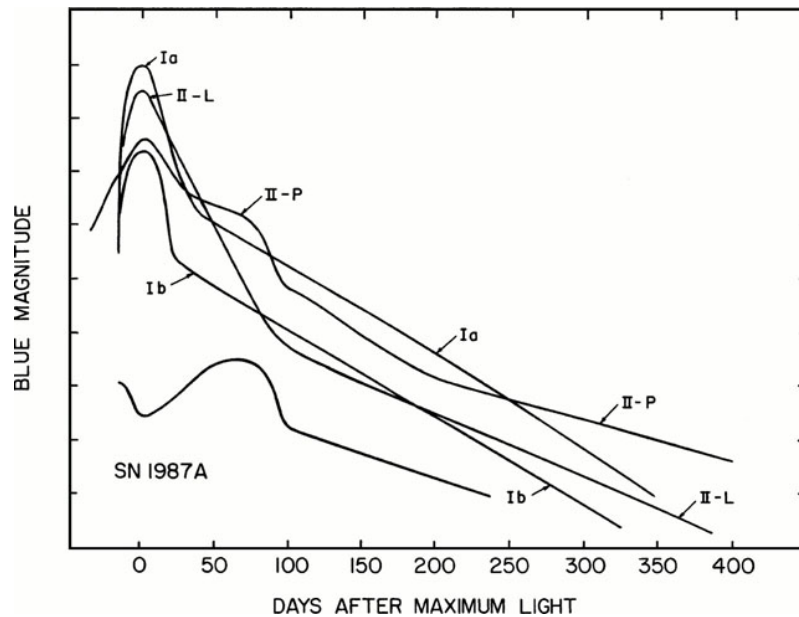


Figura 3.2: Curvas de luz de supernovas do Tipo Ia, Ib, II-L, II-P. Figura retirada de [2]

Outra importante característica que faz as SN Ia serem tão especiais está em seu espectro. O primeiro conjunto de espectros de supernovas de Tipo Ia foi os da SN 1937C obtido por Minkowski [81]. Com o avanço científico, possuímos hoje uma gama bem maior de conjunto de espectros de SN Ia. Ao compararmos os espectros das SN Ia em épocas similares, a partir do brilho máximo, vamos observar que seus espectros apresentam uma homogeneidade. A Figura 3.3 abaixo é uma comparação dos espectros de três SN Ia, a Supernova 1987D, a Supernova 1987N e a Supernova 1990N. Cada um destes espectros foram feitos em um tempo de cerca de 1 semana após o brilho máximo.

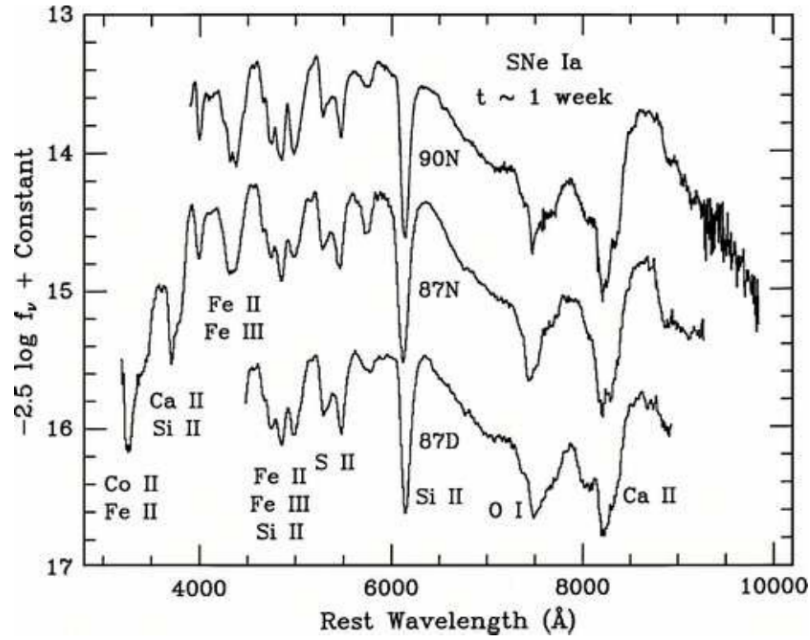


Figura 3.3: Espectros de três SN Ia, cerca de uma semana após o seu brilho máximo. Figura retirada de [2]

Portanto, observamos através curvas de luz das SN Ia que o seus fluxos na época do brilho máximo são similares. E observamos da análise espectral que as SN Ia são completamente homogêneas. A análise dos espectros e curvas de luz das Supernovas mostrou que as SN Ia podem ser utilizadas como velas padronizáveis perfeitas. Para obter a distância em que se encontra uma SN Ia podemos utilizar a magnitude aparente  $m$ , que é escrita em termos do fluxo aparente, da forma,

$$m \equiv -2.5 \log_{10}(f/f_x), \quad (3.1)$$

onde  $f_x = 2.53 \times 10^{-8}$  watt  $\text{m}^{-2}$  é o fluxo de referência. O sinal mostra que, quanto menor valor da magnitude aparente, maior é o valor fluxo, logo, maior é o brilho da fonte que é observada. A magnitude absoluta de uma fonte de luz é definida como a magnitude aparente que a fonte teria caso ela estivesse a uma distância luminosidade  $d_L = 10\text{pc}$  do observador. Logo, uma fonte de luz com luminosidade  $L$  tem uma magnitude absoluta dada por,

$$M \equiv -2.5 \log_{10}(L/L_x), \quad (3.2)$$

onde  $L_x = 78,7L_\odot$  é a luminosidade de um objeto que produz um fluxo  $f_x$  observado a uma distância de  $10\text{pc}$ . A relação entre as magnitudes aparente e absoluta é dada por,

$$\mu \equiv m - M = 5 \log_{10} \left( \frac{d_L}{1\text{Mpc}} \right) + 25. \quad (3.3)$$

Logo, utilizando SN Ia cujas luminosidades são bem definidas podemos obter o modulo de distância. Através dele, conseguimos inferir importantes parâmetros Cosmológicos.

## 3.2 Radiação cósmica de fundo

De acordo com a teoria do Big Bang o Universo tem inicio a partir de um ponto inicial extremamente denso e quente, e que na medida em que se expande se esfria. Esta temperatura inicial do Universo era suficientemente quente para manter os bárions completamente ionizados.

Na medida que o Universo se expande e se esfria os elétrons começam a se combinar com os prótons, formando os átomos neutros de hidrogênio e hélio. Isso acontece quando o Universo tinha uma temperatura de aproximadamente  $4000K$  em um *redshift* de  $\sim 1088$ . Essa fase do Universo é conhecida como época da recombinação.

Em seguida o Universo passa por uma fase em que os fótons param de interagir com os bárions, quando o Universo tinha uma temperatura de aproximadamente  $3000K$ . Nessa fase, a matéria se desacopla da radiação. Com isso os fótons viajam livremente pelo espaço, assim constituindo a RCF. Portanto, a RCF nos trás informações do Universo naquela época. Essa fase do Universo é chamada de época do desacoplamento.

Então, a recombinação diz respeito a junção de elétrons e prótons para formar os átomos neutros e o desacoplamento diz respeito ao processo de não interação entre matéria e radiação. A RCF foi prevista inicialmente por Gamow, Alpher e Hermann no ano de 1948 [82–84], onde eles notaram que fótons livres em um Universo com essas características, deveriam produzir um espectro de radiação típico de um corpo negro. Ela só foi detectada, de forma acidental, por Penzias e Wilson [85] no ano de 1965. Esta descoberta foi agraciada com o premio nobel de 1978.

Temos então um Universo preenchido com uma radiação eletromagnética chamada de Radiação Cósmica de Fundo. O espectro dessa radiação é um espectro de corpo negro com uma temperatura hoje de aproximadamente  $2,726 \pm 0,002K$  [86] como podemos observar na figura 3.4.



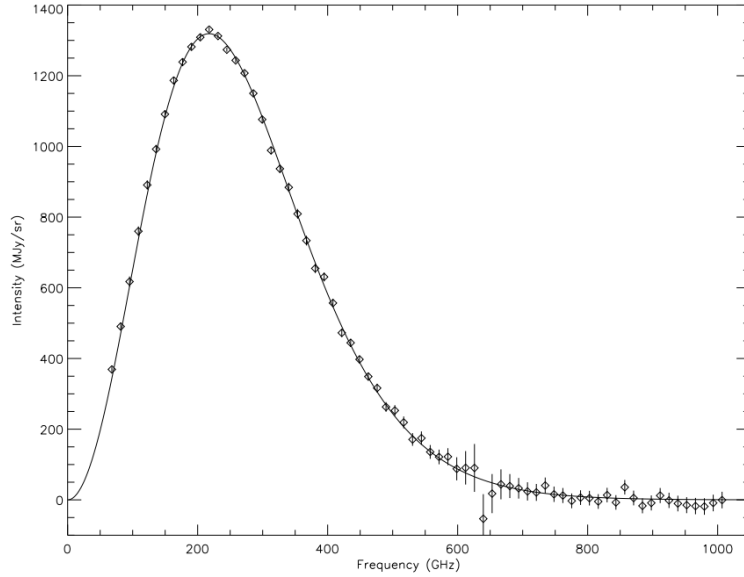


Figura 3.4: Espectro de corpo negro obtido pelo WMAP/FIRAS. Figura retirada de [3]

Apesar da temperatura da RCF ser aproximadamente isotrópica, resultados mais recentes do COBE, WMAP e PLANCK [4, 87, 88] indicam fontes de anisotropias que são geradas a partir de flutuações na distribuição de matéria do Universo na última superfície de espalhamento.

Essas anisotropias nos fornecem informações sobre a distribuição de matéria do Universo. No caso em que a temperatura da RCF fosse totalmente isotrópica com um valor de  $2,726K$ , dificilmente conseguiríamos explicar a formação de estruturas como observamos.

Já era esperado que existissem oscilações no fluido primordial em consequência do desacoplamento entre matéria e radiação. Quando as anisotropias foram medidas, foram encontrados um conjunto de picos presente no espectro da RCF chamado de picos acústicos, e isso é o que causou as oscilações. Na figura abaixo 3.5 podemos observar o espectro de potencia da temperatura da RCF. O que observamos são picos acústicos, onde a posição do primeiro pico se localiza em torno de  $l = 200$  em uma escala angular de aproximadamente  $1^\circ$ .

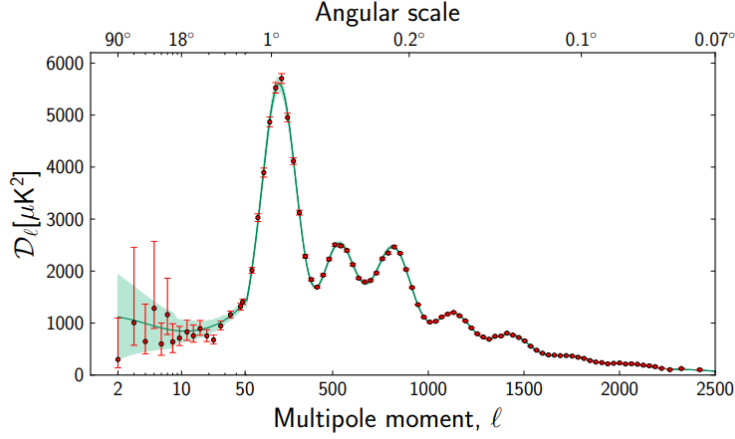


Figura 3.5: Espectro de potência angular da temperatura da RCF. Figura retirada de [4]

Os picos observados são gerados na ultima superfície de espalhamento, quando ocorreu o desacoplamento entre matéria e radiação, em um *redshift* de aproximadamente  $z_{des} \approx 1090$  [89]. Definimos o ângulo característico destes picos como,

$$\theta_A = \frac{r_s(z_{des})}{D_A^c(z_{des})}, \quad (3.4)$$

onde  $r_s(z_{des})$  representa o horizonte sonoro do pico, e é dado por [90],

$$r_s(z_{des}) = \int_{1090}^{\infty} \frac{c_s}{H(z)} dz, \quad (3.5)$$

$D_A^c(z_{des})$  representa a distância de diâmetro angular comovel,

$$D_A^c(z) = (1 + z)D_A(z) \quad (3.6)$$

e  $c_s$  é a velocidade do som até a ultima superfície de espalhamento. O multipolo correspondente ao angulo  $\theta_A$  é dado por,

$$\ell_A = \frac{\pi}{\theta_A} = \pi \frac{D_A^c(z_{des})}{r_s(z_{des})}. \quad (3.7)$$

Das equações (2.89) e (3.6) podemos escrever a distância de diâmetro angular da forma,

$$D_A^c(z_{des}) = \frac{c}{H_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega_m^{(0)}}} \mathcal{R}, \quad (3.8)$$

onde  $\mathcal{R}$  é chamado de *Shift parameter* da RCF, que é dado por,

$$\mathcal{R} = \sqrt{\Omega_m} S_k(z_{des}), \quad (3.9)$$

sendo  $S_k$  dado pela equação (2.82). Com isso podemos obter o multipolo do angulo  $\theta_A$  em função do *Shift parameter* da RCF  $\mathcal{R}$ , da forma,

$$\ell_A = \frac{3\pi}{4} \sqrt{\frac{\omega_b}{\omega_y}} \left[ \ln \left( \frac{\sqrt{R_s^{des} + R_s^{eq}} + \sqrt{1 + R_s^{des}}}{1 + \sqrt{R_s^{eq}}} \right) \right]^{-1} \mathcal{R}. \quad (3.10)$$

Onde,  $R_s^{des} = (3\omega_b/4\omega_y)[1/(1 + z_{des})]$  e  $R_s^{eq} = (3\omega_b/4\omega_y)[1/(1 + z_{eq})]$ ,  $z_{eq} = 3258$  é o *redshift* da época da igualdade matéria-radiação. Observações da RCF [91] nos diz que,  $\mathcal{R} = 1.725$ ,  $\omega_b = 0.02253$  e  $\omega_y = 2.469 \times 10^{-5}$ . Com isso podemos obter  $\ell_A \approx 299$ .

No entanto esse valor de  $\ell_A$  não corresponde a um pico no espectro de potência angular da temperatura da RCF, o primeiro pico se encontra em  $\ell = 200$  3.5. Essa diferença vem de alguns efeitos causados pelo fluxo de elétrons livres e a contribuição de dipolo. A relação generalizada para todos os picos deve ser dada por,

$$\ell_m = \ell_A(m - \phi_m), \quad (3.11)$$

onde,  $m$  representa o pico, por exemplo,  $m = 1$  para o primeiro pico e  $\phi_m$  representa a mudança de multipolo para determinado pico.

### 3.3 Oscilações acústicas de bárions

As chamadas Oscilações acústicas de bárions são geradas no inicio do Universo, mais precisamente na era da radiação. Nesta fase, o Universo era composto por um fluido de fótons e bárions fortemente acoplados entre si, chamado de fluido fóton-bárion, além de matéria escura. Os poços de matéria escura introduziam uma força gravitacional que disputava com a pressão de radiação gerada pelos fótons, de modo que a pressão de radiação arrastava os bárions impedindo que caíssem nos poços de potenciais de matéria escura.

A disputa entre essas duas forças perturbava o fluido, formando oscilações como uma onda acústica. Com a expansão do Universo e em consequência a diminuição da temperatura, temos a época do desacoplamento. Nesta época, não existia mais a disputa entre forças para formar as perturbações, e assim as oscilações acústicas estacionam. Isso deixa como assinatura no Universo uma escala de tamanho  $r_s$  na distribuição dos bárions no espaço, também conhecida como escala do horizonte sonoro (escala do horizonte acústico). Esta escala é também observada na RCF, sendo relacionada ao pico de oscilação. A escala do horizonte sonoro  $r_s$  aqui está relacionada com a distância que o fluido fóton-bárion percorre até o desacoplamento

dos fótons.

$$r_s = s = \int_{z_d}^{\infty} \frac{c_s}{H(z)} dz, \quad (3.12)$$

onde  $c_s = c/\sqrt{3}$  é a velocidade em que as ondas de oscilações acústicas se propagam e  $z_d$  o *redshift* na época do arrasto dos bárions (*baryon drag epoch*) ou seja, a época em que os bárions param de ser arrastados pelos fótons, sendo  $z_d$  o *redshift* que determinara a localização das OAB. É importante resaltar que a época de arrasto não coincide com a época de recombinação na qual os fótons foram liberados dos elétrons. Isso ocorre porque há muito mais fótons do que bárions no universo, de modo que os fótons param de sentir os efeitos dos bárions antes que os bárions parem de experimentar a influência dos fótons. O valor de  $z_d$  e de  $r_s(z_d)$  obtidos pelo PLANCK são,  $z_d = 1059.43 \pm 0.45$  e  $r_s(z_d) = 147.23 \pm 0.48 \text{ Mpc}$  [16].

Através de observações de galaxias podemos detectar o sinal de OAB impresso na separação entre elas. Esse sinal é obtido usando um modo radial que está relacionado com o parâmetro de Hubble  $H(z)$  e um modo transversal que está relacionado com a distância de diâmetro angular  $D_A(z)$ . Podemos observar na figura 3.6 que é possível determinar escala da OAB ao longo da linha de visada em termos de  $\Delta z$ , de forma que,

$$s_{\parallel} H(z) = c \Delta z, \quad (3.13)$$

onde  $s_{\parallel}$  corresponde a distância do segmento AB na figura 3.6. Conseguimos também obter a projeção perpendicular à linha de visada da escala de OAB em termo das variações de tamanhos angulares  $\Delta\theta$ ,

$$\frac{s_{\perp}}{D_A(z)} = \Delta\theta(1+z), \quad (3.14)$$

onde  $s_{\perp}$  corresponde a distância do segmento CD na figura 3.6. Tendo a distância de diâmetro angular dada na equação (2.89) e considerando uma casca de bárions impressa no Universo temos que  $s_{\parallel} = r_{s\parallel}$  e  $s_{\perp} = r_{s\perp}$ . Podemos então reescrever as equações acima como,

$$r_{s\parallel} = \frac{c \Delta z}{H(z)}, \quad (3.15)$$

$$r_{s\perp} = D_A(z) \Delta\theta(1+z), \quad (3.16)$$

sendo a equação (3.15) o chamado modo radial e a equação (3.16) o modo transversal. Podemos determinar o sinal usando o modo transversal, mas isso demandaria medidas de *redshift* muito precisas. Vale notar também que o sinal-ruído para medir o modo transversal das OAB é bem mais baixo do que o sinal em 3D, uma vez que temos objetos apenas em 2D. Já para a determinação do sinal radial, é necessário assumir um modelo cosmológico devido a sua dependência com o parâmetro de

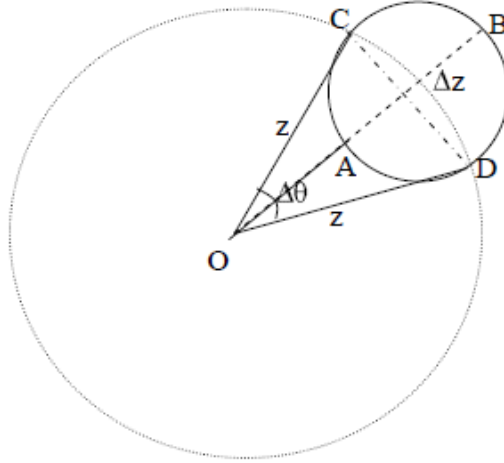


Figura 3.6: Casca esférica no espaço de *redshift*. Figura retirada de [5]

Hubble. Podemos alternativamente obter o sinal das OAB pela combinação destes modos,

$$D_V = \left[ (1+z)^2 D_A(z)^2 \frac{c\Delta z}{H(z)} \right]^{1/3}, \quad (3.17)$$

onde  $D_V$  é a distância esférica média conhecida como escala de dilatação.

### 3.4 Idades de galaxias

Uma das formas de encontrar um importante parâmetro cosmológico, o parâmetro de Hubble  $H(z)$ , é através de medidas da diferença de idades de galaxias. Este método foi proposto inicialmente por [92], onde mediram a diferença na idade entre dois conjuntos de galáxias em evolução passiva,  $dt$ , separadas por uma distância  $dz$ . Usando esse método, da equação (2.76), podemos estimar o parâmetro de Hubble da seguinte forma,

$$H(z) = -\frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt}. \quad (3.18)$$

Uma das vantagens em utilizar esse método pra inferir o parâmetro de Hubble é que as medidas das idades relativas entre as galáxias  $dt$  evitam erros sistemáticos que interferem na medida das idades absolutas de cada galáxia individualmente. Além disso o parâmetro de Hubble é obtido de uma forma independentemente de um modelo cosmológico.

# Capítulo 4

## Processos Gaussianos

Um processo gaussiano, do inglês Gaussian Process (GP), se trata de um conjunto de variáveis aleatórias  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^n$ , onde qualquer subconjunto dessas variáveis é combinadamente gaussiano [93], de forma que para um subconjunto com  $d$  variáveis aleatórias temos,

$$\mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_j \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}), \quad (4.1)$$

onde  $\boldsymbol{\mu}$  é um vetor de valores médios e  $\boldsymbol{\Sigma}$  é a matriz de covariância entre essas variáveis aleatórias. Como essas  $d$  variáveis aleatórias do subconjunto combinadas são gaussianas, podemos escrevê-las como uma densidade gaussiana, da forma,

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det|\boldsymbol{\Sigma}|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right), \quad (4.2)$$

onde,

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_i \dots \mathbf{x}_j]^T \in \mathcal{R}^d. \quad (4.3)$$

Uma conceituação de um processo gaussiano é que ele define uma distribuição sobre funções [93]. Tendo um processo gaussiano, que por natureza é completamente especificado por uma função média e uma função de covariância, podemos obter uma amostra da função no ponto  $\mathbf{x}$  do processo gaussiano de forma que,

$$f(\mathbf{x}) \sim \mathcal{GP}(m(\mathbf{x}), k(\mathbf{x}, \mathbf{x}')), \quad (4.4)$$

onde  $f(\cdot)$  é a amostra da função no ponto  $\mathbf{x}$ ,  $m(\cdot)$  é a função média e  $k(\cdot, \cdot)$  é a função de covariância. Isso é conhecido como a abordagem função-espço do processo gaussiano [93]. Representar um conjunto de dados como um Processo Gaussiano tem varias aplicações em aprendizado de máquina, processamento de sinais e em inferência probabilística.

## 4.1 Regressão de processo gaussiano

Uma das aplicações do Processo Gaussiano é fazer uma regressão. Nesse caso chamamos de regressão de processo gaussiano, do inglês *Gaussian Process Regression (GPR)*. Esse tipo de regressão pode ser definida como uma regressão linear Bayesiana "kernelizada", onde a parametrização do kernel é determinada pela escolha da função de covariância/kernel, bem como os dados utilizados para fazer as previsões [93].

Outra forma de conceituar a regressão de processo gaussiano é usando a abordagem função-espaco mostrada acima. Nesse caso, é aprendido uma distribuição sobre funções, que é realizado através das funções de média e funções de covariância do processo gaussiano no ponto  $\mathbf{x}$  descrito por  $f(\mathbf{x})$ . A função media e a função de covariância são,

$$m(\mathbf{x}) = \mathbb{E}[f(\mathbf{x})] \quad (4.5)$$

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \mathbb{E}[f(\mathbf{x} - m(\mathbf{x}))f(\mathbf{x}' - m(\mathbf{x}'))]. \quad (4.6)$$

Tendo então as funções media e de covariância, podemos obter  $f(\mathbf{x})$  de acordo com a equação (4.4). Estimativas da média de  $f(\mathbf{x})$  são gerados através de uma combinação de valores esperados observados que chamaremos de  $\mathbf{Y}$ . Os coeficientes de ponderação<sup>1</sup> são usados para produzir essas estimativas médias independentemente dos valores esperados, colocando os modelos de GPR na classe de modelos suavizadores lineares [93].

Tendo um conjunto de dados de treinamento que consiste em  $\mathbf{N}$  observações da forma,

$$D_{treino} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i\}_{i=1}^N, \quad (4.7)$$

onde  $\mathbf{x}_i \in \mathcal{R}^d$  e  $y \in \mathcal{R}$  e tendo também um conjunto de dados teste com  $\mathbf{N}'$  pontos,

$$D_{teste} = \mathbf{x}_* = \{\mathbf{x}_{*,i}\}_{i=1}^{N'}, \quad (4.8)$$

onde  $\mathbf{x}_{*,i} \in \mathcal{R}^d$ . A regressão de processo gaussiano prevê uma distribuição posteriori gaussiana para valores esperados sobre os pontos de teste  $\mathbf{x}_*$ , calculando os parâmetros dessa distribuição gaussiana através dos dados de treinamento observados. Podemos pensar nessa previsão como literalmente uma distribuição gaussiana em cada ponto de teste.

---

<sup>1</sup>É um coeficiente relacionado a uma observação como seu peso em um procedimento envolvendo ponderação.

## 4.2 Previsão sem ruído

Podemos entender melhor esse processo considerando inicialmente um caso em que os valores observados  $\mathbf{y}$  não sofrem influencia de nenhum ruído. Iniciamos fazendo as seguintes definições,  $m(\cdot)$  representa a função media,  $k(\cdot, \cdot)$  representa a função de covariância ou kernel,  $\mathbf{x}$  é uma matriz  $(N, d)$  de treinamento de dados de entrada,  $\mathbf{x}_*$  é uma matriz  $(N', d)$  de pontos de teste,  $\mathbf{y}$  é um vetor  $(N, 1)$  de treinamento de valores esperados,  $Cov(\cdot)$  é um operador de covariância,  $\mathbf{f}$  é um vetor  $(N, 1)$  de realizações do processo gaussiano com valores de  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{f}_*$  é um vetor  $(N', 1)$  de realizações do processo gaussiano com valores de  $\mathbf{x}_*$ , e por fim,  $\sigma^2$  é um hiperparâmetro positivo que denota o ruído de covariância do Processo Gaussiano.

No caso livre de ruído, temos que os valores esperados de treinamento que são observados  $\mathbf{y}$  e os valores realizados da função do processo gaussiano  $\mathbf{f}$  são iguais, ou seja, observamos as funções obtidas do Processo Gaussiano nos pontos  $\mathbf{x}$  diretamente,

$$\mathbf{y} = [y_1 \cdots y_N] = \mathbf{f} = [f(\mathbf{x}_1) \cdots f(\mathbf{x}_N)]. \quad (4.9)$$

Tendo então os conjuntos de dados de treinamento (4.7) e teste (4.8), a distribuição conjunta das funções do processo gaussiano sobre os dados de treinamento  $\mathbf{x}$  e teste  $\mathbf{x}_*$  é dada por,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{f}_* \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left( 0, \begin{bmatrix} k(\mathbf{x}, \mathbf{x}) & k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_*) \\ k(\mathbf{x}_*, \mathbf{x}) & k(\mathbf{x}_*, \mathbf{x}_*) \end{bmatrix} \right). \quad (4.10)$$

A equação acima mostra um pouco de como  $\mathbf{f}_*$  se relaciona com  $\mathbf{f}$ , embora ainda não tenha sido feita nenhuma inferência nas previsões  $\mathbf{f}_*$ . No lugar dessa distribuição conjunta, nosso objetivo é obter a distribuição posteriori das realizações do processo gaussiano  $\mathbf{f}_*$  nos pontos de teste  $\mathbf{x}_*$ .

Podemos melhorar nossas estimativas da media gaussiana e dos parâmetros da variância para nossos pontos de teste. Isso pode ser feito condicionando nossas distribuições a priori sobre os pontos de teste em nossos dados de treinamento. Podemos então obter a distribuição posteriori condicionando as realizações previstas do Processo Gaussiano nos pontos de teste  $\mathbf{f}_*$  nas realizações do Processo Gaussiano nos pontos do conjunto de dados de treinamento  $\mathbf{f}$ . Além de condicionar em  $\mathbf{f}$ , também condicionamos os valores de entrada de treinamento  $\mathbf{x}$  e de teste  $\mathbf{x}_*$ , tendo, portanto,

$$\mathbf{f}_* | \mathbf{x}_*, \mathbf{x}, \mathbf{f} \sim \mathcal{N}(k(\mathbf{x}_*, \mathbf{x})k(\mathbf{x}, \mathbf{x})^{-1}\mathbf{f}, k(\mathbf{x}_*, \mathbf{x}_*) - k(\mathbf{x}_*, \mathbf{x})k(\mathbf{x}, \mathbf{x})^{-1}k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_*)). \quad (4.11)$$

Com isso podemos escrever as previsões para a media e covariância nos pontos de



teste  $\mathbf{x}_*$ , da forma,

$$\bar{f}(\mathbf{x}_*) = k(\mathbf{x}_*, \mathbf{x})k(\mathbf{x}, \mathbf{x})^{-1}\mathbf{f} \quad (4.12)$$

$$Cov(f(\mathbf{x}_*)) = k(\mathbf{x}_*, \mathbf{x}_*) - k(\mathbf{x}_*, \mathbf{x})k(\mathbf{x}, \mathbf{x})^{-1}k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_*). \quad (4.13)$$

### 4.3 Previsão na presença de ruído

Em varias aplicações da regressão de processo gaussiano os valores esperados de treinamento  $\mathbf{y}$  são modelados como sendo realizações do processo gaussiano com influencia de ruídos, onde o ruído é parametrizado por uma gaussiana de media zero com valores da covariância de ruído positivos dados por  $\sigma^2$ , sendo,

$$y_i = f(\mathbf{x}_i) + \epsilon, \quad (4.14)$$

onde,  $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$ . Podemos então escrever a distribuição conjunta dos valores de treinamento esperados  $\mathbf{y}$  com as realizações esperadas do processo gaussiano sobre os dados de teste  $\mathbf{f}_*$ ,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{f}_* \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(0, \begin{bmatrix} k(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \sigma_n^2\mathbf{I} & k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_*) \\ k(\mathbf{x}_*, \mathbf{x}) & k(\mathbf{x}_*, \mathbf{x}_*) \end{bmatrix}\right). \quad (4.15)$$

Usando o mesmo condicionamento exposto anteriormente, temos a distribuição condicional das realizações esperadas do processo gaussiano sobre os dados de teste  $\mathbf{f}_*$  condicionadas nos valores de treinamento observados  $\mathbf{y}$ , dada por,

$$\mathbf{f}_* | \mathbf{x}_*, \mathbf{x}, \mathbf{y} \sim \mathcal{N}(k(\mathbf{x}_*, \mathbf{x})[k(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \sigma_n^2\mathbf{I}]^{-1}\mathbf{y}, k(\mathbf{x}_*, \mathbf{x}_*) - k(\mathbf{x}_*, \mathbf{x})[k(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \sigma_n^2\mathbf{I}]^{-1}k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_*)). \quad (4.16)$$

Portanto, a media prevista e os valores de covariância nos pontos de teste  $\mathbf{x}_*$  são dados por,

$$\bar{f}(\mathbf{x}_*) = k(\mathbf{x}_*, \mathbf{x})[k(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \sigma_n^2\mathbf{I}]^{-1}\mathbf{y} \quad (4.17)$$

$$Cov(f(\mathbf{x}_*)) = k(\mathbf{x}_*, \mathbf{x}_*) - k(\mathbf{x}_*, \mathbf{x})[k(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \sigma_n^2\mathbf{I}]^{-1}k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_*). \quad (4.18)$$

Obtemos então a estrutura analítica de como a regressão de processo gaussiano faz previsões. No entanto, alguns dos elementos dessas equações ainda são desconhecidos, como as matrizes kernel/covariância e o ruído de covariância.

## 4.4 Funções de covariância

As funções de covariância são fundamentais nos modelos de regressão de processo gaussiano, uma vez que essas funções se atentam para as contribuições dos pontos de treinamento na previsão de valores esperados de teste, isso de acordo com a distância do kernel entre os pontos de treinamentos  $\mathbf{x}$  e os pontos de teste  $\mathbf{x}_*$ .

Uma das maneiras de conceituar a previsão com regressão de processo gaussiano é como um mecanismo de suavização linear, ou seja, as medias previstas  $\bar{f}_*$  nos pontos de teste  $\mathbf{x}_*$  podem ser dadas por,

$$f_{*,i} = f(\mathbf{x}_{*,i}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j k(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{*,i}), \quad (4.19)$$

onde,

$$\alpha = [k(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \sigma_n^2 \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{y}, \quad (4.20)$$

portanto, as medias previstas são uma combinação linear dos valores esperados  $\mathbf{y}$ , com pesos independente dos dados de saída que são determinados pela distância do kernel entre os pontos de teste e os pontos de treinamento, que são os pontos no qual a contribuição media é levada em consideração. Podemos generalizar o resultado anterior um pouco mais. O teorema de Mercer nos permite expressar o kernel  $k(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  da forma,

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \phi_i(\mathbf{x}) \phi_i^*(\mathbf{x}'), \quad (4.21)$$

onde  $\phi_i(\mathbf{x})$  é uma autofunção do kernel e  $\phi_i^*(\mathbf{x}')$  seu conjugado. Ao integrar essas autofunções sobre uma densidade de probabilidade  $p(\mathbf{x})$ , ou sobre a medida de Lebesgue, o resultado consiste na própria autofunção que cresce com autovalores  $\lambda_i$  [93]. A forma do kernel expressada pelo teorema de Mercer é basicamente uma forma generalizada da série de Fourier. Isto é, podemos ter um numero infinito de funções de base que podemos usar para transformar nossas entradas em recursos. Portanto, a regressão de processo gaussiano transforma nossa forma padrão de regressão Bayesiana em um espaço de valores de dimensão infinita por meio da função de covariância, logo, a escolha da função de covariância tem um papel fundamental. Podemos reescrever  $f_{*,i}$  usando a forma da função de kernel dada pelo teorema de

Mercer,

$$\begin{aligned}
f_{*,i} &= f(\mathbf{x}_{*,i}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j k(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{*,i}) \\
&= \sum_{j=1}^N \alpha_j \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \phi_k(\mathbf{x}_j) \phi_k^*(\mathbf{x}_{*,i}) \\
&= \sum_{j=1}^N \left\{ [k(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \sigma_n^2 \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{y} \right\}_j \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \phi_k(\mathbf{x}_j) \phi_k^*(\mathbf{x}_{*,i}) \\
&= \sum_{j=1}^N \left[ \left( \begin{bmatrix} k(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1) & \cdots & k(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_1) & \cdots & k(\mathbf{x}_N, \mathbf{x}_N) \end{bmatrix} + \sigma_n^2 \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{y} \right]_j \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \phi_k(\mathbf{x}_j) \phi_k^*(\mathbf{x}_{*,i}) \\
&= \sum_{j=1}^N \left[ \left( \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \phi_k(\mathbf{x}_1) \phi_k^*(\mathbf{x}_1) & \cdots & \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \phi_k(\mathbf{x}_1) \phi_k^*(\mathbf{x}_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \phi_k(\mathbf{x}_N) \phi_k^*(\mathbf{x}_1) & \cdots & \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \phi_k(\mathbf{x}_N) \phi_k^*(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix} + \sigma_n^2 \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{y} \right]_j \\
&\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \phi_k(\mathbf{x}_j) \phi_k^*(\mathbf{x}_{*,i}) \tag{4.22}
\end{aligned}$$

Observamos então que as combinações lineares dos valores de saída usadas para formar a previsão são determinadas pelas autofunções  $\phi_k$  e autovalores  $\lambda_k$  da função de covariância aplicada sobre os pontos de treinamento e teste. Além da escolha da função de covariância e do ruído de covariância, as previsões aqui são determinadas inteiramente a partir dos próprios dados. Isso ilustra por que a regressão de processo gaussiano é considerada não paramétrica.

Agora vamos mostrar alguns exemplos de funções de covariância/kernel que são frequentemente utilizados para a regressão de processo gaussiano. Começamos com a função de covariância do tipo exponencial quadrática, do inglês, *Squared Exponential (SE)*, que é dada por,

$$k_{SE}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^T \Theta^{-2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \right], \tag{4.23}$$

onde  $\Theta$  é uma matriz diagonal de escalas de comprimento. Outra classe de função de covariância é a função da classe Matérn, que é dada por,

$$k_{Matrn}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{2^{1-v}}{\Gamma(v)} \left( \sqrt{2vr} \right) K_v \left( \sqrt{2vr} \right) \tag{4.24}$$

onde  $r = (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^T \Theta^{-2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ ,  $v$  é um hiperparâmetro que determina o grau de descontinuidade admissível na interpolação,  $K$  é uma função de Bessel de  $2^{\text{a}}$  ordem

e  $\Gamma(v)$  é a função Gama. Um caso interessante para o aprendizado de máquina é o caso em que  $v = 9/2$ , chamamos a função de covariância nesse caso de Matérn(9/2).

## 4.5 Otimização de hiperparâmetros

Apesar de modelos de regressão de processo gaussiano serem considerados não paramétricos, alguns de seus hiperparâmetros influenciam significativamente no resultado. Devemos então otimizar esses hiperparâmetros para maximizar o desempenho de previsão de valores fora da amostra. Esses hiperparâmetros podem ser otimizados utilizando os chamados métodos de gradiente [93].

O objetivo funcional considerado para otimizar os hiperparâmetros de um modelo de regressão do processo gaussiano é a verossimilhança marginal. No entanto, como essa verossimilhança marginal tem termos exponenciais, geralmente essa otimização é realizada maximizando a verossimilhança logarítmica marginal. Como a função de verossimilhança logarítmica marginal é uma transformação estritamente monotônica da função de verossimilhança marginal, o conjunto de parâmetros que maximiza a verossimilhança logarítmica marginal também maximizará a verossimilhança marginal. A verossimilhança logarítmica marginal, parametrizada por um conjunto de hiperparâmetros  $\theta$ , é dada por,

$$\log p(\mathbf{y}|\mathbf{x}; \theta) = -\frac{1}{2}[\mathbf{k}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \sigma_n^2]^{-1}\mathbf{y} - \frac{1}{2} \log |\mathbf{k}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \sigma_n^2| - \frac{N}{2} \log 2\pi. \quad (4.25)$$

Calculando as derivadas da equação acima em relação a  $\theta$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{x}; \theta) &= \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{k}(\mathbf{x}, \mathbf{x})^{-1} \frac{\partial \mathbf{k}(\mathbf{x}, \mathbf{x})}{\partial \theta} \mathbf{k}(\mathbf{x}, \mathbf{x})^{-1} \mathbf{y} - \frac{1}{2} \text{tr} \left( \mathbf{k}(\mathbf{x}, \mathbf{x})^{-1} \frac{\partial \mathbf{k}(\mathbf{x}, \mathbf{x})}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{x}; \theta) &= \frac{1}{2} \text{tr} \left[ (\alpha \alpha^T - \mathbf{k}(\mathbf{x}, \mathbf{x})^{-1}) \frac{\partial \mathbf{k}(\mathbf{x}, \mathbf{x})}{\partial \theta} \right], \end{aligned} \quad (4.26)$$

onde  $\alpha = \mathbf{k}(\mathbf{x}, \mathbf{x})^{-1} \mathbf{y}$ . Essas derivadas são então usadas para atualizar os hiperparâmetros do modelo de regressão de processo gaussiano usando método ADAM [94],

$$\theta^{(i+1)} = \theta^{(i)} + \eta \nabla_{\theta^{(i)}} \log p(\mathbf{y}|\mathbf{x}; \theta^{(i)}) \quad (4.27)$$

$$\theta^{(i+1)} = \theta^{(i)} + \frac{\eta}{2} \text{tr} \left[ (\alpha \alpha^T - \mathbf{k}(\mathbf{x}, \mathbf{x})^{-1}) \frac{\partial \mathbf{k}(\mathbf{x}, \mathbf{x})}{\partial \theta^{(i)}} \right]. \quad (4.28)$$

Após os hiperparâmetros da regressão de processo gaussiano terem sido otimizados no conjunto de dados de treinamento  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ , o modelo de regressão de processo gaussiano está pronto para realizar inferência posteriori no conjunto de dados de teste  $\mathbf{x}_*$ .

# Capítulo 5

## Metodologia

### 5.1 Medindo a velocidade da luz

Neste trabalho realizamos um teste da variação da velocidade da luz com observações cosmológicas. Para tal, adotamos o método que foi proposto por [60]. O método consiste em assumir um Universo plano descrito pela métrica FLRW, onde a distância de diâmetro angular é dada pela equação (2.90),

$$D_A(z) = \frac{1}{(1+z)} \int_0^z \frac{cdz}{H(z)}, \quad (5.1)$$

sendo  $c = c(z)$  a velocidade da luz em função do *redshift*. Derivando a equação (5.1) com relação ao *redshift*, temos,

$$\frac{\partial}{\partial z}[(1+z)D_A(z)] = \frac{c(z)}{H(z)}, \quad (5.2)$$

podemos então escrever  $c(z)$  como,

$$c(z) = H(z)[(1+z)D'_A(z) + D_A(z)], \quad (5.3)$$

onde  $D'_A(z)$  é a primeira derivada da distância de diâmetro angular em relação ao *redshift*. As incertezas podem ser obtidas por meio de uma propagação de erro da forma,

$$\sigma_{c(z)}^2 = H'(z)[(1+z)D'_A(z) + D_A(z)]\sigma_{H(z)}^2 + H(z)[(1+z)D''_A(z) + D_A(z)]\sigma_{D'_A(z)}^2 + H(z)[(2+z)D'_A(z)]\sigma_{D_A(z)}^2 \quad (5.4)$$

Sabemos que a distância de diâmetro angular atinge um valor máximo em um *redshift* de  $z = 1.592^{+0.043}_{-0.039}$  para o modelo  $\Lambda$ CDM plano [60]. O modelo  $\Lambda$ CDM plano é

consistente com o melhor ajuste concedido pelos dados do Planck mais recentes [16]. Logo, a primeira derivada da distância de diâmetro angular vai ser zero nesse *redshift*, então da equação (5.3) temos que,

$$c(z_m) = D_A(z_m)H(z_m), \quad (5.5)$$

onde  $z_m$  representa o valor de *redshift* em que esse máximo ocorre. Temos então uma relação para a velocidade da luz em um dado *redshift* que depende apenas da distância de diâmetro angular e do parâmetro de Hubble neste valor. Observamos, ainda, que esse método só é válido para modelos FLRW plano, pois há uma degenerescência entre a velocidade da luz variável e a curvatura cósmica [61, 65]. Medições recentes da curvatura do Universo estão em excelente acordo com um valor de curvatura nulo [16–21] (ainda debatido por [95, 96]), portanto, podemos assumir um modelo plano com certa segurança.

## 5.2 Análise de dados

Utilizamos 1048 medidas de distância de luminosidade obtidas por Supernovas do tipo Ia da compilação de dados do Pantheon [17]<sup>1</sup> e 50 medidas do parâmetro de Hubble obtidas através de idades de galáxias e OAB radial [97, 98]<sup>2</sup>. Poderíamos usar medidas transversais de OAB para obter as medidas de distância de diâmetro angular, no entanto temos muito poucos pontos no *redshift* no qual estamos interessados  $z \sim 1.5$  [99]. Logo, usamos as 1048 medidas de magnitude aparente de SN  $m_B$ , combinadas com a determinação de magnitude absoluta dada por [17],

$$M_B = -19.248 \pm 0.029, \quad (5.6)$$

para obter as distâncias luminosidades,

$$D_L = 10^{\frac{m_B - M_B - 25}{5}}, \quad (5.7)$$

no qual foram convertidas em distância do diâmetro angular através da relação de dualidade cósmica (2.91),

$$D_A(z) = D_L(z)(1+z)^{-2}. \quad (5.8)$$

Testar a consistência da relação de dualidade cósmica é um dos principais testes

---

<sup>1</sup>Notamos que as curvas de luz de SN dependem da suposição de uma velocidade da luz constante, que está dentro do limite de Chandrasekhar.

<sup>2</sup>Notamos que as covariâncias das medidas de distâncias de OAB radial e SN foram negligenciadas em nossa análise por questões computacionais.

da Cosmologia fundamental, pois a relação *não* depende de modelos de energia escura, relatividade geral, nem mesmo da métrica FLRW. A relação de dualidade cósmica só pode ser violada, no caso de geometria não-Riemmaniana, de presença de uma fonte de opacidade cósmica no Universo ou variações na física fundamental, como por exemplo, a constante de estrutura fina e o Princípio de Equivalência [54].

Como a relação de dualidade cósmica já foi testada diversas vezes, usando várias abordagens e conjuntos de dados [100–108], podemos assumir com segurança a validade da Eq. (5.8) para converter as medidas de  $D_L(z)$  em  $D_A(z)$ .

Com isso reconstruímos  $D_A(z)$  e  $H(z)$  usando uma abordagem não paramétrica, através do processo gaussiano com o pacote GAPP [109]. Para realizar as reconstruções usamos dois tipos de Kernels o *squared exponential* e o *Matérn(9/2)*, com o objetivo de comparar os resultados usando os dois tipos de reconstruções. Assumimos um número de bins de  $n = 1000$  em um *redshift*  $0 < z < 2$  para obter as reconstruções de  $D_A(z)$ ,  $H(z)$  e suas derivadas.

# Capítulo 6

## Resultados

Mostramos na figura 6.1 as curvas de  $H(z)$ ,  $D_A(z)$  e suas derivadas de primeira ordem, com um nível de confiança de 1 e  $2\sigma$ . O painel superior esquerdo mostra as 50 medidas do parâmetro Hubble  $H(z)$  de idades de galáxias mais OAB radial. Já o painel superior direito mostra as 1048 medidas de  $D_A(z)$  obtidas das SN Ia da compilação Pantheon através da relação de dualidade cósmica. Ambos os gráficos mostram também suas respectivas reconstruções realizadas com processo gaussiano, as áreas sombreadas em cinza representam as obtidas usando o Kernel SqExp, e em roxo usando o Kernel Mat92. Tons mais escuros e mais claros correspondem a incertezas de 1 e  $2\sigma$ , respectivamente.

Além disso, exibimos as reconstruções das derivadas  $H'(z)$  e  $D'_A(z)$  nos painéis inferiores. Os pontos azul e laranja refere-se ao redshift onde a distância do diâmetro angular atinge seu valor máximo para os dois Kernels escolhidos. Esses valores são  $z_m \simeq 1.58$  (SqExp) e  $z_m \simeq 1.36$  (Mat92).



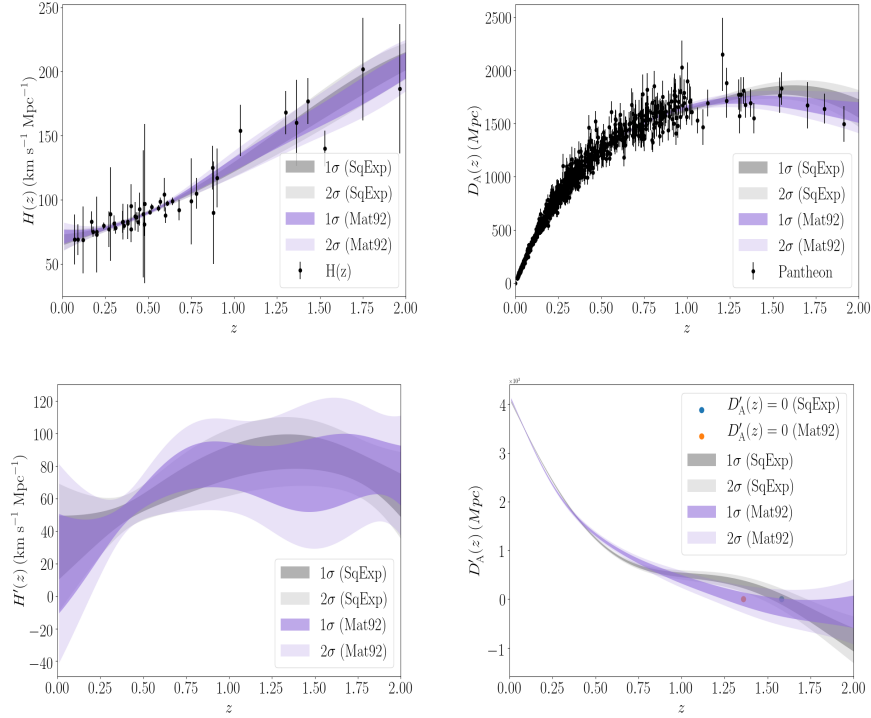


Figura 6.1: O painel superior esquerdo mostra os 50 pontos de dados de  $H(z)$  junto com sua respectiva reconstrução usando os dois Kernels, *squared exponential* (cinza) e *Matérn(9/2)* (roxo). O painel superior direito exibe a distância de diâmetro angular  $D_A(z)$  reconstruída com os dois Kernels, assim como os 1048 pontos obtidos através da relação de dualidade cósmica. O painel inferior esquerdo mostra a primeira derivada do parâmetro Hubble  $H'(z)$ , e no painel inferior direito a primeira derivada da distância de diâmetro angular  $D'_A(z)$ . Os pontos azul e laranja denotam o redshift onde  $D'_A(z) = 0$  para os Kernels *squared exponential* e *Matérn(9/2)*, respectivamente. As áreas sombreadas são as regiões de confiança de  $1\sigma$  para as mais escuras e  $2\sigma$  para as mais claras.

Na figura 6.2 mostramos a evolução da velocidade da luz com relação ao redshift obtida na equação (5.3). Novamente as sombras cinza e roxa representam as reconstruções com os Kernels SqExp e Mat92, respectivamente. Os pontos azul(SqExp) e laranja(Mat92) correspondem a o ponto no qual medimos a velocidade da luz de acordo com a equação (5.5) para cada um dos Kernels usados. Obtivemos  $c(1.58) = (3.20 \pm 0.16) \times 10^5 \text{ km s}^{-1}$  e  $c(1.36) = (2.67 \pm 0.14) \times 10^5 \text{ km s}^{-1}$  com um nível de confiança de  $1\sigma$ , que corresponde a uma medida de precisão de 5.0% and 5.3%, respectivamente. Quando  $z > z_m$ , nossa reconstrução se degrada rapidamente. Isso acontece por motivos de dados insuficientes, como observamos nos painéis inferiores da Fig. 6.1.

Nossos resultados estão de acordo com as medidas locais da velocidade da luz, com um nível de confiança de  $\sim 1.5\sigma$ , e também com trabalhos anteriores, como  $c = (3.04 \pm 0.18) \times 10^5 \text{ km s}^{-1}$  com  $1\sigma$  usando medidas de distância de diâmetro angular

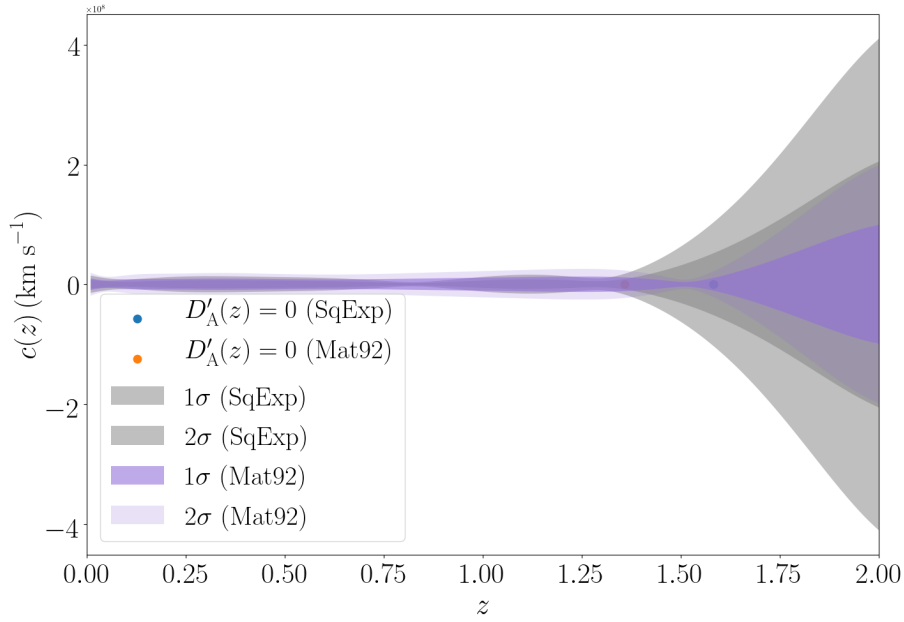


Figura 6.2: A reconstrução da velocidade da luz  $c(z)$  no limiar de redshift  $0 < z < 2$  para os Kernels *squared exponential* (cinza) e *Matérn(9/2)* (roxo). A escala do eixo vertical, é de  $10^7$ . As áreas sombreadas são as regiões de confiança de  $1\sigma$  para as mais escuras e  $2\sigma$  para as mais claras.

de quasares [64]. Também não encontramos evidências para modelos velocidade da luz variável na faixa  $0 < z < 2$ , como evidenciado na Fig. 6.2. Além disso, notamos que esses resultados são robustos em relação a outros Kernels, como o exponencial quadrático duplo e *Matérn(7/2)* - que deram resultados quase idênticos aos Kernels SqExp e Mat92, respectivamente - bem como diferentes números de bins, como  $n = 100$  ou  $n = 2000$ .

# Capítulo 7

## Conclusões

O modelo cosmológico padrão é consistente com a maioria dos dados observacionais, no entanto, ainda apresenta algumas inconsistências. Por trás dessas inconsistências, estão alguns problemas fundamentais da cosmologia moderna, como os problemas de singularidade, horizonte e curvatura, coincidência cósmica, entre outros. Além disso, foram encontradas inconsistências dentro do modelo padrão, como no caso da tensão de Hubble entre dados observacionais de RCF e SN. Esses problemas motivam constantemente a busca de soluções alternativas ao modelo padrão. Uma dessas possíveis soluções alternativas é assumir que as constantes físicas podem ter variado em algum momento no passado, ou ainda estão variando no presente.

Fizemos uma análise independente de modelo usando processos gaussianos para reconstruir o parâmetro Hubble, através de dados de idades da galáxias e OAB radial, e a distância de diâmetros angular, através de Supernovas Tipo Ia usando a relação de dualidade de distância cósmica. Seguimos o método proposto por Salzano et al. [60], mas usando uma abordagem diferente, além de diferentes conjuntos de dados.

Obtivemos uma precisão de  $\sim 5\%$  nas medidas da velocidade da luz, sendo,  $c = (3,20 \pm 0,16) \times 10^5 \text{ km s}^{-1}$  em  $z_m \simeq 1,58$ , assumindo o Kernel SqExp, e  $c = (2,67 \pm 0,14) \times 10^5 \text{ km s}^{-1}$  em  $z_m \simeq 1,36$  usando o Kernel Matérn(9/2).

Ambos os resultados indicam que não há evidência de variabilidade da velocidade da luz na faixa de redshift  $0 < z < 2$ , que cobre um tempo de viagem da luz de quase  $10,5 \text{ Ganos}$ . Também notamos que a reconstrução  $c(z)$  se degrada significativamente em  $z > z_m$  devido à falta de dados observacionais em tal faixa de redshift - enfatizando a necessidade de mais desenvolvimento em medições cosmológicas para melhorar essas medidas. No geral, nossas descobertas são totalmente consistentes com a suposição fundamental de variância nula de constantes físicas fundamentais, portanto, ajudando a sustentar os fundamentos do modelo cosmológico padrão [110].

# Referências Bibliográficas

- [1] Ramon Miquel. Cosmology with type-Ia supernovae. *Journal of Physics A Mathematical General*, 40(25):6743–6755, June 2007.
- [2] Alexei V. Filippenko. Optical Spectra of Supernovae. , 35:309–355, January 1997.
- [3] D. J. Fixsen. The Temperature of the Cosmic Microwave Background. , 707(2):916–920, December 2009.
- [4] Planck Collaboration, P. A. R. Ade, and N. Aghanim et al. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters. , 571:A16, November 2014.
- [5] S. Nesseris and L. Perivolaropoulos. Crossing the phantom divide: theoretical implications and observational status. , 2007(1):018, January 2007.
- [6] A. G. Riess et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. 116:1009–1038, 1998.
- [7] S. Perlmutter et al. Measurements of  $\omega$  and  $\lambda$  from 42 high redshift supernovae. *Astrophys. J*, 517:565–586, 1999.
- [8] K. K. S. Wu, O. Lahav, and M. J. Rees. The large-scale smoothness of the universe. *Nature*, 397:225–230, 1999.
- [9] C. Clarkson and R. Maartens. Inhomogeneity and the foundations of concordance cosmology. *Class. Quant. Grav*, 27, 2010.
- [10] R. Maartens. Is the universe homogeneous? *Phil. Trans. Roy*, 369:5115–5137, 2011.
- [11] C. Clarkson. Establishing homogeneity of the universe in the shadow of dark energy. *Comptes Rendus Physique*, 13:682–718, 2012.
- [12] T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla, and C. Skordis. Modified gravity and cosmology. *Phys. Rept.*, 513:1–189, 2012.

- [13] C. M. Will. The confrontation between general relativity and experiment. *Living Rev. Rel*, 17:4, 2014.
- [14] E. Berti, E. Barausse, V. Cardoso, L. Gualtieri, P. Pani, U. Sperhake, L. C. Stein, N. Wex, K. Yagi, and T. Baker. et al. Testing general relativity with present and future astrophysical observations. *Class. Quant. Grav.*, 32, 2015.
- [15] A. A. Coley and G. F. R. Ellis. Theoretical cosmology. *Class. Quant. Grav*, 37, 2020.
- [16] N. Aghanim. et al. Planck 2018 results. vi. cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 652, 2021.
- [17] D. M. Scolnic. et al. The complete light-curve sample of spectroscopically confirmed sne ia from pan-starrs1 and cosmological constraints from the combined pantheon sample. *Astrophys. J*, 859, 2018.
- [18] S. Alam. et al. Completed sdss-iv extended baryon oscillation spectroscopic survey: Cosmological implications from two decades of spectroscopic surveys at the apache point observatory,. *Phys. Rev. D*, 103, 2021.
- [19] M. Asgari C. Blake H. Hildebrandt B. Joachimi K. Kuijken C. A. Lin A. G. Sánchez J. L. van den Busch. et all. C. Heymans, T. Tröster. Kids-1000 cosmology: Multi-probe weak gravitational lensing and spectroscopic galaxy clustering constraints. *Astron. Astrophys*, 646, 2021.
- [20] T. M. C. Abbott. et al. Dark energy survey year 3 results: Cosmological constraints from galaxy clustering and weak lensing. *Phys. Rev. D*, 105, 2022.
- [21] L. F. Secco. et al. Dark energy survey year 3 results: Cosmology from cosmic shear and robustness to modeling uncertainty. *Phys. Rev. D*, 105, 2022.
- [22] S. Pan L. Visinelli W. Yang A. Melchiorri D. F. Mota A. G. Riess J. Silk E. Di Valentino, O. Mena. In the realm of the hubble tension - a review of solutions. *Class. Quant. Grav*, 38, 2021.
- [23] O. Lahav P. Shah, P. Lemos. A buyer’s guide to the hubble constant. *Astron. Astrophys. Rev.*, 29, 2021.
- [24] A. G. Riess, W. Yuan, L. M. Macri, D. Scolnic, D. Brout, S. Casertano, D. O. Jones, Y. Murakami, L. Breuval, and T. G. Brink et al. *A Comprehensive*

*Measurement of the Local Value of the Hubble Constant with A Comprehensive Measurement of the Local Value of the Hubble Constant with 1 km/s/Mpc Uncertainty from the Hubble Space Telescope and the SH0ES Team.*

- [25] L. Perivolaropoulos and F. Skara. *Challenges for  $\Lambda$ CDM: An update.*
- [26] P. A. M. Dirac. The cosmological constants. *Nature*, 139:323, 1937.
- [27] J. P. Uzan. The fundamental constants and their variation: Observational status and theoretical motivations. *Rev. Mod. Phys.*, 75:403, 2003.
- [28] J. P. Uzan. Varying constants, gravitation and cosmology. *Living Rev. Rel.*, 14:2, 2011.
- [29] C. J. A. P. Martins. *The status of varying constants: a review of the physics, searches and implications.*
- [30] J. W. Moffat. Superluminary universe: A possible solution to the initial value problem in cosmology. *Int. J. Mod. Phys. D*, 2:351–366, 1993.
- [31] J. D. Barrow. *Cosmologies with varying light speed.*
- [32] A. Albrecht and J. Magueijo. A time varying speed of light as a solution to cosmological puzzles. *Phys. Rev. D*, 59, 1999.
- [33] J. D. Barrow and J. Magueijo. Solutions to the quasi-flatness and quasilambda problems. *Phys. Lett. B*, 447:246, 1999.
- [34] J. D. Barrow and J. Magueijo. Solving the flatness and quasiflatness problems in brans-dicke cosmologies with a varying light speed. *Class. Quant. Grav.*, 16:1435–1454, 1999.
- [35] M. A. Clayton and J. W. Moffat. Dynamical mechanism for varying light velocity as a solution to cosmological problems. *Phys. Lett. B*, 460:263–270, 1999.
- [36] P. P. Avelino and C. J. A. P. Martins. Does a varying speed of light solve the cosmological problems? *Phys. Lett. B*, 459:468–472, 1999.
- [37] M. A. Clayton and J. W. Moffat. Scalar tensor gravity theory for dynamical light velocity. *Phys. Lett. B*, 477:269–275, 2000.
- [38] B. A. Bassett, S. Liberati, C. Molina-Paris, and M. Visser. Geometrodynamics of variable speed of light cosmologies. *Phys. Rev. D*, 62, 2000.

- [39] J. Magueijo. Covariant and locally lorentz invariant varying speed of light theories. *Phys. Rev. D*, 62, 2000.
- [40] M. A. Clayton and J. W. Moffat. Vector field mediated models of dynamical light velocity. *Int. J. Mod. Phys. D*, 11:187–206, 2002.
- [41] J. Magueijo. New varying speed of light theories. *Rept. Prog. Phys.*, 66, 2003.
- [42] G. F. R. Ellis and J. P. Uzan. ‘c’ is the speed of light, isn’t it? *Am. J. Phys.*, 73:240–247, 2005.
- [43] G. F. R. Ellis. Note on varying speed of light cosmologies. *Gen. Rel. Grav.*, 39:511–520, 2007.
- [44] J. Magueijo and J. W. Moffat. Comments on ‘note on varying speed of light theories’. *Gen. Rel. Grav.*, 40:1797–1806, 2008.
- [45] C. N. Cruz and A. C. A. d. Faria. Variation of the speed of light with temperature of the expanding universe. *Phys. Rev. D*, 86, 2012.
- [46] J. W. Moffat. Variable speed of light cosmology, primordial fluctuations and gravitational waves. *Eur. Phys. J. C*, 76, 2016.
- [47] G. Franzmann. *Varying fundamental constants: a full covariant approach and cosmological applications.*
- [48] C. N. Cruz and F. A. da Silva. Variation of the speed of light and a minimum speed in the scenario of an inflationary universe with accelerated expansion. *Phys. Dark Univ*, 22:127–136, 2018.
- [49] R. Costa, R. R. Cuzinatto, E. M. G. Ferreira, and G. Franzmann. Covariant c-flaton: a variational approach. *Int. J. Mod. Phys. D*, 28, 2019.
- [50] R. P. Gupta. Cosmology with relativistically varying physical constants. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 498:4481–4491, 2020.
- [51] S. Lee. The minimally extended varying speed of light (mevsl). *JCAP*, 08, 2021.
- [52] S. Lee. *Constraints on the time variation of the speed of light using Pantheon dataset.*
- [53] S. Lee. *Constraints on the time variation of the speed of light using Strong lensing.*

- [54] S. Lee. *Cosmic distance duality as a probe of minimally extended varying speed of light.*
- [55] S. Lee. *Determination of varying speed of light from Black hole.*
- [56] A. Balcerzak and M. P. Dabrowski. Redshift drift in varying speed of light cosmology. *Phys. Lett. B*, 728:15–18, 2014.
- [57] P. Zhang and X. Meng. Sne data analysis in variable speed of light cosmologies without cosmological constant. *Mod. Phys. Lett. A*, 29, 2014.
- [58] A. Balcerzak and M. P. Dabrowski. A statefinder luminosity distance formula in varying speed of light cosmology. *JCAP*, 06, 2014.
- [59] J. Z. Qi, M. J. Zhang, and W. B. Liu. Observational constraint on the varying speed of light theory. *Phys. Rev. D*, 90, 2014.
- [60] V. Salzano, M. P. Dabrowski, and R. Lazkoz. Measuring the speed of light with baryon acoustic oscillations. *Phys. Rev. Lett.*, 114, 2015.
- [61] V. Salzano, M. P. Dabrowski, and R. Lazkoz. Probing the constancy of the speed of light with future galaxy survey: The case of ska and euclid. *Phys. Rev. D*, 93, 2016.
- [62] R. G. Cai, Z. K. Guo, and T. Yang. Dodging the cosmic curvature to probe the constancy of the speed of light. *JCAP*, 08, 2016.
- [63] A. Balcerzak, M. P. Dabrowski, and V. Salzano. Modelling spatial variations of the speed of light. *Annalen Phys.*, 529, 2017.
- [64] S. Cao, M. Biesiada, J. Jackson, X. Zheng, Y. Zhao, and Z. H. Zhu. Measuring the speed of light with ultra-compact radio quasars. *JCAP*, 02, 2017.
- [65] V. Salzano and M. P. Dabrowski. Statistical hierarchy of varying speed of light cosmologies. *Astrophys. J.*, 851, 2017.
- [66] V. Salzano. How to reconstruct a varying speed of light signal from baryon acoustic oscillations surveys. *Universe*, 3, 2017.
- [67] R. Guedes Lang, H. Mart´ı-Huerta, and V. de Souza. Limits on the lorentz invariance violation from uhecr astrophysics. *Astrophys. J.*, 853, 2018.
- [68] X. B. Zou, H. K. Deng, Z. Y. Yin, and H. Wei. Model-independent constraints on lorentz invariance violation via the cosmographic approach. *Phys. Lett. B*, 776:284–294, 2018.



- [69] H. Mart´ı-Huerta [hawc]. Potential constraints on lorentz invariance violation from the hawc tev gamma-rays. *PoS, ICRC2017*, 2018.
- [70] S. Cao, J. Qi, M. Biesiada, X. Zheng, T. Xu, and Z. H. Zhu. Testing the speed of light over cosmological distances: The combination of strongly lensed and unlensed type ia supernovae. *Astrophys. J.*, 867, 2018.
- [71] D. Wang, H. Zhang, J. Zheng, Y. Wang, and G. B. Zhao. *A model independent constraint on the temporal evolution of the speed of light*.
- [72] A. Albert. et al. Constraints on lorentz invariance violation from hawc observations of gamma rays above 100 tev. *Phys. Rev. Lett*, 124, 2020.
- [73] Y. Pan, J. Qi, S. Cao, T. Liu, Y. Liu, S. Geng, Y. Lian, and Z. H. Zhu. Model-independent constraints on lorentz invariance violation: implication from updated gamma-ray burst observations. *Astrophys. J.*, 890, 2020.
- [74] H. Nguyen. *Analyzing Pantheon SNeIa data in the context of Barrow’s variable speed of light*.
- [75] R. P. Gupta. Testing the speed of light variation with strong gravitational lensing of sne 1a. *Res. Notes AAS*, 5, 2021.
- [76] R. Agrawal, H. Singirikonda, and S. Desai. Search for lorentz invariance violation from stacked gamma-ray burst spectral lag data. *JCAP*, 05, 2021.
- [77] Edwin Hubble. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the national academy of sciences*, 15(3):168–173, 1929.
- [78] Helge S. Kragh. *Conceptions of Cosmos From Myths to the Accelerating Universe: A History of Cosmology*.
- [79] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*.
- [80] S. Chandrasekhar. The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs. , 74:81, July 1931.
- [81] R. Minkowski. The Spectra of the Supernovae in IC 4182 and in NGC 1003. , 89:156, March 1939.
- [82] G. Gamow. The Evolution of the Universe. , 162(4122):680–682, October 1948.
- [83] Ralph A. Alpher and Robert Herman. Evolution of the Universe. , 162(4124):774–775, November 1948.

- [84] Ralph A. Alpher and Robert C. Herman. On the relative abundance of the elements. *Phys. Rev.*, 74:1737–1742, Dec 1948.
- [85] A. A. Penzias and R. W. Wilson. A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s. , 142:419–421, July 1965.
- [86] J. C. Mather, E. S. Cheng, Jr. Eplee, R. E., R. B. Isaacman, S. S. Meyer, R. A. Shafer, R. Weiss, E. L. Wright, C. L. Bennett, N. W. Boggess, E. Dwek, S. Gulkis, M. G. Hauser, M. Janssen, T. Kelsall, P. M. Lubin, Jr. Moseley, S. H., T. L. Murdock, R. F. Silverberg, G. F. Smoot, and D. T. Wilkinson. A Preliminary Measurement of the Cosmic Microwave Background Spectrum by the Cosmic Background Explorer (COBE) Satellite. , 354:L37, May 1990.
- [87] G. F. Smoot, C. L. Bennett, A. Kogut, E. L. Wright, J. Aymon, N. W. Boggess, E. S. Cheng, G. de Amici, S. Gulkis, M. G. Hauser, G. Hinshaw, P. D. Jackson, M. Janssen, E. Kaita, T. Kelsall, P. Keegstra, C. Lineweaver, K. Loewenstein, P. Lubin, J. Mather, S. S. Meyer, S. H. Moseley, T. Murdock, L. Rokke, R. F. Silverberg, L. Tenorio, R. Weiss, and D. T. Wilkinson. Structure in the COBE Differential Microwave Radiometer First-Year Maps. , 396:L1, September 1992.
- [88] D. N. Spergel, L. Verde, H. V. Peiris, E. Komatsu, M. R. Nolta, C. L. Bennett, M. Halpern, G. Hinshaw, N. Jarosik, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, L. Page, G. S. Tucker, J. L. Weiland, E. Wollack, and E. L. Wright. First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters. , 148(1):175–194, September 2003.
- [89] E. Komatsu, J. Dunkley, M. R. Nolta, C. L. Bennett, B. Gold, G. Hinshaw, N. Jarosik, D. Larson, M. Limon, L. Page, D. N. Spergel, M. Halpern, R. S. Hill, A. Kogut, S. S. Meyer, G. S. Tucker, J. L. Weiland, E. Wollack, and E. L. Wright. Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe Observations: Cosmological Interpretation. , 180(2):330–376, February 2009.
- [90] L. Amendola and S. Tsujikawa. *Dark energy: theory and observations*.
- [91] G. Hinshaw, D. Larson, E. Komatsu, D. N. Spergel, C. L. Bennett, J. Dunkley, M. R. Nolta, M. Halpern, R. S. Hill, N. Odegard, L. Page, K. M. Smith, J. L. Weiland, B. Gold, N. Jarosik, A. Kogut, M. Limon, S. S.

- Meyer, G. S. Tucker, E. Wollack, and E. L. Wright. Nine-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results. , 208(2):19, October 2013.
- [92] Raul Jimenez and Abraham Loeb. Constraining Cosmological Parameters Based on Relative Galaxy Ages. , 573(1):37–42, July 2002.
- [93] Carl Edward Rasmussen and Christopher K. I. Williams. *Gaussian Processes for Machine Learning*.
- [94] Diederik P. Kingma and Jimmy Ba. Adam: A method for stochastic optimization. *arXiv:1412.6980*, 2014.
- [95] E. Di Valentino, A. Melchiorri, and J. Silk. Planck evidence for a closed universe and a possible crisis for cosmology. *Nature Astron.*, 4:196–203, 2019.
- [96] W. Handley. Curvature tension: evidence for a closed universe. *Phys. Rev. D*, 103, 2021.
- [97] J. Magana, M. H. Amante, M. A. Garcia-Aspeitia, and V. Motta. The cardassian expansion revisited: constraints from updated hubble parameter measurements and type ia supernova data. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 476:1036–1049, 2018.
- [98] M. Moresco, L. Amati, L. Amendola, S. Birrer, J. P. Blakeslee, M. Cantiello, A. Cimatti, J. Darling, M. Della Valle, and M. Fishbach et al. *Unveiling the Universe with Emerging Cosmological Probes*.
- [99] G. C. Carvalho, A. Bernui, M. Benetti, J. C. Carvalho, E. de Carvalho, and J. S. Alcaniz. The transverse baryonic acoustic scale from the SDSS DR11 galaxies. *Astroparticle Physics*, 119:102432, May 2020.
- [100] B. A. Bassett and M. Kunz. Cosmic distance-duality as a probe of exotic physics and acceleration. *Phys. Rev. D*, 69, 2004.
- [101] R. F. L. Holanda, J. A. S. Lima, and M. B. Ribeiro. Testing the distance-duality relation with galaxy clusters and type ia supernovae. *Astrophys. J. Lett.*, 722:L233–L237, 2010.
- [102] R. F. L. Holanda, R. S. Gonçalves, and J. S. Alcaniz. A test for cosmic distance duality. *JCAP*, 06, 2012.
- [103] S. Santos da Costa, V. C. Busti, and R. F. L. Holanda. Two new tests to the distance duality relation with galaxy clusters. *JCAP*, 10, 2015.

- [104] R. F. L. Holanda, V. C. Busti, and J. S. Alcaniz. Probing the cosmic distance duality with strong gravitational lensing and supernovae ia data. *JCAP*, 02, 2016.
- [105] R. S. Gonçalves, S. Landau, J. S. Alcaniz, and R. F. L. Holanda. Variation in the fine-structure constant and the distance-duality relation. *JCAP*, 06, 2020.
- [106] P. Mukherjee and A. Mukherjee. Assessment of the cosmic distance duality relation using Gaussian process. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 504:3938–3946, 2021.
- [107] K. Bora and S. Desai. A test of cosmic distance duality relation using spt-sz galaxy clusters, type ia supernovae, and cosmic chronometers. *JCAP*, 06, 2021.
- [108] R. F. L. Holanda, F. S. Lima, A. Rana, and D. Jain. Strong lensing systems and galaxy cluster observations as probe to the cosmic distance duality relation. *Eur. Phys. J. C*, 82, 2022.
- [109] M. Seikel, C. Clarkson, and M. Smith. Reconstruction of dark energy and expansion dynamics using Gaussian processes. *JCAP*, 1206, 2012.
- [110] P. J. E. Peebles. *Improving Physical Cosmology: An Empiricist's Assessment*.