



Observatório
Nacional

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO
OBSERVATÓRIO NACIONAL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ASTRONOMIA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

MODELO SEMI-ANALÍTICO PARA O ESTUDO DE SATÉLITES TROIANOS

XIMENA BEATRIZ SAAD OLIVERA

RIO DE JANEIRO, JULHO DE 2015

Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação
Observatório Nacional
Programa de Pós-Graduação em Astronomia

Dissertação de Mestrado

Modelo semi-analítico para o estudo de satélites troianos

Ximena Beatriz Saad Olivera

Dissertação de Mestrado apresentada
ao Observatório Nacional do Rio de Ja-
neiro como parte dos requisitos para a
obtenção do grau de MESTRE em As-
tronomia.

Orientador: Dr. Fernando Virgílio Roig

Rio de Janeiro, Julho de 2015

Para Federico

“No debo buscar mi dignidad en el espacio, sino en el gobierno de mi pensamiento.
No tendré más aunque posea mundos.
Si fuera por el espacio, el universo me rodearía y me tragaría como a un átomo;
pero por el pensamiento yo abrazo al mundo.”
-Blaise Pascal-

Agradecimentos

Agradeço

- Em primeiro lugar ao meu orientador o Dr. Fernando Roig, que com paciência e dedicação não só me orientou no projeto, mas também me ensinou em cada passo.
- À minha mãe, por continuar ao meu lado, ainda que distante, por sempre aconselhar-me positivamente, pelo seu apoio e amor incondicional.
- Às minhas irmãs, Lourdes e Lucrecia, pelo carinho e incentivo diário.
- Ao Dr. Cristian Giuppone por me guiar no caminho da ciência e ter me introduzido neste desafio.
- Aos meus amigos e colegas de pós-graduação. Principalmente aos meus irmãos mais velhos do Brasil, Alvaro Alvarez Candal, Yolanda Jiménez Teja e Sandro de Souza, pelas longas conversas e inúmeros conselhos. Aos meus irmãos latinoamericanos mais novos, Javier González Sánchez e César Condori (“mis coquis”) por manter-se sempre perto e escutar minhas loucas ideias. À Denise Barbosa de Castro e Rodrigo de Sousa Gonçalves, por compartilhar tantos momentos felizes e tristes e me ensinar tanto nestes últimos tempos.
- À minha queridíssima Emília, por ser o abraço aconchegante que recebo ao chegar no trabalho todos os dias.
- À Cintia Martinez, Elizabeth Artur de la Villarmois e Matias Garcia, meus irmãos argentinos que compartilham o mesmo sonho que eu, continuar crescendo e fazendo o que amamos além dos obstáculos.

- Aos meus amigos da graduação, aqueles que ficaram um pouco mais distantes, mas que ainda continuam ocupando um lugar dentro do meu coração, Inca Cabral, Ma. Valeria Sieyra, Javier Marti, Daniela Sanchez, Adriana Rodriguez, Victoria Santucho, David Algorry, Fernando Abalos, Federico Carrasco. Sem o apoio de vocês eu não estaria aqui.
- Aos professores do programa de pós-graduação pelos ensinamentos e orientações.
- Ao Observatório Nacional;
- À Capes pelo financiamento;

Modelo semi-analítico para o estudo de satélites troianos.

Ximena Beatriz Saad Olivera

Submetida ao Observatório Nacional do Rio de Janeiro em 30 de Julho de 2015, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Astronomia.

Resumo

Neste trabalho desenvolvemos um modelo semi-analítico para analisar a evolução dinâmica de um corpo massivo em movimento co-orbital com a Lua. Assumimos que este objeto se formou conjuntamente com a Lua e analisamos a sua posterior migração, afastando-se da Terra devido ao efeito de maré. O objetivo é estudar a estabilidade do co-orbital sob a ação da perturbação solar, que é relevante para o aparecimento da evecção. Para tal, resolvemos as equações de movimento do modelo utilizando um mapa simplético. Os resultados, no caso planar, mostram que a dinâmica co-orbital é dominante não apenas no início da evolução do sistema, quando os satélites ficam perto da Terra, mas também quando os satélites migram afastando-se do planeta. A zona de libração das órbitas girino se encolhe a medida que o sistema migra, fazendo com que a perturbação do Sol não seja suficiente para desestabilizar a órbita do co-orbital. Uma análise mais detalhada é necessária para verificar se, ao atravessar a ressonância de evecção, o co-orbital mantém ou não o movimento em ressonância 1:1 com a Lua.

Palavras chaves: Sistemas dinâmicos; troianos; ressonância de evecção; efeito de maré

Semi-analytic model for the study of trojan satellites.

Ximena Beatriz Saad Olivera

Submitted to the Observatório Nacional of Rio de Janeiro on
July 30th 2015, in partial fulfillment of the requirements
for the Master's degree in Astronomy.

Abstract

In this work we develop a semi-analytical model to analyze the dynamical evolution of a massive body in coorbital motion with the Moon. We assume that this object was formed together with the Moon and analyze their subsequent migration away from the Earth due to the tidal effect. The purpose is to study the stability of the coorbital under the solar perturbation, which is important for the appearance of the evection. We solve the equations of motion using a symplectic map. The results in the planar case show that the coorbital dynamics is dominant not only in the early evolution of the system, when the satellites are close to the Earth, but also while they migrate away from the planet. The area of the tadpole orbits shrinks as the system migrates, and the solar perturbation is not enough to destabilize the orbit of the coorbital. A more detailed analysis is required to verify if the coorbital stays in the 1:1 resonance with the Moon when the system crosses the evection resonance.

Keywords: Dynamical systems; trojans; evection resonance; tidal effect.

Sumário

| | |
|---|-----------|
| Agradecimentos | v |
| Resumo | vii |
| Abstract | ix |
| 1. Introdução | 9 |
| 2. Conceitos básicos | 11 |
| 2.1. Características atuais do sistema Terra-Lua | 11 |
| 2.2. Origem e evolução do sistema Terra-Lua | 12 |
| 2.3. O problema de três corpos | 16 |
| 2.3.1. Soluções de Euler | 18 |
| 2.3.2. Soluções de Lagrange | 19 |
| 2.3.3. Soluções do problema restrito | 21 |
| 2.3.4. Outras soluções | 22 |
| 2.4. Formalismo hamiltoniano | 23 |
| 2.4.1. Variáveis de Delaunay e Poincaré | 27 |
| 2.4.1.1. Variáveis de Delaunay | 28 |
| 2.4.1.2. Variáveis de Poincaré | 29 |
| 2.4.1.3. Variáveis modificadas de Delaunay e Poincaré | 29 |
| 2.4.1.4. Variáveis regulares de Delaunay e Poincaré | 30 |
| 3. Estrutura do problema | 33 |
| 3.1. O modelo básico para a dinâmica co-orbital | 33 |
| 3.1.1. O problema médio | 37 |
| 3.1.2. Regularização das variáveis | 39 |

| | |
|---|-----------|
| 3.2. A perturbação solar | 43 |
| 3.2.1. Função perturbadora média em variáveis de Poincaré | 49 |
| 3.2.2. Função perturbadora média em variáveis regulares de Poincaré | 51 |
| 3.3. Efeito de maré | 51 |
| 3.3.1. Incorporação do efeito de maré no modelo co-orbital | 58 |
| 3.3.1.1. Maré em variáveis regulares de Poincaré | 59 |
| 4. Mapeamentos simpléticos | 61 |
| 4.1. Conceitos básicos sobre fluxos e mapas | 61 |
| 4.2. Integradores numéricos como mapas | 62 |
| 4.3. Mapas simpléticos | 63 |
| 4.3.1. Mapa simplético de primeira ordem | 63 |
| 4.3.2. Mapa simplético de segunda ordem | 65 |
| 5. Resultados | 69 |
| 5.1. Hamiltoniano co-orbital | 69 |
| 5.2. Hamiltoniano co-orbital mais perturbação do Sol. | 70 |
| 5.3. Efeito da maré sobre a dinâmica co-orbital | 75 |
| 6. Conclusões | 79 |
| A. Apêndice | 81 |

Lista de Figuras

| | |
|---|----|
| 2.1. Exemplos da evolução de acreção do disco de debris da Terra considerando diferentes configurações iniciais de massa e estrutura do disco. Em cada imagem é mostrada a evolução do disco no tempo em unidades do período de revolução: $t = 0$, 50 (~ 15 dias), 1000 (~ 1 ano) e 1500 ($\sim 1,2$ ano). No eixo horizontal se mostra a distância à Terra em unidades do raio de Roche a_R , e no eixo vertical a altura do disco com respeito ao plano equatorial da Terra. A linha tracejada corresponde à superfície da Terra. Esquerda: Após 1 ano se forma uma lua de massa $m = 0,4 M_L$ em $1,2-1,5 a_R$ e outras luas de massas menores ($0,025 M_L$), todas com valores de excentricidade e inclinação baixos. Direita: Neste caso se formam duas luas de massas $0,39$ e $0,63 M_L$ a distâncias de $0,93$ e $1,98 a_R$, respectivamente. Figura reproduzida de Ida et al. 1997 | 14 |
| 2.2. Sistema de coordenadas baricêntrico para o problema de três corpos. | 17 |
| 2.3. Representação do movimento dos três corpos na configuração de Euler no caso $m_0 : m_1 : m_2 = 1 : 2 : 3$ considerando distintas condições iniciais. Esquerda: As órbitas são circulares. Direita: As órbitas são elipses. | 20 |
| 2.4. Representação do movimento de três corpos de massas iguais. As configurações são resultado de distintos valores nas condições iniciais. Esquerda: Os corpos se mantêm sobre a mesma órbita. Direita: Cada um tem uma órbita associada, mas eles se movimentam mantendo a configuração de triângulo equilátero ente eles. | 20 |

| | |
|--|----|
| 2.5. Superfície de nível para o problema de três corpos restrito planar do sistema Terra-Lua. Os pontos vermelhos correspondem aos pontos lagrangianos colineares ($y = 0$; L_1, L_2, L_3) e triangulares ($y \neq 0$; acima L_4 e embaixo L_5). Esquerda: Órbitas do tipo girino nos pontos L_4 e L_5 . Direita: Órbitas do tipo ferradura, englobando os pontos L_3, L_4 e L_5 | 21 |
| 2.6. Coreografias do P3C para o caso $m_0 = m_1 = m_2 = 1$. Movimento dos objetos em diferentes tempos ($t = 0, T, 2T$). Figura adaptada de Chenciner & Montgomery (2000) | 22 |
| 3.1. Sistema de coordenadas baricêntrico para o problema de 3 corpos Terra-Lua-troiano. | 34 |
| 3.2. Sistema de coordenadas geocêntrico para o problema de 3 corpos Terra-Lua-troiano. | 35 |
| 3.3. Coordenadas \vec{R}_j, \vec{V}_j de Jacobi nos problemas Terra-Lua-Sol e Terra-troiano-Sol. | 43 |
| 3.4. Coordenadas de Jacobi no problema do movimento da Lua ao redor Terra. | 45 |
| 3.5. Configuração esquemática das forças aplicadas sobre dois pontos na superfície da Terra. O ponto central O a uma distância r da Lua, e um ponto P sobre a superfície a uma distância d da Lua. Devido a que $d \gg R_0$ o ângulo ϱ subtendido entre as forças aplicadas sobre P e O é pequeno. | 52 |
| 3.6. Na imagem da esquerda desenhamos as forças de atração que exerce a Lua em diferentes pontos sobre a superfície da Terra (pontos A, B e C), e a força que exerceria sobre um ponto situado no centro O da Terra. A direita, são desenhadas as forças de marés nos pontos A, B e C, resultando em um elipsoide. | 53 |
| 3.7. Ângulo de fase δ no caso de $\Omega_T > n_L$. Mostram-se quatro pontos onde se indicam os vetores da força gravitacional por parte da Lua. As forças nos pontos C e D são compensadas, mas no caso dos pontos A e B se produz um torque τ , que retarda a rotação da Terra (Ω_T diminui). | 54 |

| | | |
|------|--|----|
| 5.1. | Espaço de fases do Hamiltoniano integrável \mathcal{H}_0 do sistema Terra, Lua e troiano. Na imagem superior esquerda, o caso de um troiano de massa $0,003 M_L$ a uma distância de $7 R_T$. Na imagem inferior, o caso de um troiano de massa $0.04 M_L$ a uma distância de $40 R_T$. Os pontos na cor magenta, são L_4 ($\sigma_1 = 60^\circ$) e L_5 ($\sigma_1 = 300^\circ$). A separatriz de movimento entre os regimes girino e ferradura (linha de cor amarelo) é originada em L_3 ($\sigma_1 = 180^\circ$). Na imagem superior direita, vemos duas separatrizes de movimento, uma originada a partir do ponto L_1 (azul) que separa os regimes quase-satélite e ferradura, e outra originada no ponto L_2 (laranja) que separa os regimes quase-satélite e girino. Em vermelho mostramos uma órbita quase-satélite. | 71 |
| 5.2. | Espaço de fases do Hamiltoniano co-orbital do sistema Terra, Lua e troiano. Na imagem superior, o espaço para o caso de um troiano de massa $0,04 M_L$ a uma distância de $7 R_T$, com excentricidade $e = 0,001$. Na imagem inferior, o espaço sofre alterações quando é considerada uma excentricidade grande ($e = 0,1$). Neste último caso as órbitas quase-satélite não aparecem. | 72 |
| 5.3. | Espaço de fases para o Hamiltoniano $\mathcal{H} + \mathcal{R}_S$, considerando uma excentricidade inicial grande ($e = 0.1$). Cada cor identifica órbitas com diferentes condições iniciais do ângulo σ_1 . Nas imagens acima, $a_0 = 7 R_T$. Nas imagens embaixo, $a_0 = 40 R_T$. Na coluna à esquerda, massa $0,003 M_L$, e à direita massa $0,04 M_L$ | 73 |
| 5.4. | Variação da longitude do perigeu do troiano (ϖ_2) no tempo. À esquerda, variação do ângulo para um troiano de $0,003 M_L$, em uma órbita com excentricidade baixa ($e = 0,001$) e a $7 R_T$. À direita, variação para um sistema similar, só que agora em $40 R_T$. O período de oscilação muda de $0,07$ anos para aproximadamente 1 ano. | 74 |
| 5.5. | Variação da excentricidade (e_2) no tempo. À esquerda, variação de excentricidade para um troiano de $0,003 M_L$, em uma órbita com excentricidade baixa ($e = 0,001$) e a $7 R_T$. À direita, variação para um sistema similar, só que agora em $40 R_T$ | 75 |
| 5.6. | Comportamento da órbita da Lua durante as simulações do nosso modelo. Na imagem à esquerda mostra-se como o semieixo maior aumenta. A imagem à direita mostra a oscilação da excentricidade em torno do valor inicial. Neste caso o troiano tem massa nula. | 75 |

5.7. Comportamento do semieixo maior da Lua e do troiano. Durante o tempo de simulação, os semieixos da Lua e o troiano aumentam conjuntamente preservando a ressonância co-orbital, mesmo sob os efeitos da perturbação do Sol. Na imagem à esquerda $m_2 = 0,003 M_L$. Na imagem à direita $m_2 = 0,04 M_L$ 76

5.8. Comportamento da excentricidade da órbita da Lua e do troiano para o caso $m_2 = 0,003 M_L$. Durante o tempo de simulação, as excentricidades oscilam em torno do valor inicial. Na imagem à esquerda sem considerar a perturbação do Sol. Na imagem à direita considerando a perturbação do Sol. Neste último caso a amplitude da excentricidade da Lua aumenta no tempo. 77

5.9. Comportamento do ângulo σ_1 no sistema onde o troiano tem massa $m_2 = 0,04 M_L$. O ângulo varia em torno de um valor médio, mas diminui a sua amplitude no tempo. O resultado é o mesmo no caso de não considerar a perturbação do Sol (imagem à esquerda), ou considerando-a (imagem à direita). 78

Lista de Tabelas

2.1. Principais características da Lua e sua órbita. 11

1 Introdução

Vários mecanismos já foram propostos para explicar a formação da Lua, mas hoje em dia a hipótese que prevalece é a chamada hipótese do impacto único. A ideia sugere a colisão entre a Terra, ainda em formação, e um corpo do tamanho de Marte. Após o impacto, o material ejetado foi capturado ao redor da proto-Terra formando um disco de detritos. Do aglutinamento desse material formar-se-ia a Lua (Hartmann & Davis, 1975; Cameron & Ward, 1976). Não obstante, simulações hidrodinâmicas e de N corpos revelam que é possível formar mais de um satélite a partir desse disco circunterrestre (Ida et al., 1997; Kokubo, 2000). Tanto a Lua quanto estes satélites adicionais formar-se-iam a uma distância inicial próxima da Terra, mas migrariam para fora devido a interação por efeito de maré entre a Terra e a Lua (Goldreich, 1966). Ainda, Kokubo (2000) mostra que uma quantidade desse material poderia ficar preso em uma órbita do tipo "ferradura", abrangendo três pontos lagrangianos do sistema, tendo como possibilidade a formação de uma lua menor nesta configuração.

Levando em conta a perturbação solar, Čuk & Gladman (2009) analisam a dinâmica de troianos pouco massivos ($0,003 M_L$) do sistema Terra-Lua. Os autores concluem que depois da evolução por efeito de maré em bilhões de anos, os troianos são desestabilizados devido à passagem destes pela ressonância de eveccção com o Sol. Por outro lado, Jutzi & Asphaug (2011) mostram que a colisão com a Lua de um objeto de $0.04 M_L$ poderia ser responsável pela atual dicotomia que apresenta a superfície do satélite natural da Terra (Zuber, 1994). Os autores sugerem que as características dessa colisão poderiam ser explicadas considerando um corpo em movimento co-orbital com a Lua.

O objetivo deste trabalho é analisar a evolução dinâmica de um corpo massivo em ressonância co-orbital com a Lua. A nossa proposta é estudar a estabilidade deste corpo

Introdução

sob a ação da perturbação solar e da força de maré. A primeira é relevante para o aparecimento da ressonância de eveção, e a segunda é necessária para produzir a migração da Lua e do troiano para distâncias geocêntricas maiores. Este estudo permitirá analisar as implicações que isto teria com a história colisional da Lua.

Nosso trabalho está organizado da seguinte forma: No Capítulo 2, está apresentada uma revisão das características atuais do sistema Terra-Lua, além de um estudo sobre a bibliografia referente à formação e evolução dele, focando nos estudos realizados sobre a evolução de objetos co-orbitais do sistema. Em seguida, mostraremos os conceitos básicos para o entendimento do problema físico, que envolve a interação gravitacional entre os objetos do sistema, a ser descrita sob o formalismo Hamiltoniano em variáveis adequadas.

No Capítulo 3, descreveremos a modelagem que utilizamos para analisar o comportamento dinâmico do sistema. Baseados no Hamiltoniano para o problema co-orbital médio expandido até ordem 2 nas excentricidades ([Robutel & Pousse, 2013](#)), escrevemos as equações de movimento em variáveis adequadas. O Hamiltoniano resultante pode ser dividido em uma parte integrável, que descreve a base do movimento co-orbital, e uma perturbação que o torna não integrável. Logo depois, mostraremos a forma de incluir no sistema a perturbação do Sol e o efeito de maré.

No Capítulo 4, descreveremos as ferramentas utilizadas para resolver as equações de movimento através da implementação de mapas simpléticos. Em sequência no Capítulo 5, apresentamos alguns resultados do nosso modelo. Finalmente, no Capítulo 6 apresentamos as conclusões e as perspectivas futuras que o trabalho pode vir a proporcionar.

2 Conceitos básicos

Neste capítulo, apresentamos as características atuais do sistema Terra-Lua e os modelos de formação e evolução da Lua, com a possibilidade da existência de co-orbitais dentro deste sistema. Em seguida, apresentaremos alguns conceitos que são necessários como base para o presente estudo. Para mais detalhes, referimos o leitor à bibliografia citada.

2.1. Características atuais do sistema Terra-Lua

Atualmente a Terra tem associado apenas um satélite, a Lua, cujos parâmetros orbitais e físicos são apresentados na Tabela 2.1 (Lang, 2011).

Devido a efeitos de maré, a Lua encontra-se em ressonância spin-órbita (ressonância 1:1) e também está se afastando da Terra a uma velocidade de $\sim 3,8$ cm por ano (Chapront et al., 2002). Internamente, o núcleo da Lua é similar àquele da Terra com ferro e níquel metálico, no manto há rochas de silicatos, mas com importante quantidade de ferro e magnésio, e na crosta há minerais contendo moléculas de silicone e oxigênio, mas

Table 2.1.: Principais características da Lua e sua órbita.

| Parâmetro | valor |
|--|--------|
| M_L [M_T] | 0,0123 |
| ρ [g cm^{-3}] | 3,3464 |
| P_{rot} [d] | 27,32 |
| P_{orb} [d] | 27,32 |
| a [R_T] | 60,35 |
| e | 0,055 |
| i [$^\circ$] (ref. eclíptica) | 5,145 |
| i [$^\circ$] (ref. equador da Terra) | 18,28 |
| i [$^\circ$] (ref. equador da Lua) | 6,68 |

também encontramos rochas de silicatos. A superfície da Lua apresenta dois tipos de relevos: terras altas ou montanhosas onde o terreno é rico em feldspatos, e terras baixas, também chamadas de “mares”, constituídas por basaltos. As primeiras encontram-se no lado do satélite que não é visível da Terra, que também apresenta uma grande quantidade de crateras, enquanto que as segundas são comuns no lado visível da Lua (Zuber, 1994). A presença de basaltos na Lua sugere a ideia de atividade vulcânica no passado. Além disso, as missões Apolo revelaram a presença nas rochas lunares de um componente não usual chamado de *KREEP* devido aos elementos presentes no componente: potássio (K), elementos raros da Terra (REE) e fósforo (P). A idade deste composto é estimada em 4,36 Ga, o que leva a pensar que o mesmo foi o resultado da cristalização final do magma presente na Lua (Lissauer & de Pater, 2013). Diversos trabalhos têm analisado e discutido a dicotomia, tanto mineralógica como orográfica, entre as faces visível e oculta da Lua. Particularmente relevante para o presente trabalho, é o estudo de Jutzi & Asphaug (2011) que propõem a existência de um objeto com características mineralógicas similares às da Lua, porém de massa muito menor, que colide e se funde com ela. Através de simulações hidrodinâmicas, estes autores mostram que o resultado desta colisão poderia explicar as diferenças de relevo na superfície lunar. Entretanto, os autores não discutem qual seria a origem deste objeto que atinge a Lua. Levando em consideração que, conforme a proposta de Jutzi & Asphaug (2011), a colisão deve ocorrer a baixa velocidade, uma possível alternativa seria que este corpo fosse um troiano do sistema Terra-Lua, ou em outras palavras um satélite co-orbital da Lua. Nosso objetivo é entender a dinâmica de tal sistema e analisar a possibilidade de ter havido ou não uma colisão entre os satélites. Devemos destacar, entretanto, que nenhum objeto foi descoberto até o momento nos pontos lagrangianos L_4 ou L_5 da Lua. Alguns estudos mostram que objetos localizados em tais configurações, poderiam sobreviver por bilhões de anos quando se leva em consideração apenas a perturbação do Sol. Porém, quando se incluem outras perturbações, como aquelas devidas aos outros planetas, as órbitas se desestabilizam e os objetos são ejetados do sistema (Lissauer & Chambers, 2008).

2.2. Origem e evolução do sistema Terra-Lua

A história do sistema Terra-Lua tem grande importância no âmbito das ciências planetárias por se tratar do laboratório mais próximo de nós para estudar os possíveis mecanismos de formação de satélites ao redor de planetas. Desde 1880, foram várias as teorias propos-

tas para explicar a formação do nosso satélite. Os cenários clássicos incluem co-acreção, fissão ou captura (Stevenson, 1987). A partir das missões Apolo, a análise das rochas lunares trazidas à Terra revelaram a similaridade na composição dos isótopos de oxigênio entre a Terra e a Lua (Clayton & Mayeda, 1975), sugerindo que ambas teriam-se formado a partir da acreção de material original semelhante. Isto levou ao desenvolvimento da teoria conhecida como a “Hipótese do Impacto Único” ou *Single Impact Hypothesis* (Hartmann & Davis, 1975; Cameron & Ward, 1976), na qual se assume que nos estágios finais da formação da Terra (aproximadamente 50 Ma após o início da sua formação há $\sim 4,5$ Ga, Halliday, 2000), a mesma sofreu uma colisão por um objeto do tamanho de Marte, batizado de “Theia”. Após o impacto, o material ejetado pela colisão ficou em um disco estendido ou “disco de detritos” (*debris disk*) ao redor da Terra, a partir do qual o material acretou-se formando à Lua. As características desta colisão, considerando uma dada composição química e uma dada dinâmica para Theia, poderiam produzir um disco pobre em ferro e com uma massa adequada para explicar o esgotamento de ferro e elementos voláteis na Lua, bem como o alto valor do momento angular do sistema Terra-Lua (Stevenson, 1987). Utilizando modelos hidrodinâmicos para simular a colisão entre a Terra e Theia, Cameron & Benz (1991) observam que o material resultante da colisão que fica dentro de $\sim 2,9 R_T$ do disco de detritos é re-acretado pela Terra ou espalhado para fora. Este raio mínimo está vinculado ao limite de Roche no qual as forças de maré produzidas pela Terra inibem a acreção de material com densidade lunar. O limite externo proposto para o disco de detritos é de $\sim 20 R_T$, valor além do qual a ligação gravitacional com a Terra é fraca.

O processo de acreção da Lua foi estudado por Canup & Esposito (1996) utilizando um modelo hidrodinâmico do disco de acreção. Eles mostram que é mais comum formar um sistema de luas múltiplas próximo ao limite de Roche da Terra do que um só satélite de massa similar à da Lua. De fato, para gerar um objeto do tamanho da Lua, o modelo requer que Theia tenha um tamanho duas vezes maior que o de Marte e que a colisão aconteça com pelo menos duas vezes o momento angular atual do sistema Terra-Lua. Utilizando simulações de N corpos, Ida et al. (1997) analisaram o processo de acreção de milhares de partículas distribuídas em um disco tridimensional. Eles colocaram diferentes condições iniciais para o disco, considerando diferentes massas das partículas e diferentes perfis radiais de densidade, e obtiveram como resultado a formação de um satélite com massa comparável à da Lua e de outros satélites com massa menor. Na Figura 2.1 apresentamos exemplos das simulações destes autores.

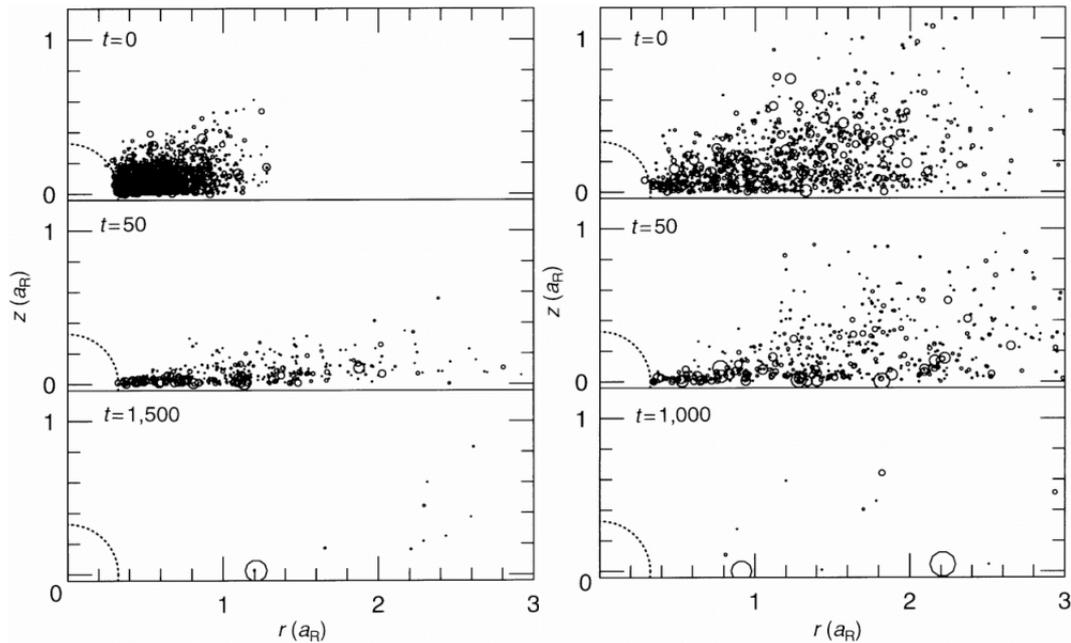


Figura 2.1.: Exemplos da evolução de acreção do disco de debris da Terra considerando diferentes configurações iniciais de massa e estrutura do disco. Em cada imagem é mostrada a evolução do disco no tempo em unidades do período de revolução: $t = 0$, 50 (~ 15 dias), 1000 (~ 1 ano) e 1500 ($\sim 1,2$ ano). No eixo horizontal se mostra a distância à Terra em unidades do raio de Roche a_R , e no eixo vertical a altura do disco com respeito ao plano equatorial da Terra. A linha tracejada corresponde à superfície da Terra. Esquerda: Após 1 ano se forma uma lua de massa $m = 0,4 M_L$ em $1,2-1,5 a_R$ e outras luas de massas menores ($0,025 M_L$), todas com valores de excentricidade e inclinação baixos. Direita: Neste caso se formam duas luas de massas $0,39$ e $0,63 M_L$ a distâncias de $0,93$ e $1,98 a_R$, respectivamente. Figura reproduzida de [Ida et al. 1997](#).

Nestes primeiros estudos, entretanto, não foi considerada a evolução posterior dos objetos formados. Mais tarde, [Canup \(1999\)](#) encontrou que devido aos efeitos das forças de maré da Terra, os sistemas de luas múltiplas são instáveis no tempo. Os efeitos da maré desempenham um papel importante no aumento da excentricidade dos satélites, tornando mais frequentes os encontros próximos e eventuais colisões entre os mesmos. Porém, as técnicas de integração numérica utilizadas não conseguiram detalhar corretamente a dinâmica desses encontros próximos. Posteriormente, [Kokubo \(2000\)](#) mostrou que a formação de uma Lua como a atual é um resultado comum, mas que também é possível a formação de um segundo satélite de massa $> 0,2 M_L$ ocupando uma órbita ferradura em relação à Lua. Em outro contexto, [Fleming & Hamilton \(2000\)](#) simularam a dinâmica de troianos de Júpiter considerando o efeito de arrasto gasoso no planeta, e mostraram que objetos em órbitas ferradura podem ser levados a órbitas girino e que eles conseguem acompanhar o planeta enquanto ela migra para dentro devido ao arrasto. Todos estes estudos suportam a possibilidade de ter se formado mais de um satélite em volta da Terra.

Paralelamente, outros pesquisadores estudaram a evolução da Lua após a sua formação considerando a perturbação do Sol. Na função perturbadora desenvolvida por [Brower & Clemence \(1961\)](#), um dos termos mais importantes acontece quando a frequência g da longitude do perigeu da órbita da Lua é igual ao movimento médio do Sol n_S (período de 1 ano). Esta perturbação, chamada de “evecção”, está associada ao harmônico $2g - 2n_S$ que é de ordem 2 na excentricidade da Lua e produz as máximas variações periódicas sobre o perigeu da sua órbita. [Kaula & Yoder \(1976\)](#) foram os primeiros a observar que o sistema Terra-Lua deveria ter passado pela ressonância de evecção no passado. Posteriormente [Touma & Wisdom \(1998\)](#) desenvolveram um modelo adicionando o efeito de maré e a perturbação devida ao achatamento da Terra e mostraram que situando a Lua inicialmente no plano do equador terrestre, perto da Terra e com excentricidade baixa, a mesma é capturada na evecção em $4,6 R_T$. Esta captura é temporária mas faz com que a excentricidade da Lua aumente uma ordem de grandeza. Estudos desenvolvidos por [Ida et al. \(1997\)](#) indicam que a evecção teria realizado um efeito semelhante na dinâmica de outros satélites menores.

Visando explicar a origem do “bombardeamento pesado tardio” (*Late Heavy Bombardment* ou *LHB*), [Ćuk & Gladman \(2009\)](#) estudaram a evolução dinâmica de troianos da Lua, sem massa e com massas pequenas de $\sim 0,003-0,005 M_L$. Os autores colocam os troianos inicialmente próximos da Terra, em $5 R_T$, com excentricidades baixas e inclinações de $\sim 9,5^\circ$ em relação à eclíptica, e utilizam um integrador simplético para propagar

numericamente as equações de movimento que incluem, além da interação gravitacional de três corpos, a perturbação do Sol, a força de maré gerada pela Lua sobre a Terra e o efeito de achatamento sobre a Terra. A força de maré é amplificada artificialmente de forma a acelerar a migração radial da Lua e permitir que a mesma atinja a sua órbita atual em um tempo de CPU razoável. Em todos os casos, os troianos apresentam variações significativas da excentricidade ao atingir as distâncias geocêntricas onde ocorrem os diferentes harmônicos da evecção, isto é $3g = n_S$, $2g = n_S$, $g = n_S$. Os troianos sem massa são ejetados do sistema logo após a passagem pela própria evecção, localizada em $\sim 38 R_T$. Já os troianos massivos são ejetados antes, em $\sim 33 R_T$. Baseado no trabalho de [Hertz \(1943\)](#), [Čuk & Gladman \(2009\)](#) explicam que a diferença na localização da evecção para os troianos, comparada à localização da evecção para a Lua reportada no trabalho de [Touma & Wisdom \(1998\)](#), é devida a forte perturbação da Lua sobre os troianos, que apresentam uma rápida precessão da longitude do perigeu a distâncias geocêntricas pequenas.

Para finalizar, cabe salientar que a resenha apresentada acima não pretende ser exaustiva, mas apenas destaca alguns resultados que são relevantes para o presente estudo.

2.3. O problema de três corpos

Um conceito básico para o entendimento do estudo que pretendemos abordar é o denominado problema dos três corpos ou P3C. Dados três corpos de massas m_0, m_1, m_2 interagindo mutuamente de acordo com a lei da gravitação de Newton, o problema consiste em obter uma expressão analítica para a posição \vec{r} e velocidade \vec{v} de cada corpo num instante t arbitrário, a partir das suas posições \vec{r}_0 e velocidades \vec{v}_0 conhecidas num instante inicial t_0 . A rigor este problema não possui uma solução geral, ou seja, válida para quaisquer valores de $t, t_0, \vec{r}_0, \vec{v}_0$, devido ao fato de que não existem suficientes integrais de movimento além das integrais clássicas: o centro de massas, o momento linear, o momento angular e a energia. Entretanto, sob suposições especiais em relação ao tipo de movimento e de interação, algumas soluções analíticas específicas podem ser encontradas para o problema de três corpos, com a possibilidade em certos casos de se generalizar estas soluções para o caso de N corpos. O ponto chave para a existência destas soluções é a ausência de colisões entre os corpos, o que possibilita que as soluções sejam expressas em termos de séries temporais convergentes.

Na sequência, apresentaremos quatro das soluções particulares que podem ser computa-

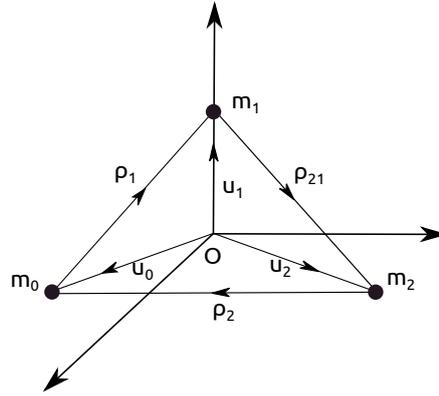


Figura 2.2.: Sistema de coordenadas baricêntrico para o problema de três corpos.

das analiticamente no problema de três corpos. Ao leitor que prefere um desenvolvimento mais aprofundado indicamos ler [Pollard \(1966, cap. 2\)](#), [Siegel & Moser \(1971, cap. 1\)](#), e [Murray & Dermott \(1999, cap. 2\)](#). Consideremos um sistema isolado formado por três massas m_0, m_1, m_2 cuja posição no referencial centrado no baricentro do sistema é dada pelos vectores $\vec{u}_0, \vec{u}_1, \vec{u}_2$ (Figura 2.2).

A equação de movimento para cada corpo é:

$$\ddot{\vec{u}}_i = -G \sum_{j \neq i} m_j \frac{\vec{u}_i - \vec{u}_j}{\Delta_{ij}^3}. \quad (2.1)$$

onde $\Delta_{ij} = |\vec{u}_i - \vec{u}_j|$ e G é a constante de gravitação. Este sistema possui 9 equações diferenciais de segunda ordem e para resolvê-lo seriam necessárias pelo menos 17 integrais de movimento. Como existem apenas as 10 integrais clássicas já mencionadas, uma tentativa para resolver o problema consiste em aplicar restrições sobre o movimento dos corpos, por exemplo, estudar o movimento relativo dos corpos m_1 e m_2 em relação a m_0 ou restringir o movimento de m_1, m_2 a um mesmo plano. Introduzimos as variáveis:

$$\begin{aligned} \vec{\rho}_1 &= \vec{u}_1 - \vec{u}_0 \\ \vec{\rho}_2 &= \vec{u}_0 - \vec{u}_2 \\ \vec{\rho}_{21} &= \vec{u}_2 - \vec{u}_1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

que satisfazem a condição $\vec{\rho}_1 + \vec{\rho}_2 + \vec{\rho}_{21} = 0$. Podemos então escrever:

$$\begin{aligned}\vec{u}_0 &= \frac{m_2\vec{\rho}_2 - m_1\vec{\rho}_1}{M} \\ \vec{u}_1 &= \frac{m_0\vec{\rho}_1 - m_2\vec{\rho}_{21}}{M} \\ \vec{u}_2 &= \frac{m_1\vec{\rho}_{21} - m_0\vec{\rho}_2}{M}\end{aligned}\tag{2.3}$$

onde $M = m_0 + m_1 + m_2$, e assim as Equações (2.1) adotam a forma:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{\rho}}_1 &= -GM\frac{\vec{\rho}_1}{|\vec{\rho}_1|^3} + Gm_2\vec{F}_{\text{tot}} \\ \ddot{\vec{\rho}}_2 &= -GM\frac{\vec{\rho}_2}{|\vec{\rho}_2|^3} + Gm_1\vec{F}_{\text{tot}} \\ \ddot{\vec{\rho}}_{21} &= -GM\frac{\vec{\rho}_{21}}{|\vec{\rho}_{21}|^3} + Gm_0\vec{F}_{\text{tot}}\end{aligned}\tag{2.4}$$

sendo

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \frac{\vec{\rho}_1}{|\vec{\rho}_1|^3} + \frac{\vec{\rho}_2}{|\vec{\rho}_2|^3} + \frac{\vec{\rho}_{21}}{|\vec{\rho}_{21}|^3}\tag{2.5}$$

Como estamos analisando o caso planar, as Equações (2.4) constituem um sistema de 6 equações diferenciais de segunda ordem.

2.3.1. Soluções de Euler

A ideia de Euler foi procurar soluções das Equações (2.4) para as quais os corpos se mantivessem sempre sobre uma mesma linha (soluções colineares), ou seja, soluções da forma:

$$\vec{\rho}_1 = \lambda(t)\vec{\rho}_{21}, \quad \vec{\rho}_2 = -(1 + \lambda(t))\vec{\rho}_{21}\tag{2.6}$$

onde $\lambda(t)$ é uma função contínua positiva. Derivando as Equações (2.6) duas vezes e substituindo nas Equações (2.4), se obtém a seguinte igualdade:

$$\ddot{\lambda}\vec{\rho}_{21} + 2\dot{\lambda}\dot{\vec{\rho}}_{21} = k(t)\frac{\vec{\rho}_{21}}{|\vec{\rho}_{21}|^3},\tag{2.7}$$

onde $k(t)$ é uma função de $\lambda(t)$ e das constantes G, m_0, m_1, m_2 . Esta igualdade ocorre se:

$$\dot{\vec{\rho}}_{21} = c(t)\vec{\rho}_{21}\tag{2.8}$$

sendo $c(t)$ uma função do tempo, ou se $\dot{\lambda} = 0$.

Se a Equação (2.8) se verifica, temos que:

$$\vec{\rho}_{21}(t) = a(t) \vec{\rho}_{21}(0)$$

onde $a(t)$ é uma função real positiva, e portanto:

$$\vec{\rho}_1 = \lambda(t) a(t) \vec{\rho}_{21}(0), \quad \vec{\rho}_2 = -(1 + \lambda(t)) a(t) \vec{\rho}_{21}(0) \quad (2.9)$$

Substituindo na Equação (2.3) para recuperar a posição baricêntrica $\vec{u}_i(t)$, conclui-se que os três corpos se movem sempre sobre uma mesma linha.

Por outro lado, se $\dot{\lambda} = 0$ se verifica, temos que λ é uma constante, em particular um número real positivo. Substituindo as Equações (2.6) na terceira das Equações (2.4), se obtém:

$$\ddot{\vec{\rho}}_{21} = -GM \frac{m_0 + m_1(1 + \lambda)^2}{(1 + \lambda)^2 [m_1 + m_0(1 + \lambda)]} \frac{\vec{\rho}_{21}}{|\vec{\rho}_{21}|^3}. \quad (2.10)$$

que é a equação diferencial do problema kepleriano ou problema de potencial central, cuja solução analítica $\vec{\rho}_{21}(t)$ é conhecida e portanto:

$$\vec{\rho}_1(t) = \lambda \vec{\rho}_{21}(t), \quad \vec{\rho}_2(t) = -(1 + \lambda) \vec{\rho}_{21}(t) \quad (2.11)$$

Derivando as Equações (2.11) duas vezes e substituindo em (2.4), se obtém que λ é a raiz positiva do polinômio:

$$p(\lambda) = (m_2 + m_1)\lambda^5 + (3m_2 + 2m_1)\lambda^4 + (3m_2 + m_1)\lambda^3 - (3m_0 + m_1)\lambda^2 - (3m_0 + 2m_1)\lambda - (m_0 + m_1) = 0$$

cuja existência e unicidade é verificada pela regra de Descartes. Estas soluções com $\lambda = \text{cte.}$ constituem as soluções clássicas de Euler. Na Figura 2.3 são apresentados alguns exemplos das mesmas.

2.3.2. Soluções de Lagrange

A ideia de Lagrange foi procurar soluções das Equações (2.4) onde $\vec{F}_{\text{tot}} = 0$. Em particular, isto se cumpre quando $\vec{\rho}_1, \vec{\rho}_2$ e $\vec{\rho}_{21}$ são colineares, o que leva às soluções encontradas por Euler, ou quando

$$\vec{\rho}_1 = \vec{\rho}_2 = \vec{\rho}_{21}. \quad (2.12)$$

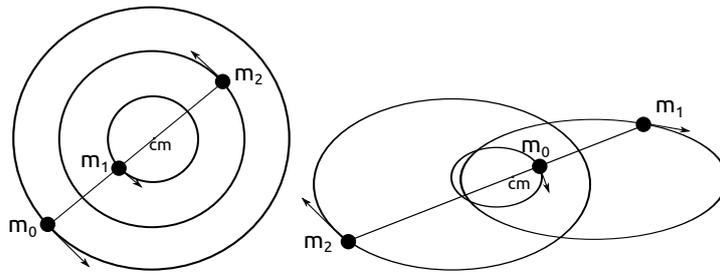


Figura 2.3.: Representação do movimento dos três corpos na configuração de Euler no caso $m_0 : m_1 : m_2 = 1 : 2 : 3$ considerando distintas condições iniciais. Esquerda: As órbitas são circulares. Direita: As órbitas são elipses.

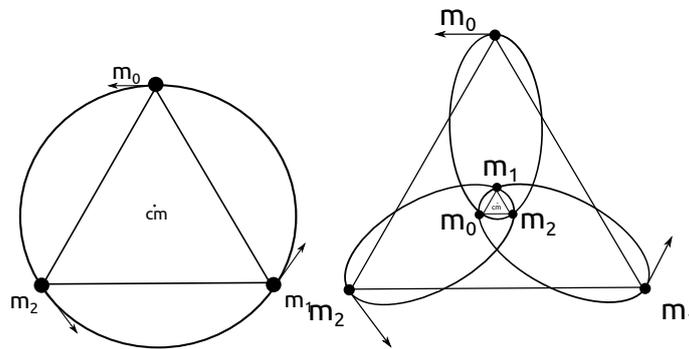


Figura 2.4.: Representação do movimento de três corpos de massas iguais. As configurações são resultado de distintos valores nas condições iniciais. Esquerda: Os corpos se mantêm sobre a mesma órbita. Direita: Cada um tem uma órbita associada, mas eles se movimentam mantendo a configuração de triângulo equilátero entre eles.

Estas últimas são as soluções de Lagrange, onde os corpos se situam sobre os vértices de um triângulo equilátero. Este triângulo varia com o tempo em tamanho e posição já que as equações de movimento dos corpos se reduzem àquelas do movimento kepleriano:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{\rho}}_1 &= -GM \frac{\vec{\rho}_1}{|\vec{\rho}_1|^3} \\ \ddot{\vec{\rho}}_2 &= -GM \frac{\vec{\rho}_2}{|\vec{\rho}_2|^3} \\ \ddot{\vec{\rho}}_{21} &= -GM \frac{\vec{\rho}_{21}}{|\vec{\rho}_{21}|^3}\end{aligned}\tag{2.13}$$

vinculadas através da Equação (2.12). Como os corpos m_1, m_2 se movem na mesma órbita em relação a m_0 esta configuração também é chamada de co-orbital. Exemplos destas soluções são apresentados na Figura 2.4.

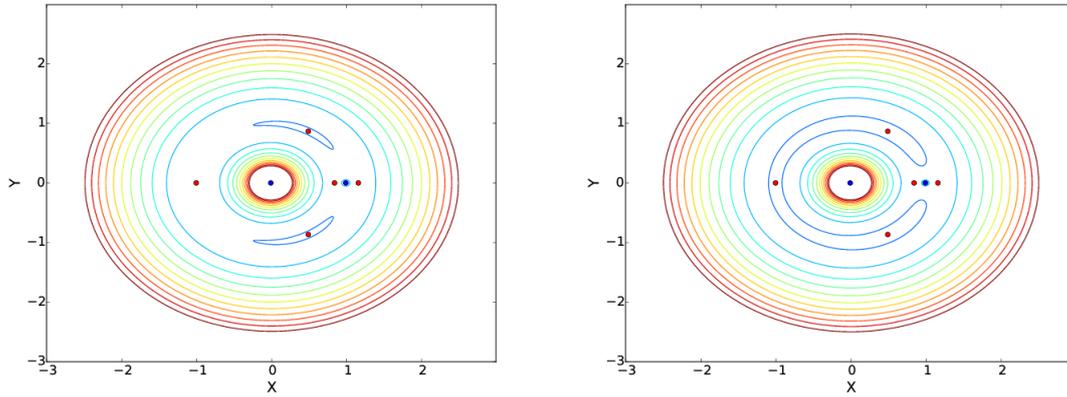


Figura 2.5.: Superfície de nível para o problema de três corpos restrito planar do sistema Terra-Lua. Os pontos vermelhos correspondem aos pontos lagrangianos colineares ($y = 0$; L_1, L_2, L_3) e triangulares ($y \neq 0$; acima L_4 e embaixo L_5). Esquerda: Órbitas do tipo girino nos pontos L_4 e L_5 . Direita: Órbitas do tipo ferradura, englobando os pontos L_3, L_4 e L_5 .

2.3.3. Soluções do problema restrito

No chamado problema de três corpos restrito ou P3CR, dois corpos massivos se movem num mesmo plano seguindo órbitas keplerianas em torno do seu centro de massas comum enquanto um terceiro corpo de massa desprezível ($m_2 = 0$) orbita o centro de massas, perturbado pelo potencial gerado pelos outros dois (Murray & Dermott, 1999). Quando o corpo m_2 se move no mesmo plano dos corpos m_0, m_1 , se obtém o problema de três corpos restrito planar ou P3CRP. Quando os corpos massivos se movem em órbitas circulares ao redor do centro de massas, se obtém o problema de três corpos restrito circular ou P3CRC. No P3CRC é possível definir os denominados pontos lagrangianos, que correspondem às soluções de Euler e Lagrange para este caso particular. Os pontos lagrangianos são as posições no espaço onde o potencial gerado pelos dois corpos massivos é tal que o corpo de massa desprezível se mantém em uma órbita estacionária. Introduzindo um sistema de coordenadas que rotaciona com a mesma velocidade angular que o movimento médio dos corpos massivos, estas órbitas estacionárias ficam representadas por pontos de equilíbrio como os mostrados na Figura 2.5.

Dos cinco pontos lagrangianos, L_1, L_2, L_3 são instáveis e L_4, L_5 são estáveis. Os pontos instáveis estão situados ao longo da mesma linha que conecta os corpos com massa. Os pontos estáveis formam o ápice de dois triângulos equiláteros fixos que têm os objetos massivos em seus outros vértices. Objetos localizados nos pontos L_4 e L_5 comumente recebem o nome de troianos devido a que as primeiras populações de pequenos corpos

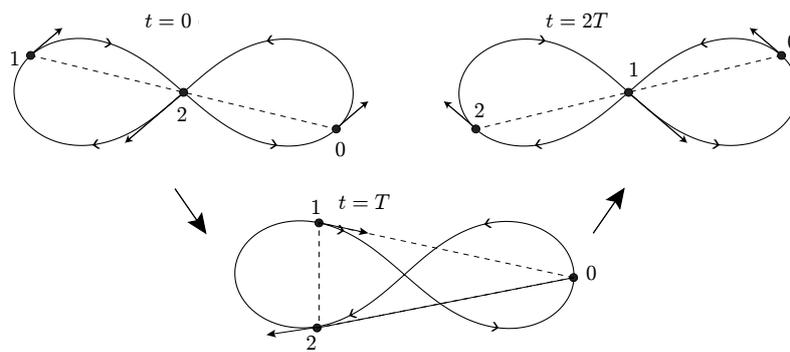


Figura 2.6.: Coreografias do P3C para o caso $m_0 = m_1 = m_2 = 1$. Movimento dos objetos em diferentes tempos ($t = 0, T, 2T$). Figura adaptada de [Chenciner & Montgomery \(2000\)](#)

com estas características descobertas no Sistema Solar se encontram nos pontos L_4, L_5 do sistema Sol-Júpiter e receberam nomes de heróis da guerra de Troia.

A estabilidade das soluções nos pontos lagrangianos está relacionada ao fato de que uma pequena perturbação aplicada sobre eles pode destruir ou não a configuração. O movimento em torno dos pontos de equilíbrio estáveis constitui um movimento de libração. Para amplitudes de libração pequenas, o mesmo pode ser representado pela sobreposição de um epicentro seguindo um movimento elíptico de longo período ao redor do ponto lagrangiano e um epiciclo seguindo um movimento circular de curto período ao redor do epicentro. À medida que aumenta a amplitude de libração, a elipse do epicentro se deforma e o seu eixo maior se estica na direção do ponto L_3 , formando as soluções conhecidas como órbitas girino. Para determinadas condições iniciais, a órbita do epicentro engloba tanto os pontos estáveis quanto o ponto L_3 , formando as soluções conhecidas como órbitas ferradura.

2.3.4. Outras soluções

Recentemente foi encontrada uma solução do P3C no caso em que $m_0 = m_1 = m_2$. Nesta solução, os corpos seguem uns aos outros a uma distância mútua fixa, movendo-se ao longo de uma órbita em forma de oito sem colisões (Figura 2.6). A solução foi sugerida pela primeira vez por [Moeckel \(1988\)](#), mas a prova rigorosa da sua existência utilizando métodos variacionais foi feita por [Chenciner & Montgomery \(2000\)](#).

Uma outra solução analítica do P3CR é encontrada no problema de Sitnikov ([Wodnar, 1993](#)). Neste caso, dois corpos de massa $m_0 = m_1$ se movem em órbitas keplerianas ao redor do seu centro de massas enquanto que o corpo de massa desprezível se movimenta ao longo de uma linha reta perpendicular ao plano de movimento de m_0, m_1 e que passa pelo

centro de massas, podendo oscilar entre valores máximo e mínimo de altura em relação ao plano.

2.4. Formalismo hamiltoniano

O formalismo hamiltoniano é uma das alternativas que podem ser aplicadas para o estudo de um sistema dinâmico. A ideia é que o estado dinâmico de um sistema é representado univocamente por uma função escalar que recebe o nome de Hamiltoniano do sistema, \mathcal{H} . Para um sistema com n graus de liberdade, temos:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_i, p_i, t), \quad 1 < i < n \quad (2.14)$$

onde (q_i, p_i) é um conjunto de $2n$ variáveis independentes chamadas de coordenadas, q_i , e momentos, p_i , e as equações de movimento do sistema podem ser escritas da seguinte forma:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \quad (2.15)$$

que constituem as denominadas equações de Hamilton.

Uma forma alternativa de escrever as equações de Hamilton é definindo o vetor $\boldsymbol{\eta} = (q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$, conhecido como vetor de estado, tal que:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{J} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \boldsymbol{\eta}}, \quad (2.16)$$

onde \mathbf{J} é a matriz antissimétrica $2n \times 2n$ definida por:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

esta matriz é chamada de simplética e satisfaz as seguintes propriedades:

- $\mathbf{J}^2 = -\mathbf{I}$
- $\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^T = -\mathbf{J}$ (ortogonalidade)
- $\det \mathbf{J} = 1$

A representação das equações de Hamilton desta forma é conhecida como forma matricial ou simplética. A dinâmica do sistema será representada no chamado de espaço de fases

expandido pelo vetor de estado $\boldsymbol{\eta}$. Assim, as posições e os momentos do sistema em um dado instante de tempo constituem um ponto no espaço de fases e a evolução do sistema, também chamada de fluxo do Hamiltoniano, constitui uma curva nesse espaço.

Suponhamos que o Hamiltoniano não depende de t , isto é, o sistema de Equações (2.15) é autônomo. Nesse caso, H é uma integral do movimento pois:

$$\dot{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \dot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = 0,$$

e se diz que o sistema é conservativo. Em particular, \mathcal{H} representa a “energia” do sistema. Consideremos agora a evolução no espaço de fases de $\boldsymbol{\eta}$:

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\eta}}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \right) \\ &= [\boldsymbol{\eta}, \mathcal{H}] \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde $[\cdot, \mathcal{H}]$ representa o colchete de Poisson em relação a \mathcal{H} . Uma solução formal desta equação consiste em desenvolver $\boldsymbol{\eta}(t)$ em série de Taylor ao redor de $t = t_0$:

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{\eta}_0 + (t - t_0) \left. \frac{d\boldsymbol{\eta}}{dt} \right|_{t_0} + \frac{1}{2!} (t - t_0)^2 \left. \frac{d^2\boldsymbol{\eta}}{dt^2} \right|_{t_0} + \frac{1}{3!} (t - t_0)^3 \left. \frac{d^3\boldsymbol{\eta}}{dt^3} \right|_{t_0} + \dots$$

Pela Equação (2.18) conseguimos identificar:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\boldsymbol{\eta}}{dt} \right|_{t_0} &= [\boldsymbol{\eta}, \mathcal{H}]_{t_0} \\ \left. \frac{d^2\boldsymbol{\eta}}{dt^2} \right|_{t_0} &= [[\boldsymbol{\eta}, \mathcal{H}], \mathcal{H}]_{t_0} \\ &\vdots \end{aligned}$$

logo, definindo $\tau = t - t_0$, temos:

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{\eta}_0 + \tau [\boldsymbol{\eta}, \mathcal{H}]_{t_0} + \frac{\tau^2}{2!} [[\boldsymbol{\eta}, \mathcal{H}], \mathcal{H}]_{t_0} + \frac{\tau^3}{3!} [[[\boldsymbol{\eta}, \mathcal{H}], \mathcal{H}], \mathcal{H}]_{t_0} + \dots \quad (2.19)$$

ou

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \exp \tau \hat{\mathcal{H}} \boldsymbol{\eta}_0 \quad (2.20)$$

onde $\hat{\mathcal{H}}$ é o operador linear colchete de Poisson $[\cdot, \mathcal{H}]$ e

$$\exp t\hat{\mathcal{H}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \hat{\mathcal{H}}^n$$

é o operador denominado de série de Lie. O fluxo do sistema fica representado, portanto, pelo operador série de Lie aplicado à condição inicial $\boldsymbol{\eta}_0$.

Uma das principais vantagens do formalismo hamiltoniano reside no fato de que é possível utilizar diferentes conjuntos de variáveis para descrever o mesmo problema sem modificar a estrutura simplética das equações. As transformações de variáveis que preservam a forma hamiltoniana das equações são conhecidas como transformações canônicas. Em outras palavras, uma transformação $(q_i, p_i) \rightarrow (Q_i, P_i)$ é canônica se $\mathcal{H} \rightarrow \tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}}(Q_i, P_i)$ satisfaz:

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial P_i}, \quad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial \tilde{\mathcal{H}}}{\partial Q_i}$$

Segundo a Equação 2.16, podemos escrever o vetor de estado do novo conjunto de variáveis como $\boldsymbol{\psi} = (Q_1, Q_2, \dots, Q_n, P_1, P_2, \dots, P_n)$ e a transformação como:

$$\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\eta}). \quad (2.21)$$

Logo, a transformação é canônica se e somente se satisfaz a condição:

$$\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^T = \mathbf{J}$$

onde $\mathbf{M} = \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial \boldsymbol{\eta}}$ é a matriz Jacobiana $2n \times 2n$ da transformação (2.21). Estas transformações tem algumas propriedades que podem ser encontradas em Morbidelli (2002).

Como já mencionamos, a possibilidade de resolver um sistema dinâmico, isto é, encontrar uma solução analítica válida para todo instante de tempo e para todas as possíveis condições iniciais, depende da existência de integrais de movimento. Também conhecidas como leis de conservação, as integrais de movimento fazem com que as variáveis do sistema não sejam todas independentes entre si, o que permite eliminar equações do sistema ou, em outras palavras, reduzir os graus de liberdade do problema. Um sistema dinâmico com n graus de liberdade se diz integrável (ou completamente integrável) quando existem $2n - 1$ integrais de movimento que permitem reduzi-lo a um sistema com uma única equação de movimento integrável por quadraturas. No caso de sistemas conservativos, são suficientes $2n - 2$ integrais de movimento, pois a integral de movimento adicional é o

próprio Hamiltoniano. Assim, um sistema conservativo de n graus de liberdade integrável pode ser reduzido a um único grau de liberdade. A eliminação de graus de liberdade através do uso de integrais de movimento não constitui a única forma de resolver um sistema, e como vimos na Seção 2.3, soluções particulares podem ser encontradas quando o sistema obedece a algum tipo de vínculo. Em alguns casos, estes vínculos são tais que permitem desacoplar equações do sistema, reduzindo assim o número de integrais necessárias para resolvê-lo, como no caso do problema restrito de três corpos. Também existem vínculos que permitem eliminar diretamente graus de liberdade do sistema, como no problema de Sitnikov.

O que interessa é que, se um sistema conservativo é integrável, sempre será possível encontrar uma transformação canônica onde o Hamiltoniano pode ser reformulado em termos de um novo conjunto de variáveis, denominadas variáveis de ângulo e ação (θ_i, I_i) , tais que o mesmo só dependa dos momentos canônicos $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}(I_i)$. Neste caso as equações de movimento de Hamilton tornam-se:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_i}, \quad \frac{dI_i}{dt} = 0$$

cuja solução é trivial:

$$\theta_i = \theta_{i0} + \nu_{i0}t, \quad I_i = I_{i0} \quad (2.22)$$

sendo $\nu_{i0} = \left. \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_i} \right|_{I_0}$ as denominadas frequências do sistema.

Outra das vantagens do formalismo hamiltoniano está relacionada com a possibilidade de, mesmo o sistema sendo não integrável, achar soluções aproximadas do problema aplicando uma transformação canônica adequada. Isto constitui a base da teoria de perturbações. Consideremos um sistema cujo Hamiltoniano pode ser expresso como a soma de uma parte integrável mais uma parte não integrável:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0(I_i) + \varepsilon \mathcal{H}_1(\theta_i, I_i) \quad (2.23)$$

com a condição $\varepsilon \ll 1$. O termo não integrável $\varepsilon \mathcal{H}_1$, neste caso, constitui uma pequena perturbação ao movimento descrito pelo termo integrável \mathcal{H}_0 . Uma solução aproximada deste problema pode ser encontrada propondo uma transformação canônica $(\theta_i, I_i) \rightarrow (\phi_i, J_i)$ tal que nestas novas variáveis o Hamiltoniano adote a forma:

$$\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}}_0(J_i) + \varepsilon^2 \tilde{\mathcal{H}}_1(\phi_i, J_i)$$

Assim, desprezando os termos de $O(\varepsilon^2)$ ficamos com um sistema integrável.

Além da metodologia puramente analítica descrita acima, existem outras duas formas de abordar o problema de resolver um sistema não integrável: métodos numéricos e métodos semi-analíticos. Os métodos numéricos permitem tratar modelos complexos de forças perturbadoras sem o trabalho de manipulação algébrica inerente aos métodos analíticos. Além disso, eles podem fornecer soluções mais precisas (ou menos aproximadas) que os métodos analíticos. Porém, a sua principal desvantagem reside no esforço computacional e na falta de universalidade das soluções (cada solução encontrada corresponde apenas a uma condição inicial específica), o que faz com que seja necessário introduzir uma abordagem estatística para o estudo das soluções. Por outro lado, os métodos semi-analíticos combinam a abrangência dos métodos analíticos com a precisão dos métodos numéricos, resolvendo uma parte do problema analiticamente e outra parte por integração numérica. Sua principal vantagem reside em que, pelo fato de utilizar como base um modelo analítico, o mesmo pode ser facilmente manipulado para analisar quais componentes do modelo possuem mais peso ou relevância na dinâmica. Neste trabalho, o método de estudo escolhido foi o semi-analítico.

2.4.1. Variáveis de Delaunay e Poincaré

Em um sistema dinâmico de N corpos em interação gravitacional mútua, um dos conjuntos de variáveis que pode ser escolhido para descrever o movimento dos corpos é (\vec{r}_i, \vec{p}_i) , sendo \vec{r}_i as posições dos corpos, e $\vec{p}_i = m_i \dot{\vec{r}}_i$ os momentos canonicamente conjugados ($i = 0, 1, \dots, N - 1$) proporcionais às respectivas velocidades. Em particular, em um problema de dois corpos ($N = 2$) de massas m_0, m_1 , é possível escrever o Hamiltoniano do sistema em função destas variáveis como:

$$\mathcal{H}(\vec{r}_1, \vec{p}_1) = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} - \frac{G(m_0 + m_1)}{|\vec{r}_1|} \quad (2.24)$$

A solução $\vec{r}_1(t)$ deste sistema fornece a trajetória de m_1 relativa a m_0 , e a trajetória deste último é obtida através da conservação do centro de massas: $\vec{r}_0(t) = -\frac{m_1}{m_0} \vec{r}_1(t)$.

As soluções da Equação (2.24) podem ser vinculadas univocamente com um conjunto de parâmetros denominados de elementos orbitais, que descrevem as propriedades da órbita kepleriana do corpo m_1 : semieixo maior a , excentricidade e , inclinação i , anomalia média M , argumento do pericentro ω e longitude do nodo ascendente Ω . Estes elementos são fixos no tempo, à exceção de M que varia linearmente com o tempo: $M = n(t - t_0)$, sendo

n o movimento médio. Entretanto, os elementos orbitais não constituem um conjunto canônico de variáveis, isto é, não existe uma função escalar $\tilde{\mathcal{H}}(a, e, i, M, \omega, \Omega)$ que preserve a forma das equações de Hamilton (2.15). Apresentamos a seguir três dos conjuntos de variáveis canônicas vinculados diretamente aos elementos orbitais.

2.4.1.1. Variáveis de Delaunay

No caso de dois corpos, considerando m_0 como a massa central, as variáveis canônicas para m_1 são $(L, G, H, M, \omega, \Omega)$, definidas por:

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{\mu a}, \\ G &= L\sqrt{1 - e^2}, \\ H &= G \cos i. \end{aligned} \tag{2.25}$$

onde L, G, H são os momentos associados aos ângulos M, ω, Ω , respetivamente, e $\mu = G(m_0 + m_1)$. Estas variáveis são denominadas variáveis de Delaunay. Em seguida, o Hamiltoniano escrito nestas variáveis é:

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu^2}{2L^2}. \tag{2.26}$$

Devido a que \mathcal{H} só depende dos momentos (em particular só depende de L), as variáveis de Delaunay são chamadas variáveis de ângulo-ação do problema kepleriano.

No caso particular do problema de três corpos restrito, assumindo que $m_2 = 0$, o Hamiltoniano para este corpo pode ser escrito como:

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu_2^2}{2L_2^2} + \mathcal{H}_{Pert}(L_i, G_i, H_i, M_i, \omega_i, \Omega_i). \tag{2.27}$$

onde $\mu_2 = Gm_0$, \mathcal{H}_{Pert} representa o potencial perturbador do corpo m_1 sobre m_2 , e $L_i, G_i, H_i, M_i, \omega_i, \Omega_i$ são as variáveis de Delaunay para cada corpo.

2.4.1.2. Variáveis de Poincaré

No caso de N corpos, considerando m_0 como a massa central, as variáveis canônicas para cada corpo são $(L_i, G, H_i, M_i, \omega_i, \Omega_i)$, definidas por:

$$\begin{aligned} L_i &= \beta_i \sqrt{\mu_i a_i}, \\ G_i &= L_i \sqrt{1 - e_i^2}, \\ H_i &= G_i \cos i_i. \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde novamente L_i, G_i, H_i são os momentos associados aos ângulos M_i, ω_i, Ω_i , respectivamente, $\mu_i = G(m_0 + m_i)$ e $\beta_i = \frac{m_0 m_i}{m_0 + m_i}$ é a denominada massa reduzida. Estas variáveis são conhecidas como variáveis de Poincaré. O Hamiltoniano agora é:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N-1} -\frac{\mu_i^2 \beta_i^3}{2L_i^2} + \mathcal{H}_{Int}(L, G, H, M, \omega, \Omega). \quad (2.29)$$

onde \mathcal{H}_{Int} representa o termo de interação entre os corpos m_1, \dots, m_{N-1} .

2.4.1.3. Variáveis modificadas de Delaunay e Poincaré

As variáveis de Delaunay e Poincaré não são muito convenientes para sistemas em que os corpos possuem órbitas com baixas inclinações e excentricidades, devido ao uso dos ângulos M, ω, Ω . Nestes casos resulta conveniente a introdução das longitudes $\varpi = \omega + \Omega$ e $\lambda = M + \omega + \Omega$. Com esta mudança nos ângulos, as ações do problema de dois corpos se transformam em:

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{\mu a}, \\ \bar{G} &= G - L = L(\sqrt{1 - e^2} - 1), \\ \bar{H} &= H - G = L\sqrt{1 - e^2}(\cos i - 1). \end{aligned} \quad (2.30)$$

onde L, \bar{G}, \bar{H} são os momentos associados a λ, ϖ, Ω , respectivamente. Estas variáveis são chamadas de variáveis modificadas de Delaunay.

Analogamente, no caso de N corpos se obtém o conjunto de variáveis modificadas de

Poincaré, às vezes referido apenas como variáveis de Poincaré (Giuppone et al., 2010):

$$\begin{aligned}
 L_i &= \beta_i \sqrt{\mu_i a_i}, \\
 \bar{G}_i &= (G - L)_i = L_i \left(\sqrt{1 - e_i^2} - 1 \right), \\
 \bar{H}_i &= (H - G)_i = L_i \sqrt{1 - e_i^2} (\cos i_i - 1).
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

que são os momentos associados a $\lambda_i, \varpi_i, \Omega_i$ de cada corpo. Em ambos os casos, a forma do Hamiltoniano continua similar às Equações (2.27) e (2.29), respectivamente.

2.4.1.4. Variáveis regulares de Delaunay e Poincaré

As variáveis modificadas de Delaunay e Poincaré são adequadas para tratar órbitas com baixa excentricidade e inclinação. Todavia, elas não estão corretamente definidas quando a excentricidade e/ou a inclinação é igual a zero, devido a que o pericentro e o nodo não estão definidos para órbitas circulares ou planares, respectivamente.

Para contornar esta limitação, é introduzido um conjunto de variáveis regulares, que no caso de dois corpos são definidas como:

$$\begin{aligned}
 L & \quad , \quad \lambda \\
 K = \sqrt{2\bar{G}} \cos \varpi & \quad , \quad H = \sqrt{2\bar{G}} \sin \varpi \\
 P = \sqrt{2\bar{H}} \cos \Omega & \quad , \quad Q = \sqrt{2\bar{H}} \sin \Omega
 \end{aligned}$$

e no caso de N corpos:

$$\begin{aligned}
 L_i & \quad , \quad \lambda_i \\
 K_i = \sqrt{2\bar{G}_i} \cos \varpi_i & \quad , \quad H_i = \sqrt{2\bar{G}_i} \sin \varpi_i \\
 P_i = \sqrt{2\bar{H}_i} \cos \Omega_i & \quad , \quad Q_i = \sqrt{2\bar{H}_i} \sin \Omega_i
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

Neste conjunto de variáveis, o Hamiltoniano preserva a forma:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N-1} -\frac{\mu_i^2 \beta_i^3}{2L_i^2} + \mathcal{H}_{Int}(L, \lambda, K, H, P, Q) \tag{2.33}$$

Destaquemos finalmente que, neste contexto, as variáveis K_i, P_i cumprem o papel das coordenadas enquanto que H_i, Q_i representam os respectivos momentos (Morbidelli, 2002).

No próximo capítulo introduziremos o nosso modelo para descrever a dinâmica de um objeto co-orbital do sistema Terra-Lua, considerando o efeito de maré e a perturbação do

Sol.

3 Estrutura do problema

Neste capítulo descrevemos a construção do nosso modelo semi-analítico para estudar a evolução de um corpo massivo em configuração co-orbital no sistema Terra-Lua, que por simplicidade chamaremos de troiano da Lua¹. O modelo inclui os efeitos das forças de maré e da perturbação Solar. Em seguida desenvolveremos as equações de movimento correspondentes e o método aplicado para a sua solução numérica.

3.1. O modelo básico para a dinâmica co-orbital

Consideremos a Terra, a Lua e o troiano, cada um com simetria esférica e interagindo gravitacionalmente com massas m_0 , m_1 e m_2 , respectivamente. Seja O a origem do sistema de coordenadas bariocêntrico, logo, os vetores posição de cada corpo são $\vec{u}_0 = \overrightarrow{OT}$, $\vec{u}_1 = \overrightarrow{OL}$ e $\vec{u}_2 = \overrightarrow{Ot}$, e as respectivas velocidades são $\dot{\vec{u}}_0, \dot{\vec{u}}_1, \dot{\vec{u}}_2$ (Figura 3.1).

Como vimos, as equações de movimento dos corpos nesse sistema são dadas pela Equação (2.1). Multiplicando ambos membros desta equação por m_i é possível reconhecer que o lado direito é igual ao gradiente de uma função \mathcal{U} :

$$m_i \ddot{\vec{u}}_i = -\nabla_{\vec{u}_i} \mathcal{U}(\vec{u}) \quad (3.1)$$

onde

$$\mathcal{U}(\vec{u}) = -G \sum_{j=1}^2 \sum_{i=0}^{j-1} \frac{m_i m_j}{|\vec{u}_i - \vec{u}_j|} \quad (3.2)$$

Definindo os momentos como $\vec{p}_i = m_i \dot{\vec{u}}_i$, a expressão do Hamiltoniano no sistema bari-

¹ Destaquemos que, a rigor, o termo troiano deveria ser utilizado apenas no caso do P3CR

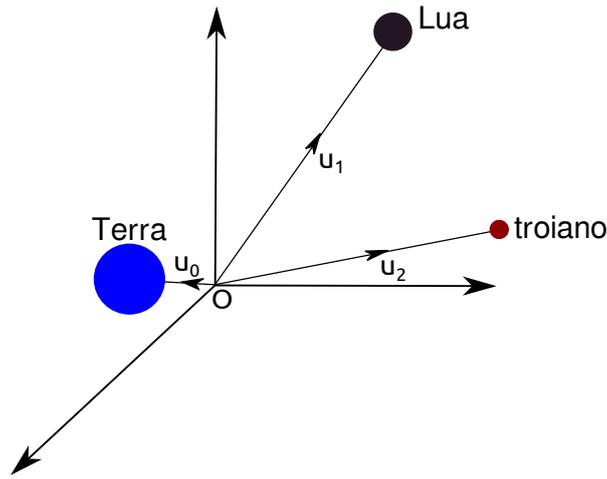


Figura 3.1.: Sistema de coordenadas baricêntrico para o problema de 3 corpos Terra-Lua-troiano.

cêntrico é,

$$\mathcal{H}_B = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^2 \frac{\vec{p}_i^2}{m_i} - G \sum_{j=1}^2 \sum_{i=0}^{j-1} \frac{m_i m_j}{|\vec{u}_i - \vec{u}_j|} \quad (3.3)$$

Na hipótese de $m_0 \gg m_1, m_2$, resulta conveniente utilizar posições geocêntricas para referir o movimento da Lua e do troiano relativo à Terra. A vantagem é que desta forma, como veremos mais adiante, o Hamiltoniano pode ser dividido em uma parte integrável que descreve o movimento kepleriano de cada corpo em torno da Terra, e outra não integrável vinculada à interação mútua entre a Lua e o troiano, semelhante à Equação (2.29). Para manter a estrutura simplética das equações, os momentos conjugados às posições geocêntricas não podem ser geocêntricos, mas devem ser baricêntricos (ver por exemplo [Laskar, 1992](#)). Este conjunto de variáveis canônicas foi introduzido inicialmente por Poincaré, e é usualmente referido como coordenadas astrocêntricas canônicas ou coordenadas democráticas astrocêntricas (Figura 3.2).

Assim, definimos

$$\begin{aligned} \vec{r}_0 &= \vec{u}_0 \\ \vec{r}_i &= \vec{u}_i - \vec{u}_0 \\ \vec{p}_0 &\rightarrow \vec{p}_0 + \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \\ \vec{p}_i &\rightarrow \vec{p}_i \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

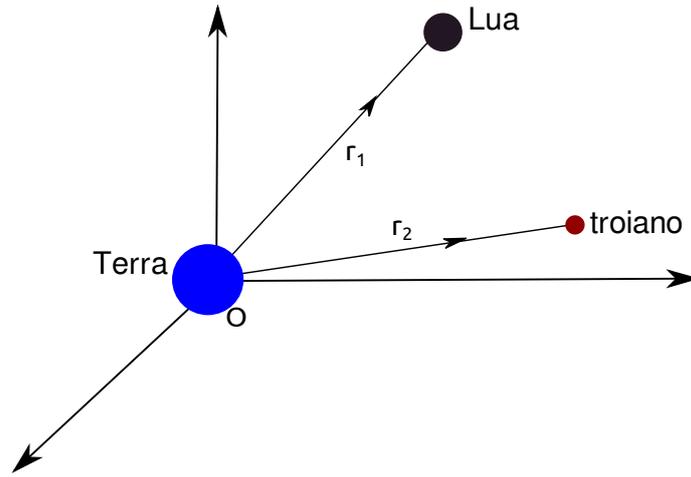


Figura 3.2.: Sistema de coordenadas geocêntrico para o problema de 3 corpos Terra-Lua-troiano.

e podemos escrever:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^2 \frac{\vec{p}_i^2}{m_i} &= \frac{\vec{p}_0^2}{m_0} + \sum_{i=1}^2 \frac{\vec{p}_i^2}{m_i} \\
 &= \frac{1}{m_0} \left(\vec{p}_0 - \sum_{i=1}^2 \vec{p}_i \right)^2 + \sum_{i=1}^2 \frac{\vec{p}_i^2}{m_i} \\
 &= \frac{\vec{p}_0^2}{m_0} + \sum_{i=1}^2 \frac{\vec{p}_i^2}{m_0} + 2 \sum_{0 < i < j}^2 \frac{\vec{p}_i \cdot \vec{p}_j}{m_0} - 2 \sum_{i=1}^2 \frac{\vec{p}_0 \cdot \vec{p}_i}{m_0} + \sum_{i=1}^2 \frac{\vec{p}_i^2}{m_i} \\
 &= \frac{\vec{p}_0^2}{m_0} + 2 \sum_{0 < i < j}^2 \frac{\vec{p}_i \cdot \vec{p}_j}{m_0} - 2 \sum_{i=1}^2 \frac{\vec{p}_0 \cdot \vec{p}_i}{m_0} + \sum_{i=1}^2 \vec{p}_i^2 \left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_i} \right)
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

enquanto que

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{i=0}^{j-1} \frac{m_i m_j}{|\vec{u}_i - \vec{u}_j|} = \sum_{i=1}^2 \frac{m_0 m_j}{|\vec{r}_i|} + \sum_{0 < i < j}^2 \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \tag{3.6}$$

Substituindo as Equações (3.5) e (3.6) em (3.3) obtemos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_G &= \frac{\vec{p}_0^2}{2m_0} + \sum_{0 < i < j}^2 \frac{\vec{p}_i \cdot \vec{p}_j}{m_0} - \sum_{i=1}^2 \frac{\vec{p}_0 \cdot \vec{p}_i}{m_0} + \sum_{i=1}^2 \vec{p}_i^2 \left(\frac{1}{2m_0} + \frac{1}{2m_i} \right) \\
 &\quad - \sum_{i=1}^2 G \frac{m_0 m_j}{|\vec{r}_i|} - \sum_{0 < i < j}^2 G \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

(o subíndice G refere-se a geocêntrico) e notamos que \mathcal{H}_G não depende de \vec{r}_0 , portanto $\dot{\vec{p}}_0 = 0$, isto é, o baricentro do sistema constitui um referencial inercial; em particular,

Estrutura do problema

podemos definir $\vec{p}_0 = 0$. Finalmente, a expressão para o Hamiltoniano resulta ser:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_G &= \mathcal{H}_{Kep} + \mathcal{H}_{Int} \\ \mathcal{H}_{Kep} &= \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\vec{p}_i^2}{2\beta_i} - \frac{\mu_i \beta_i}{|\vec{r}_i|} \right) \\ \mathcal{H}_{Int} &= -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} + \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{m_0}\end{aligned}\quad (3.8)$$

onde

$$\mu_i = G(m_0 + m_i) \quad \beta_i = \frac{m_0 m_i}{m_0 + m_i} \quad (3.9)$$

É importante destacar que \mathcal{H}_{Kep} representa uma família disjunta de problemas de dois corpos semelhante a Equação (2.24). Independentemente de \vec{r}_i e \vec{p}_i estarem referidos a origens diferentes (geocêntrico o primeiro e baricêntrico o segundo), cada termo em \mathcal{H}_{Kep} se reduz a um problema de potencial central em torno de um corpo de massa m_0 . O segundo termo \mathcal{H}_{Int} é o resultado da interação entre a Lua e o troiano.

Uma vez obtido \mathcal{H}_G desta forma, é natural introduzir as variáveis ângulo-ação do problema não perturbado. [Robutel & Pousse \(2013\)](#) estudaram a dinâmica do problema co-orbital utilizando variáveis regulares de Poincaré expressas em forma complexa. Devido a estas não serem variáveis facilmente manipuláveis, nós escolhemos começar utilizando variáveis modificadas de Poincaré e posteriormente regularizar as variáveis. Por simplicidade, também restringimos a nossa análise ao caso planar. Assim, o sistema de coordenadas no plano de referência coincide com o plano orbital da Lua e do troiano ao redor da Terra. Cada órbita estará descrita pelo seguinte conjunto de elementos orbitais: $(a_i, e_i, \lambda_i, \varpi_i)$, com $i = 1$ para a Lua e $i = 2$ para o troiano.

O primeiro passo é encontrar as expressões para as posições geocêntricas e os momentos baricêntricos em função dos elementos orbitais do problema kepleriano definido por \mathcal{H}_{Kep} , isto é, $\vec{r}_i = \vec{r}_i(a_i, e_i, \varpi_i, \lambda_i)$ e $\vec{p}_i = \vec{p}_i(a_i, e_i, \varpi_i, \lambda_i)$. Do problema de dois corpos sabemos que, os vetores posição e velocidade geocêntricos no plano da órbita para cada corpo são:

$$\begin{aligned}\vec{r}_i &= r_i [\cos(f_i + \omega_i), \sin(f_i + \omega_i)] \\ \dot{\vec{r}}_i &= \frac{n_i a_i}{\sqrt{1 - e_i^2}} [-(\sin(f_i + \omega_i) + e \sin \omega), (\cos(f_i + \omega_i) + e \cos \omega)]\end{aligned}\quad (3.10)$$

onde

$$r_i = \frac{a_i(1 - e_i^2)}{1 + e_i \cos f_i},$$

$n_i = \sqrt{\mu_i} a_i^{3/2}$ é o movimento médio, e f_i é a anomalia verdadeira de cada corpo. Logo, para os momentos temos as expressões:

$$\begin{aligned}\vec{p}_1 &= \frac{m_1}{m_0 + m_1 + m_2} \left[(m_0 + m_2) \dot{\vec{r}}_1 - m_2 \dot{\vec{r}}_2 \right] \\ \vec{p}_2 &= \frac{m_2}{m_0 + m_1 + m_2} \left[(m_0 + m_1) \dot{\vec{r}}_2 - m_1 \dot{\vec{r}}_1 \right]\end{aligned}\quad (3.11)$$

estas últimas equações obtidas a partir das derivadas da segunda expressão na Equação (3.4). Na sequência, substituímos as Equações (3.10) e (3.11) na Equação (3.8), levando em consideração que:

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(f_1 - f_2 + \varpi_1 - \varpi_2),$$

e escrevemos $\cos f_i$ e $\sin f_i$ em termos de e_i , $\cos M_i$ e $\sin M_i$:

$$\begin{aligned}r_i &= a_i(1 - e_i \cos M_i) + \frac{1}{2} a_i e_i^2 (1 - \cos 2M_i) + O(e^3) \\ r_i^2 &= a_i^2(1 - 2e_i \cos M_i) + \frac{1}{2} a_i^2 e_i^2 (3 - \cos 2M_i) + O(e^3) \\ r_i \cos f_i &= a_i \cos M_i - \frac{1}{2} a_i e_i (3 - \cos 2M_i) - \frac{3}{8} a_i e_i^2 (\cos M_i - \cos 3M_i) + O(e^3) \\ r_i \sin f_i &= a_i \sin M_i + \frac{1}{2} a_i e_i \sin 2M_i - \frac{1}{8} a_i e_i^2 (5 \sin M_i - 3 \sin 3M_i) + O(e^3)\end{aligned}$$

Finalmente, expandido a expressão resultante em série de Taylor de e_1, e_2 ao redor de $e_1 = e_2 = 0$, e truncando o desenvolvimento na 2ª ordem em e_i , obtemos o Hamiltoniano do problema co-orbital:

$$\mathcal{H}_G = -\frac{\mu_1 \beta_1}{2a_1} - \frac{\mu_2 \beta_2}{2a_2} + \mathcal{H}_{Int}(a_i, e_i, \lambda_i, \varpi_i) + O(e_i^3) \quad (3.12)$$

onde $\varpi_i = \omega_i$ e $\lambda_i = M_i + \omega_i$, pois estamos no caso planar. Destaquemos que os primeiros dois termos representam o hamiltoniano kepleriano do problema, entanto que \mathcal{H}_{Int} constitui uma perturbação da $O(m_1 m_2)$.

3.1.1. O problema médio

O Hamiltoniano (3.12) está escrito em termos dos elementos orbitais que, como vimos, não são um conjunto canônico. Entretanto, antes de proceder a reescrever a Equação (3.12) em termos das variáveis modificadas de Poincaré (Equação 2.31), cabe lembrar que na dinâmica co-orbital a diferença entre as longitudes médias da Lua e do troiano

Estrutura do problema

constitui um parâmetro de caracterização natural para o movimento (Nesvorný et al., 2002; Giuppone et al., 2010). Sendo assim, introduzimos os novos ângulos θ_i e momentos canônicos J_i :

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}, & J_1 &= L_2 - L_1 \\ \theta_2 &= \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{2}, & J_2 &= L_2 + L_1\end{aligned}\quad (3.13)$$

A variável θ_1 é chamada de ângulo ressonante e θ_2 é chamada de ângulo sinódico. Este último é um ângulo de variação rápida (curto período) comparado ao primeiro, o que possibilita aplicar uma média de primeira ordem sobre o mesmo, isto é:

$$\langle \mathcal{H}_G \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{H}_G d\theta_2 \quad (3.14)$$

O Hamiltoniano médio (3.14) representa a dinâmica do problema co-orbital a longo prazo e possui um grau de liberdade a menos, pois θ_2 foi eliminado ao fazer a média, o que implica que $J_2 = \text{cte}$. No que resta deste trabalho, e para simplificar a notação, vamos nos referir ao Hamiltoniano médio simplesmente como \mathcal{H} , ou seja:

$$\langle \mathcal{H}_G \rangle \equiv \mathcal{H} \quad \text{notação}$$

Em particular, o Hamiltoniano médio pode ser separado na forma:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0(J_1, J_2, \theta_1) + \mathcal{H}_1(J_1, J_2, \bar{G}_1, \bar{G}_2, \theta_1, \varpi_1, \varpi_2) \quad (3.15)$$

onde \mathcal{H}_0 constitui um Hamiltoniano integrável (um grau de liberdade) e \mathcal{H}_1 é uma perturbação da $O(m_1 m_2)$. Destacamos que, diferentemente da Eq. (2.23), o Hamiltoniano \mathcal{H}_0 inclui não apenas o termo kepleriano mais também um termo de perturbação de ordem zero nas excentricidades. É este termo de perturbação que gera a dependência com θ_1 e que, como veremos mais adiante, faz com que \mathcal{H}_0 descreva a dinâmica básica do movimento co-orbital. Destaquemos também que \mathcal{H}_1 não possui termos lineares nas excentricidades, contendo apenas termos proporcionais a e_1^2 , e_2^2 e $e_1 e_2$, pois os termos proporcionais a e_1 e e_2 são eliminados ao aplicar a média.

A expressão final para o Hamiltoniano médio co-orbital em termos das variáveis $a_i, e_i, \theta_1, \varpi_i$ é apresentada nas Equações (3.19) e (3.20). Destacamos que ao invés de reescrever o Hamiltoniano em termos das variáveis modificadas de Poincaré por extenso, resulta mais

conveniente escrever apenas as derivadas do Hamiltoniano em termos destas variáveis, aplicando a regra da cadeia. Com isto, as equações de movimento para este Hamiltoniano ficam definidas pelas Equações (3.21) até (3.26). Para o cálculo das derivadas intermediárias, utilizam-se as Equações (2.31) combinadas com as (3.13). As expressões das mesmas são apresentadas no Apêndice.

3.1.2. Regularização das variáveis

Como explicado anteriormente, as variáveis de Poincaré não estão definidas quando e_1 ou e_2 se anulam, o que implica que as equações de movimento se tornam singulares (divergem) quando $e \rightarrow 0$. Esta singularidade pode ser evitada introduzindo um par de variáveis regulares, que é equivalente a transformar um sistema de coordenadas polares em retangulares. Em primeiro lugar, definimos as variáveis

$$k_i = e_i \cos \varpi_i, \quad h_i = e_i \sin \varpi_i \quad (3.16)$$

e substituímos diretamente nas Equações (3.19) e (3.20). O resultado é apresentado nas Equações (3.28) e (3.29). A seguir, precisamos escrever as variáveis regulares k_i, h_i em termos das variáveis regulares de Poincaré definidas pelas Equações (2.32), isto é:

$$H_i = \sqrt{2\bar{G}_i} \sin \varpi_i, \quad K_i = \sqrt{2\bar{G}_i} \cos \varpi_i$$

Levando em conta as Equações (2.31) e (3.16), podemos escrever:

$$\frac{H_i}{\sqrt{2L_i}} = \sqrt{\sqrt{1 - e_i^2} - 1} \frac{h_i}{e_i}, \quad \frac{K_i}{\sqrt{2L_i}} = \sqrt{\sqrt{1 - e_i^2} - 1} \frac{k_i}{e_i}$$

e a princípio não é possível obter uma relação unívoca $h = h(H)$ e $k = k(K)$. Porém, desenvolvendo em série o termo dentro da raiz ao redor de $e = 0$ obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{H_i}{\sqrt{2L_i}} &= \left(\frac{e_i}{\sqrt{2}} + \frac{e_i^3}{8\sqrt{2}} + O(e^5) \right) \frac{h_i}{e_i} \\ \frac{K_i}{\sqrt{2L_i}} &= \left(\frac{e_i}{\sqrt{2}} + \frac{e_i^3}{8\sqrt{2}} + O(e^5) \right) \frac{k_i}{e_i} \end{aligned}$$

Estrutura do problema

e podemos manter apenas o termo linear, já que a nossa expansão do Hamiltoniano é truncada na ordem 2 nas excentricidades. Logo:

$$\frac{H_i}{\sqrt{L_i}} \approx h_i, \quad \frac{K_i}{\sqrt{L_i}} \approx k_i \quad (3.17)$$

lembrando ainda que $L_1 = (J_2 - J_1)/2$ e $L_2 = (J_2 + J_1)/2$. Da mesma forma que antes, mantemos o Hamiltoniano escrito em termos de a_i, h_i, k_i, θ_1 e exprimimos as equações de movimento aplicando a regra da cadeia como nas Equações (3.30) até (3.35). As expressões para as derivadas intermediárias são apresentadas no Apêndice.

Até aqui, desenvolvemos o Hamiltoniano do problema co-orbital para corpos massivos, tanto em variáveis de Poincaré como em variáveis regulares de Poincaré. Também apresentamos o conjunto de equações que devemos resolver para conhecer a dinâmica do sistema. Entretanto, no nosso modelo ainda faltam adicionar duas componentes: a perturbação do Sol e o efeito de maré. Nas próximas seções abordaremos estes temas.

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 \quad (3.18)$$

$$\mathcal{H}_0 = -\frac{\beta_1 \mu_1}{2a_1} - \frac{\beta_2 \mu_2}{2a_2} + Gm_1 m_2 \left(\frac{\cos 2\theta_1}{\sqrt{a_1 a_2}} - \frac{1}{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos 2\theta_1} \right) \quad (3.19)$$

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{8} (e_1^2 + e_2^2) Gm_1 m_2 \left(-\frac{4 \cos 2\theta_1}{\sqrt{a_1 a_2}} + \frac{a_1 a_2 [4(a_1^2 + a_2^2) \cos 2\theta_1 - a_1 a_2 (13 - 5 \cos 4\theta_1)]}{(a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos 2\theta_1)^{5/2}} \right) \quad (3.20)$$

$$+ e_1 e_2 Gm_1 m_2 \left(\frac{\cos(4\theta_1 + \varpi_1 - \varpi_2)}{\sqrt{a_1 a_2}} \right)$$

$$- e_1 e_2 Gm_1 m_2 \left(\frac{8(a_1^2 + a_2^2) \cos(4\theta_1 + \varpi_1 - \varpi_2) + a_1 a_2 [\cos(6\theta_1 + \varpi_1 - \varpi_2) + 9 \cos(2\theta_1 - \varpi_1 + \varpi_2) - 26 \cos(2\theta_1 + \varpi_1 - \varpi_2)]}{8(a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos 2\theta_1)^{5/2}} \right)$$

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial a_1} + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial a_1} \right) \frac{\partial a_1}{\partial J_1} + \left(\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial a_2} + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial a_2} \right) \frac{\partial a_2}{\partial J_1} + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial e_1} \frac{\partial e_1}{\partial J_1} + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial e_2} \frac{\partial e_2}{\partial J_1} \quad (3.21)$$

$$\frac{d\varpi_1}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial e_1} \frac{\partial e_1}{\partial \bar{G}_1} + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial e_2} \frac{\partial e_2}{\partial \bar{G}_1} \quad (3.22)$$

$$\frac{d\varpi_2}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial e_1} \frac{\partial e_1}{\partial \bar{G}_2} + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial e_2} \frac{\partial e_2}{\partial \bar{G}_2} \quad (3.23)$$

$$\frac{dJ_1}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \theta_1} - \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \theta_1} \quad (3.24)$$

$$\frac{d\bar{G}_1}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \varpi_1} \quad (3.25)$$

$$\frac{d\bar{G}_2}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \varpi_2} \quad (3.26)$$

(3.27)

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$$

(3.28)

$$\mathcal{H}_0 = -\frac{\beta_1 \mu_1}{2a_1} - \frac{\beta_2 \mu_2}{2a_2} + Gm_1 m_2 \left(\frac{\cos 2\theta_1}{\sqrt{a_1 a_2}} - \frac{1}{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos 2\theta_1} \right)$$

(3.29)

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \frac{1}{8} (h_1^2 + k_1^2 + h_2^2 + k_2^2) Gm_1 m_2 \left(-\frac{4 \cos 2\theta_1}{\sqrt{a_1 a_2}} + \frac{a_1 a_2 [4(a_1^2 + a_2^2) \cos 2\theta_1 - a_1 a_2 (13 - 5 \cos 4\theta_1)]}{(a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos 2\theta_1)^{5/2}} \right) \\ &+ (k_1 k_2 + h_1 h_2) Gm_1 m_2 \left(\frac{\cos 4\theta_1}{\sqrt{a_1 a_2}} - a_1 a_2 \frac{8(a_1^2 + a_2^2) \cos 4\theta_1 + a_1 a_2 (\cos 6\theta_1 - 17 \cos 2\theta_1)}{8(a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos 2\theta_1)^{5/2}} \right) \\ &+ (h_1 k_2 - k_1 h_2) Gm_1 m_2 \left(-\frac{\sin 4\theta_1}{\sqrt{a_1 a_2}} + a_1 a_2 \frac{8(a_1^2 + a_2^2) \sin 4\theta_1 + a_1 a_2 (\sin 6\theta_1 - 35 \sin 2\theta_1)}{8(a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos 2\theta_1)^{5/2}} \right) \end{aligned}$$

(3.30)

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial a_1} + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial a_1} \right) \frac{\partial a_1}{\partial J_1} + \left(\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial a_2} + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial a_2} \right) \frac{\partial a_2}{\partial J_1} + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial h_1} \frac{\partial h_1}{\partial J_1} + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial h_2} \frac{\partial h_2}{\partial J_1} + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial k_1} \frac{\partial k_1}{\partial J_1} + \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial k_2} \frac{\partial k_2}{\partial J_1}$$

(3.31)

$$\frac{dK_1}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial h_1} \frac{\partial h_1}{\partial H_1}$$

(3.32)

$$\frac{dK_2}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial h_1} \frac{\partial h_2}{\partial H_2}$$

(3.33)

$$\frac{dJ_1}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \theta_1} - \frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial \theta_1}$$

(3.34)

$$\frac{dH_1}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial k_1} \frac{\partial k_1}{\partial K_1}$$

(3.35)

$$\frac{dH_2}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial k_2} \frac{\partial k_2}{\partial K_2}$$

3.2. A perturbação solar

Neste ponto, o problema em questão é descrever a forma em que a dinâmica da Lua e do troiano é perturbada pela presença do Sol, considerando que as perturbações da Lua e do troiano sobre o movimento do Sol são desprezíveis. Em uma primeira aproximação vamos estudar a perturbação do Sol sobre a Lua e sobre o troiano como problemas independentes. Vamos então desenvolver a função perturbadora considerando as equações de movimento para dois problemas de três corpos: por um lado Terra-Lua-Sol (caso 1), e por outro lado Terra-troiano-Sol (caso 2). Para fazer isto vamos utilizar o sistema de coordenadas de Jacobi, que estabelece uma hierarquia entre os corpos. Assume-se que o corpo m_0 é o corpo central, neste caso a Terra, e os demais corpos são então ordenados em sentido crescente, desde o que orbita mais próximo de m_0 até o que orbita mais distante. Em particular, as coordenadas de Jacobi (\vec{R}_j, \vec{V}_j) são definidas de tal forma que a posição e a velocidade da Lua são referidas relativas à Terra, enquanto que a posição e velocidade do Sol são referidas ao centro de massa do sistema Terra-Lua (Terra-troiano). A Figura 3.3 mostra a configuração para os corpos em estudo.

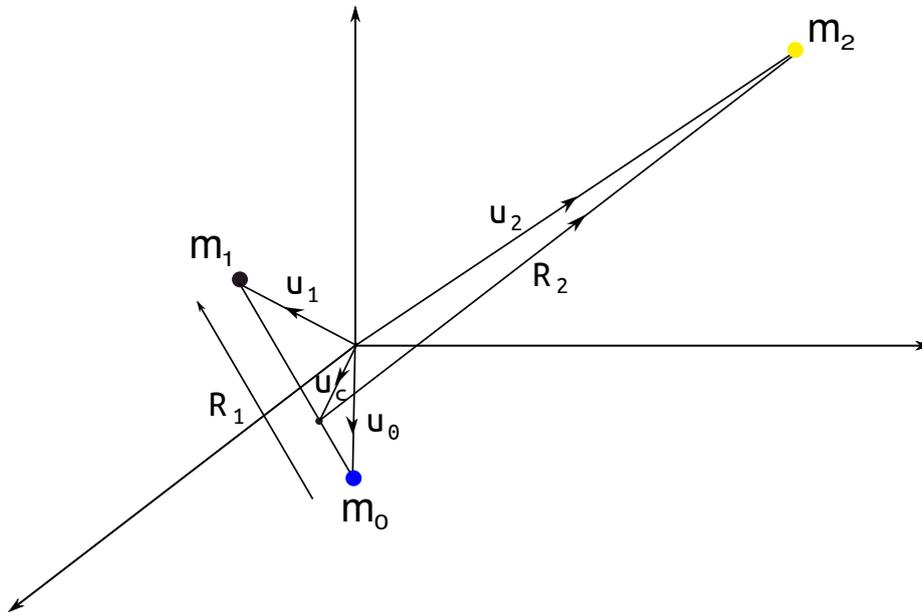


Figura 3.3.: Coordenadas \vec{R}_j, \vec{V}_j de Jacobi nos problemas Terra-Lua-Sol e Terra-troiano-Sol.

No desenvolvimento que segue, os subíndices 0, 1 e 2 referem-se à Terra, Lua e Sol, respectivamente. As posições e velocidades de Jacobi são definidas a partir do sistema

Estrutura do problema

baricêntrico como:

$$\begin{aligned}
\vec{R}_0 &= \vec{u}_c^{(2)} \\
\vec{R}_i &= \vec{u}_j - \vec{u}_c^{(j-1)} \\
\dot{\vec{R}}_0 &= \dot{\vec{u}}_c^{(2)} \\
\dot{\vec{R}}_j &= \dot{\vec{u}}_j - \dot{\vec{u}}_c^{(j-1)} \quad j = 1, 2
\end{aligned} \tag{3.36}$$

onde

$$\vec{u}_c^{(j)} = \frac{1}{M_j} \sum_{k=0}^j m_k \vec{u}_k, \quad \dot{\vec{u}}_c^{(j-1)} = \frac{1}{M_j} \sum_{k=0}^j m_k \dot{\vec{u}}_k, \quad M_j = \sum_{k=0}^j m_k$$

e os respectivos momentos são:

$$\begin{aligned}
\vec{P}_0 &= \alpha_0 \dot{\vec{R}}_0 \\
\vec{P}_j &= \alpha_j \dot{\vec{R}}_j
\end{aligned} \tag{3.37}$$

onde

$$\alpha_0 = M_2, \quad \alpha_j = m_j \frac{M_{j-1}}{M_j} \tag{3.38}$$

O Hamiltoniano do P3C nestas coordenadas se escreve como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_J &= \mathcal{H}_{Kep} + \mathcal{H}_{Int} \\
\mathcal{H}_{Kep} &= \sum_{j=1}^2 \left(\frac{\vec{P}_j^2}{2\alpha_j} - \frac{Gm_0 M_j}{M_{j-1}} \frac{\alpha_j}{|\vec{R}_j|} \right) \\
\mathcal{H}_{Int} &= \sum_{j=1}^2 Gm_0 m_j \left(\frac{1}{|\vec{r}_j|} - \frac{1}{|\vec{R}_j|} \right) - G \frac{m_1 m_2}{|\vec{R}_1 - \vec{R}_2|}
\end{aligned} \tag{3.39}$$

onde a relação entre as posições geocêntricas \vec{r}_j e as posições de Jacobi \vec{R}_j é dada por,

$$\vec{R}_j = \vec{r}_j - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{m_k}{M_k} \vec{r}_k \quad j = 1, 2 \tag{3.40}$$

Notemos que, nas Equações (3.39), o termo com $j = 2$ em \mathcal{H}_{Kep} se refere ao movimento do Sol em torno ao baricentro Terra-Lua ou Terra-troiano. Como no nosso caso a perturbação da Lua (troiano) sobre o Sol é considerada desprezível, podemos fazer $m_1 = 0$ apenas nesse

termo e assim obtemos:

$$\mathcal{H}_{Kep} = \sum_{j=1}^2 \left(\frac{m_0 + m_j}{2m_0m_j} \vec{P}_j^2 - \frac{Gm_0m_j}{|\vec{R}_j|} \right) \quad (3.41)$$

A Equação (3.41) é idêntica à segunda Equação (3.8), portanto, sob a hipótese do Sol não ser perturbado pela Lua (troiano), as soluções keplerianas descritas pelas variáveis de Jacobi \vec{R}_j, \vec{P}_j serão idênticas àquelas descritas pelas variáveis democráticas geocêntricas \vec{r}_i, \vec{p}_i . Mais ainda, os elementos orbitais $a_i, e_i, \lambda_i, \varpi_i$ serão obtidos pelas mesmas fórmulas. Assim, esta similaridade habilita-nos a fazer o desenvolvimento das equações para a perturbação so Sol sobre a Lua (ou sobre o troiano) em coordenadas de Jacobi e posteriormente adicionar diretamente esta perturbação ao Hamiltoniano do problema co-orbital em coordenadas democráticas geocêntricas.

No problema lunar, tanto a Terra quanto a Lua encontram-se a uma distância similar do Sol que é muito maior que a separação entre elas. Por outro lado, a massa do Sol é aproximadamente 330 000 vezes a massa combinada da Terra e da Lua. Portanto, a quantidade que vai nos servir para expandir a função perturbadora do Sol sobre a Lua é o quociente entre a distância média Terra-Lua e a distância média Terra-Sol, que é da ordem de 1/400. O sistema de coordenadas mais adequado para exprimir a função perturbadora é aquele de Jacobi (ver Figura 3.4).

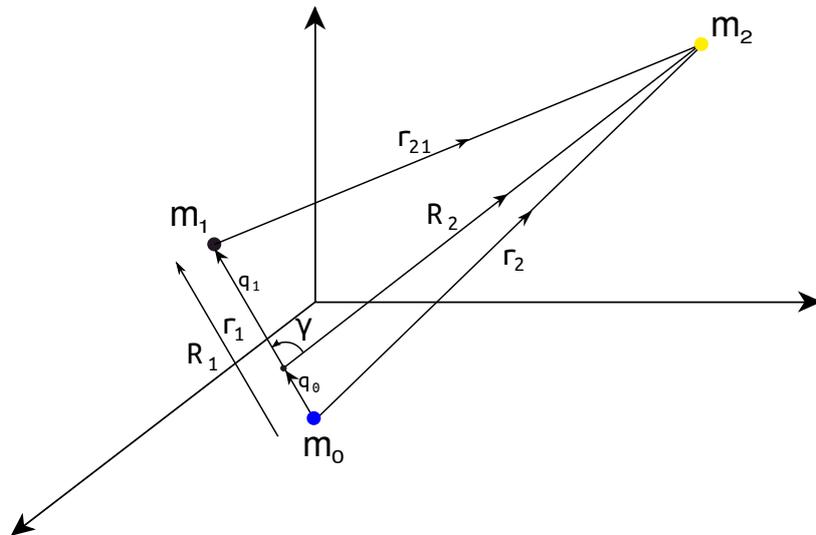


Figura 3.4.: Coordenadas de Jacobi no problema do movimento da Lua ao redor Terra.

Como vimos na Seção 2.3, as equações do movimento são dadas pelas Equações (2.4) e

Estrutura do problema

(2.5), levando em consideração que

$$\vec{\rho}_1 = \vec{r}_1, \quad \vec{\rho}_2 = -\vec{r}_2, \quad \vec{\rho}_{21} = \vec{r}_{21}$$

Além disso, da Equação (3.40) temos que:

$$\vec{R}_1 = \vec{r}_1, \quad \vec{R}_2 = \vec{r}_2 - \frac{m_1}{m_0 + m_1} \vec{R}_1 = \vec{r}_{21} + \frac{m_0}{m_0 + m_1} \vec{R}_1$$

Logo, da primeira das Equações (2.4) obtemos a equação de movimento para a Lua:

$$\ddot{\vec{R}}_1 = -G(m_0 + m_1) \frac{\vec{R}_1}{|\vec{R}_1|^3} + Gm_2 \left(\frac{\vec{r}_{21}}{|\vec{r}_{21}|^3} - \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|^3} \right) \quad (3.42)$$

e da terceira das Equações (2.4) obtemos a equação de movimento para o Sol através de:

$$\ddot{\vec{R}}_2 = \ddot{\vec{r}}_{21} + \frac{m_0}{m_0 + m_1} \ddot{\vec{R}}_1 \quad (3.43)$$

Após um pouco de álgebra, notamos que as Equações (3.42) e (3.43) podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{R}}_1 &= -G(m_0 + m_1) \frac{\vec{R}_1}{|\vec{R}_1|^3} + Gm_2 \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \vec{R}_1} \\ \ddot{\vec{R}}_2 &= G \frac{m_0 + m_1 + m_2}{m_0 + m_1} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \vec{R}_2} \end{aligned} \quad (3.44)$$

onde

$$\mathcal{U} = \frac{m_1}{|\vec{r}_{21}|} - \frac{m_0}{|\vec{r}_2|} \quad (3.45)$$

Definindo na sequência $\vec{q}_0 = \frac{m_0}{m_0 + m_1} \vec{R}_1$ e $\vec{q}_1 = \frac{m_1}{m_0 + m_1} \vec{R}_1$, temos

$$r_{21}^2 = R_2^2 + q_0^2 - 2|R_2||q_0|\cos\gamma$$

ou

$$\frac{R_2}{r_{21}} = \left[1 + \left(\frac{q_0}{R_2} \right)^2 - 2 \left(\frac{q_0}{R_2} \right) \cos\gamma \right]^{-1/2} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_0^i P_i(\cos\gamma) \quad (3.46)$$

onde γ é o ângulo entre os vetores \vec{q}_0 e \vec{R}_2 , $\alpha_0 = q_0/R_2$ e $P_i(\cos\gamma)$ são polinômios de

Legendre. De forma análoga, definimos $\alpha_1 = q_1/R_2$ e podemos escrever:

$$\frac{R_2}{r_2} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} (-\alpha_1)^i P_i(\cos \gamma) \quad (3.47)$$

Então, a Equação (3.45) adota a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \frac{1}{R_2} \left(m_1 \frac{R_2}{r_{21}} - m_0 \frac{R_2}{r_2} \right) \\ &= \frac{m_0 + m_1}{R_2} + \frac{m_0 m_1}{m_0 + m_1} \left(\frac{R_1^2}{R_2^3} P_2 + \frac{m_0 - m_1}{m_0 + m_1} \frac{R_1^3}{R_2^4} P_3 + \frac{m_0^2 - m_0 m_1 + m_1^2}{m_0 + m_1} \frac{R_1^4}{R_2^5} P_4 + \dots \right) \end{aligned} \quad (3.48)$$

Das Equações (3.44), a equação de movimento para o Sol resulta ser:

$$\ddot{\vec{R}}_2 = G(m_0 + m_1 + m_2) \frac{\partial}{\partial \vec{R}_2} \left[\frac{1}{R_2} + \frac{m_0 m_1}{(m_0 + m_1)^2} \frac{R_1^2}{R_2^3} P_2 + \dots \right]$$

e notamos que os termos que dependem dos P_i no colchete podem ser desprezados levando em consideração que, no caso lunar, $R_1 \ll R_2$. Portanto, o movimento do Sol se reduz a uma órbita kepleriana em torno do centro de massas do sistema Terra-Lua.

Para o movimento da Lua, vemos que a partir da primeira das Equações (3.44), a função perturbadora é dada por

$$\mathcal{R}_S^{(L)} = G m_2 \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1} \mathcal{U} \quad (3.49)$$

e podemos desconsiderar o primeiro termo da Equação (3.48), pois ele não entra no cálculo do gradiente em relação a \vec{R}_1 ; então

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_S^{(L)} &= G \frac{m_2}{R_2} \left[\left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos^2 \gamma \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_0 - m_1}{m_0 + m_1} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^3 \left(-\frac{3}{2} \cos \gamma + \frac{5}{2} \cos^3 \gamma \right) + \dots \right] \end{aligned} \quad (3.50)$$

Esta função perturbadora encontra-se expressa em potências de $R_1/R_2 \sim 1/400$, e pode ser considerada uma perturbação pequena mesmo levando em consideração que $m_2 \gg (m_0 + m_1)$. Agora é possível expressar \mathcal{R}_S em termos dos elementos orbitais keplerianos (da Lua em torno da Terra e do Sol em torno do centro de massas do sistema Terra-Lua), e expandir em potências das excentricidades. O desenvolvimento detalhado pode ser encontrado no capítulo XII do livro de [Brower & Clemence \(1961\)](#). Os termos mais

Estrutura do problema

significativos desta expansão são:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_S^{(L)} = n_S^2 a_1^2 & \left\{ \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos(2\lambda_1 - 2\lambda_S) - \frac{1}{2} e_1 \cos(\lambda_1 - \varpi_1) - \frac{9}{4} e_1 \cos(\lambda_1 - 2\lambda_S + \varpi_1) \right. \\
& + \frac{3}{4} e_1 \cos(3\lambda_1 - 2\lambda_S - \varpi_1) + \frac{3}{4} e_S \cos(\lambda_S - \varpi_S) + \frac{3}{8} e_1^2 + \frac{15}{8} e_1^2 \cos(2\lambda_S - 2\varpi_1) \\
& + \frac{3}{8} e_S^2 + \frac{3}{8} \frac{a_1}{a_S} \cos(\lambda_1 - \lambda_S) - \frac{15}{16} \frac{a_1}{a_S} e_1 \cos(\lambda_S - \varpi_1) \\
& \left. + \frac{5}{8} \frac{a_1}{a_S} \cos(3\lambda_1 - 3\lambda_S) - \frac{15}{16} \frac{a_1}{a_S} e_1 e_S \cos(\varpi_1 - \varpi_S) \right\} \quad (3.51)
\end{aligned}$$

onde o subíndice 1 se refere à Lua, e substituímos o subíndice 2 pelo subíndice S para nos referir ao Sol; assim, pela terceira de Kepler temos:

$$n_S^2 a_S^3 = G(m_0 + m_1 + m_2) \simeq Gm_S \quad (3.52)$$

De maneira similar consegue-se a função perturbadora para o troiano $\mathcal{R}_S^{(t)} = \mathcal{R}_S^{(t)}(a_2, a_S, e_2, e_S, \lambda_2, \lambda_S, \varpi_2, \varpi_S)$.

Em particular, vamos assumir no nosso modelo que a órbita do Sol é circular ($e_S = 0$), e ainda levando em conta as definições dos ângulos para o problema co-orbital (Equação 3.13), podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_S &= \mathcal{R}_S^{(L)} + \mathcal{R}_S^{(t)} \\
&= \sum_{i=1}^2 n_S^2 a_i^2 \left\{ \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cos(2\theta_1 - 2\theta_2 + 2\lambda_S) - \frac{1}{2} e_i \cos(\theta_1 - \theta_2 + \varpi_i) \right. \\
&+ \frac{3}{4} e_i \cos(3\theta_1 - 3\theta_2 + 2\lambda_S + \varpi_i) - \frac{9}{4} e_i \cos(\theta_1 - \theta_2 + 2\lambda_S - \varpi_i) \\
&+ \frac{3}{8} e_i^2 + \frac{15}{8} e_i^2 \cos(2\lambda_S - 2\varpi_i) \\
&\left. + \frac{3}{8} \frac{a_i}{a_S} \cos(\theta_1 - \theta_2 + \lambda_S) - \frac{15}{16} \frac{a_i}{a_S} e_i \cos(\lambda_S - \varpi_i) + \frac{5}{8} \frac{a_i}{a_S} \cos(3\theta_1 - 3\theta_2 + 3\lambda_S) \right\} \quad (3.53)
\end{aligned}$$

onde agora o subíndice 1 se refere à Lua e o subíndice 2 se refere ao troiano.

Destes termos conseguimos identificar aqueles que afetarão a dinâmica secular da Lua e aqueles que provocarão perturbações periódicas:

- **Termos seculares:** envolve os termos $\frac{1}{4} n_S^2 a_i^2$ e $\frac{3}{8} n_S^2 a_i^2 e_i^2$, que produzem variações sobre ϖ_i , e portanto sobre λ_i .
- **Termos periódicos**

– **A variação:** envolve os termos

$$\begin{aligned} & \frac{3}{4}n_S^2 a_i^2 \cos(2\theta_1 - 2\theta_2 + 2\lambda_S) \\ & \frac{9}{4}n_S^2 a_i^2 e_i \cos(\theta_1 - \theta_2 + 2\lambda_S - \varpi_i) \\ & \frac{3}{4}n_S^2 a_i^2 e_i \cos(3\theta_1 - 3\theta_2 + 2\lambda_S + \varpi_i) \end{aligned}$$

que provocam variação periódica em a_i , e_i e λ_i .

– **A evecção:** envolve o termo $\frac{15}{8}n_S^2 a_i^2 e_i^2 \cos(2\lambda_S - 2\varpi_i)$, que é o termo com maior perturbação sobre λ da Lua. A comensurabilidade 1:1 entre λ_S e ϖ_i é conhecida como ressonância de evecção.

– **A desigualdade paraláctica:** envolve os termos

$$\begin{aligned} & \frac{15}{16}n_S^2 \frac{a_i^3}{a_S} e_i \cos(\lambda_S - \varpi_i) \\ & \frac{3}{8}n_S^2 \frac{a_i^3}{a_S} \cos(\theta_1 - \theta_2 + \lambda_S) \end{aligned}$$

que produzem uma variação em λ_i .

A seguir, apresentaremos a forma final da perturbação solar, após fazer a média, tanto em variáveis de Poincaré como em variáveis regulares.

3.2.1. Função perturbadora média em variáveis de Poincaré

Aplicando a Equação (3.14) à função perturbadora do Sol (3.53), eliminamos os termos que dependem do ângulo rápido θ_2 , obtendo as seguintes expressões a seguir, com suas respectivas equações de movimento, onde novamente foi utilizada a regra da cadeia para

Estrutura do problema

levar em conta as relações entre os elementos orbitais e as variáveis de Poincaré:

$$\mathcal{R}_S \equiv \langle \mathcal{R}_S \rangle = \sum_{i=1}^2 G m_S \left[\frac{1}{4} \frac{a_i^2}{a_S^3} + \frac{3}{8} \frac{a_i^2}{a_S^3} e_i^2 (1 + 5 \cos(2\lambda_S - 2\varpi_i)) - \frac{15}{16} \frac{a_i^3}{a_S^4} e_i \cos(\lambda_S - \varpi_i) \right] \quad (3.54)$$

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial \mathcal{R}_S}{\partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial J_1} + \frac{\partial \mathcal{R}_S}{\partial e_i} \frac{\partial e_i}{\partial J_1} \right) \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varpi_i}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{R}_S}{\partial e_i} \frac{\partial e_i}{\partial \tilde{G}_i} \\ \frac{dJ_i}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{R}_S}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{d\tilde{G}_i}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{R}_S}{\partial \varpi_i} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Para incorporar estas expressões ao Hamiltoniano do problema co-orbital (Equação 3.18) tem que ser considerado que a Equação (3.54) foi desenvolvida em um sistema de coordenadas de Jacobi, enquanto que o Hamiltoniano co-orbital foi desenvolvido em coordenadas democráticas geocêntricas. Mas levando em conta a hipótese proposta para obter a Equação (3.41) e a forma da (3.39), basta multiplicar cada termo de \mathcal{R}_S pela respectiva massa do corpo perturbado m_i , isto é:

$$\mathcal{R}_S \rightarrow m_1 \mathcal{R}_S^{(L)} + m_2 \mathcal{R}_S^{(t)}$$

3.2.2. Função perturbadora média em variáveis regulares de Poincaré

Consideramos agora a mudança de variáveis da mesma forma que feito na Seção 3.1.2, e obtemos:

$$\mathcal{R}_S \equiv \langle \mathcal{R}_S \rangle = \sum_{i=1}^2 Gm_i m_S \left[\frac{1}{4} \frac{a_i^2}{a_S^3} - \frac{15}{16} \frac{a_i^3}{a_S^4} (k_1 \cos \lambda_S + h_1 \sin \lambda_S) + \frac{3}{8} \frac{a_i^2}{a_S^3} (h_1^2 + k_1^2 + 5(k_1^2 - h_1^2) \cos 2\lambda_S + 10 h_1 k_1 \sin 2\lambda_S) \right] \quad (3.57)$$

$$\frac{d\theta_1}{dt} = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial \mathcal{R}_S}{\partial a_i} \frac{\partial a_i}{\partial J_1} + \frac{\partial \mathcal{R}_S}{\partial h_i} \frac{\partial h_i}{\partial J_1} + \frac{\partial \mathcal{R}_S}{\partial k_i} \frac{\partial k_i}{\partial J_1} \right) \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} \frac{dK_i}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{R}_S}{\partial h_i} \frac{\partial h_i}{\partial H_i} \\ \frac{dJ_1}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{R}_S}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{dH_i}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{R}_S}{\partial k_i} \frac{\partial k_i}{\partial K_i} \end{aligned} \quad (3.59)$$

3.3. Efeito de maré

Até agora temos considerado os objetos como massas puntiformes, sem dimensões físicas. Quando se considera a interação gravitacional entre corpos extensos aparece o conceito de maré. A maré é uma distorção na figura de equilíbrio de um corpo induzida pela atração gravitacional de outro corpo em sua proximidade. No caso da Terra, as marés são causadas pela Lua e, em menor medida, pelo Sol. Note-se que o efeito de maré não depende tanto da magnitude da força de atração gravitacional entre os corpos quanto da sua proximidade, como veremos a seguir.

Consideremos a atração gravitacional \vec{F}_P sentida por uma partícula de massa m localizada em um ponto P na superfície da Terra, de massa m_0 e raio R_0 . Seja r a distância entre o centro da Terra O e a Lua, considerada como um corpo puntiforme de massa m_1 . Seja ainda d a distância entre o ponto P e a Lua (Figura 3.5).

A força diferencial $\delta \vec{F}$ no ponto P em relação ao centro da Terra é $\delta \vec{F} = \vec{F}_P - \vec{F}_O$, sendo \vec{F}_O a força que a partícula sentiria se estivesse no ponto O . Assumindo que $d \gg R_0$, o ângulo ϱ subtendido entre as forças \vec{F}_P, \vec{F}_O é muito pequeno e a direção da força \vec{F}_P é quase paralela à direção da força \vec{F}_O . Portanto, podemos simplificar e escrever

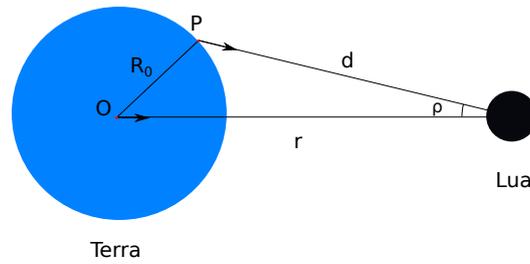


Figura 3.5.: Configuração esquemática das forças aplicadas sobre dois pontos na superfície da Terra. O ponto central O a uma distância r da Lua, e um ponto P sobre a superfície a uma distância d da Lua. Devido a que $d \gg R_0$ o ângulo ϱ subtendido entre as forças aplicadas sobre P e O é pequeno.

$|\delta\vec{F}| = |\vec{F}_P| - |\vec{F}_O|$ ou $\delta F = F_P - F_O$. Levando em consideração que:

$$F_P = \frac{Gm_1m}{(r - R_0)^2}, \quad F_O = \frac{Gm_1m}{r^2}$$

podemos escrever

$$\delta F = Gm_1m R_0 \frac{2r - R_0}{r^4} \left(1 - \frac{2R_0}{r} + \frac{R_0^2}{r^2}\right)^{-1}$$

e supondo $r \gg R_0$, temos $2r - R_0 \sim 2r$ e $1 - \frac{2R_0}{r} + \frac{R_0^2}{r^2} \sim 1$, assim:

$$\delta F = \frac{2Gm_1m R_0}{r^3}$$

Generalizando isto para uma partícula qualquer dentro do volume da Terra, temos

$$dF = \frac{2Gm_1m}{r^3} dr \quad (3.60)$$

sendo dr a separação entre os pontos para os quais estamos calculando a força diferencial. Comparando agora a intensidade da maré produzidas pelo Sol (de massa m_2) e pela Lua (de massa m_1) sobre uma partícula de massa m na superfície da Terra temos:

$$\frac{dF_1}{dF_2} = \frac{m_2}{m_1} \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^3 \sim 0,46 \quad (3.61)$$

sendo d_1 e d_2 às distâncias da Terra a Lua e ao Sol, respectivamente. Portanto, embora a massa do Sol seja muito maior do que a da Lua, por ele estar muito mais distante a maré provocada por este tem menos da metade do efeito da provocada pela Lua. Podemos dizer que a maré ocorre devido a uma diferença sutil entre a atração gravitacional que sofrem os diversos elementos de massa de uma Terra extensa (Butikov, 2002).

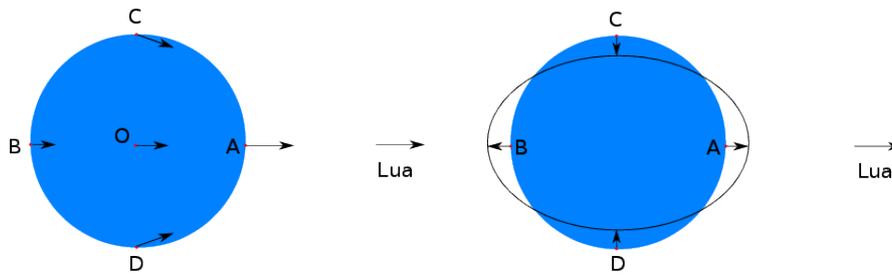


Figura 3.6.: Na imagem da esquerda desenhamos as forças de atração que exerce a Lua em diferentes pontos sobre a superfície da Terra (pontos A, B e C), e a força que exerceria sobre um ponto situado no centro O da Terra. À direita, são desenhadas as forças de marés nos pontos A, B e C, resultando em um elipsoide.

Para entender o mecanismo gerador da maré, vamos assumir que a Terra é um fluido totalmente elástico, isto é, constituída por um material que responde imediatamente a qualquer força externa aplicada. Como vimos, a força de maré é causada pela diferença entre a força de atração que a Lua exerce sobre um elemento de massa a uma distância R do centro da Terra e a força que exerceria sobre o mesmo elemento se estivesse no centro da Terra (Figura 3.6 esquerda). O efeito total, integrado sobre todos os elementos de massa, é a aparição sobre a superfície de equilíbrio da Terra de dois calombos ou bojos, um apontando na direção da Lua e outro apontando na direção oposta, de maneira que a figura de equilíbrio da Terra é um elipsoide de revolução (Figura 3.6 direita). Contudo, esta não é a situação real, pois a Terra não é perfeitamente elástica. A viscosidade do corpo e outras fontes internas de atrito, atrasaram a resposta do corpo sólido na presença de uma força externa, gerando uma diferença em tempo ou atraso (*lag* em inglês) entre o instante que a força foi aplicada e o instante em que o corpo muda a sua forma. Em função disto, a direção dos calombos na superfície da Terra não fica alinhada com a direção em que se encontra a Lua, mas forma um ângulo δ com respeito à linha que une os centros da Terra e da Lua, chamado de ângulo de fase. Levando em conta que a Terra rotaciona em sentido prógrado (anti-horário) com velocidade angular Ω_T , e que o movimento médio da Lua (também em sentido anti-horário) é n_L , a direção do ângulo δ dependerá da diferença entre estas velocidades. Se $\Omega_T > n_L$, o alongamento da superfície ocorre à frente (no mesmo sentido da rotação da Terra) da linha que passa pelo centro dos dois corpos, isto é $\delta > 0$ (Figura 3.7). Se por outro lado $\Omega_T < n_L$, então $\delta < 0$ ².

O ângulo δ terá influência em dois aspectos. O primeiro se refere à deformação do corpo, que pode ser medida a partir de um parâmetro Q denominado de fator de dissipação.

² Esta situação não deve ter ocorrido na história do sistema Terra-Lua, mas é muito comum no caso de planetas extra-solares orbitando muito próximos das suas estrelas hospedeiras.

Estrutura do problema

Este parâmetro é definido como a diferença entre a energia perdida pelo atrito interno da Terra e a energia orbital (no caso, da órbita da Terra em volta da Lua, cujo movimento médio também é n_L). Devido a que δ depende das velocidades orbital e rotacional, ele também depende de Q (MacDonald, 1964), em particular $\delta = 1/Q$ (Ferraz-Mello, Rodríguez, & Hussmann, 2008). O valor deste parâmetro é difícil de medir porque tem a ver com características físicas do corpo como: rigidez do material, viscosidade, gravidade superficial, densidade, etc. Goldreich & Soter (1966) derivam valores para diferentes objetos no Sistema Solar, e acham que corpos rochosos devem ter valores de Q no intervalo de 10 até 500, enquanto que os planetas gasosos têm $Q \sim 6 \times 10^4$.

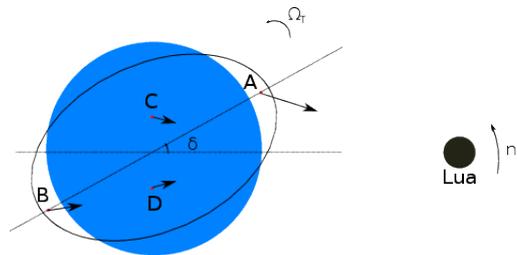


Figura 3.7.: Ângulo de fase δ no caso de $\Omega_T > n_L$. Mostram-se quatro pontos onde se indicam os vetores da força gravitacional por parte da Lua. As forças nos pontos C e D são compensadas, mas no caso dos pontos A e B se produz um torque τ , que retarda a rotação da Terra (Ω_T diminui).

O segundo aspecto se refere às mudanças na rotação da Terra. No caso de ter $\Omega_T > n_L$, na Figura 3.7 podemos ver que existe uma força sobre uma partícula localizada na posição C que tende a fazer girar a Terra em sentido horário. Esta força fica compensada pela força produzida sobre uma partícula situado no ponto D, que tenderá fazer girar a Terra em sentido anti-horário. Os pontos A e B formam um par onde esse efeito também acontece: a força da Lua sobre o ponto A leva a Terra a girar em sentido horário, enquanto que em B o efeito é oposto. Porém, como A e B não se encontram à mesma distância da Lua, a força sobre A é maior que sobre B, devido ao fato de A ficar mais perto do satélite. O resultado então é a aparição de um torque Υ que tende a frear a rotação da Terra. Por outro lado, quando $\Omega_T < n_L$ o sinal do torque será diferente e nesse caso a rotação da Terra acelerar-se-ia (Murray & Dermott, 1999).

Assim como o campo gravitacional da Lua, considerada como corpo puntiforme, afeta a rotação da Terra, considerada como corpo extenso, é razoável esperar que o efeito gravitacional da Terra (puntiforme) sobre a Lua (extensa) seja similar. Neste caso, devido ao fato da Lua ser um objeto menos extenso do que a Terra, e sem importar a velocidade de rotação inicial da Lua (menor ou maior do que o seu movimento médio), chegará um

momento em que a deformação desta ficará alinhada com a direção da Terra. Nesse ponto, $\Upsilon = 0$ e a rotação da Lua não mudará mais, tendo atingido uma configuração na qual $n_L \simeq \Omega_L$. Esta configuração é chamada de sincronismo³ ou também de acoplamento spin-órbita (Goldreich & Peale, 1966), e é o motivo pelo qual atualmente só vemos uma face da Lua. Evidências paleontológicas revelaram que tanto a rotação da Terra quanto a da Lua foram mais rápidas nas eras Paleozoica e Mesozoica do que nos dias atuais (Rosenberg & Runcorn, 1975), e que ambas as rotações foram freadas pelas forças de maré mútuas. Resultados de simulações hidrodinâmicas (Kokubo & Genda, 2010; Čuk & Stewart, 2012) mostraram que o período de rotação da Terra logo após ter formado a Lua foi de $\sim 2,3$ h. O estado inicial do spin da Lua é, a princípio, desconhecido. Estudos desenvolvidos por Hut (1981) mostram que o tempo necessário para atingir o sincronismo neste tipo de sistemas é relativamente curto, pelo que geralmente é adotado que a rotação inicial da Lua era síncrona ou muito próxima do sincronismo e tendendo assintoticamente a esta condição (Meyer et al., 2010).

Voltando ao caso da maré na Terra, vemos que por conservação de momento angular, o torque Υ que freia a rotação da Terra é contrabalanceado por um torque $-\Upsilon$ de igual direção mas sentido oposto aplicado sobre a órbita da Lua. Este torque atua acelerando o movimento médio da Lua n_L , ou seja, fazendo com que aumente o semieixo maior da sua órbita. Assim, o satélite vai se afastando gradativamente da Terra ao longo do tempo. Como já comentamos, com base no modelo de formação da Lua por um impacto único, a mesma teria se formado além do limite de Roche ($\sim 2,9 R_T$) e evoluiu pelo efeito da maré até os $60 R_T$ atuais. Por outro lado, no caso de ter sido $\Omega_T < n_L$, o semieixo maior do satélite teria diminuído até colidir com a Terra. Este último mecanismo opera de fato em Phobos, um dos satélites de Marte (Cazenave et al., 1980). Além de fazer aumentar o semieixo maior da órbita da Lua, o efeito de maré produz mudanças também sobre a sua excentricidade. Enquanto que a maré na Terra tende a aumentar a excentricidade da órbita da Lua (Jeffreys, 1961), a maré na Lua tende a diminuir a excentricidade da órbita (Goldreich, 1963).

A teoria de maré originou-se a partir dos trabalhos de Newton e Laplace. Entretanto, o primeiro modelo completo foi desenvolvido recém no final do século XIX por Darwin (1880). A ideia por trás de qualquer teoria de maré envolve dois aspectos: determinar o potencial gerado pela deformação do corpo que sofre a maré e estudar o efeito deste

³ Rigorosamente falando, a condição de sincronismo é dada por $n_T \simeq \Omega_L$, ou seja a velocidade orbital do corpo que gera a maré se sincroniza com a velocidade de rotação do corpo que sofre a maré. Mas como o fenômeno é analisado no âmbito de um problema de dois corpos isolados, tem-se que $n_T = n_L$.

potencial sobre um corpo de massa m em um ponto arbitrário do espaço. Em particular, este corpo pode ser o próprio que gera a maré. O potencial do corpo deformado é expandido em uma série de harmônicos, cada um vinculado a diferentes combinações das frequências Ω e n chamadas de ondas de maré, por exemplo $2\Omega - 2n$, $2\Omega - 3n$, $2\Omega - n$, $2n$, 2Ω , etc. Esta série harmônica é válida para o caso em que o corpo se deforma de maneira elástica. No caso de deformação inelástica, a solução de Darwin foi introduzir diferentes atrasos de fase em cada harmônico, ficando as equações de movimento expressas em termos destes atrasos. Na teoria de Darwin, os atrasos são introduzidos “ad-hoc”, e no caso mais simples podem ser considerados todos iguais.

Mignard (1979) e Touma & Wisdom (1994) aplicaram a teoria de Darwin, com alguns aprimoramentos, para analisar a evolução do sistema Terra-Lua devida ao efeito de maré. Modificações da teoria de Darwin também permitiram estudar a evolução orbital e rotacional de outros sistemas de satélites do Sistema Solar. Alguns dos trabalhos mais destacados são Jeffreys (1961), Goldreich (1963, 1965), Kaula (1964), MacDonald (1964), Goldreich & Soter (1966). Com a descoberta de exoplanetas, e em particular de gigantes gasosos perto da estrela hospedeira (*hot Jupiters*), outros autores como Jackson et al. (2008) investigaram a evolução orbital dos mesmos. Em geral, as fórmulas utilizadas por estes autores diferem entre si, devido principalmente a diferentes convenções utilizadas para descrever as forças e torques de maré entre os objetos. Uma revisão da teoria de Darwin, unificando algumas convenções, foi realizada por Ferraz-Mello et al. (2008). Cabe destacar que, recentemente, têm sido propostas teorias de maré alternativas que evitam a introdução de *lags* arbitrários, como o modelo de Efroimsky & Williams (2009) e o modelo de maré de fluência de Ferraz-Mello (2013).

As equações que descrevem o efeito de maré são matematicamente complicadas e não é o objetivo deste trabalho fazer um estudo detalhado sobre a sua obtenção no sistema Terra-Lua-troiano. O que será analisado é a variação que ocorre nos valores de excentricidade e semieixo maior dos satélites devido a este efeito. Em particular, consideramos as equações de variação no tempo de a e e para cada corpo separadamente. É importante destacar que as rotações dos objetos não estão sendo consideradas no modelo. Os efeitos de maré entre o troiano e a Lua poderiam não ser desprezíveis, mas devido à dificuldade de desenvolver equações para esse subsistema, em primeira aproximação consideraremos apenas a maré entre a Terra e a Lua e a maré entre a Terra e o troiano⁴. Para um detalhamento

⁴ O Hamiltoniano $\mathcal{H}+\mathcal{R}_S$ inclui termos que envolvem a dinâmica kepleriana (problema de dois corpos dos satélites com a Terra) mais a interação entre os satélites. Para o efeito de maré não encontramos um desenvolvimento analítico que considere a interação entre os satélites. Assim, o modelo de maré

da dedução das equações, referimos o leitor ao trabalho de Ferraz-Mello, Rodríguez, & Hussmann (2008). Lembrando que o subíndice 0 se refere à Terra, 1 à Lua e 2 ao troiano, temos que as variações do semieixo e da excentricidade são dadas por:

$$\dot{a}_i = \left(3 + \frac{153}{4}e_i^2\right) \sqrt{\frac{G}{m_0}} m_i R_0^5 \frac{k_{l0}}{Q_0} \frac{1}{a_i^{11/2}} - 21 \sqrt{Gm_0^3} \frac{R_i^5}{m_i} \frac{k_{li}}{Q_i} \frac{e_i^2}{a_i^{11/2}} \quad (3.62)$$

$$\dot{e}_i = \frac{57}{8} \sqrt{\frac{G}{m_0}} m_i R_0^5 \frac{k_{l0}}{Q_0} \frac{e_i}{a_i^{13/2}} - \frac{21}{2} \sqrt{Gm_0^3} \frac{R_i^5}{m_i} \frac{k_{li}}{Q_i} \frac{e_i}{a_i^{13/2}} \quad i = 1, 2 \quad (3.63)$$

onde R_0, R_i são os raios dos corpos, Q_0, Q_i são os fatores de dissipação, e k_{l0}, k_{li} são os números de Love. Neste trabalho, adotamos os valores $Q_0 = 100$, $k_0 = 0,34$, $Q_i = 10$ e $k_i = 0,03$, encontrados tipicamente na literatura. É interessante notar que na Equação (3.62), o primeiro termo corresponde ao efeito na órbita da Lua/troiano ao redor da Terra devido à maré na Terra. Este termo foi obtido sob a hipótese que $\Omega_0 > n_i$, onde o fator de dissipação Q_0 está vinculado ao *lag* semi-diurno do termo $2\Omega_0 - 2n_i$; ele possui uma parte principal que não depende de e_i mais uma correção de $O(e^2)$, e é sempre positivo. Por outro lado, o segundo termo da equação, corresponde ao efeito na órbita da Terra ao redor da Lua/troiano devido à maré na Lua/troiano. Este termo é da $O(e^2)$, é sempre negativo e foi obtido sob a hipótese de sincronismo $\Omega_i \simeq n_i$. Neste caso, o fator de dissipação Q_i está vinculado ao *lag* semi-diurno do termo $2\Omega_i - n_0$. Como o termo da maré na Terra é o que domina, é óbvio que o efeito total faz aumentar o semieixo, mesmo no caso em que $e_i = 0$. Por outro lado, o primeiro e segundo termos na Equação (3.63) também correspondem à maré na Terra e na Lua/troiano, respectivamente, e foram obtidos sob as mesmas hipóteses. Como ambos termos são da $O(e)$, tanto um quanto outro pode dominar e, portanto, a excentricidade pode aumentar ou diminuir dependendo dos valores dos parâmetros.

Por completude, digamos que na hipótese que $\Omega_0 < n_i$, as Equações (3.62) e (3.63) mudam levemente para:

$$\begin{aligned} \dot{a}_i &= - \left(3 + \frac{171}{4}e_i^2\right) \sqrt{\frac{G}{m_0}} m_i R_0^5 \frac{k_{l0}}{Q_0} \frac{1}{a_i^{11/2}} - 21 \sqrt{Gm_0^3} \frac{R_i^5}{m_i} \frac{k_{li}}{Q_i} \frac{e_i^2}{a_i^{11/2}} \\ \dot{e}_i &= - \frac{75}{8} \sqrt{\frac{G}{m_0}} m_i R_0^5 \frac{k_{l0}}{Q_0} \frac{e_i}{a_i^{13/2}} - \frac{21}{2} \sqrt{Gm_0^3} \frac{R_i^5}{m_i} \frac{k_{li}}{Q_i} \frac{e_i}{a_i^{13/2}} \end{aligned} \quad (3.64)$$

A estrutura é semelhante, mas cabe destacar que neste caso ambos efeitos são sempre negativos, o que significa que o semieixo vai sempre diminuir e as órbitas tornar-se-ão

usado só considera as forças de maré produzidas sobre a Terra e os satélites.

circulares.

3.3.1. Incorporação do efeito de maré no modelo co-orbital

Como vimos na seção anterior, o efeito de maré provoca uma variação lenta (secular) no semieixo maior e excentricidade das orbitas da Lua e do troiano. A variação total sobre esses elementos orbitais pode então ser apresentada como:

$$\dot{a} = \dot{a}_{CS} + \dot{a}_M, \quad \dot{e} = \dot{e}_{CS} + \dot{e}_M \quad (3.65)$$

onde \dot{a}_{CS} e \dot{e}_{CS} são as variações do semieixo maior e da excentricidade em ausência do efeito de maré, isto é variações devido a dinâmica co-orbital e perturbação do Sol, e \dot{a}_M e \dot{e}_M são as variações descritas pelas Equações (3.62) e (3.63). Veremos a seguir como incorporar as Equações (3.65) nas equações de movimento (3.21)-(3.26). Cabe destacar que apenas os momentos canônicos serão afetados, pois só eles dependem explicitamente de a, e . Por efeito, os momentos $J_1, J_2, \bar{G}_1, \bar{G}_2$ podem ser expressos genericamente como $I = \beta\sqrt{\mu a}\Phi(e)$. Agora, derivando em função do tempo, obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{\partial I}{\partial a}\dot{a} + \frac{\partial I}{\partial e}\dot{e} \\ &= \frac{\partial I}{\partial a}(\dot{a}_{CS} + \dot{a}_M) + \frac{\partial I}{\partial e}(\dot{e}_{CS} + \dot{e}_M) \\ &= \frac{\partial I}{\partial a}\dot{a}_{CS} + \frac{\partial I}{\partial e}\dot{e}_{CS} + \frac{\partial I}{\partial a}\dot{a}_M + \frac{\partial I}{\partial e}\dot{e}_M \\ &= \frac{dI_{CS}}{dt} + \left(\frac{\partial I}{\partial a}\dot{a}_M + \frac{\partial I}{\partial e}\dot{e}_M \right) \\ &= \frac{dI_{CS}}{dt} + \frac{dI_M}{dt} \end{aligned} \quad (3.66)$$

onde o termo dI_{CS}/dt representa a variação do momento na ausência do efeito de maré (ou seja, a solução dada pelas Equações (3.21)-(3.26)), e o termo entre parêntesis tem a ver com a variação provocada por esse efeito. Nas equações para os momentos J_1 e J_2 , o termo referente à variação da excentricidade não existe. É importante salientar que, ao introduzir o efeito de maré, o momento J_2 que no Hamiltoniano médio era constante, apresentará uma variação com o tempo. De fato, a condição $J_2 = \text{cte.}$ no problema médio representa a conservação do momento angular orbital do sistema, e se espera que a introdução da maré cause uma mudança do momento angular orbital em função do torque aplicado. Cabe destacar, entretanto, que se o nosso modelo levasse em consideração também as variações

na rotação dos corpos, $\dot{\Omega}$, o momento angular total do sistema (orbital + rotacional) conservar-se-ia.

3.3.1.1. Maré em variáveis regulares de Poincaré

Para introduzir o efeito de maré nas equações (3.30)-(3.35), escrevemos:

$$\begin{aligned}\dot{a} &= \dot{a}_{CS} + \dot{a}_M \\ \dot{h} &= \dot{h}_{CS} + \dot{h}_M \\ \dot{k} &= \dot{k}_{CS} + \dot{k}_M\end{aligned}\tag{3.67}$$

onde como antes $\dot{a}_{CS}, \dot{h}_{CS}, \dot{k}_{CS}$ são as variações devidas apenas à dinâmica co-orbital, e \dot{a}_M é dado pela Equação (3.62). Levando em conta a definição de h, k temos que:

$$\begin{aligned}\dot{h}_M &= \dot{e}_M \sin \varpi + \dot{\varpi}_M e \cos \varpi \\ \dot{k}_M &= \dot{e}_M \cos \varpi - \dot{\varpi}_M e \sin \varpi\end{aligned}\tag{3.68}$$

A principio a maré causa variação do perigeu (Ferraz-Mello et al., 2008), mas por simplicidade no nosso modelo não é levada em conta essa variação, ou seja, considerarmos $\dot{\varpi}_M = 0$. Então

$$\dot{h}_M = \frac{\dot{e}_M}{e} h, \quad \dot{k}_M = \frac{\dot{e}_M}{e} k\tag{3.69}$$

sendo \dot{e}_M dado pela Equação (3.63).

A seguir, notamos que neste caso não apenas os momentos K_1, K_2 mas também as coordenadas H_1, H_2 são função de a, e e podem ser escritas de forma genérica como $I = \beta \sqrt{\mu a} \Phi(h, k)$. Derivando no tempo, temos:

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= \frac{\partial I}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial I}{\partial h} \dot{h} + \frac{\partial I}{\partial k} \dot{k} \\ &= \frac{\partial I}{\partial a} (\dot{a}_{CS} + \dot{a}_M) + \frac{\partial I}{\partial h} (\dot{h}_{CS} + \dot{h}_M) + \frac{\partial I}{\partial k} (\dot{k}_{CS} + \dot{k}_M) \\ &= \frac{\partial I}{\partial a} \dot{a}_{CS} + \frac{\partial I}{\partial h} \dot{h}_{CS} + \frac{\partial I}{\partial k} \dot{k}_{CS} + \frac{\partial I}{\partial a} \dot{a}_M + \frac{\partial I}{\partial h} \dot{h}_M + \frac{\partial I}{\partial k} \dot{k}_M \\ &= \frac{dI_{CS}}{dt} + \left(\frac{\partial I}{\partial a} \dot{a}_M + \frac{\partial I}{\partial h} \dot{h}_M + \frac{\partial I}{\partial k} \dot{k}_M \right) \\ &= \frac{dI_{CS}}{dt} + \frac{dI_M}{dt}\end{aligned}\tag{3.70}$$

Novamente, para J_1, J_2 as expressões não dependem das variações em h, k ; para H_1, H_2

Estrutura do problema

não dependem de variações em k e para K_1K_2 não dependem de variações em h .

4 Mapeamentos simpléticos

O estudo de sistemas dinâmicos dentro do Sistema Solar necessita de integradores numéricos que consigam reproduzir as características dinâmicas durante um intervalo de tempo muito longo. Para o estudo de diversos problemas no Sistema Solar são usados integradores simpléticos, por serem, como se mostrará a seguir, ferramentas que conseguem reproduzir muito bem a dinâmica global de um sistema (pontos de equilíbrio, regiões de regularidade e caoticidade no espaço de fases, etc.), além de serem mais rápidos do que os integradores numéricos clássicos não simpléticos.

Neste capítulo abordaremos alguns conceitos básicos utilizados na construção do nosso mapa simplético, e posteriormente, indicaremos a forma em que foi construído.

4.1. Conceitos básicos sobre fluxos e mapas

Matematicamente, um sistema dinâmico é definido por um sistema de equações, através do qual evoluímos as variáveis que representam o estado dinâmico do sistema em função do tempo. O tempo t pode ser caracterizado como uma variável contínua ou discreta. Para o caso do tempo ser uma variável contínua, a solução do sistema constitui um fluxo. Já quando t for discreto, a solução constitui um mapa ou mapeamento.

Os fluxos são sistemas dinâmicos representados por equações diferenciais, logo, conhecida uma condição inicial, a evolução do sistema é obtida através da integração dessas equações. Isto nos fornece uma solução válida, a princípio, para todos instantes de tempo. Os mapas, por sua vez, são representados por equações de diferenças, que fornecem a informação do estado do sistema no tempo t_n em função de um estado passado t_{n-1} ; contudo, nada pode ser afirmado sobre os estados intermediários entre esses tempos. Formalmente,

um mapa é uma aplicação $M : S \rightarrow S$ de um espaço métrico S em si mesmo, tal que:

$$x_{n+1} = M(x_n). \quad (4.1)$$

A aplicação permite construir a sucessão $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots\}$ a partir de uma condição inicial x_0 .

4.2. Integradores numéricos como mapas

O nosso problema é resolver as equações de Hamilton (Equação 2.16):

$$\dot{\eta} = \mathbf{f}(\eta, t) \quad (4.2)$$

sujeitas à condição inicial $\eta(t_0) = \eta_0$, o que se conhece como problema de valor inicial ou PVI. Na prática, a solução exata pode ser calculada em forma analítica só no caso em que o sistema descrito pelas equações é integrável, o que ocorre raramente. Desta forma, para a maioria dos problemas a alternativa é encontrar soluções aproximadas mediante métodos numéricos. A solução numérica de um PVI não é obtida como uma aproximação contínua da solução exata, mas como um conjunto de valores aproximados da solução em valores discretos da variável independente, no nosso caso, o tempo t . A abordagem mais simples consiste em encontrar a solução numérica a partir da condição inicial em n intervalos de tempo equidistantes $t_0 + i\tau$, ($i = 1, \dots, n$). Na literatura existem numerosos métodos numéricos para resolver PVI, tais como: o método de Taylor, os métodos de passo simples como Runge-Kutta e seus derivados, os métodos de extrapolação ao limite como Bulirsch-Stoer, e os métodos multi-passo (preditor-corretor) como Adams-Moulton, entre outros. Na maioria dos casos, as soluções obtidas com estes métodos são precisas, mas os erros de truncamento da solução se acumulam com o tempo e, particularmente no caso de sistemas dinâmicos conservativos, introduzem uma componente espúria na solução que faz com que a energia do sistema não seja constante. Os métodos simpléticos são uma classe de integradores específicos para sistemas hamiltonianos que evitam a mudança sistemática da energia e assim conseguem respeitar a física do problema.

4.3. Mapas simpléticos

Um método de integração numérica das equações de Hamilton se diz simplético se a propagação das variáveis de estado do sistema $\boldsymbol{\eta}$ entre um tempo t e um tempo $t + \tau$ é expressa por uma transformação canônica. Isto garante que:

- O integrador simplético preserva o volume no espaço de fases do sistema ao longo do tempo;
- O integrador simplético preserva, em primeira aproximação, a energia do sistema, pois os erros de truncamento não introduzem variações sistemáticas na energia do problema (a energia pode apresentar variações, mas as mesmas se mantêm limitadas).

Para mostrar como os integradores simpléticos são construídos, vamos utilizar a teoria mencionada na Seção 2.4.

4.3.1. Mapa simplético de primeira ordem

Segundo a Equação (2.20), a evolução de um sistema hamiltoniano sobre um intervalo de tempo τ , a partir de um valor inicial, é dada por:

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \exp \tau \hat{\mathcal{H}} \boldsymbol{\eta}_0.$$

Se o Hamiltoniano é escrito na forma

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1, \quad (4.3)$$

a solução será dada por:

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \exp \tau \left(\hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_1 \right) \boldsymbol{\eta}_0. \quad (4.4)$$

É importante destacar que os operadores colchete de Poisson não comutam, isto é: $\hat{\mathcal{H}}_0 \hat{\mathcal{H}}_1 \neq \hat{\mathcal{H}}_1 \hat{\mathcal{H}}_0$. Assim,

$$\begin{aligned} \exp \tau \left(\hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_1 \right) &= 1 + \tau \left(\hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_1 \right) + \frac{\tau^2}{2} \left(\hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_1 \right)^2 + \dots \\ &= 1 + \tau \left(\hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_1 \right) + \frac{\tau^2}{2} \left(\hat{\mathcal{H}}_0^2 + \hat{\mathcal{H}}_0 \hat{\mathcal{H}}_1 + \hat{\mathcal{H}}_1 \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_1^2 \right) + \dots \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \exp \tau \hat{\mathcal{H}}_0 \exp \tau \hat{\mathcal{H}}_1 &= \left(1 + \tau \hat{\mathcal{H}}_0 + \frac{\tau^2}{2} \hat{\mathcal{H}}_0^2 + \dots \right) + \left(1 + \tau \hat{\mathcal{H}}_1 + \frac{\tau^2}{2} \hat{\mathcal{H}}_1^2 + \dots \right) \\ &= 1 + \tau (\hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_1) + \frac{\tau^2}{2} (\hat{\mathcal{H}}_0^2 + 2\hat{\mathcal{H}}_0 \hat{\mathcal{H}}_1 + \hat{\mathcal{H}}_1^2) + \dots \end{aligned}$$

e comparando ambas expressões vemos que elas são iguais até primeira ordem. Portanto, a Equação (4.4) pode ser escrita como:

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \exp \tau \hat{\mathcal{H}}_0 \exp \tau \hat{\mathcal{H}}_1 \boldsymbol{\eta}_0 + O(\tau^2) \quad (4.5)$$

Então, descartando os termos da $O(\tau^2)$, a equação anterior representa a composição de duas transformações canônicas:

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \exp \tau \hat{\mathcal{H}}_0 \tilde{\boldsymbol{\eta}}, \quad \tilde{\boldsymbol{\eta}} = \exp \tau \hat{\mathcal{H}}_1 \boldsymbol{\eta}_0$$

e portanto também é canônica. Em particular, a Equação (4.5) constitui um integrador ou mapa simplético de primeira ordem. Neste caso, cada operador série de Lie atua sobre um dos termos do Hamiltoniano, ignorando o outro. Isto equivale a fazer com que a cada passo de integração τ a solução seja construída em dois passos:

1. evoluindo o sistema só sob o efeito de \mathcal{H}_1 , por um intervalo temporal τ , e
2. evoluindo o sistema só sob o efeito de \mathcal{H}_0 , no mesmo intervalo temporal τ .

É importante destacar que este mapa de primeira ordem não conserva o Hamiltoniano original \mathcal{H} , mas conserva em forma exata um Hamiltoniano $\tilde{\mathcal{H}}$, que difere de \mathcal{H} em termos da $O(\tau)$, especificamente:

$$\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 + \frac{\tau}{2} [\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1] + O(\tau^2) \quad (4.6)$$

O Hamiltoniano $\tilde{\mathcal{H}}$ pode ser tão próximo de \mathcal{H} quanto se queira, bastando escolher um passo τ suficientemente pequeno. Entretanto, a Equação (4.6) tem uma consequência importante: como $\tilde{\mathcal{H}}$ depende de τ , o passo de integração não pode ser modificado ao longo da integração, sob pena de modificar a estrutura de $\tilde{\mathcal{H}}$ (e portanto, as propriedades do sistema físico que quer se estudar). Esta é a principal desvantagem dos mapas simpléticos

em relação a outros métodos de integração, como os algoritmos Runge-Kutta, nos quais é possível implementar estratégias de passo variável para aumentar a eficiência do método mantendo o erro da solução limitado. Outra desvantagem é que $\tilde{\mathcal{H}}$ muda ao transformar $\tau \rightarrow -\tau$, o que implica que a solução não é reversível no tempo.

4.3.2. Mapa simplético de segunda ordem

De forma análoga ao integrador de primeira ordem, um mapa simplético de segunda ordem pode ser construído considerando a composição de três operadores:

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \exp \frac{\tau}{2} \hat{\mathcal{H}}_1 \exp \tau \hat{\mathcal{H}}_0 \exp \frac{\tau}{2} \hat{\mathcal{H}}_1 \boldsymbol{\eta}_0 + O(\tau^3). \quad (4.7)$$

É fácil demonstrar que esta expressão é idêntica à Equação (4.4) até $O(\tau^2)$. Então, cada passo de integração τ consiste agora em três sub-passos:

1. o sistema evolui só sob o efeito de \mathcal{H}_1 , por metade do passo de integração,
2. o sistema evolui só sob o efeito de \mathcal{H}_0 , por um passo completo,
3. o sistema volta a evoluir só sob o efeito de \mathcal{H}_1 , por metade do passo de integração.

Este tipo de integrador é conhecido como “*leap-frog*”, e foi o método escolhido para resolver as equações de movimento do sistema co-orbital estudado neste trabalho. Destaquemos que o *leap-frog* conserva em forma exata o Hamiltoniano

$$\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 - \frac{\tau^2}{12} [[\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1], \mathcal{H}_0] - \frac{\tau^2}{24} [[\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1], \mathcal{H}_1] + O(\tau^4)$$

Neste caso, também não é possível mudar o tamanho do passo ao longo da integração, mas como $\tilde{\mathcal{H}}$ depende apenas de potências pares de τ , a solução é reversível no tempo.

Lembremos que o nosso modelo da dinâmica do sistema Terra-Lua-troiano-Sol, tem associado um Hamiltoniano médio que em coordenadas de Poincaré, por exemplo, é descrito pelas Equações (3.18) e (3.54):

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0(J_1, J_2, \theta_1) + \mathcal{H}_1(J_1, J_2, \bar{G}_1, \bar{G}_2, \theta_1, \varpi_1, \varpi_2) + \mathcal{R}_S(J_1, J_2, \bar{G}_1, \bar{G}_2, \varpi_1, \varpi_2, \lambda_S),$$

logo, o mapa simplético vem dado pela composição dos operadores:

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}(t) \simeq \exp \frac{\tau}{2} \hat{\mathcal{R}}_S \exp \frac{\tau}{2} \hat{\mathcal{H}}_1 \exp \tau \hat{\mathcal{H}}_0 \exp \frac{\tau}{2} \hat{\mathcal{H}}_1 \exp \frac{\tau}{2} \hat{\mathcal{R}}_S \tilde{\boldsymbol{\eta}}_0. \quad (4.8)$$

O mesmo procedimento pode ser aplicado ao Hamiltoniano em variáveis regulares de Poincaré (Equações 3.27 e 3.57).

Para incorporar o efeito de maré ao mapa simplético, aplicamos no início e no final de cada passo uma variação sobre os momentos do sistema calculada a partir do último termo nas Eqs. (3.66) e (3.70) multiplicado por metade do passo, isto é:

$$\tilde{\boldsymbol{\eta}}_0 = \boldsymbol{\eta}_0 + \frac{\tau}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}_M$$

e

$$\boldsymbol{\eta} = \tilde{\boldsymbol{\eta}} + \frac{\tau}{2} \dot{\boldsymbol{\eta}}_M$$

onde $\boldsymbol{\eta}_0, \boldsymbol{\eta}$ são as condições no início e no final de cada passo do mapa, e $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_0, \tilde{\boldsymbol{\eta}}$ são as grandezas evoluídas em forma symplectica através da Eq. (4.8). Assim, o esquema de integração envolve os seguintes estágios:

1. Consideramos as condições iniciais no tempo t_0 : $J_{10}, J_{20}, \bar{G}_{10}, \bar{G}_{20}, \theta_{10}, \varpi_{10}, \varpi_{20}, \lambda_{S0}$ no caso de variáveis de Poincaré, ou $J_{10}, J_{20}, K_{10}, K_{20}, \theta_{10}, H_{10}, H_{20}, \lambda_{S0}$ no caso de variáveis regulares.
2. Evoluímos a condição inicial devido ao efeito de maré, por um intervalo $\tau/2$,
3. Evoluímos o sistema considerando apenas a perturbação \mathcal{R}_S , por um intervalo $\tau/2$,
4. Evoluímos o sistema considerando apenas a perturbação \mathcal{H}_1 , por um intervalo $\tau/2$,
5. Evoluímos o sistema considerando apenas a parte principal \mathcal{H}_0 , por um intervalo τ ,
6. Repetimos o passo 4,
7. Repetimos o passo 3,
8. Repetimos o passo 2,
9. Obtemos os novos valores de $J_1, J_2, \bar{G}_1, \bar{G}_2, \theta_1, \varpi_1, \varpi_2, \lambda_s$, ou $J_1, J_2, K_1, K_2, \theta_1, H_1, H_2, \lambda_s$,
10. Voltamos ao passo 2.

A princípio, os estágios 2, 3 e 4 poderiam ser reunidos em um único estágio, da mesma forma que os estágios 6, 7 e 8. Entretanto, manter os estágios separados permite ter um controle mais simples de como as diferentes perturbações influenciam o movimento base

descrito por \mathcal{H}_0 , e facilitam o processo de “ligar” ou “desligar” termos de perturbação específicos.

Para implementar este esquema de integração, escrevemos um código na linguagem FORTRAN. A evolução do mapa em cada estágio (ou seja, o cômputo das séries de Lie e das variações pelo efeito de maré) é realizada utilizando o integrador numérico RA15 (Everhart, 1974), que é um método Runge-Kutta implícito de ordem 15. Este método foi escolhido pela sua eficiência e velocidade. Para funcionar, o código pede como entrada as seguintes informações:

- propriedades físicas dos corpos (Lua e troiano): m_i, Q_i, k_{li}
- condições iniciais do sistema: $a_i, e_i, \theta_1, \varpi_i, \lambda_S$
- tempo inicial e final da integração e tamanho do passo,
- parâmetros específicos da sub-rotina RA15

As unidades utilizadas pelo código são: massa da Lua (M_L), ano, e raio da Terra (R_T).

Um detalhe importante a destacar é a escolha do tamanho do passo τ . A princípio, dado que o Hamiltoniano do problema co-orbital é um Hamiltoniano médio, a escolha natural para o passo do mapa é o período da variável sinódica, ou seja, o ângulo θ_2 sobre o qual se faz a média. Neste caso, resulta ser:

$$\tau = \frac{2\pi}{n_L}$$

levando em consideração que os movimentos médios da Lua e do troiano são praticamente iguais. Este passo é definido em função do semieixo inicial da Lua, e é mantido fixo mesmo no caso em que as forças de maré fazem o semieixo da Lua migrar.

5 Resultados

Neste capítulo apresentamos os resultados obtidos do nosso modelo, considerando os valores dos parâmetros no início da formação da Lua. Para levar a cabo as integrações utilizamos o *cluster* da Coordenação de Astronomia e Astrofísica (COAA) do Observatório Nacional.

5.1. Hamiltoniano co-orbital

Nosso primeiro objetivo foi estudar o espaço de fases da parte integrável \mathcal{H}_0 do Hamiltoniano (Equação (3.19)) associado ao sistema Terra-Lua-troiano. Para isto, simulamos a Terra, a Lua e um troiano com massas de 0,003 e 0,04 M_L , onde a configuração inicial das órbitas de ambos os satélites foi $a_0 = 7 R_T$ e $e_0 = 0,001$. Como mencionado na Secção 2.2, alguns autores acham que quando o troiano atinge a ressonância de eveção em $\sim 40 R_T$, esta é responsável por desestabilizar a sua órbita e ejetá-lo do sistema. Assim, para estudar este efeito, consideramos uma outra configuração inicial em $a_0 = 40 R_T$. Resolvendo as equações de movimento de 3.19, em todos os casos vemos que, o espaço de fases contém órbitas ferradura, órbitas girino, e um outro tipo de órbitas especiais chamadas de órbitas quase-satélite. Nas imagens da Figura 5.1, mostramos o espaço de fases (σ_1, J_1) , onde $\sigma_1 = 2\theta_1$ ¹, para duas das configurações iniciais estudadas: 0,003 M_L e 7 R_T (imagens acima), e 0,04 M_L e 40 R_T (imagem embaixo). As linhas de cores representam diferentes tipos de órbitas possíveis. Em todos os casos encontramos cinco pontos lagrangianos (tal qual no P3CR). Distinguímos os pontos triangulares de Lagrange, L_4 e L_5 (em magenta) em $\sigma_1 = 60^\circ$ e $\sigma_1 = 300^\circ$, respectivamente. Circundando estes pontos encontramos as ór-

¹ Na literatura encontramos que é comum considerar os ângulos $\sigma = \lambda_2 - \lambda_1$ e $\Delta\varpi = \varpi_2 - \varpi_1$ para localizar os pontos lagrangianos. Portanto os resultados serão apresentados utilizando a mesma nomenclatura.

Resultados

bitas girino, com $10^\circ < \sigma_1 < 180^\circ$, enquanto que as órbitas ferradura acontecem quando $\sigma > 180^\circ$. Em amarelo podemos ver a separatriz de movimento que é originada no pontos colinear de Lagrange L_3 ($\sigma = 180^\circ$). A linha vermelha indica uma órbita quase-satélite e fica ao redor do ponto singular $\sigma_1 = 0^\circ$, que corresponde à condição de colisão entre a Lua e o troiano. Na imagem superior direita mostramos uma ampliação feita ao redor do ponto singular. Vemos a órbita quase-satélite e duas separatrizes de movimento, uma originada no ponto Lagrangiano L_1 (em azul) e outra originada no ponto L_2 (em laranja). A identificação dos pontos de equilíbrio foi feita segundo [Robutel & Pousse \(2013\)](#). É importante ressaltar que o resultado das integrações usando as variáveis de Poincaré e as variáveis regulares de Poincaré, são idênticos.

Uma vez conhecido o espaço de fases da parte integrável do Hamiltoniano, adicionamos a perturbação \mathcal{H}_1 em variáveis regulares (Equação 3.29). Neste caso a excentricidade desempenha um papel importante na evolução do sistema. Assim, as integrações foram feitas para os mesmo casos anteriores, mas agora utilizando excentricidades iniciais de $e_0 = 0,001$ e $e_0 = 0,1$. Vemos que, no caso de excentricidade pequena ($e = 0,001$), o espaço de fases do Hamiltoniano (3.27), para troianos com massas $0,003$ ou $0,04 M_L$, em 7 ou $40 R_T$, não sofre modificações apreciáveis com respeito ao descrito por \mathcal{H}_0 . Um exemplo pode ser visto na imagem superior da Figura 5.2. Por outro lado, para excentricidade grande ($e = 0,1$), o espaço de fases muda significativamente, para quaisquer valores das massas. Um exemplo para o caso $0,04 M_L$ e $7 R_T$ é apresentado na imagem inferior da Figura 5.2. Em todos os casos com excentricidade inicial grande, as órbitas quase-satélite não são perceptíveis.

5.2. Hamiltoniano co-orbital mais perturbação do Sol.

Incluindo o efeito da perturbação do Sol, o espaço de fases do Hamiltoniano $\mathcal{H} + \mathcal{R}_S$ é também modificado significativamente em alguns casos. Considerando quaisquer dos valores para a massa e a distância inicial do troiano, com $e = 0,001$, a perturbação do Sol é desprezível e o espaço de fases é similar àquele de \mathcal{H} . Quando é considerado um valor de excentricidade grande ($e = 0,1$), o espaço de fases fica mais perturbado para massas menores e distâncias maiores, como mostrado na Figura 5.3.

É de nosso interesse analisar a configuração troiana, isto é analisar a dinâmica nas proximidades dos pontos Lagrangianos L_4 e L_5 . Devido à simetria do problema, escolhemos trabalhar só no ponto L_4 (o resultados são similares para o ponto L_5). Nesta configuração

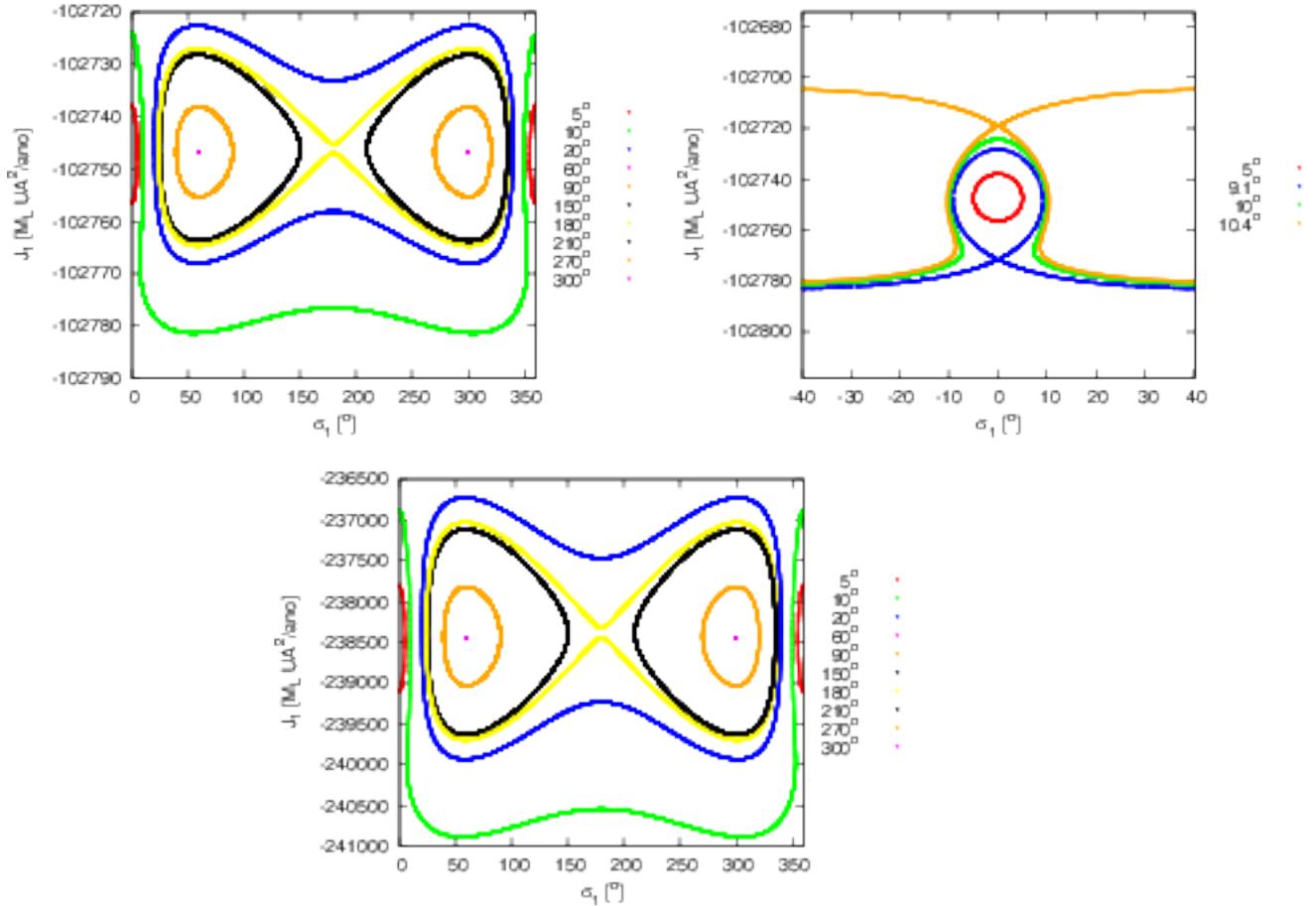


Figura 5.1.: Espaço de fases do Hamiltoniano integrável \mathcal{H}_0 do sistema Terra, Lua e troiano. Na imagem superior esquerda, o caso de um troiano de massa $0,003 M_L$ a uma distância de $7 R_T$. Na imagem inferior, o caso de um troiano de massa $0.04 M_L$ a uma distância de $40 R_T$. Os pontos na cor magenta, são L_4 ($\sigma_1 = 60^\circ$) e L_5 ($\sigma_1 = 300^\circ$). A separatriz de movimento entre os regimes girino e ferradura (linha de cor amarelo) é originada em L_3 ($\sigma_1 = 180^\circ$). Na imagem superior direita, vemos duas separatrizes de movimento, uma originada a partir do ponto L_1 (azul) que separa os regimes quase-satélite e ferradura, e outra originada no ponto L_2 (laranja) que separa os regimes quase-satélite e girino. Em vermelho mostramos uma órbita quase-satélite.

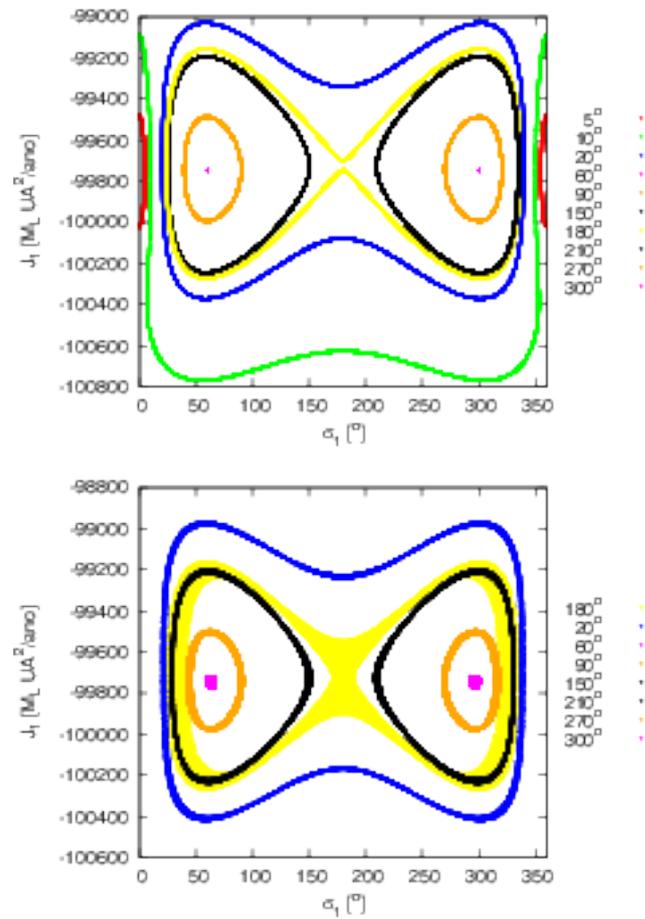


Figura 5.2.: Espaço de fases do Hamiltoniano co-orbital do sistema Terra, Lua e troiano. Na imagem superior, o espaço para o caso de um troiano de massa $0,04 M_L$ a uma distância de $7 R_T$, com excentricidade $e = 0,001$. Na imagem inferior, o espaço sofre alterações quando é considerada uma excentricidade grande ($e = 0,1$). Neste último caso as órbitas quase-satélite não aparecem.

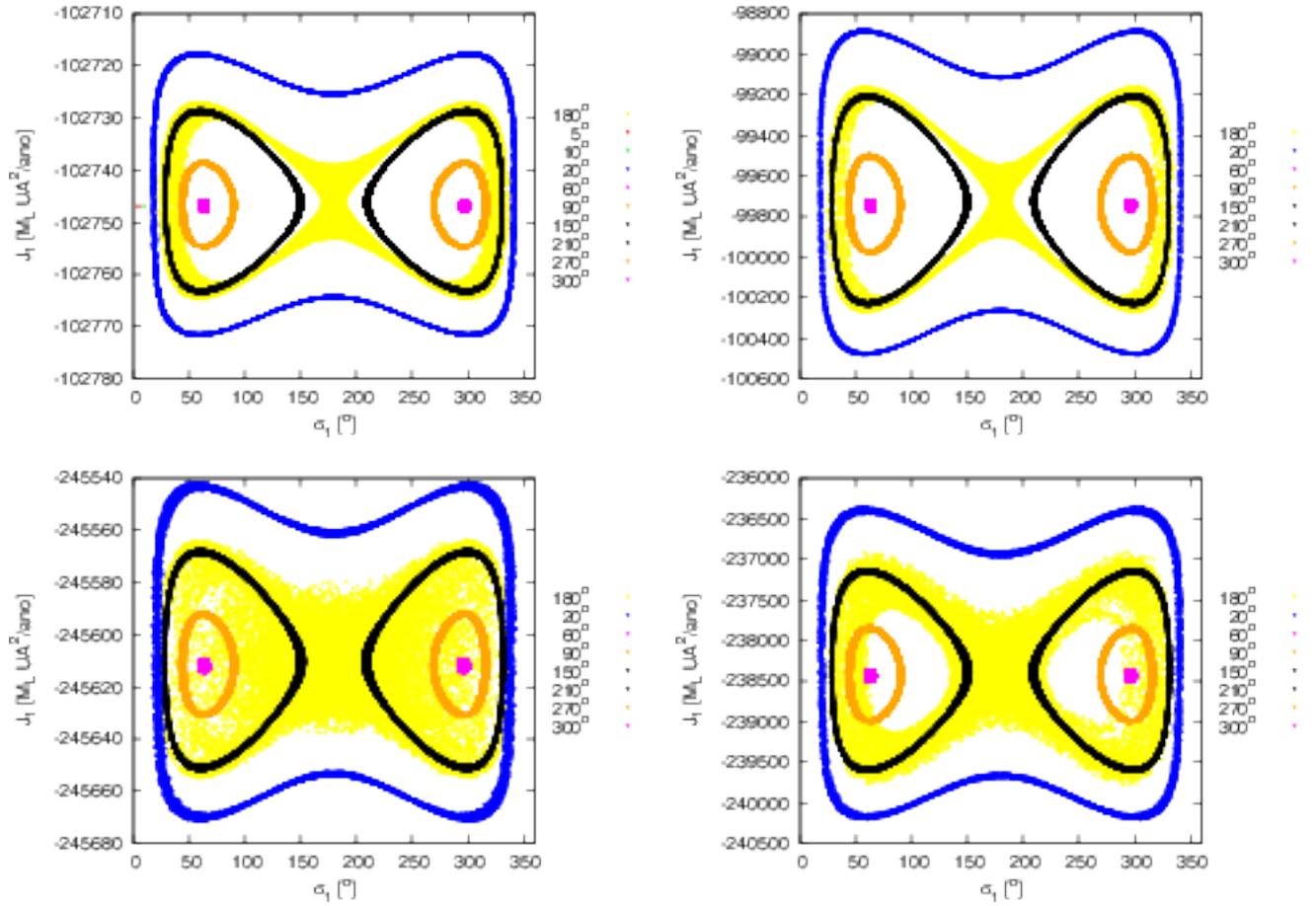


Figura 5.3.: Espaço de fases para o Hamiltoniano $\mathcal{H} + \mathcal{R}_S$, considerando uma excentricidade inicial grande ($e = 0.1$). Cada cor identifica órbitas com diferentes condições iniciais do ângulo σ_1 . Nas imagens acima, $a_0 = 7 R_T$. Nas imagens embaixo, $a_0 = 40 R_T$. Na coluna à esquerda, massa $0,003 M_L$, e à direita massa $0,04 M_L$.

Resultados

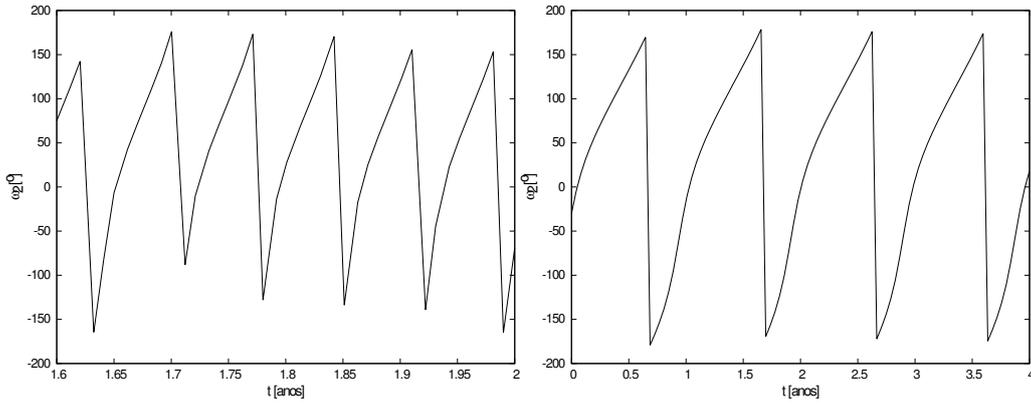


Figura 5.4.: Variação da longitude do perigeu do troiano (ϖ_2) no tempo. À esquerda, variação do ângulo para um troiano de $0,003 M_L$, em uma órbita com excentricidade baixa ($e = 0,001$) e a $7 R_T$. À direita, variação para um sistema similar, só que agora em $40 R_T$. O período de oscilação muda de $0,07$ anos para aproximadamente 1 ano.

orbital, estudamos o comportamento da longitude do perigeu ϖ_2 e da excentricidade da órbita do troiano, com e sem a perturbação do Sol. As condições iniciais consideradas foram: $\sigma_1 = 60^\circ$, $\Delta\varpi = 60^\circ$, $e = 0,001$, dois casos de semieixo, $a_0 = 7$ e $40 R_T$, e dois valores de massas $m_2 = 0,003$ e $0,04 M_L$. Como visto anteriormente, para baixas excentricidades e qualquer valor de m_2 , não há diferenças no espaço de fases do Hamiltoniano co-orbital, independentemente de considerar ou não a perturbação do Sol. Assim, em ambos os casos não há diferenças no comportamento de ϖ_2 : o ângulo circula, variando continuamente entre -180° e 180° . Entretanto, o período de circulação muda com a variação da distância inicial em relação à Terra. Na Figura 5.4 mostramos a evolução do ângulo ϖ_2 para um troiano de $0,003 M_L$ a $7 R_T$ (imagem à esquerda), e a $40 R_T$ (imagem à direita). No primeiro caso, o período de circulação é de $0,07$ anos, enquanto que no segundo caso é de ~ 1 ano. O resultado para um troiano de massa maior é similar. Salientamos que este resultado independe de considerar ou não a perturbação solar.

Por outro lado, a excentricidade oscila ao redor da condição inicial, como se mostra nas imagens da Figura 5.5. A figura corresponde aos mesmos casos que na figura anterior. O comportamento da excentricidade se mantém no caso de massa do troiano e excentricidade maiores.

Até aqui vimos o comportamento na dinâmica do troiano levando em consideração só a configuração co-orbital e a perturbação solar. A seguir mostraremos a influência do efeito de maré no nosso modelo.

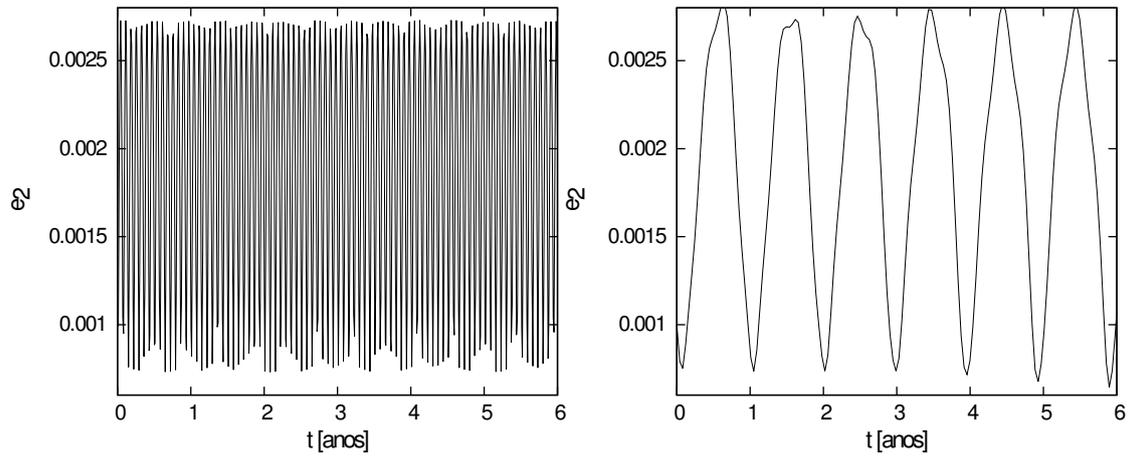


Figura 5.5.: Variação da excentricidade (e_2) no tempo. À esquerda, variação de excentricidade para um troiano de $0,003 M_L$, em uma órbita com excentricidade baixa ($e = 0,001$) e a $7 R_T$. À direita, variação para um sistema similar, só que agora em $40 R_T$.

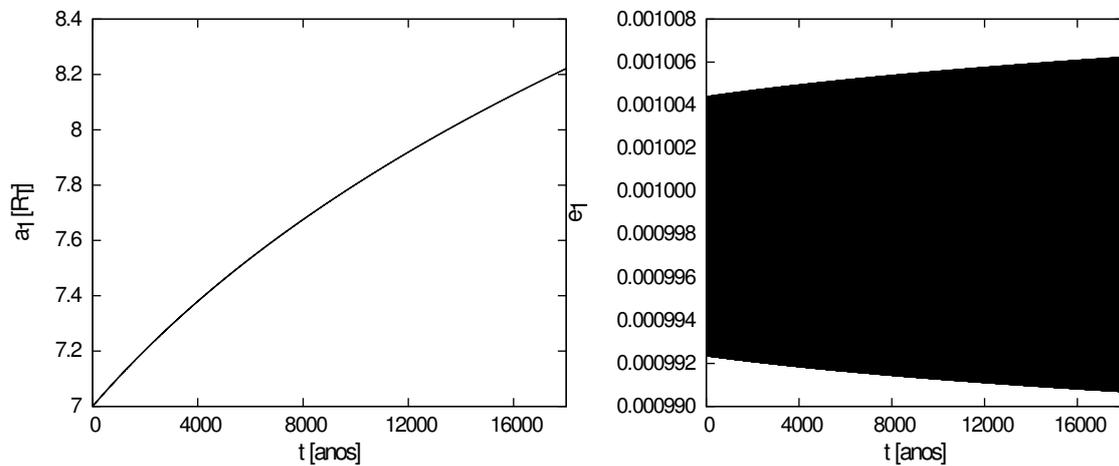


Figura 5.6.: Comportamento da órbita da Lua durante as simulações do nosso modelo. Na imagem à esquerda mostra-se como o semieixo maior aumenta. A imagem à direita mostra a oscilação da excentricidade em torno do valor inicial. Neste caso o troiano tem massa nula.

5.3. Efeito da maré sobre a dinâmica co-orbital

Em primeiro lugar, integramos apenas o sistema Terra-Lua, assumindo a massa do troiano desprezível, e incluindo tanto o efeito de maré como a perturbação do Sol. As condições iniciais foram $a = 7 R_T$ e $e = 0,001$. O tempo de integração foi de 175 000 anos (equivalente 80 h de processamento no *cluster* da COAA). O resultado foi o esperado: o semieixo maior da órbita aumenta conforme o passo do tempo, enquanto que a excentricidade oscila em torno do valor inicial. Na Figura 5.6 mostram-se os resultados.

Uma vez verificado que o efeito da maré estava sendo incluído no modelo de forma correta, fizemos simulações da evolução de um troiano com massa. As condições iniciais

Resultados

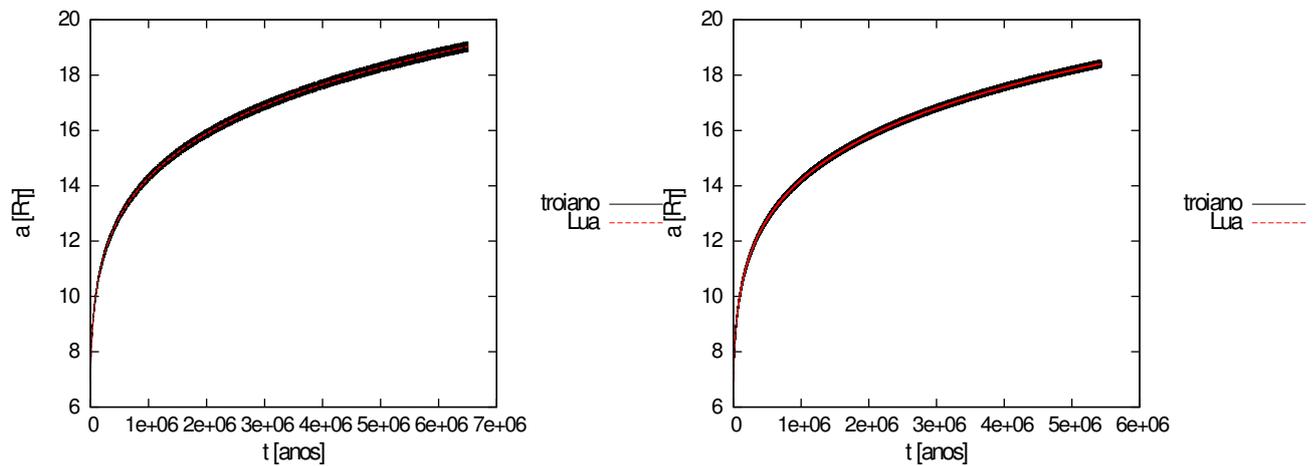


Figura 5.7.: Comportamento do semieixo maior da Lua e do troiano. Durante o tempo de simulação, os semieixos da Lua e o troiano aumentam conjuntamente preservando a ressonância co-orbital, mesmo sob os efeitos da perturbação do Sol. Na imagem à esquerda $m_2 = 0,003 M_L$. Na imagem à direita $m_2 = 0,04 M_L$.

das órbitas foram $a = 7 R_T$ e $e = 0,001$. Para obter uma solução próxima do ponto L_4 , consideramos uma condição inicial de modo que $\sigma_1 = 64^\circ$ e $\Delta\varpi = 60^\circ$. Estudamos quatro casos considerando troianos com massa pequena ($m_2 = 0,003 M_L$) e grande ($m_2 = 0,04 M_L$), e incluindo em alguns casos a perturbação do Sol.

Para rodar todos os casos utilizamos 190 h de CPU. No modelo sem a perturbação do Sol, o tempo de CPU foi equivalente a $\sim 6,9 \times 10^6$ anos de simulação, enquanto que no modelo com a perturbação do Sol, foi equivalente a $\sim 5,4 \times 10^6$ anos. Em todos os casos, os satélite mantém sua dinâmica co-orbital, migrando junto com a Lua para fora e atingindo, no tempo da simulação, um semieixo maior de $a \sim 19 R_T$. Nas imagens da Figura 5.7 mostra-se o comportamento para os casos de troianos com baixa e alta massa, considerando a perturbação do Sol. O comportamento do modelo sem a perturbação solar é similar.

Por outro lado, as excentricidades oscilam ao redor do valor inicial, embora em que se inclui a perturbação do Sol, a amplitude de oscilação da excentricidade da Lua aumenta. Na Figura 5.8 mostramos os gráficos para os casos de um troiano de $m_2 = 0,003 M_L$ sem Sol (imagem à esquerda) e com Sol (imagem à direita). Os gráficos para o caso de um troiano mais massivo são semelhantes.

Na Figura 5.9, mostramos a libração do ângulo σ_1 ao redor de $\sim 60^\circ$, e é possível enxergar como a amplitude de libração diminui com o tempo. As imagens correspondem ao caso $m_2 = 0,04 M_L$ sem a perturbação do Sol (à esquerda) e com a perturbação do Sol (direita). Em ambos os casos a amplitude de libração se reduz em $\sim 39\%$, correspondendo

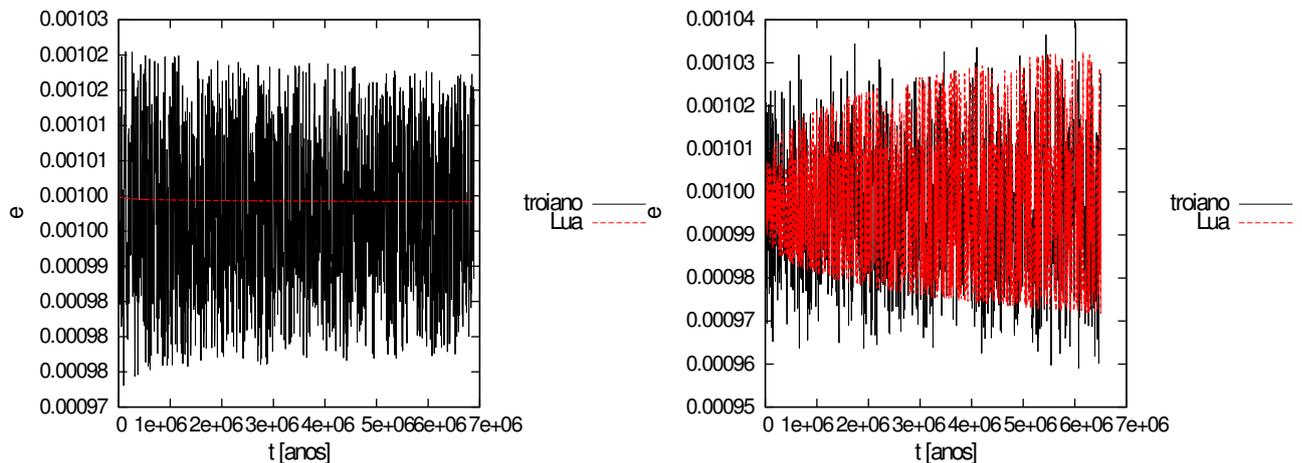


Figura 5.8.: Comportamento da excentricidade da órbita da Lua e do troiano para o caso $m_2 = 0,003 M_L$. Durante o tempo de simulação, as excentricidades oscilam em torno do valor inicial. Na imagem à esquerda sem considerar a perturbação do Sol. Na imagem à direita considerando a perturbação do Sol. Neste último caso a amplitude da excentricidade da Lua aumenta no tempo.

a uma variação de $\sim 3^\circ$. O comportamento é similar no caso de um troiano com menor massa. Este resultado está em bom acordo com o trabalho de [Fleming & Hamilton \(2000\)](#). Estes autores aplicam a teoria dos invariantes adiabáticos à dinâmica de troianos de Júpiter (P3CR), supondo que o semieixo da órbita do planeta muda lentamente devido à migração em um disco de gás. Eles encontram que, para uma variação do semieixo de Júpiter entre a_i e a_f , a razão entre a amplitudes de libração dos troianos inicial A_i e final A_f é dada aproximadamente por:

$$\frac{A_f}{A_i} = \left(\frac{a_i}{a_f} \right)^{1/4}.$$

Este resultado é independente do mecanismo físico que causa a migração. De acordo com esta fórmula, no caso da Figura 5.9 em que a migração observada vai de $7 R_T$ até $\sim 18.5 R_T$, a amplitude deveria diminuir em $\sim 22\%$. Entretanto ela diminui quase o dobro, $\sim 39\%$, mas isto pode ser devido ao fato que nos estamos estudando um P3C não restrito. Contudo, o nosso resultado indica que a amplitude de libração do troiano diminui, tornando o movimento dele cada vez mais estável.

Cabe destacar que, se utilizamos as Equações (3.64) para simular o efeito de maré, tanto a Lua quanto o troiano migram para valores menores do semieixo, e neste caso verificamos que a amplitude de libração de σ_1 aumenta. Um resultado similar é reportado por [Rodríguez et al. \(2013\)](#) no contexto de exoplanetas do tipo *hot Jupiter*.

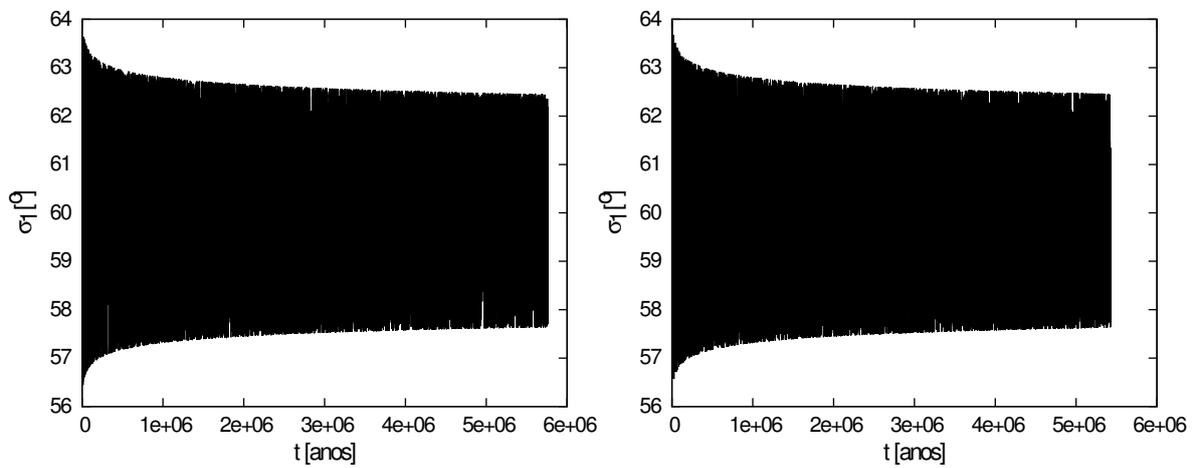


Figura 5.9.: Comportamento do ângulo σ_1 no sistema onde o troiano tem massa $m_2 = 0,04 M_L$. O ângulo vibra em torno de um valor médio, mas diminui a sua amplitude no tempo. O resultado é o mesmo no caso de não considerar a perturbação do Sol (imagem à esquerda), ou considerando-a (imagem à direita).

6 Conclusões

Neste trabalho estudamos a dinâmica para um troiano da Lua, considerando a perturbação do Sol e o efeito de maré entre os satélites e a Terra.

Nos baseamos no modelo de dinâmica co-orbital de [Robutel & Pousse \(2013\)](#) e reescrevemos as equações do Hamiltoniano para deixá-las em função dos elementos orbitais dos corpos em estudo. Por simplicidade, trabalhamos com o problema planar. Identificamos no Hamiltoniano uma parte integrável e outra considerada como perturbação. Considerando a teoria de Hill para a Lua, adaptamos as equações de perturbação do Sol sobre a Lua e o troiano, e as adicionamos no modelo. Incluímos o efeito de maré considerando apenas as variações que esta força produz sobre o semieixo maior e excentricidade das órbitas, segundo [Ferraz-Mello et al. \(2008\)](#). Para a integração das equações de movimento utilizamos um mapa simplético de segunda ordem, devido ao fato destes serem integradores que preservam as características do espaço de fase, além da “energia” do sistema.

Fizemos testes considerando massas para o troiano de $0,003 M_L$ e de $0,04 M_L$. O espaço de fases do Hamiltoniano integrável para ambas as massas do troiano, mostra cinco pontos de equilíbrio como esperado no problema de três corpos: órbitas girino, ferradura e quase-satélite. Quando só é adicionada a perturbação do Hamiltoniano co-orbital vemos que, tanto quando a órbita do troiano é próxima da Terra ($a = 7 R_T$) como quando está distante ($a = 40R_T$), os espaços de fases não mostram mudanças, desde que a excentricidade dos corpos seja pequena ($e = 0,001$). Por outro lado, mudanças são apreciáveis quando a excentricidade é alta ($e = 0,1$), independentemente do valor da massa do troiano. Por outro lado, quando se incorpora o efeito do Sol, a perturbação no movimento é ainda maior para troianos pouco massivos e distantes da Terra. O valor

Conclusões

da frequência de circulação da longitude do perigeu do troiano muda dependendo da sua localização. Em $7 R_T$ o período é curto e aumenta com a distância de forma que em $40 R_T$ este é de ~ 1 ano. Este resultado é próprio da dinâmica co-orbital independentemente da perturbação do Sol e está em bom acordo com a teoria e as simulações de outros autores (Hertz, 1943 ; Čuk & Gladman, 2009).

O efeito de maré aplicado sobre a Lua e um troiano de $0,003$ e $0,04 M_L$, perto do ponto lagrangiano L_4 ($\lambda_t - \lambda_L = 64^\circ$ inicialmente), mostra que as órbitas dos satélites a $7R_T$ e com excentricidade baixa ($e = 0,001$), evoluem no tempo aumentando o valor de semieixo enquanto a excentricidade oscila ao redor do valor inicial. Nos tempos típicos das nossas simulações (~ 6 Ma), os semieixos maiores dos satélites atingem $\sim 20 R_T$. Durante esta evolução, a amplitude de libração de $\lambda_t - \lambda_L$ se reduz em $\sim 39\%$, mostrando que a órbita do troiano se torna mais estável a medida que migra para fora devido ao efeito de maré, mesmo considerando a perturbação do Sol.

Como perspectivas futuras, propomos realizar mais simulações, aumentando o tempo de integração e estudando a evolução do corpo co-orbital em distâncias maiores. Devemos examinar com mais detalhe a estabilidade do troiano em função da migração que faz diminuir a amplitude de libração de $\lambda_t - \lambda_L$, o que causaria com que a perturbação do Sol possa não ser suficiente para desestabilizar a configuração orbital, mesmo na ressonância de eveção. Uma generalização do modelo, considerando as inclinações orbitais e a perturbação devida ao achatamento da Terra poderá ser desenvolvida a fim de simular sistemas mais realísticos.

A Apêndice

Apresentamos aqui as expressões para as derivadas parciais intermediárias utilizadas nas Equações (3.21)-(3.26) e (3.30)-(3.35).

Assumindo as definições das variáveis de Poincaré (Equações 3.18), escrevemos:

$$a_1 = \frac{1}{\mu_1} \left(\frac{J_2 - J_1}{2\beta_1} \right)^2, \quad a_2 = \frac{1}{\mu_2} \left(\frac{J_2 + J_1}{2\beta_2} \right)^2$$

$$e_1 = \left[1 - \left(1 + \frac{2\bar{G}_1}{J_2 - J_1} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad e_2 = \left[1 - \left(1 + \frac{2\bar{G}_2}{J_2 + J_1} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Assim,

$$\frac{\partial a_1}{\partial J_1} = \frac{J_1 - J_2}{2\beta_1^2 \mu_1}$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial J_1} = \frac{J_1 + J_2}{2\beta_2^2 \mu_2}$$

$$\frac{\partial e_1}{\partial J_1} = -\frac{2\bar{G}_1}{(J_2 - J_1)^2} \left(1 + \frac{2\bar{G}_1}{J_2 - J_1} \right) \left[1 - \left(1 + \frac{2\bar{G}_1}{J_2 - J_1} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

$$\frac{\partial e_1}{\partial \bar{G}_1} = -\frac{2}{(J_2 - J_1)} \left(1 + \frac{2\bar{G}_1}{J_2 - J_1} \right) \left[1 - \left(1 + \frac{2\bar{G}_1}{J_2 - J_1} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

$$\frac{\partial e_2}{\partial J_1} = \frac{2\bar{G}_2}{(J_2 + J_1)^2} \left(1 + \frac{2\bar{G}_2}{J_2 + J_1} \right) \left[1 - \left(1 + \frac{2\bar{G}_2}{J_2 + J_1} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

$$\frac{\partial e_2}{\partial \bar{G}_2} = -\frac{2}{(J_2 + J_1)} \left(1 + \frac{2\bar{G}_2}{J_2 + J_1} \right) \left[1 - \left(1 + \frac{2\bar{G}_2}{J_2 + J_1} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

Por outro lado, a partir da definição das variáveis regulares (Equações 3.27 e 3.17),

Apêndice

temos:

$$k_1 = \frac{K_1}{\sqrt{\beta_1 \sqrt{a_1 \mu_1}}} = \sqrt{\frac{2}{J_2 - J_1}} K_1, \quad k_2 = \frac{K_2}{\sqrt{\beta_2 \sqrt{a_2 \mu_2}}} = \sqrt{\frac{2}{J_2 + J_1}} K_2$$

$$h_1 = \frac{H_1}{\sqrt{\beta_1 \sqrt{a_1 \mu_1}}} = \sqrt{\frac{2}{J_2 - J_1}} H_1, \quad h_2 = \frac{H_2}{\sqrt{\beta_2 \sqrt{a_2 \mu_2}}} = \sqrt{\frac{2}{J_2 + J_1}} H_1$$

Logo,

$$\frac{\partial k_1}{\partial K_1} = \frac{1}{\sqrt{\beta_1 \sqrt{a_1 \mu_1}}}$$

$$\frac{\partial k_1}{\partial J_1} = \frac{K_1}{\sqrt{2} (J_2 - J_1)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial k_2}{\partial K_2} = \frac{1}{\sqrt{\beta_2 \sqrt{a_2 \mu_2}}}$$

$$\frac{\partial k_2}{\partial J_1} = -\frac{K_2}{\sqrt{2} (J_2 + J_1)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial H_1} = \frac{1}{\sqrt{\beta_1 \sqrt{a_1 \mu_1}}}$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial J_1} = \frac{H_1}{\sqrt{2} (J_2 - J_1)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial H_2} = \frac{1}{\sqrt{\beta_2 \sqrt{a_2 \mu_2}}}$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial J_1} = -\frac{H_2}{\sqrt{2} (J_2 + J_1)^{3/2}}$$

Referências Bibliográficas

- Brower D., Clemence G., 1961, *Methods of Celestial Mechanics*. Academic Press [pg: 2.2, 3.2]
- Butikov E. I., 2002, *American Journal of Physics*, 70, 1001 [pg: 3.3]
- Cameron A., Ward W., 1976, in *Lunar and Planetary Science Conference*, Vol. 7, Lunar and Planetary Science Conference, p. 120 [pg: 1, 2.2]
- Cameron A. G. W., Benz W., 1991, *Icarus* , 92, 204 [pg: 2.2]
- Canup R. e. a., 1999, *AJ* , 117, 603 [pg: 2.2]
- Canup R. M., Esposito L. W., 1996, *Icarus* , 119, 427 [pg: 2.2]
- Cazenave A., Lago B., Dobrovolskis A., 1980, *Icarus* , 44, 730 [pg: 3.3]
- Chapront J., Chapront-Touzé M., Francou G., 2002, *A&A* , 387, 700 [pg: 2.1]
- Chenciner A., Montgomery R., 2000, *ArXiv Mathematics e-prints* [pg: (document), 2.6, 2.3.4]
- Clayton R. N., Mayeda T. K., 1975, in *Lunar and Planetary Inst. Technical Report*, Vol. 6, Lunar and Planetary Science Conference, p. 155 [pg: 2.2]
- Ćuk M., Gladman B. J., 2009, *Icarus* , 199, 237 [pg: 1, 2.2, 6]
- Ćuk M., Stewart S. T., 2012, *Science*, 338, 1047 [pg: 3.3]
- Darwin G. H., 1880, *Royal Society of London Philosophical Transactions Series I*, 171, 713 [pg: 3.3]

Referências Bibliográficas

- Efroimsky M., Williams J. G., 2009, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 104, 257 [pg: 3.3]
- Everhart E., 1974, *Celestial Mechanics*, 10, 35 [pg: 4.3.2]
- Ferraz-Mello S., 2013, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 116, 109 [pg: 3.3]
- Ferraz-Mello S., Rodríguez A., Hussmann H., 2008, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 101, 171 [pg: 3.3, 3.3, 3.3.1.1, 6]
- Fleming H. J., Hamilton D. P., 2000, *Icarus* , 148, 479 [pg: 2.2, 5.3]
- Giuppone C., Beauge C., Michtchenko T., Ferraz-Mello S., 2010, *MNRAS*, 407, 390 [pg: 2.4.1.3, 3.1.1]
- Goldreich P., 1963, *MNRAS*, 126, 257 [pg: 3.3]
- , 1965, *Nature* , 208, 375 [pg: 3.3]
- , 1966, *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 4, 411 [pg: 1]
- Goldreich P., Peale S., 1966, *AJ* , 71, 425 [pg: 3.3]
- Goldreich P., Soter S., 1966, *Icarus* , 5, 375 [pg: 3.3, 3.3]
- Halliday A. N., 2000, *Earth and Planetary Science Letters*, 176, 17 [pg: 2.2]
- Hartmann W. K., Davis D. R., 1975, *Icarus* , 24, 504 [pg: 1, 2.2]
- Hertz H. G., 1943, *AJ* , 50, 121 [pg: 2.2, 6]
- Hut P., 1981, *A&A* , 99, 126 [pg: 3.3]
- Ida S., Canup R. M., Stewart G. R., 1997, *Nature* , 389, 353 [pg: (document), 1, 2.2, 2.1, 2.2]
- Jackson B., Greenberg R., Barnes R., 2008, *ApJ*, 678, 1396 [pg: 3.3]
- Jeffreys H., 1961, *MNRAS*, 122, 339 [pg: 3.3]
- Jutzi M., Asphaug E., 2011, *Nature* , 476, 69 [pg: 1, 2.1]
- Kaula W. M., 1964, *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 2, 661 [pg: 3.3]

- Kaula W. M., Yoder C. F., 1976, in Lunar and Planetary Science Conference, Vol. 7, Lunar and Planetary Science Conference, p. 440 [pg: 2.2]
- Kokubo E., Genda H., 2010, *ApJ* , 714, L21 [pg: 3.3]
- Kokubo E. e. a., 2000, in Origin of the Earth and Moon, Canup R., Righter K., et al., eds., pp. 145–163 [pg: 1, 2.2]
- Lang K. R., 2011, *The Cambridge Guide to the Solar System* [pg: 2.1]
- Laskar J., 1992, in IAU Symposium, Vol. 152, Chaos, Resonance, and Collective Dynamical Phenomena in the Solar System, Ferraz-Mello S., ed., p. 1 [pg: 3.1]
- Lissauer J. J., Chambers J. E., 2008, *Icarus* , 195, 16 [pg: 2.1]
- Lissauer J. J., de Pater I., 2013, *Fundamental Planetary Science* [pg: 2.1]
- MacDonald G. J. F., 1964, *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 2, 467 [pg: 3.3, 3.3]
- Meyer J., Elkins-Tanton L., Wisdom J., 2010, *Icarus* , 208, 1 [pg: 3.3]
- Mignard F., 1979, *Moon and Planets*, 20, 301 [pg: 3.3]
- Moeckel R., 1988, *Contemporary Mathematics*, 81, 1 [pg: 2.3.4]
- Morbidelli A., 2002, *Modern celestial mechanics : aspects of solar system dynamics* [pg: 2.4, 2.4.1.4]
- Murray C., Dermott S., 1999, *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press [pg: 2.3, 2.3.3, 3.3]
- Nesvorný D., Thomas F., Ferraz-Mello S., Morbidelli A., 2002, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 82, 323 [pg: 3.1.1]
- Pollard H., 1966, *Mathematical introduction to celestial mechanics*. [pg: 2.3]
- Robutel P., Pousse A., 2013, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 117, 17 [pg: 1, 3.1, 5.1, 6]
- Rodríguez A., Giuppone C. A., Michtchenko T. A., 2013, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 117, 59 [pg: 5.3]

Referências Bibliográficas

- Rosenberg G. D., Runcorn S. K., eds., 1975, Growth rhythms and the history of the earth's rotation; Proceedings of the Interdisciplinary Winter Conference on Biological Clocks and Changes in the Earth's Rotation: Geophysical and Astronomical Consequences, University of Newcastle-upon-Tyne, Newcastle-upon-Tyne, England, January 8-10, 1974 [pg: 3.3]
- Siegel C. L., Moser J., 1971, Lectures on celestial mechanics [pg: 2.3]
- Stevenson D. J., 1987, Annual Review of Earth and Planetary Sciences, 15, 271 [pg: 2.2]
- Touma J., Wisdom J., 1994, AJ , 108, 1943 [pg: 3.3]
- , 1998, AJ , 115, 1653 [pg: 2.2]
- Wodnar K., 1993, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 56, 99 [pg: 2.3.4]
- Zuber M. e. a., 1994, Science, 266, 1839 [pg: 1, 2.1]