

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO
OBSERVATÓRIO NACIONAL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ASTRONOMIA



TESE DE DOUTORADO

GRAVIDADE MODIFICADA E COSMOLOGIA

SIMONY SANTOS DA COSTA

RIO DE JANEIRO, 29 DE MARÇO DE 2019

Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação
Observatório Nacional
Programa de Pós-Graduação em Astronomia

Tese de Doutorado

Gravidade Modificada e Cosmologia

Simony Santos da Costa

Tese apresentada ao Observatório Nacional do Rio de Janeiro como requisito para a aprovação do programa de doutorado em Astronomia.

Orientador: Prof. Dr. Jailson Souza de Alcaniz
Coorientadora: Dra. Micol Benetti

Rio de Janeiro, 29 de Março de 2019

"GRAVIDADE MODIFICADA E COSMOLOGIA".


SIMONY SANTOS DA COSTA

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ASTRONOMIA DO OBSERVATÓRIO NACIONAL COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTORA EM ASTRONOMIA.

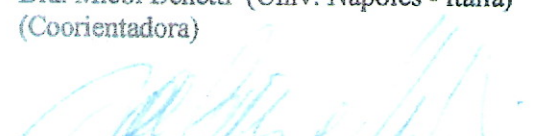
Aprovada por:




Dr. Jailson Souza de Alcaniz – ON/MCTIC
(Orientador)




Dra. Micol Benetti (Univ. Nápoles - Itália)
(Coorientadora)



Dr. Joel Camara de Carvalho Filho- ON/MCTIC



Dr. Fernando Virgilio Roig– ON/MCTIC



Dr. Francisco Brito – UFCG



Dr. Henrique de Oliveira (UERJ)

RIO DE JANEIRO – BRASIL

29 DE MARÇO DE 2019

A meu pai, José,
a força presente na ausência,
a luz que iluminou meu caminho até aqui.

“What is a scientist after all? It is a curious man looking through a keyhole, the keyhole of nature, trying to know what’s going on.”

- Jacques Cousteau

“There are more things between heaven and earth, Horatio, than are dreamt of in your philosophy.”

- William Shakespeare

Agradecimentos

Antes de profissionais, somos humanos. E, enquanto humanos, somos moldados e também frutos das relações sociais que mantemos durante nossas vidas. Nossas experiências motivam nossas decisões e as minhas, em particular, me conduziram até o dia de hoje. Finalizar um doutorado não é tarefa fácil. São 4 anos que ora parecem ser longos e, de repente, já se passaram como num piscar de olhos. Essa passagem de tempo é constituída não apenas de muito estudo, trabalho, dedicação e conquistas, mas também de muitas renúncias e frustrações. Renúncias, principalmente, àqueles mais próximos, mas que entendem que essa fase necessita ainda mais do apoio deles, mesmo que isso signifique estar distante. Esta seção é dedicada a todos aqueles que durante esse período estiveram do meu lado, sendo apoio e força nos momentos mais difíceis que passei. A todos os meus familiares e amigos, que no meu momento de dor maior, quando perdi meu pai, se mostraram como luz no meu caminho. Guias e fortaleza para que eu não fraquejasse e continuasse até o destino final. Assim, gostaria de agradecer:

- Ao meu orientador, Jailson Alcaniz, pelo exemplo admirável de ser humano e profissional. Os ensinamentos adquiridos ao longo deste tempo, tanto profissionais como pessoais, foram de inestimável importância na minha vida;
- A minha co-orientadora, amiga e italiana preferida, Micol Benetti. Aprendi muitíssimo com você: códigos em Fortran, belos gráficos em Python e muito sobre a cultura italiana. Sem você esse trabalho não teria sido o mesmo;
- A minha mãe, Izabel, que sempre colocou-se como exemplo de garra e determinação e sempre pôs a educação como prioridade para mim e minha irmã. Aquele sonho de criança, relatado à senhora na sala de casa, naquele sítio do cariri Paraibano, de me formar e ser doutora, hoje está sendo realizado. Também ao meu pai, José, que hoje não está entre nós, por todo seu apoio e incentivo, mesmo sem sequer compreender meu objeto de estudo. Minha eterna gratidão aos dois, que foram e continuam sendo meus motivos para prosseguir. A vocês todo o meu amor;

- A minha irmã Sabryna, por ter sido tudo que eu gostaria de ter sido para meus pais nesse tempo longe. Por ter cuidado deles com carinho e ter sido tão forte em momentos que exigiram tanto de nós;
- As minhas tias, Edite e Josefa, e a minha prima Lidiane, por todo apoio quando cheguei ao Rio, sem as quais teria sido muito mais difícil o início da vida aqui. A Davison, Izabela e Davi, por todos os momentos de alegria que compartilhamos;
- Aqueles que estiveram comigo no período em que acompanhei meu pai no hospital: Ailton Junior, Aline, Antônio, Guia, Julia, Madrinha Nina, Marivan, Mere, minha prima Nina, Padrinho Antônio e Tia Severina. Obrigada por cada dia e por cada noite compartilhada. Obrigada por serem Sol em dias nublados e por nos proporcionar alegria em dias tristes;
- Aos grandes amigos que fiz no Rio de Janeiro e que, por fim, tornaram-se família. A vida longe de casa nos permitiu criar a nossa família aqui. Em meio às dificuldades e momentos felizes, nos tornamos ombro amigo e braço protetor uns dos outros. Meu mais sincero abraço a cada um de vocês que passaram e que ainda permanecem na minha vida, em especial:
 - A Camila, com quem tive o prazer de dividir apartamento nesse último ano, mas que desde o início esteve ao meu lado, sendo incentivadora, revisora e hoje uma irmã;
 - Aos integrantes do grupo de Cosmologia do ON, GCON: Aldinez, Antonella, Alexandre, Armando, Beethoven, Camila, Carlos, Chani, Edilson, Felipe, Gabriela Antunes, Gabriela Coutinho, Isaac, Jailson, Javier, Joel, Marcela, Marcelo, Micol, Pedro, Rodrigo Gonçalves e Uendert. Todos contribuíram para minha formação como Cosmóloga e para o crescimento do grupo, mas também fizeram parte do meu crescimento pessoal: Javier e Rodrigo, sendo meus guias na capoeira; Alexandre e Uendert como meus incentivadores no mundo da corrida de rua; e as Gabrielas da Cosmologia, juntamente com Micol e Camila, que tiveram um papel importante na minha vida, principalmente no quesito empoderamento. Vocês são seres maravilhosos com quem tive a oportunidade de conviver e aprender;
 - A todos os amigos que a pós graduação me trouxe. Obrigada pelos momentos que estivemos juntos, seja na correria para cumprir as obrigações do trabalho, ou nos momentos na copinha, Picnic, Feira, feriados e datas importantes, em que compartilhamos conhecimentos sobre astronomia, geofísica, política e, principalmente, por todo companheirismo que aqui vivemos. Em especial a Ana Carolina, André, Bitá, Bruno, Carol, David, Flora, Hissa, Isa, Javier, Larissa, Leonardo Vital, Mário de Prá, Matias, Mercedes, Nicolas, Pedrito, Plícida, Priscila, Razec, Rebeca, Rodrigo Bijani e Ximena;

- Aos amigos com os quais a vida me presenteou antes de vir morar no Rio e que ainda permanecem junto de mim, mesmo que separados por quase 3000km. Saber que os tenho faz de mim um ser humano mais feliz. Que nossa amizade continue forte: Ailton Júnior, Ana, Anderson, Cida, Desiane, Elizângela, Gabi Coutinho, Gival, Jaci, Juba, Leide, Pajé, Priscila, Rafael, Raissa, Renally, Rilavia, Stivem, Suzana, Tamires e Valmir;
- Al mio capo, mentre ero in Italia, Salvatore Cappozziello, per l'opportunità di questa esperienza all'estero. Certamente, questo periodo ha contribuito in modo speciale alla mia formazione personale e professionale;
- Agli amici che ho conosciuto in Italia: Demetra, Rossella, Kostas e Michele. Ogni pizza, birra e caffè che abbiamo diviso hanno reso le mie giornate più felici e piacevoli nella bella Napoli;
- A todos os professores do ON e a todos aqueles que participaram da minha formação e me inspiram a ser uma boa profissional;
- Ao Observatório Nacional;
- À CAPES e à FAPERJ pelo apoio financeiro;
- A Deus, que sempre esteve comigo.

Ainda àqueles que não são mencionados diretamente aqui, por minha falha memória, mas que foram importantes na minha vida, deixo meu mais sincero Obrigada!

Gravidade Modificada e Cosmologia

Simony Santos da Costa

Submetida ao Observatório Nacional do Rio de Janeiro em
12 de Março de 2019, como requisito parcial para a obtenção
do título de Doutora em Astronomia.

Resumo

Entender a origem da expansão acelerada atual é um dos maiores desafios da cosmologia neste momento. No contexto do modelo cosmológico padrão, essa aceleração é atribuída à energia escura através de um termo de constante cosmológica Λ . Todavia, desconhecer a natureza dessa componente, assim como a existência de outros problemas em aberto no modelo padrão, desencadeou o interesse por cenários alternativos para explicar o mecanismo por trás da aceleração cósmica. Neste sentido, têm-se utilizado diferentes extensões da Teoria da Relatividade Geral, como a introdução de campos ou dimensões extras ou ainda generalizações do escalar de Ricci, R , presente na Lagrangiana de Einstein-Hilbert, por uma função geral $f(R)$. As teorias $f(R)$ constituem uma das principais extensões da Relatividade Geral, mas é comum encontrarmos funções mais gerais de outras quantidades escalares como, por exemplo, o invariante de curvatura de Gauss-Bonnet, \mathcal{G} , construído a partir dos tensores de Riemann e Ricci. Todas essas modificações apresentam uma característica em comum de explicar a expansão acelerada sem recorrer à introdução de uma componente exótica de energia.

Nesta tese, analisamos a viabilidade dinâmica e observacional de teorias de gravidade $f(R, \mathcal{G})$. Inicialmente, aplicamos a abordagem de sistemas dinâmicos a uma classe de teorias do tipo $f(R, \mathcal{G}) = \alpha R^n \mathcal{G}^{1-n}$ para estudar sua dinâmica cosmológica. A partir da análise de estabilidade dos pontos fixos, que são soluções de um sistema de equações diferenciais representando a dinâmica de evolução do Universo, mostramos que esta classe de modelos não consegue reproduzir a sequência padrão de eras cosmológicas por não possuir uma era dominada pela matéria.

Posteriormente, examinamos as previsões teóricas e observacionais da classe de modelos $f(R, \mathcal{G}) = \alpha R^n \mathcal{G}^{1-n}$ considerando soluções do tipo lei de potência. Para tal, comparamos as previsões teóricas com as observações cosmológicas mais recentes, incluindo dados da RCF, de SNe Ia, medidas locais do parâmetro de Hubble e dados da estrutura em grande escala do Universo. Isto foi feito empregando uma análise MCMC afim de vincular os parâmetros cosmológicos associados ao modelo, o que resultou em soluções de aceleração viáveis a partir de termos geométricos, que descrevem os dados observacionais sem incluir energia escura. Todavia, a análise estatística mostrou um forte suporte ao modelo de referência (Λ CDM), tal

que podemos descartar este modelo como um modelo cosmológico viável.

Por fim, motivados por resultados recentes que mostram o cenário inflacionário de Starobinsky - $f(R) = R + \alpha R^2$ - como o melhor ajuste aos dados atuais da RCF, exploramos uma extensão deste modelo, baseada na equivalência entre as teorias $f(R)$ e as teorias escalar-tensoriais. Discutimos a dinâmica inflacionária do modelo estendido, assim como investigamos seus aspectos teóricos e previsões observacionais. Neste caso, os resultados obtidos não são muito restritivos, pois as previsões são muito similares às aquelas do modelo Λ CDM (dentro da região de 95% de confiança). Concluímos, portanto, que é necessária uma análise complementar considerando todo o espaço de parâmetros e utilizando um conjunto maior de dados observacionais.

Palavras chaves: Cosmologia; aceleração cósmica; gravidade modificada; sistemas dinâmicos; inflação primordial.

Modified Gravity and Cosmology

Simony Santos da Costa

Submitted to the Observatório Nacional of Rio de Janeiro on
March 12th 2019, in partial fulfillment of the requirements
for the Ph.D degree in Astronomy.

Abstract

Understanding the origin of the current cosmic acceleration is one of the biggest challenges in cosmology nowadays. In the context of the standard cosmological model, this acceleration is assigned to a dark energy through the cosmological constant term Λ . However, the fact that we do not know the nature of this component, as well as other open issues in the standard model, motivated the interest for alternative scenarios to explain the physics behind the cosmic acceleration. In this sense, it has been proposed several extensions of the General Relativity Theory, such as the introduction of extra fields or extra dimensions or even generalizations of the Ricci scalar, R , in the Einstein-Hilbert Lagrangian, by a general function $f(R)$. $f(R)$ theories constitute one of the main extensions of General Relativity, but it is also common to find more general functions involving other scalar quantities like the Gauss-Bonnet invariant curvature, \mathcal{G} , built from the Riemann and Ricci tensors. All of these modifications exhibit the common feature of explaining the accelerated expansion without the introduction of an exotic energy component.

In this thesis, we analyzed the dynamical and observational viability of $f(R, \mathcal{G})$ gravity theories. First, we perform a dynamical systems analysis for a class of models of type $f(R, \mathcal{G}) = \alpha R^n \mathcal{G}^{1-n}$ in order to study its cosmological dynamics. From the stability analysis of the fixed points, which are solutions of a system of differential equations representing the dynamical evolution of the Universe, we have shown that this class of theories can not reproduce the sequence of cosmological eras since it does not show a matter dominated epoch.

Then, we examined the theoretical predictions of the class of models $f(R, \mathcal{G}) = \alpha R^n \mathcal{G}^{1-n}$ considering power-law solutions. For that, we compared the theoretical predictions with the recent cosmological observations, including CMB data, SNe Ia data, local measures of the Hubble parameter and large scale structure data. This was done by employing a MCMC analysis in order to constrain the cosmological parameters of the model, which results in new viable accelerated solutions from geometrical terms, that describes well the observational data without consider dark energy. However, the statistical analysis showed strong support in favor of the reference model (Λ CDM), such that we can discard this model as a cosmologically viable one.

Finally, motivated by the recent results showing that the Starobinsky inflationary scenario - $f(R) = R + \alpha R^2$ - is the best fit model to the current CMB data, we explore an extension of this model, based on the equivalence between the $f(R)$ theories and scalar-tensor theories. We discussed the inflationary dynamics of the extended model as well as investigated its theoretical aspects and observational predictions. In this case, the constraints derived are not restrictive because the predictions are very close to that from the Λ CDM model (inside the 95% confidence region). Therefore, we conclude that it is necessary to perform a complementary analysis considering all the parameter space and using a largest set of observational data.

Keywords: cosmology; cosmic acceleration; modified gravity; dynamical systems; primordial inflation.

Sumário

Agradecimentos	vii
Resumo	xi
Abstract	xiii
Lista de figuras	xvii
Lista de tabelas	xix
1. Introdução	1
2. Teorias de Gravidade Modificada	7
2.1. Por que modificar a gravidade?	7
2.2. Teorias de gravidade com campos extras	11
2.2.1. Teoria de Brans-Dicke	13
2.2.2. Teorias bimétricas	13
2.3. Teorias de gravidade de ordem superior	16
2.3.1. Teorias $f(R)$	17
2.3.2. Inflação em teorias $f(R)$	24
2.3.3. Combinações da curvatura de Ricci e Riemann	26
2.4. Teorias de gravidade com dimensões extras	29
2.4.1. Modelo de Branas	29
2.4.2. Modelo Dvali-Gabadaze-Porrati	31
2.5. Gravidade modificada e ondas gravitacionais	35
2.6. Sumário	38
3. Sistemas dinâmicos e teorias de gravidade modificada	39
3.1. Alguns aspectos de sistemas dinâmicos	39
3.1.1. Teoria de estabilidade linear	41
3.2. Sistemas dinâmicos em teorias $f(R)$	44
3.2.1. Equações autônomas	45

3.2.2.	Dinâmica cosmológica	46
3.2.3.	Classificação de modelos $f(R)$	51
3.3.	Sistemas dinâmicos em teorias $f(\mathcal{G})$	53
3.3.1.	Equações autônomas	55
3.3.2.	Dinâmica cosmológica	57
3.4.	Sumário	62
4.	Análise de sistemas dinâmicos para a cosmologia $f(R, \mathcal{G})$	63
4.1.	Equações básicas	64
4.2.	Sistema dinâmico para a gravidade $f(R, \mathcal{G})$	66
4.3.	$f(R, \mathcal{G})$ tipo lei de potência	69
4.3.1.	Pontos fixos	70
4.3.2.	Estabilidade	72
4.4.	Sumário	73
5.	Aspectos observacionais da cosmologia $f(R, \mathcal{G})$	77
5.1.	Formalismo	78
5.2.	Análise	79
5.3.	Resultados	83
5.4.	Sumário	84
6.	Uma extensão do modelo inflacionário de Starobinsky	87
6.1.	Equações básicas	88
6.2.	O modelo	95
6.3.	Sumário	101
7.	Conclusões	103
A.	Análise Bayesiana de modelos de espectro de potência primordial	107
A.1.	Metodologia	108
A.2.	Resultados	110
B.	Lista de Publicações	115
	Referências	116

Lista de figuras

2.1.	Ilustração do paradigma do modelo de branas.	30
2.2.	Ilustração do espaço-tempo do modelo DGP.	32
2.3.	Contornos de probabilidade no plano $\Omega_{m0} - h$, para o modelo DGP e a evolução de $f(z)$ predita pelos modelos Λ CDM e DGP.	35
3.1.	Equação de estado efetiva ω_{eff} para P_6 em função de m	51
3.2.	Plano (r, m) para as quatro classes de modelos $f(R)$	54
3.3.	As curvas $m(r)$ (linhas vermelhas tracejadas) para vários modelos $f(\mathcal{G})$	59
3.4.	Evolução cósmica para o caso $f(G) = \alpha(G^{\frac{3}{4}} - \beta)^{\frac{2}{3}}$	61
4.1.	Parâmetro da equação de estado efetivo ω_{eff} para P_2 em função de n	71
4.2.	Comportamento de Ω_m e ω_{eff} , para o ponto fixo P_5 em função do parâmetro n	74
4.3.	Evolução cósmica dos parâmetros de densidade para o modelo $f(R, G) = \alpha R^n G^{1-n}$, para $n = -2$ e $n = 3.5$	75
4.4.	Evolução cósmica dos parâmetros de densidade do modelo $f(R, G) = \alpha R^n G^{1-n}$, para $n = 0.9$ e $n = 0.98$	75
5.1.	Comportamento de ω_{GB} com o parâmetro geométrico s para ambas as soluções n_1 e n_2	80
5.2.	Evolução da densidade geométrica $\rho_{(GB)}$ para ambas as soluções n_1 e n_2	80
5.3.	Espectros das flutuações de temperatura e de matéria para vários valores do parâmetro s	81
5.4.	Distribuição de probabilidade para os parâmetros cosmológicos do modelo $\omega_{(GB)}$, usando o conjunto de dados PLC2 e Ext.	84
5.5.	Espectros das flutuações de temperatura e de matéria para o modelo ω_{GB} , para os valores de melhor ajuste usando os dados PLC2 e Ext.	85
6.1.	Comportamento do potencial de Starobinsky generalizado para diferentes valores do parâmetro β	96

Lista de figuras

6.2. Ajuste polinomial para ϕ_{end}	97
6.3. Ajustes polinomiais para ϕ_{end} , ϕ_{ini} e ϕ_* , para ambas as soluções 1 e 2.	99
6.4. O plano $n_s - r$ para ambas as soluções 1 e 2, considerando diferentes valores do parâmetros β	100
A.1. Espectro de potência primordial de todos os modelos analisados.	109
A.2. Distribuições de probabilidade para os parâmetros A_s , n_s e α_s do modelo RN e espectro de potência angular para todos os modelos considerados na análise . .	111

Lista de tabelas

3.1. Estabilidade dos pontos críticos baseados nos autovalores λ_1 e λ_2	43
4.1. Autovalores associados aos pontos fixos para $f(R, \mathcal{G}) = \alpha R^n \mathcal{G}^{1-n}$	72
4.2. Estabilidade dos pontos fixos para $f(R, \mathcal{G}) = \alpha R^n \mathcal{G}^{1-n}$	72
5.1. <i>Priors</i> nos parâmetros do modelo.	82
5.2. Limites de confiança de 68% e valores de melhor ajuste para os parâmetros cosmológicos e geométrico, para o modelo $\omega_{\mathcal{GB}}$	82
A.1. Formas funcionais das parametrizações consideradas.	108
A.2. Limites de confiança de 68% para os parâmetros cosmológicos usando os dados do Planck TT+lowP.	110
A.3. Limites de confiança de 68% para os parâmetros primordiais usando os dados do Planck TT+lowP.	111

1 Introdução

Na busca por uma melhor compreensão dos fenômenos cotidianos, a gravidade foi a primeira dentre as quatro interações fundamentais da natureza a ser posta sob investigações experimentais. Por volta do século XVI, Galileo Galilei utilizou pêndulos e planos inclinados para estudar os efeitos da gravidade terrestre. Somente um século depois, Isaac Newton desenvolveu uma teoria unindo a descrição dos fenômenos gravitacionais terrestres e celestes na Teoria da Gravitação Universal, através da conhecida “lei do inverso do quadrado da distância” (para uma revisão histórica veja as referências [Drake et al., 1957](#); [Drake, 1973, 2003](#); [Shea and Artigas, 2003](#); [Daxecker, 2004](#); [Gleick and Alexanderson, 2005](#); [Westfall and Devons, 1981](#)). O trabalho de Newton é baseado em duas ideias principais: o espaço e o tempo são quantidades absolutas e separadas e o princípio da equivalência fraco, que estabelece a igualdade entre as massas inerciais e gravitacionais. Naquela época, esta teoria dava conta de explicar todos os aspectos gravitacionais conhecidos até então e permaneceu assim até os primeiros problemas começarem a surgir. Durante o século XIX, medidas da precessão do periélio de Mercúrio feitas por Urbain Le Verrier e Simon Newcomb colocaram em cheque a teoria da gravitação Newtoniana ([Adams, 1846](#); [Newcomb, 1895](#)).

Em 1905 Albert Einstein completou a Teoria da Relatividade Especial (TRE), baseado em dois postulados: o princípio da relatividade, que estabelece que as leis da Física são as mesmas em todos os referenciais inerciais e a constância da velocidade da luz. De maneira geral, a TRE estende a mecânica newtoniana e o conceito de referencial absoluto deixa de existir, adquirindo o caráter relativo. Todavia, a TRE concilia apenas óptica e mecânica; a gravidade só foi incorporada dez anos depois, quando Einstein incluiu os referenciais não-inerciais e postulou a Teoria da Relatividade Geral (TRG) ([Einstein et al., 1916](#)). A questão do periélio de Mercúrio foi prontamente resolvida e novas previsões foram feitas como, por exemplo, o valor do ângulo de deflexão gravitacional da luz ao passar pela vizinhança do Sol, verificado durante o eclipse solar de 1919 em Sobral ([Dodwell and Davidson, 1924](#)). Outra modificação que a TRG trouxe é a interpretação da gravidade como uma propriedade geométrica e não mais como uma interação à distância. De fato, na TRG, a geometria do espaço-tempo é modificada pela distribuição

de matéria e energia nele presente. O passar dos anos apenas fortaleceu a TRG e colocou a gravitação Newtoniana como um caso limite para baixas velocidades e campos gravitacionais fracos. Hoje, pouco mais de 100 anos após a dedução das equações de campo de Einstein, a TRG continua sendo confirmada. A última confirmação se deu com a detecção de ondas gravitacionais a partir de um evento de colisão de buracos negros (Abbott and *et al.*, 2016), reportado pelas colaborações LIGO* e VIRGO† e que recebeu o prêmio Nobel de Física em 2017. Fica claro, portanto, que teorias possuem limitações e os avanços tecnológicos e observacionais tornam possível o desenvolvimento de teorias novas e mais completas. Note, por exemplo, que a mecânica newtoniana não deixou de ser válida enquanto teoria da gravitação, apenas tornou-se um caso limite da TRG, assim como o é a TRE.

A TRG é a teoria do campo gravitacional mais bem consolidada que possuímos. Se considerarmos um espaço-tempo homogêneo e isotrópico, as equações de campo de Einstein dão origem às equações de Friedmann, que fornecem uma boa descrição da dinâmica da evolução do universo. O Modelo Cosmológico Padrão (MCP), que recebe esse nome por ser o modelo cosmológico mais aceito atualmente, está fundamentado sobre a TRG juntamente com o Princípio Cosmológico‡. Neste cenário, a evolução do Universo é caracterizada por uma época no universo primordial dominada pela radiação seguida por uma era da matéria, que estão em acordo com as observações cosmológicas disponíveis (Peebles and Ratra, 2003; Mukhanov, 2005; Weinberg, 2008).

Todavia, nos últimos 40 anos, o desenvolvimento da cosmologia observacional tem nos mostrado que o universo passou por duas fases de aceleração cósmica. A primeira é a que denotamos por inflação primordial, que consiste em um período de expansão quase exponencial anterior à era da radiação. A segunda corresponde ao período de aceleração atual e que começou logo após a era da matéria. Nesta última fase, a origem da expansão acelerada é atribuída a uma componente exótica de energia, denominada Energia Escura e que é representada, no contexto do MCP, por um termo de constante cosmológica (Λ), a qual tem sido confirmada por diferentes observações (Krauss and Turner, 1995; Riess et al., 1998; Alcaniz and Lima, 1999; Perlmutter et al., 1999; Tegmark and *et al.*, 2004, 2006; Eisenstein and *et al.*, 2005; Nichol et al., 2007; Spergel et al., 2003, 2007; Komatsu et al., 2009). A constante cosmológica Λ corresponde a aproximadamente 70% do conteúdo energético do universo atual. Esse fluido tem a propriedade peculiar de possuir pressão negativa, ou seja, $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$, onde p_Λ e ρ_Λ correspondem a pressão e densidade, respectivamente. Contudo, o valor observado de $\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{8\pi G}$, isto é $\rho_\Lambda \sim 10^{-47} \text{GeV}^4$ é discrepante em 120 ordens de grandeza do valor predito pela Teoria Quântica de Campos

* Do inglês, *Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*. Este observatório está situado nos Estados Unidos e conta com a participação de 900 cientistas de 40 instituições em todo o mundo, com o objetivo principal de observar ondas gravitacionais de origem cósmica.

† Faz parte de uma colaboração científica entre 6 países europeus que tem como objetivo detectar ondas gravitacionais.

‡ O Princípio Cosmológico sustenta o argumento de que não há local nem direção privilegiada na estrutura em grande escala do Universo. Em outras palavras, ele estabelece a homogeneidade e isotropia espaciais em grandes escalas.

(TQC) (Weinberg, 1989). O fato de desconhecermos a natureza dessa componente exótica constitui um dos principais problemas da física teórica atualmente.

Apesar de ser o modelo mais simples e satisfatório para a cosmologia, existem alguns problemas que o MCP não é capaz de explicar, como a natureza da componente exótica de energia escura, citada anteriormente, e outros problemas relacionados às condições iniciais como, por exemplo, a dificuldade de explicar porque a curvatura espacial é tão pequena hoje. Reescrevendo a equação de Friedmann em termos de um parâmetro de densidade (Ω) (veja Eq. 17 da referência Copeland, 2004), chega-se a conclusão de que no início da evolução do Universo, o termo $\Omega_T - 1$ (sendo Ω_T o parâmetro de densidade total) deveria ser muito próximo de zero e, portanto, precisaríamos de condições iniciais finamente ajustadas que conduzissem ao valor tão pequeno observado hoje (Mukhanov, 2005; Weinberg, 2008). Por outro lado, a escala do horizonte na superfície de último espalhamento corresponde a 1° no céu, tal que, acima desta escala deveríamos observar uma distribuição de temperatura não isotrópica. Todavia, as observações das flutuações de temperatura da Radiação Cósmica de Fundo (RCF) nos indicam um grau elevado de isotropia. A explicação de maior sucesso para estes e outros problemas é o cenário inflacionário (Guth, 1981; Linde, 1982; Albrecht and Steinhardt, 1982). Com relação ao problema do horizonte, esse período de expansão quase exponencial garante que o horizonte na superfície de último espalhamento cubra toda a região celeste hoje, assegurando que as flutuações de temperatura da RCF estiveram em contato causal no universo jovem. Na conjuntura atual, a maioria dos modelos inflacionários descrevem a inflação através de um campo escalar, ϕ , que está sujeito a um potencial, $V(\phi)$, com a propriedade de que o campo escalar rola lentamente partindo do topo do potencial até atingir o seu mínimo no fim da inflação. Esse tipo de comportamento é conhecido como *slow-roll*. Todavia, o primeiro modelo inflacionário foi apresentado por Starobinsky (1980) com a introdução de um termo quadrático do escalar de Ricci, R^2 , dominando a densidade Lagrangiana no Universo primordial, sendo este um dos modelos que apresenta melhor acordo com as observações astronômicas atualmente (Martin et al., 2014b; Akrami et al., 2018).

Recentemente, tem crescido o interesse por alternativas ao MCP que permitam explicar os dois períodos de aceleração cósmica sem recorrer à alguma componente exótica de energia ou campos escalares de origem desconhecida. Um dos caminhos possíveis são modificações na TRG. Vale salientar que as teorias de gravidade modificada tem sido objeto de estudo há um longo tempo, mas o interesse em explicar a aceleração cósmica nesse cenário é relativamente recente (Capozziello, 2002a). A quantidade de propostas de modificação da TRG é enorme. Encontramos na literatura modelos com campos extras, como a teoria de Brans-Dicke (Brans and Dicke, 1961a), em que um campo gravitacional é descrito pelo tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, e por um campo escalar, ϕ ; modelos de dimensões extras como o de Kaluza-Klein (Kaluza, 1921; Klein, 1926a,b), cujo objetivo é descrever a gravidade em 5 dimensões, sendo uma delas espacialmente pequena e compactificada, dentre outros (veja Clifton et al., 2012, para uma revisão recente).

As teorias $f(R)$, uma das principais extensões da TRG, são caracterizadas pela generalização

da Lagrangiana na ação de Einstein-Hilbert (Capozziello, 2002a)

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{g} R, \quad (1.1)$$

por uma função mais geral do escalar de Ricci R ,

$$S_f = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{g} f(R), \quad (1.2)$$

onde $\kappa = 8\pi G$, G é a constante gravitacional de Newton e g é o determinante do tensor métrico, considerando unidades em que $c = 1$ [§]. Além do escalar de Ricci, é possível construir teorias que sejam funções gerais de quantidades escalares construídas a partir dos tensores de Ricci, $R_{\mu\nu}$, e Riemann, $R_{\mu\nu\rho\sigma}$, tais como $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ e $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$. O invariante de curvatura de Gauss-Bonnet $\mathcal{G} \equiv R^2 - 4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta\gamma\delta}R^{\alpha\beta\gamma\delta}$, por exemplo, quando considerado na densidade Lagrangiana em uma função do tipo $f(\mathcal{G})$, permite construir modelos viáveis que são consistentes com a evolução de *background* e com restrições na gravidade local (Nojiri and Odintsov, 2005c; De Felice and Tsujikawa, 2009b,c). Outro ponto importante é que tanto a aceleração inicial quanto a tardia podem ser explicadas por meio de termos de curvatura de alta ordem na ação gravitacional (Capozziello and De Laurentis, 2011a; Nojiri and Odintsov, 2011, 2007; Capozziello and Francaviglia, 2008a; Capozziello et al., 2009; De la Cruz-Dombriz and Sáez-Gómez, 2012; Lobo, 2008; Faraoni and Capozziello, 2011a). Em particular, quando ambos R e \mathcal{G} estão presentes na ação, se exaurem todos os possíveis graus de liberdade de curvatura necessários para se estender a Relatividade Geral. Além disso, a presença do invariante topológico de Gauss-Bonnet pode resolver alguns problemas associados com a gravidade $f(R)$ (veja, por exemplo, Nojiri and Odintsov, 2005a; De Felice and Suyama, 2009a; De Felice et al., 2011; Capozziello et al., 2014a; De Laurentis and Lopez-Revelles, 2014b; De Laurentis, 2015a, para uma discussão detalhada).

Neste ponto, nos deparamos com uma situação similar à que a teoria Newtoniana enfrentou quando seus problemas foram resolvidos a partir do desenvolvimento da TRG. Em princípio, o ideal seria obter um modelo cosmológico que estivesse em concordância com os resultados observacionais e trouxesse o mínimo de alterações no MCP, uma vez que, dependendo da alteração necessária, poderíamos ter mudanças substanciais na física em seu nível mais fundamental como, por exemplo, na física de partículas. O que resta é investigar as previsões teóricas dos modelos de gravidade modificada e confrontá-las com os dados observacionais afim de verificar sua viabilidade observacional.

Nesta tese, analisaremos a viabilidade de teorias de gravidade $f(R, \mathcal{G})$ no contexto cosmológico. Investigaremos a viabilidade dinâmica e observacional de uma classe de modelos do tipo $f(R, \mathcal{G}) = \alpha R^n \mathcal{G}^{1-n}$ com soluções do tipo lei de potência. Com relação à abordagem de sistemas dinâmicos, a metodologia para estudar a dinâmica cosmológica consistirá em defi-

[§] A menos que explicitamente especificado, utilizaremos unidades em que $c = 1$.

nir um conjunto de variáveis adimensionais, tal que a evolução dessas variáveis constitui um sistema de equações para o qual as soluções representam regimes assintóticos na evolução do Universo. Além disso, iremos comparar este modelo às observações cosmológicas mais recentes, incluindo dados de supernovas do tipo Ia (SNe Ia), medidas locais do parâmetro de Hubble e dados da estrutura em grande escala do Universo. Examinaremos suas previsões teóricas e realizaremos uma análise de cadeias de Markov Monte Carlo (MCMC[¶]) afim de vincular os parâmetros cosmológicos associados ao modelo. Os resultados baseados na análise de sistemas dinâmicos apontam que esta classe de modelos não consegue reproduzir a sequência padrão de eras cosmológicas por não possuir uma era dominada pela matéria. Por outro lado, quando consideramos esta classe de modelos com soluções do tipo lei de potência, obtemos soluções de aceleração viáveis obtidas a partir de termos geométricos que conseguem descrever os dados observacionais recentes sem contribuições adicionais de energia escura. Além disto, exploraremos as condições de viabilidade de uma generalização do modelo inflacionário de Starobinsky, baseados na equivalência entre as teorias $f(R)$ e as teorias escalar-tensoriais.

A organização geral deste trabalho se dará da seguinte forma: no capítulo 2 apresentaremos uma revisão sobre teorias de gravidade modificada, onde discutiremos as principais motivações para estender a TRG. Abordaremos algumas das teorias alternativas à TRG e apresentaremos restrições sobre estes modelos advindas das observações recentes das ondas gravitacionais. No capítulo 3 exploraremos a abordagem de sistemas dinâmicos, mostrando algumas definições básicas e empregando-as no contexto de teorias de gravidade modificada do tipo $f(R)$ e $f(\mathcal{G})$. A contribuição original desta tese encontra-se nos capítulos 4, 5 e 6 e no apêndice A. No capítulo 4, aplicaremos e discutiremos a abordagem de sistemas dinâmicos aplicada à classe de modelos $f(R, \mathcal{G}) = \alpha R^n \mathcal{G}^{1-n}$ (Santos Da Costa et al., 2018). Averiguaremos sua viabilidade observacional à luz dos dados mais recentes da RCF, SNe Ia e da estrutura em grande escala do Universo (Benetti et al., 2018), no capítulo 5. No capítulo 6, analisaremos uma extensão do potencial inflacionário de Starobinsky e discutiremos suas consequências teóricas (Santos da Costa et al., prep). As conclusões deste trabalho são apresentadas no capítulo 7. Finalmente, nos apêndices A e B, apresentaremos, respectivamente, os resultados de uma análise de comparação Bayesiana para parametrizações do espectro de potência primordial (Santos da Costa et al., 2018) e a lista de publicações durante o período de doutorado.

¶ Do inglês *Monte Carlo Markov Chain*

2 Teorias de Gravidade Modificada

Neste capítulo, daremos ao leitor uma noção geral da novidade conceitual que são as teorias de gravidade modificadas, assim como discutiremos suas características qualitativas em comparação com a TRG. Além disso, veremos a motivação e o desenvolvimento histórico da física teórica num passado recente que estimulou a busca por uma teoria da gravidade além da de Einstein.

2.1. Por que modificar a gravidade?

A TRG é uma teoria bem consolidada, uma vez que ela descreve o espaço, o tempo, a gravidade e a matéria num nível macroscópico de maneira consistente com as observações e experimentos (Dodwell and Davidson, 1924; Abbott and *et al.*, 2016). A partir da formulação da TRG, surge um novo conceito de universo, que pode ser considerado como um sistema dinâmico suscetível a uma modelagem matemática e que possui quantidades mensuráveis.

Em sua teoria, Einstein postulou que as forças gravitacionais são descritas através da curvatura de um tensor métrico $g_{\mu\nu}$, relacionado ao elemento de linha $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ de um espaço-tempo quadridimensional. Nesse cenário, a curvatura do espaço-tempo é determinada pela distribuição de matéria (descrita pelo tensor energia-momento $T_{\mu\nu}^{(m)}$). Dada a métrica $g_{\mu\nu}$, a curvatura é dada pelo tensor de Riemann

$$R_{\alpha\beta\mu}^{\nu} = \Gamma_{\alpha\mu,\beta}^{\nu} - \Gamma_{\beta\mu,\alpha}^{\nu} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\mu}^{\nu} - \Gamma_{\mu\beta}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\alpha}^{\nu}, \quad (2.1)$$

onde a vírgula denota derivada parcial. A contração do tensor de Riemann,

$$R_{\alpha\mu} \equiv R_{\alpha\beta\mu}^{\beta}, \quad (2.2)$$

é o tensor de Ricci, assim como a contração do tensor de Ricci,

$$R \equiv R_{\mu}^{\mu} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

é o escalar de curvatura (ou escalar de Ricci).

Einstein assumiu a matéria como sendo um fluido perfeito descrito pelo tensor energia-momento

$$T_{\mu\nu}^{(m)} = (P + \rho)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

com u_μ sendo a quadrivelocidade do fluido de partículas e P e ρ a pressão e densidade de energia do fluido, respectivamente. A equação de continuidade requer a seguinte lei de conservação

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{(m)} = 0, \quad (2.5)$$

onde ∇_α é a derivada covariante.

Após algumas tentativas, Einstein e Hilbert concluíram, de maneira independente, que as equações de campo deveriam ser escritas da seguinte forma:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}^{(m)}, \quad (2.6)$$

onde $\kappa = 8\pi G$ (em unidades de $c = 1$).

A TRG está baseada em três princípios:

1. O Princípio da Relatividade: todos os observadores são igualmente válidos para descrever as leis da física;
2. O Princípio da Equivalência: relacionado ao fato de que os efeitos da aceleração são localmente indistinguíveis dos efeitos gravitacionais;
3. O Princípio da Covariância Geral: exige que as equações de campo sejam equações tensoriais covariantes que possuem a mesma forma independente do sistema de coordenadas, o que implica que todos os sistemas de coordenadas são equivalentes para descrever a física.

Como mencionado anteriormente, o MCP concorda bem com as observações cosmológicas disponíveis atualmente. Todavia, também existem deficiências neste modelo e elas são os motivos pelos quais tem-se questionado se a TRG é, de fato, a melhor teoria de campo gravitacional. Esse questionamento emerge do estudo da Cosmologia e da Teoria Quântica de Campos, no sentido de que a TRG não funciona como uma teoria fundamental quando uma descrição quântica do espaço-tempo e da gravidade é requerida. Esta foi a primeira razão pela qual foram desenvolvidos modelos de gravidade estendida, como uma tentativa de formular, ao menos no nível semi-clássico, modelos de gravidade quântica (Faraoni and Capozziello, 2011b).

Em razão das observações astrofísicas recentes, principalmente àquelas relacionadas com a aceleração cósmica atual, e de investigações cosmológicas, como as citadas no parágrafo anterior, é razoável colocar em dúvida o papel desempenhado pelas equações de Einstein no

nível do sistema solar, galático, extragalático e em escalas cosmológicas, a menos que se esteja disposto a mudar o lado direito das equações de campo,* incluindo formas de energia exóticas na composição do universo, como a energia e matéria escuras.

Nesse sentido, as teorias de gravidade modificada (ou estendidas) são baseadas em correções ou ampliações da TRG. Elas consistem, basicamente, em adicionar termos invariantes de curvatura de altas ordens ou campos escalares acoplados minimamente (ou não) na dinâmica emergente de alguma ação gravitacional efetiva. De maneira geral, podemos elencar em três as motivações para estender a teoria da Relatividade Geral: (i) caminhar na direção de uma teoria de gravitação quântica, (ii) descrever o período de aceleração cósmica e (iii) permitir acoplamentos não-mínimos com um campo escalar ou teorias com invariantes de curvatura de altas ordens. Esta última não será discutida aqui, mas indicamos ao leitor a referência [Faraoni and Capozziello \(2011b\)](#) para uma discussão detalhada.

Motivação quântica

Um dos principais desafios da física teórica moderna é construir uma teoria que descreva as interações fundamentais da natureza com seus diferentes aspectos a partir de uma mesma construção teórica. Isso se daria em termos da riqueza conceitual da teoria quântica, que já consegue unificar as interações forte, fraca e eletromagnética ([Glashow, 1961](#); [Weinberg, 1967](#); [Salam, 1968](#); [Georgi and Glashow, 1974](#); [Buras et al., 1978](#)) e rendeu o Prêmio Nobel de Física em 1979 a Sheldon Lee Glashow, Abdus Salam e Steven Weinberg. No entanto, uma teoria de gravidade quântica consistente (unitária e renormalizável) ainda não existe. O que existem são caminhos que estão sendo tomados na direção de construir esta teoria. As duas abordagens principais usadas no programa de quantização gravitacional são o tratamento canônico e o covariante[†], porém nenhuma das duas conseguiu produzir ainda uma teoria de gravitação quântica definitiva.

De maneira geral, a abordagem covariante consiste em dividir a métrica $g_{\mu\nu}$ numa parte cinemática $\eta_{\mu\nu}$ (plana) e uma parte dinâmica $h_{\mu\nu}$. Em seguida, o processo de quantização é aplicado ao campo dinâmico, considerado como um (pequeno) desvio da métrica do *background* de Minkowski. Esse método permite construir uma teoria que é renormalizável em um *loop* na série perturbativa ([Birrell and Davies, 1984](#)) e produz correções na ação de Einstein-Hilbert do tipo R^2 , $R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, $R^{\mu\nu\alpha\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta}$, $R\Box R$, $R\Box^k R$ ou termos com acoplamento não-mínimo entre campos de matéria e geometria, ϕR , entre outros (veja [Faraoni and Capozziello, 2011b](#), e referências lá contidas).

Do ponto de vista da Cosmologia, as modificações na gravidade padrão com termos quadráticos do escalar de Ricci, por exemplo, proporciona cenários inflacionários interessantes para

* Possibilidades de modificação no lado esquerdo ou direito das equações de campo de Einstein serão detalhadas na próxima subseção.

† Indicamos ao leitor a referência [Faraoni and Capozziello \(2011b\)](#) que contém uma descrição mais detalhada sobre cada uma das abordagens citadas.

adequar o modelo cosmológico padrão às observações (Martin et al., 2014b; Akrami et al., 2018). Em todo caso, uma condição que deve ser satisfeita a fim de que essas teorias sejam fisicamente aceitas é que elas recuperem a TRG no limite de baixas energias. Entretanto, a inserção de termos não lineares na Lagrangiana de Einstein aumenta a não-linearidade das equações de campo, tornando-as mais difíceis de serem estudadas. Uma opção para simplificar as equações de movimento seria procurar por simetrias da Lagrangiana e quantidades conservadas que permitissem soluções exatas para a dinâmica (Capozziello et al., 1996; Faraoni and Capozziello, 2011b; Dialektopoulos and Capozziello, 2018).

Motivação cosmológica e astrofísica

Várias explicações são possíveis para descrever a atual fase de expansão acelerada do Universo. Por exemplo, as equações de campo de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.7)$$

podem ser modificadas tanto do lado direito quanto do lado esquerdo. A abordagem de modificar o lado direito dessas equações considera formas específicas para o tensor energia-momento com pressão negativa. Modelos pertencentes a essa classe são conhecidos como modelos de quintessência (Fujii, 1982; Ratra and Peebles, 1988; Ferreira, 1997; Caldwell, 1998; Copeland et al., 1998) e k-essência (Chiba et al., 2000; Armendariz-Picon et al., 2001), por exemplo. A modificação mais simples nesta perspectiva é o termo de constante cosmológica Λ , que é interpretado como uma contribuição das flutuações quânticas do vácuo (Weinberg, 2008). Como mencionado anteriormente, essa abordagem falha, pois o valor observado da constante cosmológica tem um valor 120 ordens de magnitude menor do que o valor típico da densidade de energia do vácuo predito pela TQC (Weinberg, 1989).

Neste cenário, algo comumente feito na literatura é propor a existência de um campo escalar ϕ , minimamente acoplado com a gravidade e que evolui até o mínimo de seu potencial $V(\phi)$. A Lagrangiana descrevendo modelos deste tipo é escrita como

$$\mathcal{L}_\phi = \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial^\nu \phi - V(\phi) \right], \quad (2.8)$$

e o tensor energia-momento é dado por

$$T_{\mu\nu}^\phi = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \phi \partial_\beta \phi - V(\phi) \right]. \quad (2.9)$$

A métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) considera uma variedade homogênea e isotrópica, descrita pelo elemento de linha,

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t) \left[\frac{dr^2}{\sqrt{1 - Kr^2}} + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (2.10)$$

sendo $a(t)$ o fator de escala e K a curvatura do Universo, tal que $K = 0, \pm 1$, indica um Universo plano, com geometria hiperbólica ou esférica, respectivamente. A variação da ação correspondente à Lagrangiana (2.8) com respeito ao campo ϕ , produz a equação de Klein-Gordon (para a métrica FLRW plana)

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0. \quad (2.11)$$

Dado o potencial $V(\phi)$, conseguimos resolver esta expressão para obter ϕ e, conseqüentemente, sua equação de estado

$$w_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)}, \quad (2.12)$$

pode ser resolvida, com $-1 \leq w \leq 1$ ao longo da evolução do universo.

São várias as parametrizações adotadas na literatura para $V(\phi)$ (veja a tabela 2.1 de Barboza Jr., 2010). Contudo, os modelos de quintessência seguem apresentando o problema da coincidência cósmica e a origem do campo escalar ϕ ainda é misteriosa (Faraoni and Capozziello, 2011b).

Por outro lado, a modificação do lado esquerdo das equações de Einstein (2.6) constitui os chamados modelos de gravidade modificada. Neste cenário, estamos reconsiderando o nosso conhecimento sobre a estrutura do espaço-tempo, explicando a aceleração cósmica com uma geometria diferente da proposta por Einstein e que não considera componentes exóticas de matéria/energia. Pertencem a essa classe as chamadas teorias $f(R)$ (Capozziello, 2002b; Capozziello et al., 2003; Nojiri and Odintsov, 2007; Capozziello and Francaviglia, 2008b; De Felice and Tsujikawa, 2010; Sotiriou and Faraoni, 2010), teorias escalar-tensoriais (Bergmann, 1968; Barrow, 1993; Bartolo and Pietroni, 1999; Chiba, 1999; Fujii and Maeda, 2003; Brans, 2005), modelos de brana (Dvali et al., 2000a; Alcaniz, 2002; Sahni and Shtanov, 2003), dentre outras (veja Clifton et al., 2012, para uma discussão completa de modelos de gravidade modificada). Isto nos leva ao tema das próximas seções, em que serão consideradas com maior riqueza de detalhes algumas dessas classes de modelos.

2.2. Teorias de gravidade com campos extras

Como vimos na seção anterior, na TRG, a gravidade é descrita pelo tensor métrico com o qual os campos de matéria se acoplam. Todavia, existe a possibilidade de que campos adicionais também descrevam a gravidade, podendo estes ser escalares, vetoriais ou tensoriais. Algumas teorias de gravidade modificada desse tipo são chamadas teorias escalares-tensoriais e teorias bimétricas. Contudo, outras classes envolvendo campos vetoriais, tais como o modelo de Einstein-Æther (Jacobson, 2008) ou modelos tensorial-vetorial-escalar (Skordis, 2009) também tem sido estudados na literatura.

As teorias escalares-tensoriais compõe uma das classes de teorias de gravidade modificada mais estabelecidas e estudadas na literatura. Elas surgem, naturalmente, como uma teoria efetiva de dimensão reduzida a partir de teorias de altas dimensões, como é o caso de modelos de Kaluza-Klein de cordas.

A forma geral da ação gravitacional pode ser escrita como (Bergmann, 1968; Nordtvedt Jr, 1970)

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[b(\phi)R - \frac{1}{2}h(\phi)g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi) \right] + \mathcal{L}_m(\Psi, g_{\mu\nu}), \quad (2.13)$$

onde $\mathcal{L}_m(\Psi, g_{\mu\nu})$ representa a Lagrangiana de matéria e $b(\phi)$, $h(\phi)$ e $V(\phi)$ são funções arbitrárias de ϕ que especificam a teoria. O termo de acoplamento com a curvatura é $b(\phi)$, $h(\phi)$ é um termo de energia cinética e $V(\phi)$ é o termo de energia potencial que pode ser identificado como uma generalização (dependente de ϕ) da constante cosmológica.

A variação da ação (2.13) com respeito a $g^{\mu\nu}$ produz as equações de campo (Caldwell and Kamionkowski, 2009)

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{b(\phi)} \left[\frac{1}{2}T_{\mu\nu}^{(m)} + \frac{1}{2}T_{\mu\nu}^{(\phi)} + \nabla_\mu\nabla_\nu b(\phi) - g_{\mu\nu}\square b(\phi) \right], \quad (2.14)$$

onde $\square \equiv g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$ e

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} = h(\phi)(\nabla_\mu\phi)(\nabla_\nu\phi) - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}h(\phi)g^{\sigma\rho}(\nabla_\sigma\phi\nabla_\rho\phi) + V(\phi) \right]. \quad (2.15)$$

Note que também devemos variar a Eq.(2.13) com respeito ao campo escalar ϕ (grau de liberdade adicional da teoria). Nesse caso, obtemos

$$h(\phi)\square\phi + b'(\phi)R + \frac{1}{2}h'(\phi)\nabla^\alpha\phi\nabla_\alpha\phi - V'(\phi) = 0, \quad (2.16)$$

onde ' denota derivada com respeito a ϕ .

Para a métrica FLRW plana, obtemos as seguintes equações de movimento para o fator de escala $a(t)$,

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\rho}{6b} + \frac{h\dot{\phi}^2}{6b} - H\frac{\dot{b}}{b} + \frac{V}{6b}, \quad (2.17)$$

e para o campo escalar ϕ ,

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = 3\frac{b'}{h}(\dot{H} + 2H^2) - \frac{h'\dot{\phi}^2}{2h} - \frac{1}{2}\frac{V'}{h}. \quad (2.18)$$

É possível notar dessas equações que a liberdade de escolha para as funções $b(\phi)$, $h(\phi)$ e $V(\phi)$ é grande e, portanto, torna-se difícil elencar considerações gerais para validar as teorias escalares-tensoriais. Além do que, também é necessário especificar as condições iniciais para o novo grau de liberdade escalar da teoria - o campo ϕ .

2.2.1. Teoria de Brans-Dicke

A primeira teoria escalar-tensorial completa e de sucesso foi a teoria de Brans-Dicke (TBD) (Brans and Dicke, 1961b). A ação dessa teoria no frame de Jordan é escrita tomando $b(\phi) = \phi/(16\pi G)$ e $h(\phi) = \omega_{BD}/(16\pi G\phi)$ na Eq. (2.13):

$$S_{(BD)} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\phi R - \frac{\omega_{BD}}{\phi} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - V(\phi) \right] + \mathcal{L}_m, \quad (2.19)$$

onde o parâmetro de Brans-Dicke ω_{BD} é uma constante, tal que quanto maior seu valor, menor o efeito do campo escalar adicional ϕ . Isso implica que a TRG é recuperada quando $\omega_{BD} \rightarrow \infty$. Vale salientar ainda que originalmente $V(\phi) = 0$.

Observe que a matéria não está acoplada diretamente com o campo ϕ , uma vez que a Lagrangiana de matéria é independente de ϕ , o que é conhecido como acoplamento mínimo de matéria. Todavia, este campo acopla-se diretamente com o escalar de Ricci. Logo, o campo gravitacional é descrito por ambos o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e o campo escalar de Brans-Dicke, ϕ . Além disso, o campo escalar ϕ , juntamente com as variáveis de matéria, constituem os graus de liberdade da teoria. A TBD pode ser vista como uma teoria de acoplamento gravitacional variável, pois a ação e a equação de campo sugerem que o campo ϕ seja identificado como uma função dependente da localização espacial através do inverso da constante gravitacional efetiva $G_{eff}(\phi) = \frac{G}{\phi}$ (Brans and Dicke, 1961b; Faraoni and Capozziello, 2011a).

Encontram-se na literatura diversos trabalhos abordando a TBD, que envolvem, por exemplo, o estudo do comportamento gravitacional na vizinhança de um corpo massivo isolado para uma simetria esférica e estática, assim como soluções para o vácuo no caso de simetria esférica não-estática (Brans and Dicke, 1961b). Da mesma forma, encontramos trabalhos que estudam a evolução das perturbações de matéria no cenário FLRW (Nagata et al., 2002) e em cosmologias anisotrópicas (veja Clifton et al., 2012, e referências lá citadas). Os vínculos mais rigorosos sobre o parâmetro ω_{BD} , dentro do Sistema Solar, foram obtidos através de medidas da mudança de frequência de fótons de rádio quando emitidos e recebidos pela sonda Cassini depois de passarem próximo do Sol. Os valores obtidos são muito altos, da ordem de $\gamma_{PN} - 1 = (2.1 \pm 2.3) \times 10^{-5}$ ($\omega_{BD} \geq 40.000$), onde $\gamma_{PN} = (1 + \omega_{BD})/(2 + \omega_{BD})$, em um nível de confiança de 68% (Bertotti et al., 2003). Testes complementares utilizando dados da RCF (Ade et al., 2016a; Aghanim et al., 2016a) e medidas de BAO (Staveley-Smith et al., 2011; Anderson et al., 2014; Ross et al., 2015) restringem $1 - \gamma_{PN} < 0.003$ em um nível de confiança de 95% (Ballardini et al., 2016).

2.2.2. Teorias bimétricas

As teorias de gravidade bimétricas foram inicialmente propostas por Rosen (1973) e envolvem dois tensores métricos de ordem 2. O primeiro deles é a métrica dinâmica $g_{\mu\nu}$, que geralmente

acopla-se com os campos de matéria e, a partir dela, se constrói o tensor energia-momento; o segundo é uma métrica não-dinâmica $\tilde{g}_{\alpha\beta}$. O fato de ser não-dinâmica permite que a métrica $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ seja altamente simétrica e, portanto, a escolha mais óbvia é tomá-la como a métrica de Minkowski, $\eta_{\mu\nu}$, tal que todas as componentes do tensor de Riemann construídas a partir de $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ sejam nulas. Vale salientar que as equações que governam $g_{\mu\nu}$ não são as equações de campo de Einstein apenas, mas também envolvem $\tilde{g}_{\alpha\beta}$.

A seguir, introduziremos noções básicas sobre alguns modelos dessa linha de pesquisa e indicaremos ao leitor a referência [Clifton et al. \(2012\)](#), que aborda com mais detalhes alguns casos que vem sendo tratados na literatura.

Teoria de Drummond

A teoria de Drummond ([Drummond, 2001](#)) é uma versão mais recente das teorias bimétricas que se propõe a trabalhar com a formulação de tetradas, com $g_{\alpha\beta} = \eta_{AB}e^A_\alpha e^B_\beta$ e $\tilde{g}_{\alpha\beta} = \eta_{\tilde{A}\tilde{B}}\tilde{e}^{\tilde{A}}_\alpha \tilde{e}^{\tilde{B}}_\beta$. Neste cenário, ambas as tetradas são dinâmicas, com $\tilde{e}^{\tilde{A}}_\alpha$ sendo usada para construir a ação de Einstein-Hilbert e e^B_β usada para construir a ação a partir da qual o tensor energia-momento é calculado. Para completar a teoria existe um tensor de transformação, $M^{\tilde{A}}_B$, e um escalar, ϕ , que relacionam $\tilde{e}^{\tilde{A}}_\mu$ e e^B_μ através de

$$\tilde{e}^{\tilde{A}}_\mu = e^\phi M^{\tilde{A}}_B e^B_\mu. \quad (2.20)$$

Por fim, a ação que conecta todas essas quantidades é definida como:

$$\begin{aligned} S_L = & \frac{1}{16\pi G_1} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu} \text{Tr}(j_\mu j_\nu) + \frac{1}{16\pi G_2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \tilde{g}^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi) \\ & + \frac{1}{16\pi G_1} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \frac{m^2}{4} (M^{\tilde{A}}_A M^A_{\tilde{A}} + M^A_{\tilde{A}} M^{\tilde{A}}_A - \gamma) - \frac{1}{16\pi G_2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} m^2 \phi^2, \end{aligned} \quad (2.21)$$

onde a corrente j_μ é definida como

$$j^{\tilde{A}\tilde{B}}_\mu \equiv \tilde{g}^{\tilde{B}\tilde{C}} [\tilde{\nabla}_\mu M^{\tilde{A}}_B] M^B_{\tilde{C}}, \quad (2.22)$$

e onde G_1 e G_2 são novas constantes gravitacionais, m é um parâmetro de massa e γ é um parâmetro livre que corresponde à constante cosmológica.

Em sua teoria, [Drummond \(2001\)](#) mostrou que o limite Newtoniano é bem definido, tal que a correção de alta ordem obtida é exatamente aquela necessária para satisfazer as restrições do Sistema Solar, para a precessão do periélio de Mercúrio. Além do mais, no limite de campo fraco, a métrica dinâmica $g_{\alpha\beta} \simeq \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$ produz um potencial na forma

$$h_{00} = -\frac{GM}{r} \left(1 + \frac{G_1}{G} e^{-mr} \right), \quad (2.23)$$

de modo que para $mr \ll 1$ a constante efetiva de Newton é $G_N = G + G_1$, enquanto que para

grandes escalas $G_N \simeq G$. Essa correção é capaz de mimetizar o papel da matéria escura em galáxias espirais, embora não resolva completamente o problema (Drummond, 2001).

Bigravidade

Esta classe de teorias de gravidade bimétricas teve sua primeira proposição feita ainda na década de 1970 (Isham et al., 1973) e foi recentemente revisitada por Bañados e colaboradores (Bañados et al., 2009; Banados et al., 2009). O ponto de partida dessas teorias é considerar dois campos dinâmicos, a métrica $g_{\mu\nu}$ e a conexão $C_{\mu\nu}^\alpha$ com o tensor de Ricci $K_{\mu\nu}[C]$. A ação correspondente é escrita como:

$$S[g, C] = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g}(R - 2\Lambda) + \frac{2}{\alpha\ell^2} \sqrt{-\det[g_{\mu\nu} - \ell^2 K_{\mu\nu}]}, \quad (2.24)$$

onde Λ é a constante cosmológica, α é um parâmetro adimensional e ℓ é uma escala de comprimento. É possível mostrar que introduzindo uma segunda métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$, correspondendo à conexão $C_{\mu\nu}^\alpha$, a ação anterior é apenas um caso específico da ação mais geral (Banados, 2008):

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \left[\sqrt{-g}(R - 2\Lambda) + \sqrt{-\tilde{g}}(\tilde{R} - 2\tilde{\Lambda}) - \sqrt{-\tilde{g}} \frac{1}{\ell^2} (\tilde{g}^{-1})^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \right], \quad (2.25)$$

onde $\tilde{\Lambda} = \frac{\alpha}{\ell^2}$ é um termo de constante cosmológica e ambas as métricas são utilizadas para construir a ação de Einstein-Hilbert, mesmo que apenas uma delas esteja acoplada com o conteúdo de matéria.

O comportamento dessas teorias em escalas cosmológicas foi estudado em Banados (2008) e Bañados et al. (2009). As métricas homogêneas e isotrópicas FLRW são escritas como $g_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, a^2, a^2, a^2)$ e $\tilde{g}_{\alpha\beta} = \text{diag}(-X^2, Y^2, Y^2, Y^2)$, com X e Y sendo função apenas do tempo t . As equações de Friedmann e de conservação são escritas de maneira usual, substituindo $\rho \rightarrow \tilde{\rho} + \rho$, tal que,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\tilde{\rho} + \rho), \quad (2.26)$$

onde $\tilde{\rho} = Y^3/(8\pi G\ell^2 X a^3)$, e

$$\frac{d\tilde{\rho}}{dt} = -3(1 + \tilde{w})\tilde{\rho}, \quad (2.27)$$

com \tilde{w} satisfazendo à equação:

$$\frac{d\tilde{w}}{dt} = 2\tilde{w} \left[1 + 3\tilde{w} + \sqrt{4(-\tilde{w})^{3/2} \tilde{\Omega} \alpha - 2 \frac{(1 + 3\tilde{w})\rho_\ell}{\rho_c}} \right], \quad (2.28)$$

onde $\rho_c = \rho + \tilde{\rho}$, $\rho_\ell = (8\pi G\ell^2)^{-1}$ e $\tilde{\Omega} = \tilde{\rho}/\rho_c$.

É importante mencionar que essa classe de teorias tem o potencial de mimetizar o comportamento da matéria escura. Esse resultado foi mostrado em Hu (1998) onde os autores estudam a

evolução das perturbações cosmológicas e mostram que o campo auxiliar pode ser reescrito na forma de um fluido de matéria escura generalizado. Em [Bañados et al. \(2009\)](#), os autores utilizaram as anisotropias da RCF e dados da estrutura em grande escala do universo para mostrar as assinaturas características desses modelos no período de expansão acelerada. Eles encontraram que, se o campo $\tilde{\rho}$ é dominante e responsável pela aceleração cósmica, existe uma instabilidade nos potenciais gravitacionais que faz com que o efeito Sachs-Wolfe integrado produzido seja muito grande em grandes escalas. Consequentemente, torna-se difícil conciliar o espectro de potência angular das flutuações de temperatura da RCF e o espectro de potência da distribuição de matéria preditos por uma teoria bimétrica com os dados atuais. Por outro lado, se o campo $\tilde{\rho}$ se comportar apenas como a matéria escura, o melhor ajuste do modelo bimétrico é indistinguível do cenário Λ CDM padrão.

2.3. Teorias de gravidade de ordem superior

A extensão da TRG, incluindo termos de derivadas superiores à segunda ordem nas equações de campo, é desejável pois permite que a teoria de gravidade seja renormalizável[‡] ([Clifton et al., 2012](#)). Teorias pertencentes a essa classe são muito interessantes fenomenologicamente, embora sofram com instabilidades devido ao teorema de Gauss-Ostrogradski[§] ([Ostrogradsky, 1850](#)). Essas instabilidades geralmente estão associadas com campos do tipo *ghost*, que são campos cujo termo cinético é negativo (veja [Sbisa, 2014](#), e referências lá citadas para uma discussão sobre a importância das instabilidades associadas a estes campos).

A classe de teorias mais estudada nesse cenário são as teorias $f(R)$, que são teorias de gravidade de quarta ordem que generalizam a ação de Einstein-Hilbert com a introdução de uma função geral do escalar de Ricci. Podemos citar também a gravidade de Horava-Lifschitz ([Hořava, 2009a,b,c](#)), mas esta teoria permite derivadas com ordem superior a 2 apenas nas coordenadas espaciais.

Nesta seção, nos deteremos principalmente ao estudo das teorias $f(R)$, abrangendo desde a dedução das equações de campo nos formalismos métrico e de Palatini, passando pela equivalência destas com a teoria de Brans-Dicke, o cenário inflacionário utilizando teorias $f(R)$, e indo até as restrições observacionais recentes. Por fim, abordaremos um pouco sobre teorias que incluem combinações da curvatura de Ricci e Riemann e, assim, consideram todos os graus de liberdade de curvatura possíveis para estender a TRG.

[‡] Uma teoria renormalizável é uma teoria que não contém resultados de integrais divergentes e, portanto, pode ser quantizada da maneira convencional.

[§] Uma instabilidade no Hamiltoniano associada com Lagrangianas que dependem de derivadas temporais com ordem maior que um e que não podem ser eliminadas através de uma integração por partes ([Woodard, 2007](#)).

2.3.1. Teorias $f(R)$

A ideia de generalizar a ação de Einstein-Hilbert com a inclusão de invariantes de curvatura ou uma função geral do escalar de Ricci data do início do século XX (Weyl, 1918), apenas alguns anos depois da teoria da Relatividade de Einstein ter sido proposta. O interesse por essa classe de teorias apenas aumentou ao longo dos anos, especialmente depois da descoberta de que elas podem explicar os períodos de aceleração cósmica primordial e atual (Starobinsky, 1980; Capozziello, 2002b; De Felice and Tsujikawa, 2010).

A ação de Einstein-Hilbert generalizada com uma função do escalar de Ricci é escrita como:

$$S_t = S_f + S_m = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m. \quad (2.29)$$

Neste ponto, podemos adotar pelo menos dois formalismos variacionais distintos para obter as equações de campo: os formalismos métrico e de Palatini. Embora tenhamos adotado o formalismo métrico nas investigações observacionais deste trabalho, mostraremos como obter as equações de campo nos dois formalismos.

Formalismo métrico

O formalismo métrico considera a métrica $g_{\mu\nu}$ como o único campo livre e, portanto, a variação da ação deve ser feita somente com respeito a essa variável. Utilizando o princípio da mínima ação para variar a ação com respeito à métrica inversa $g^{\mu\nu}$, isto é, $\delta S_t = \delta S_f + \delta S_m = 0$, temos:

$$\delta S_f = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \delta \left[\sqrt{-g} f(R) \right] = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left[\delta(\sqrt{-g}) f(R) + \sqrt{-g} f_R(R) \delta R \right]. \quad (2.30)$$

A partir de agora, utilizaremos a seguinte notação: $f_R \equiv df/dR$, $f_{RR} \equiv d^2f/dR^2$ e assim sucessivamente.

Da definição do escalar de Ricci, segue-se que:

$$\delta R = R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}, \quad (2.31)$$

e a variação do termo com determinante da métrica ($\sqrt{-g}$) é escrito como:

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.32)$$

A partir da definição do tensor de Ricci, temos que

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} (\nabla_\rho \delta \Gamma_{\nu\mu}^\rho - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\rho\mu}^\rho), \quad (2.33)$$

onde

$$\Gamma_{\nu\mu}^{\rho} = \{\alpha_{\mu\nu}\} = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}(\partial_{\mu}g_{\lambda\nu} + \partial_{\nu}g_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda}g_{\nu\mu}) \quad (2.34)$$

são os símbolos de Christoffel e $\{\alpha_{\mu\nu}\}$ são as conexões de Levi-Civita para a métrica $g_{\mu\nu}$. É possível mostrar que

$$g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \nabla_{\mu}\nabla_{\nu} - g_{\mu\nu}\square, \quad (2.35)$$

onde $\square \equiv g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}$, considerando $\nabla_{\sigma}(\sqrt{-g}) = 0$ e $\nabla_{\alpha}g_{\mu\nu} = 0$.

Desta forma, conseguimos reescrever a Eq. (2.30) como

$$\delta S_f = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left[f_R(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + g_{\mu\nu}\square f_R(R) - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}f_R(R) \right] \delta g^{\mu\nu} = 0. \quad (2.36)$$

A variação da ação da matéria é feita de modo similar, ou seja,

$$\begin{aligned} \delta S_m &= \int d^4x \delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m) \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2}T_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

onde $T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}$ é o tensor energia-momento usual. Portanto, obtemos as seguintes equações de campo de quarta ordem:

$$f_R(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}f(R) + g_{\mu\nu}\square f_R(R) - \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}f_R(R) = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.38)$$

Note que, para $f(R) = R$, essas equações de campo se reduzem àquelas da TRG dadas pela Eq. (2.6). É possível mostrar também que o traço da Eq. (2.38) é dado por

$$3\square f_R(R) + f_R(R)R - 2f(R) = \kappa T, \quad (2.39)$$

onde $T = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ é o traço do tensor energia-momento. O fato da relação entre R e T ser diferencial mostra que as equações de campo das teorias $f(R)$ admitem uma variedade maior de soluções se comparadas com a Relatividade Geral, onde temos uma relação algébrica do tipo $R = -\kappa T$.

Optando por reescrever a Eq. (2.38) de forma análoga às equações de campo de Einstein, teremos:

$$G_{\mu\nu} = \kappa_{eff}[T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{eff}], \quad (2.40)$$

onde a quantidade $\kappa_{\text{eff}} \equiv 8\pi G_{\text{eff}} = 8\pi G/f_R$ define um acoplamento gravitacional efetivo e

$$T_{\mu\nu}^{\text{eff}} \equiv \frac{1}{\kappa} \left[\frac{(f - Rf_R)}{2} g_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu f_R - g_{\mu\nu} \square f_R \right]. \quad (2.41)$$

Um caso interessante é encontrado se introduzirmos um novo campo χ na ação (2.29), tal que

$$S_t = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [f(\chi) + f_\chi(R - \chi)] + S_m, \quad (2.42)$$

onde $f_\chi \equiv df/d\chi$. Uma vez que $\chi = R$, esta ação é dinamicamente equivalente à ação (2.29). Por outro lado, a variação da ação (2.42) com respeito a χ produz $f_{\chi\chi}(R - \chi) = 0$, tal que teremos $R = \chi$ se, e somente se, $f_{\chi\chi} \neq 0$. Por fim, se redefinirmos $f_\chi(\chi) \equiv \phi$, teremos que:

$$f(\chi(\phi)) + f_\chi(R - \chi) = \phi R - [\chi(\phi)\phi - f(\chi(\phi))] = \phi R - U(\phi), \quad (2.43)$$

onde $U(\phi)$ é o potencial do campo ϕ . Assim sendo, a ação (2.29) torna-se:

$$S_t = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [\phi R - U(\phi)] + S_m, \quad (2.44)$$

que é idêntica à Eq. (2.19) mas sem o termo cinético. Isso significa que as teorias $f(R)$ no formalismo métrico são equivalentes à teoria de Brans-Dicke com $\omega_{BD} = 0$.

Neste ponto, é importante enfatizar um aspecto importante da equivalência dinâmica entre as teorias $f(R)$ e a teoria de Brans-Dicke, que é utilizar os resultados deduzidos no cenário uma teoria e aplicá-los no da outra. Por exemplo, mostrou-se em Chiba (2003) que um modelo $f(R)$ no formalismo métrico não passa por testes no Sistema Solar, pois a teoria equivalente de Brans-Dicke com $\omega_{BD} = 0$ não concorda com o valor restringido pelas observações (como vimos na seção 2.2.1).

Para estudar a dinâmica cosmológica, vamos considerar um universo descrito pela métrica FLRW plana ($k = 0$) e o conteúdo energético descrito pelo tensor energia-momento de um fluido do tipo perfeito, tal que $T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, -P, -P, -P)$, com ρ e P representando a densidade de energia e a pressão do fluido, respectivamente. As componentes tempo-tempo e espaciais correspondem a

$$3f_R H^2 = \kappa\rho + \frac{1}{2}(f_R R - f) - 3H\dot{f}_R \quad (2.45)$$

$$-2f_R \dot{H} = \kappa(\rho + P) + \ddot{f}_R - H\dot{f}_R, \quad (2.46)$$

onde $\rho = \rho_m + \rho_r$ e $P = P_r$. O escalar de Ricci é escrito como $R = 6(\dot{H} + H^2)$.

No caso em que $f(R) = R$, temos $f_R = 1$, $f_{RR} = 0$ e as equações de Friedmann se reduzem

àquelas da Relatividade Geral, isto é,

$$3H^2 = \kappa\rho, \quad (2.47)$$

$$-2\dot{H} = \kappa(\rho + P) \Rightarrow H^2 = -\kappa P - 2\frac{\ddot{a}}{a}. \quad (2.48)$$

É importante observar que não estamos incluindo qualquer componente de energia escura ou exótica aqui para explicar a expansão acelerada do universo. Estamos considerando única e exclusivamente um universo composto por matéria (escura e bariônica) e radiação, e todos os termos de curvatura fazem o papel da energia escura no contexto da Relatividade Geral para explicar a expansão cósmica apenas através da geometria.

Nesse sentido, é útil redefinir as quantidades devido à modificação na gravidade, relacionando-as com a densidade e pressão, tal que se

$$\begin{aligned} \kappa\rho_{DE} &= \frac{1}{2} \frac{(f_R R - f)}{f_R} - 3H \frac{\dot{f}_R}{f_R}, \\ \kappa(\rho_{DE} + P_{DE}) &= \ddot{f}_R - H\dot{f}_R, \end{aligned} \quad (2.49)$$

podemos reescrever as Eqs.(2.45) e (2.46) como:

$$3f_R H^2 = \kappa\rho_{\text{eff}}, \quad (2.50)$$

$$-2f_R \dot{H} = \kappa(\rho_{\text{eff}} + P_{\text{eff}}), \quad (2.51)$$

onde $\rho_{\text{eff}} = \rho + \rho_{DE}$ e $P_{\text{eff}} = P + P_{DE}$.

Sendo assim, a densidade de energia ρ_{DE} e a pressão P_{DE} devido à contribuição geométrica obedecem a equação de conservação usual $\dot{\rho}_{DE} = -3H(\rho_{DE} + P_{DE})$ e o parâmetro da equação de estado, $\omega_{DE} \equiv P_{DE}/\rho_{DE}$, torna-se:

$$\omega_{DE} = -\frac{4}{3} + \left[\frac{2\ddot{f}_R - \frac{1}{3}(f_R R - f)}{f_R R - f - 6H\dot{f}_R} \right]. \quad (2.52)$$

Por fim, a partir das Eqs. (2.50) e (2.51), definimos um parâmetro de equação de estado efetivo, como:

$$\omega_{\text{eff}} = \frac{P_{\text{eff}}}{\rho_{\text{eff}}} = -1 - \frac{2}{3} \frac{\dot{H}}{H^2}. \quad (2.53)$$

No capítulo 3, a dinâmica das teorias $f(R)$ será abordada do ponto de vista de sistemas dinâmicos e alguns critérios gerais de viabilidade serão demonstrados.

Formalismo de Palatini

O formalismo de Palatini foi introduzido pelo próprio Einstein (Einstein, 1925), mas levou esse nome por conta de um mal entendido histórico (Ferraris et al., 1982). Sua principal caracterís-

tica é que a conexão $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha$, que entra na definição do tensor de Ricci é independente da métrica $g_{\mu\nu}$. Portanto, teremos um novo tensor de Ricci, $\mathcal{R}_{\mu\nu}$, formado a partir da conexão independente e, conseqüentemente, um novo escalar de Ricci, $\mathcal{R} = g^{\mu\nu}\mathcal{R}_{\mu\nu}$. A ação no formalismo de Palatini continua como a ação (2.29), mas com $R \rightarrow \mathcal{R}$, tal que

$$S_{Pal} = S_f + S_m = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(\mathcal{R}) + \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \psi), \quad (2.54)$$

onde, vale ressaltar, a ação da matéria depende apenas da métrica $g_{\mu\nu}$ e dos campos de matéria, mas não das conexões $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha$.

As equações de campo são obtidas ao variarmos a ação gravitacional com respeito aos dois campos independentes:

$$f_{\mathcal{R}}\mathcal{R}_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2}f g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.55)$$

$$-\hat{\nabla}_\alpha(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}) + \hat{\nabla}_\sigma(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\sigma(\mu})\delta_\alpha^{\nu)}) = 0, \quad (2.56)$$

onde (2.55) é o resultado da variação da ação com respeito à métrica e (2.56) é obtida através da variação com relação às conexões. Vale ressaltar ainda que ∇ é a derivada covariante construída a partir da conexão de Levi-Civita, $\{\overset{\alpha}{\mu\nu}\}$, e $\hat{\nabla}_\alpha$ representa a derivada covariante construída a partir das conexões independentes, $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha$.

Note que as equações de campo são equações de segunda ordem, ao contrário do formalismo métrico que fornece equações com derivadas de quarta ordem da métrica $g_{\mu\nu}$. Além disso, o traço da (2.56) produz

$$\hat{\nabla}_\alpha(\sqrt{-g}f_{\mathcal{R}}g^{\mu\nu}) = 0, \quad (2.57)$$

tal que, para $f(\mathcal{R}) = R \Rightarrow f_{\mathcal{R}} = 1$, a Eq. (2.57) recupera a definição da conexão de Levi-Civita para a conexão inicialmente independente $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha$. Isto implica em $\mathcal{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}$ e $\mathcal{R} = R$, e que os dois formalismos são equivalentes, uma vez que as equações de campo se reduzem àquelas da TRG. Note ainda que, para que a Eq. (2.57) recupere a definição da conexão de Levi-Civita, devemos considerar uma nova métrica $h_{\mu\nu} = f_{\mathcal{R}}g_{\mu\nu}$, tal que:

$$\hat{\nabla}_\alpha(\sqrt{-h}h^{\mu\nu}) = 0. \quad (2.58)$$

Esse resultado nos permite escrever a conexão $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha$ em termos da nova métrica como:

$$\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}h^{\alpha\beta}(\partial_\mu h_{\beta\nu} + \partial_\nu h_{\mu\beta} - \partial_\beta h_{\mu\nu}), \quad (2.59)$$

de modo que, ao substituirmos a métrica $g_{\mu\nu}$, obtemos:

$$\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha = \{\overset{\alpha}{\mu\nu}\} + \frac{1}{2f_{\mathcal{R}}}(\delta_\mu^\alpha \partial_\nu f_{\mathcal{R}} + \delta_\nu^\alpha \partial_\mu f_{\mathcal{R}} - g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta} \partial_\beta f_{\mathcal{R}}), \quad (2.60)$$

onde $\{\hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}\}$ são as conexões de Levi-Civita para a métrica $g_{\mu\nu}$ dadas pela Eq.(2.34). A Eq.(2.60) nos permite escrever o tensor de Riemann generalizado como (Vollick, 2003)

$$R^\alpha_{\mu\nu\beta}(\hat{\Gamma}) = \partial_\beta \hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu \hat{\Gamma}^\alpha_{\mu\beta} + \hat{\Gamma}^\alpha_{\beta\sigma} \hat{\Gamma}^\sigma_{\mu\nu} - \hat{\Gamma}^\alpha_{\nu\sigma} \hat{\Gamma}^\sigma_{\mu\beta}. \quad (2.61)$$

É possível mostrar que o tensor de Ricci generalizado é escrito como (Oliveira, 2010):

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{3\nabla_\mu f_{\mathcal{R}} \nabla_\nu f_{\mathcal{R}}}{2(f_{\mathcal{R}})^2} - \frac{1}{f_{\mathcal{R}}} (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) f_{\mathcal{R}}, \quad (2.62)$$

e o escalar de Ricci, obtido a partir do traço da equação anterior, é:

$$\mathcal{R} = R + \frac{3\nabla_\mu f_{\mathcal{R}} \nabla^\mu f_{\mathcal{R}}}{2(f_{\mathcal{R}})^2} - \frac{3\square f_{\mathcal{R}}}{f_{\mathcal{R}}}. \quad (2.63)$$

A partir dessas definições, podemos reescrever as equações de campo (2.55) em termos do tensor de Einstein como (Sotiriou and Faraoni, 2010):

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} = & \kappa_{\text{eff}} T_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} \left(\mathcal{R} - \frac{f}{f_{\mathcal{R}}} \right) + \frac{1}{f_{\mathcal{R}}} (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) f_{\mathcal{R}} \\ & - \frac{3}{2(f_{\mathcal{R}})^2} \left[\nabla_\mu f_{\mathcal{R}} \nabla_\nu f_{\mathcal{R}} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} (\nabla f_{\mathcal{R}})^2 \right], \end{aligned} \quad (2.64)$$

onde $\kappa_{\text{eff}} = \kappa/f_{\mathcal{R}}$ é o acoplamento gravitacional efetivo. É importante notar que ambos os lados da Eq. (2.64) dependem apenas da métrica $g_{\mu\nu}$ e dos campos de matéria, o que faz elas serem semelhantes às da TRG mas com o lado da fonte modificado. Essas modificações podem ser entendidas como derivadas do tensor energia-momento, pois $f_{\mathcal{R}}$ é uma função implícita de T , uma vez que se tomarmos o traço da Eq. (2.55), obtemos

$$f_{\mathcal{R}} \mathcal{R} - 2f = \kappa T, \quad (2.65)$$

que pode ser resolvida para $\mathcal{R} = \mathcal{R}(T)$.

Podemos também reformular as teorias $f(\mathcal{R})$ no formalismo de Palatini como uma teoria de Brans-Dicke (Flanagan, 2004; Olmo, 2005a; Sotiriou, 2006b). Para isso, vamos utilizar novamente a relação $\phi = f_{\mathcal{R}}$, tal que $h_{\mu\nu} = \phi g_{\mu\nu}$, e reescrever a Eq. (2.63) como:

$$\mathcal{R} = R + \frac{3\nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi}{2(\phi)^2} - \frac{3\square \phi}{\phi}. \quad (2.66)$$

Por fim, utilizando a Eq. (2.44) no contexto do formalismo de Palatini, o que significa $R \rightarrow \mathcal{R}$, obtemos:

$$S_{Pal} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\phi \mathcal{R} + \frac{3}{2\phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - U(\phi) \right] + S_m(g_{\mu\nu}, \psi). \quad (2.67)$$

Esta ação é matematicamente equivalente à ação (2.19) com parâmetro de Brans-Dicke $\omega_{BD} =$

$-3/2$ e $U(\phi) = 3\Box\phi$.

Novamente, a equivalência entre as teorias $f(R)$ e as teorias de Brans-Dicke podem ser utilizadas para fazer o confronto com as observações. No caso do formalismo de Palatini as coisas são mais complicadas. A expansão PPN[¶] destas teorias foi calculada em Olmo (2005b), tal que o confronto com as observações indicam que uma teoria $f(R)$ viável no neste formalismo deve ser linear para densidades relevantes e os termos não-lineares devem ser suprimidos através de coeficientes muito pequenos (veja Sotiriou, 2006c, e referências lá citadas). Portanto, a princípio, as teorias $f(R)$ em ambos os formalismos métrico e de Palatini não são compatíveis com experimentos no Sistema Solar. Todavia, tem-se estudado a viabilidade destes modelos através do chamado mecanismo de *screening*, tais como os mecanismos *chameleon* e *symmetron* (Koyama, 2016), que consistem em suprimir as modificações da gravidade em pequenas escalas, mas permitem que os efeitos da modificação continuem importantes em escalas cosmológicas.

Utilizando a métrica FLRW nas equações de campo (2.64), obtemos a seguinte equação de Friedmann generalizada:

$$\left(H + \frac{1}{2} \frac{f_{\mathcal{R}\mathcal{R}}}{f_{\mathcal{R}}} \dot{\mathcal{R}}\right)^2 = \frac{1}{6f_{\mathcal{R}}} [\kappa(\rho + 3p) + f]. \quad (2.68)$$

Fazendo a derivada temporal da Eq. (2.65) (onde $T = -\rho_m$) e combinando com a equação de continuidade da matéria, $\dot{\rho}_m = -3H\rho_m$, obtemos:

$$\dot{\mathcal{R}} = \frac{3\kappa H\rho_m}{f_{\mathcal{R}\mathcal{R}}\mathcal{R} - f_{\mathcal{R}}}. \quad (2.69)$$

Substituindo este resultado em (2.68), temos:

$$H^2 = \frac{\kappa\rho_m + 2\kappa\rho_r + f}{6f_{\mathcal{R}}\xi^2}, \quad (2.70)$$

onde

$$\xi \equiv 1 + \frac{3}{2} \frac{f_{\mathcal{R}\mathcal{R}}}{f_{\mathcal{R}}} \frac{\kappa\rho_m}{f_{\mathcal{R}\mathcal{R}}\mathcal{R} - f_{\mathcal{R}}}. \quad (2.71)$$

A história cósmica pode ser determinada uma vez que se defina uma forma funcional para $f(\mathcal{R})$. De maneira geral, as teorias $f(\mathcal{R})$ no formalismo de Palatini não conduzem a uma fenomenologia cosmológica viável. Este formalismo não permite, por exemplo, a existência do período inflacionário pois não possui uma dinâmica extra em comparação com a TRG (Meng and Wang, 2004c; Sotiriou, 2006a). Vários estudos buscando testar a viabilidade destes modelos à luz dos dados observacionais podem ser encontrados na literatura; indicamos ao leitor as referências Vollick (2003); Meng and Wang (2004a,c,b); Sotiriou (2006d); Pires et al. (2010); Santos et al. (2012) e Santos (2013) para maiores detalhes.

[¶] Do inglês, *Parametrized Post-Newtonian*.

2.3.2. Inflação em teorias $f(R)$

A ideia de inflação primordial foi inicialmente proposta por Alan Guth nos anos 1980 (Guth, 1981) como uma tentativa de resolver os problemas da homogeneidade e planeza e o problema do horizonte (Mukhanov, 2005). A variedade de modelos inflacionários que surgiram desde então é grande, sendo em sua maioria modelos com campos escalares que rolam lentamente até o mínimo de seu potencial (condição de rolamento lento), tais que as perturbações de densidade geram um espectro aproximadamente invariante de escala que pode ser observado a partir de medidas das flutuações de temperatura da RCF (Aghanim et al., 2018; Akrami et al., 2018). Por outro lado, modelos assumindo uma abordagem geométrica, envolvendo termos de curvatura de altas ordens também obtiveram sucesso na descrição de um cenário inflacionário primordial. O primeiro modelo inflacionário deste tipo foi proposto por Alexei Starobinsky em 1980 (Starobinsky, 1980), onde o termo quadrático do escalar de Ricci, R^2 , domina a densidade Lagrangiana durante o período inflacionário e permite um estágio com evolução do tipo de Sitter para o espaço-tempo (Artymowski and Lalak, 2014).

Apesar do modelo de Guth (1981) ser simples e intuitivo, ele pertence à classe de modelos de “inflação velha”, onde o período inflacionário corresponde a uma fase de expansão exponencial do universo em um estado de falso vácuo super-resfriado. Acontece que modelos desse tipo sofrem com o *graceful exit problem*, associado com a impossibilidade de explicar como o universo desacelerou de sua inflação inicial e seguiu para uma época dominada por radiação e, posteriormente, para uma fase transiente dominada por matéria (Starobinsky, 1984; Vilenkin, 1985; Mijic et al., 1986). Neste sentido, o modelo de Starobinsky tem a vantagem de produzir a inflação mediante modificações na geometria e, portanto, não sofre com este problema. Além do mais, foi o primeiro a prever ondas gravitacionais com um espectro plano (Starobinskii, 1979; Mukhanov and Chibisov, 1981; Kofman et al., 1987).

Dinâmica inflacionária

O modelo de Starobinsky inclui uma correção quadrática do escalar de Ricci, que generaliza a densidade Lagrangiana de Einstein-Hilbert com a seguinte função $f(R)$:

$$f(R) = R + \frac{R^2}{6M^2}, \quad (2.72)$$

onde a constante M tem dimensão de massa.

Num universo FLRW plano, as equações de Friedmann (2.45) e (2.46), tornam-se (com $\rho = 0$):

$$\ddot{H} - \frac{\dot{H}^2}{2H} + \frac{1}{2}M^2H = -3H\dot{H}, \quad (2.73)$$

$$\ddot{R} + 3H\dot{R} + M^2R = 0. \quad (2.74)$$

Para que tenhamos uma fase de expansão acelerada, o parâmetro de Hubble deve variar lentamente, tal que $|\dot{H}/H^2| \ll 1$ e $|\ddot{H}/(H\dot{H})| \ll 1$. Assim, a Eq. (2.73) resulta em $\dot{H} \simeq -M^2/6$, cuja solução é:

$$H \simeq H_i - \frac{M^2}{6}(t - t_i), \quad (2.75)$$

$$a \simeq a_i \exp \left[H_i(t - t_i) - \frac{M^2}{12}(t - t_i)^2 \right], \quad (2.76)$$

$$R \simeq 12H^2 - M^2, \quad (2.77)$$

onde H_i e a_i são, respectivamente, o parâmetro de Hubble e o fator de escala no início da inflação ($t = t_i$). O período inflacionário continua enquanto o parâmetro de rolamento lento $\epsilon_1 \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} \lesssim 1$, o que implica em

$$\epsilon_1 = -\frac{\dot{H}}{H^2} \simeq \frac{M^2}{6H^2} \quad \Rightarrow \quad H^2 \gtrsim M^2. \quad (2.78)$$

O fim da inflação ($t = t_f$) acontece quando a condição $\epsilon_1 \simeq 1$ é satisfeita, o que significa $H_f \simeq \frac{M}{\sqrt{6}}$. Usando esse resultado na Eq. (2.77), obtemos $R \simeq M^2$.

Por fim, podemos definir o número de e-folds de $t = t_i$ até $t = t_f$ como:

$$N \equiv \int_{t_i}^{t_f} H dt \simeq H_i(t_f - t_i) - \frac{M^2}{12}(t_f - t_i)^2. \quad (2.79)$$

Uma vez que a inflação acaba em $t_f \simeq t_i + 6H_i/M^2$ (De Felice and Tsujikawa, 2010), segue-se que:

$$N \simeq \frac{3H_i^2}{M^2} \simeq \frac{1}{2\epsilon_1}. \quad (2.80)$$

O número de e-folds suficiente para resolver os problemas do horizonte e planaridade é $N \geq 70$, que produz $\epsilon_1(t_i) \lesssim 7 \times 10^{-3}$ (Liddle and Lyth, 2000). Por outro lado, as flutuações de temperatura correspondem às perturbações cujos comprimentos de onda cruzaram o raio de Hubble em torno de $N = 55 - 60$ e-folds antes do final da inflação (De Felice and Tsujikawa, 2010).

Apesar das observações advindas do experimento BICEP2, que sugeriam uma quantidade significativa de ondas gravitacionais desfavorecendo o modelo de Starobinsky, terem sido invalidadas (Artymowski and Lalak, 2014), é necessário estudar pequenas modificações na função $f(R)$ que continue ajustando-se bem aos dados observacionais. Nesse sentido, estudou-se na referência (Codello et al., 2015) uma generalização do modelo de Starobinsky da seguinte forma:

$$f(R) = R + \alpha R^n, \quad (\alpha > 0, n > 0), \quad (2.81)$$

que claramente é reduzido ao caso de Starobinsky quando $n = 2$ e $\alpha = 1/(6M^2)$. Desta forma, as Eqs.(2.45) produzem (com $\rho = 0$):

$$3(1 + n\alpha R^{n-1})H^2 = \frac{1}{2}(n-1)\alpha R^n - 3n(n-1)\alpha HR^{n-2}\dot{R}. \quad (2.82)$$

A condição de aceleração exige que $f_R \gg 1$ e, portanto, $f_R \simeq n\alpha R^{n-1}$ (De Felice and Tsujikawa, 2010). Isso permite reescrever a Eq. (2.82) como:

$$H^2 \simeq \frac{n-1}{6n} \left(R - 6nH \frac{\dot{R}}{R} \right). \quad (2.83)$$

Como vimos, durante a inflação devemos ter $|\dot{H}/H^2| \ll 1$ e $|\ddot{H}/(H\dot{H})| \ll 1$, o que produz

$$\frac{\dot{H}}{H^2} \simeq -\epsilon_1, \quad \epsilon_1 = \frac{2-n}{(n-1)(2n-1)}. \quad (2.84)$$

A solução da Eq. (2.84) é

$$H \simeq \frac{1}{\epsilon_1 t} \rightarrow a \propto t^{1/\epsilon_1}, \quad (2.85)$$

para $\epsilon_1 > 0$. Para satisfazer a inflação devemos ter $\epsilon_1 < 1$, o que implica em $n > (1 + \sqrt{3})/2$. Além disto, quando $n = 2$ temos $\epsilon_1 = 0$, tal que H é constante no regime de $f_R \gg 1$. Para valores de $n > 2$, temos um regime de super inflação caracterizado por $\dot{H} > 0$ e $a(t) \propto |t_0 - t|^{-1/|\epsilon_1|}$ (De Felice and Tsujikawa, 2010). Este fato limita o período inflacionário padrão na faixa de valores de $(1 + \sqrt{3})/2 < n < 2$.

Um estudo aprofundado sobre a dinâmica do reaquecimento e a produção de partículas resultante após o período inflacionário foge do escopo desse trabalho e, sendo assim, indicamos a referência (De Felice and Tsujikawa, 2010, e referências lá citadas) onde o leitor encontrará essa discussão em detalhes.

2.3.3. Combinações da curvatura de Ricci e Riemann

Outra possibilidade é generalizar a ação de Einstein-Hilbert com uma função não somente de R , mas que inclua uma contração quadrática de R ou alguma das três contrações lineares do tensor de curvatura de Riemann: R , $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ e $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$. Estudos desse tipo de teorias podem ser encontrados nas referências Ishak and Moldenhauer (2009) e Moldenhauer and Ishak (2009).

A ação mais geral que se pode construir a partir de g , R , $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ e $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ é escrita como (Clifton et al., 2012):

$$S = \chi^{-1} \int d^4x \sqrt{-g} f(R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}), \quad (2.86)$$

onde χ é uma constante que pode ser determinada a partir do limite Newtoniano.

Adotando o formalismo métrico para obter as equações de campo, temos^{||}:

$$\begin{aligned}\delta S &= \chi^{-1} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} f g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} + f_X \delta X + f_Y \delta Y + f_Z \delta Z \right] \\ &= \chi^{-1} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} f g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} - f_X (R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} - g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) \right. \\ &\quad \left. - 2f_Y (R^{\rho(\mu} R^{\nu)\rho} \delta g_{\mu\nu} - R^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) - 2f_Z (R_{\rho\sigma\epsilon} ({}^{\nu} R^{\mu)\epsilon\sigma\rho} \delta g_{\mu\nu} - R_{\mu}{}^{\nu\rho\sigma} \delta R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}) \right],\end{aligned}\quad (2.87)$$

onde estamos utilizando as seguintes notações e definições:

$$X \equiv R, \quad Y \equiv R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \quad Z \equiv R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (2.88)$$

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial i} \quad \text{com} \quad i = X, Y, Z \quad (2.89)$$

$$A^{(ij)} = \frac{1}{2} (A^{ij} + A^{ji}). \quad (2.90)$$

Levando em consideração que:

$$\delta R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} g^{\mu\epsilon} (\nabla_\nu \nabla_\rho \delta g_{\epsilon\sigma} + \nabla_\sigma \nabla_\rho \delta g_{\epsilon\nu} - \nabla_\epsilon \nabla_\rho \delta g_{\sigma\nu} - \nabla_\nu \nabla_\sigma \delta g_{\epsilon\rho} - \nabla_\rho \nabla_\sigma \delta g_{\epsilon\nu} + \nabla_\epsilon \nabla_\sigma \delta g_{\rho\nu}) \quad (2.91)$$

a parte gravitacional da ação pode ser reescrita como (Clifton et al., 2012):

$$\delta S = -\chi^{-1} \int d^4x \sqrt{-g} P^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}, \quad (2.92)$$

onde

$$\begin{aligned}P^{\mu\nu} &\equiv -\frac{1}{2} f g^{\mu\nu} + f_X R^{\mu\nu} + 2f_Y R^{\rho(\mu} R^{\nu)\rho} + 2f_Z R^{\epsilon\sigma\rho(\mu} R^{\nu)\rho\sigma\epsilon} \\ &\quad + \nabla_\rho \nabla_\sigma f_X (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}) + \square (f_Y R^{\mu\nu}) + g^{\mu\nu} \nabla_\rho \nabla_\sigma (f_Y R^{\rho\sigma}) \\ &\quad - 2\nabla_\rho \nabla^{(\nu} (f_Y R^{\rho\mu)}) - 4\nabla_\rho \nabla_\sigma (f_Z R^{\sigma(\mu\nu)\rho}).\end{aligned}\quad (2.93)$$

Utilizando o princípio da mínima ação, isto é, $\delta S = 0$, obtemos as equações de campo

$$P_{\mu\nu} = \frac{\chi}{2} T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} \Lambda, \quad (2.94)$$

onde estão incluídos também os campos de matéria (o tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$) e uma constante cosmológica (Λ), ambos independentes de $f(X, Y, Z)$. Note que estas equações são de quarta ordem, a menos que a função f seja linear nas derivadas de segunda ordem da métrica (De Witt, 1963).

Nesse contexto, muitos trabalhos estudando diferentes soluções cosmológicas para essas teorias contendo os termos $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ e $R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma}$ tem sido desenvolvidos. Podemos citar trabalhos que consideram soluções no espaço de Sitter (Clifton and Barrow, 2005), soluções exponenciais

^{||} Para estudos envolvendo o formalismo de Palatini, indicamos ao leitor as referências Li et al. (2007a); Exirifard and Sheikh-Jabbari (2008); Olmo et al. (2009); Rosenthal (2009).

e do tipo lei de potência (Maeda and Ohta, 2005; Akune et al., 2006) e a evolução de soluções do tipo FLRW estudadas a partir da abordagem de sistemas dinâmicos (Cognola and Zerbini, 2008). No que segue, vamos discutir um pouco sobre a relevância de algumas soluções para a cosmologia observacional e o problema da aceleração cósmica.

Uma das teorias mais gerais neste cenário é construída a partir do invariante de curvatura de Gauss-Bonnet. Esse termo origina-se naturalmente nos processos de regularização e renormalização de teorias quânticas de campos no espaço-tempo curvo (Birrell and Davies, 1984) e tem sua motivação principal na compactificação das teoria de cordas (Metsaev and Tseytlin, 1987). Uma exemplificação disso é a teoria discutida em Carroll et al. (2005a),

$$\mathcal{L} = R + \frac{\mu^{4n+2}}{(aR^2 + bR_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + cR_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma})^n}, \quad (2.95)$$

onde \mathcal{L} é a densidade Lagrangiana capaz de produzir o estágio de expansão acelerada atual e onde μ , n , a , b e c são constantes.

Em Carroll et al. (2005a), os autores encontraram soluções do tipo lei de potência para um universo FLRW espacialmente plano, dadas por

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{8n^2+10n+2-3\alpha\pm\sqrt{\Gamma}}{4(n+1)}}, \quad (2.96)$$

onde

$$\alpha \equiv \frac{12a + 4b + 4c}{12a + 3b + 2c} \quad (2.97)$$

$$\Gamma \equiv 9n^2\alpha^2 - (80n^3 + 116n^2 + 40n + 4)\alpha + 64n^4 + 160n^3 + 132n^2 + 40n + 4. \quad (2.98)$$

Foi mostrado que esse modelo consegue explicar os resultados de supernovas, porém com o custo do conteúdo de matéria do Universo possuir uma equação de estado do tipo $0.07 \leq \omega \leq 0.21$, com um nível de confiança de 2σ (Mena et al., 2006). Soluções do tipo FLRW para teorias com potências dos termos $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ e $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$, com a possibilidade de expansão acelerada atual foram analisadas por Easson (2004).

É importante mencionar o lugar de destaque das teorias que são funções do escalar de Ricci, R , e do invariante de curvatura de Gauss-Bonnet,

$$\mathcal{G} = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (2.99)$$

Estas teorias tem sido bastante estudadas na literatura, principalmente devido à motivação proveniente da teoria de cordas (Metsaev and Tseytlin, 1987; Gasperini and Veneziano, 1993; Gasperini et al., 1997; Nojiri et al., 2006), e será abordada com maior riqueza de detalhes no próximo capítulo, onde adotaremos a abordagem de sistemas dinâmicos para investigar suas con-

dições de viabilidade. Além disso, indicamos ao leitor a referência [Clifton et al. \(2012\)](#), onde encontra-se uma revisão geral sobre uma grande variedade de trabalhos em teorias de gravidade modificada e suas consequências cosmológicas.

2.4. Teorias de gravidade com dimensões extras

Como vimos na seção (2.1), uma das motivações iniciais para estender a TRG é construir uma teoria de gravidade quântica. Neste sentido, no início do século XX, [Nordström \(2007\)](#) e, posteriormente, [Kaluza \(1921\)](#) e [Klein \(1926a\)](#), propuseram a ideia de dimensões extras como um cenário alternativo para combinar os princípios da Mecânica Quântica e Relatividade. Mais especificamente, eles construíram teorias baseadas em supersimetrias, que é o caso das teorias de supercordas expressas em 10 dimensões ([Clifton et al., 2012](#)). De fato, o estudo de teorias de gravidade em altas dimensões não constitui apenas uma curiosidade teórica, mas é algo decorrente das ferramentas que já dispomos, uma vez que a geometria Riemanniana não está restrita a $3 + 1$ dimensões (3 dimensões espaciais e 1 temporal). O problema (ou obstáculo) consiste em não observarmos a gravidade comportando-se como uma força em 10 dimensões em experimentos na Terra e/ou observações astronômicas. Por exemplo, para um universo com D -dimensões, o potencial Newtoniano devido uma fonte pontual comporta-se como $1/r^{D-3}$, produzindo órbitas planetárias estáveis para $D = 4$. Do contrário, caso existam dimensões extras além das 3 espaciais e 1 temporal, estas devem atuar a distâncias muito curtas (escalas próximas a de Planck) ou a distâncias muito grandes, tais como as cosmológicas.

Nesta seção, vamos nos restringir basicamente aos modelos de branas. Em particular, vamos discutir o modelo Dvali-Gabadaze-Porrati (DGP), que aborda apenas dimensões espaciais extras**. Em [Clifton et al. \(2012\)](#), encontramos um estudo detalhado sobre essas e outras classes de modelos como, por exemplo, as teorias de Kaluza-Klein, que são uma tentativa de unificar a gravidade e a eletrodinâmica ([Kaluza, 1921](#); [Klein, 1926a,b](#); [Nordström, 2007](#)), e a gravidade de Randall-Sundrum ([Randall and Sundrum, 1999b,a](#)), que são modelos de brana em que o *bulk*†† é um espaço anti-de Sitter.

2.4.1. Modelo de Branas

O paradigma dos modelos de branas está bem motivado pela teoria de cordas ([Horava and Witten, 1996](#); [Antoniadis et al., 1998](#); [Lukas et al., 1999](#)). Estas teorias possuem objetos fundamentais, as D-branas‡‡, nas quais as cordas abertas acabam. Dessa forma, o modelo de branas é construído sobre a interpretação de que as D-branas estão embebidas em espaços de dimensões maiores, como mostra a Fig. (2.1). Nestes cenários, as cordas abertas conectam-se com

** Para modelos que envolvem dimensões temporais extras indicamos ao leitor [Shtanov and Sahni \(2003\)](#).

†† Um espaço-tempo com dimensões superiores a $3 + 1$.

‡‡ Hipersuperfície de $3 + 1$ dimensões que possuem carga, dinâmica interna e são funções delta no tensor energia-momento.

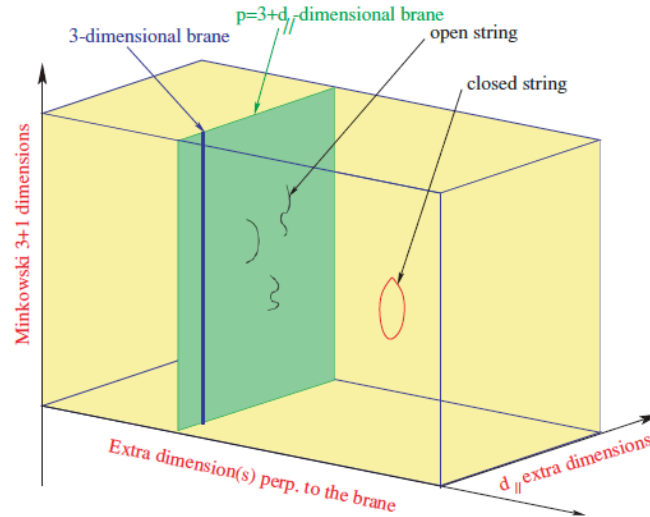


Figura 2.1.: Ilustração do paradigma do modelo de branas. Figura retirada de [Antoniadis \(2007\)](#).

as D-branas e podem ser identificadas como os campos do modelo padrão de partículas. As cordas fechadas, por sua vez, são as únicas que se propagam através do *bulk* e são tidas como as interações gravitacionais.

Os modelos de branas^{§§} vão de encontro ao cenário das teorias de Kaluza-Klein, onde as dimensões extras são pequenas e compactas. Neste cenário alternativo, as dimensões extras podem ser infinitamente grandes, uma vez que os campos que descrevem o modelo padrão de partículas encontram-se confinados em uma brana, embebida em um espaço-tempo com dimensões superiores, o *bulk*. Nesta situação, presume-se que apenas a gravidade pode se propagar nas dimensões extras, assim a espessura do *bulk* pode ser medida a partir de testes gravitacionais. O modelo padrão de partículas, por sua vez, restringe apenas o limite até onde a brana se estende no *bulk*.

Outro cenário importante foi o modelo proposto por [Arkani-Hamed et al. \(1998\)](#) (ADD), onde as dimensões extras são exploradas a fim de explicar a grande hierarquia entre a escala electro-frac, $M_{EW} \sim \text{TeV}$, e a escala de Planck, $M_{pl} \sim 10^{16} \text{ TeV}$. Os autores consideram os férmions e bósons do modelo padrão de partículas localizados em uma parede de domínio de $3 + 1$ dimensões, imersa em um espaço-tempo de D -dimensões (onde $D=4+n$ e n denota o número de dimensões extras). Neste cenário, a hierarquia é reformulada em termos da escala das dimensões extras, $\mu \sim 1/L$, e da escala eletro fraca. Segue-se então que: a espessura da parede não pode exceder a escala de TeV^{-1} , que é a escala de energia em que as interações eletro fracas atuam, enquanto a espessura do *bulk* deve ser $L \gg \text{TeV}^{-1}$, tal que podemos tratar a parede como uma 3-brana infinitamente fina.

^{§§} Indicamos ao leitor [Brax and van de Bruck \(2003\)](#) e [Maartens and Koyama \(2010\)](#) para boas revisões sobre o tema.

A ação do *bulk* é descrita através da ação de Einstein-Hilbert generalizada:

$$S_{bulk} = \frac{M_D^{D-2}}{2} \int d^D X \sqrt{-\gamma} \mathcal{R}, \quad (2.100)$$

onde M_D é a escala fundamental de Planck em D-dimensões, o que implica em $8\pi G_D = M_D^{2-D}$, γ_{AB} é a métrica D-dimensional com seu tensor de Ricci correspondente, $\mathcal{R}_{\mathcal{A}\mathcal{B}}$, e escalar de Ricci $\mathcal{R} = \gamma^{AB} \mathcal{R}_{\mathcal{A}\mathcal{B}}$. Seja a interação gravitacional ao longo da brana mediada pelo gráviton de modo zero, a ação efetiva 4-dimensional resultante é

$$S_{eff} = \frac{M_D^{D-2} V_n}{2} \int d^4 x \sqrt{-g} R, \quad (2.101)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é a métrica ao longo da brana, que produz o tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ e o escalar de Ricci $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$. Nesse caso, $V_n \propto L^n$ é o volume das dimensões extras e a massa de Planck 4-dimensional, M_{pl} , se relaciona com a massa de Planck D-dimensional, M_D (a escala gravitacional da teoria dimensional extra), de acordo com

$$M_{pl}^2 = M_D^{2+n} L^n. \quad (2.102)$$

Se, por exemplo, o volume da dimensão extra é a escala de Planck ($L \sim M_{pl}^{-1}$), então $M_D \sim M_{pl}$. Todavia, se o volume da dimensão extra for muito maior do que a escala de Planck então a escala fundamental real M_D pode ser muito menor do que a escala de Planck efetiva, $M_{pl} \sim 10^{19} \text{ GeV}$. Isto significa que a gravidade “espalha-se” nas dimensões extras e apenas parte dela é sentida em 4 dimensões (Maartens and Koyama, 2010).

Mostrou-se o limite inferior em M_D ao testar desvios das leis de Newton em 4 dimensões (Long et al., 2002),

$$L \lesssim 10^{-1} \text{ mm} \sim (10^{-15} \text{ TeV})^{-1} \quad \Rightarrow \quad M_D \gtrsim 10^{(32-15n)/(n+2)} \text{ TeV}. \quad (2.103)$$

Outros limites, também utilizando modelos de brana com dimensões extras planas compactas, podem ser derivados a partir de resultados em aceleradores de partículas e astrofísica de altas energias (Hebecker and March-Russell, 2001; Cavaglia, 2003; Cheung, 2003; Guzzo et al., 2008).

2.4.2. Modelo Dvali-Gabadaze-Porrati

Este modelo consiste basicamente em uma brana de (3+1) dimensões (nosso Universo) imersa em um *bulk* de 5 dimensões vazio (Dvali et al., 2000b), como mostra a Fig. (2.2). Nesta figura, estão representados os dois setores que o modelo DGP pode apresentar: o ramo normal e o auto-acelerado. Este último é de grande interesse pois pode originar a aceleração cósmica sem recorrer à energia escura (Deffayet, 2001; Alcaniz, 2002; Deffayet et al., 2002). A ação

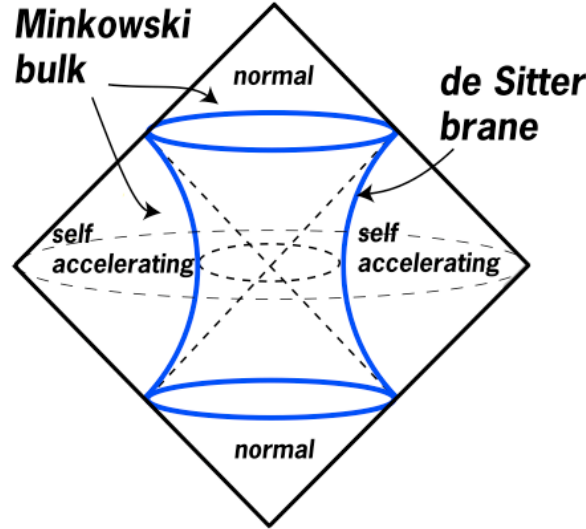


Figura 2.2.: Ilustração do espaço-tempo do modelo DGP: uma brana de Sitter imersa em um *bulk* de Minkowski em 5 dimensões, onde o volume da brana é representado pelo hiperboloide mostrado na figura. O ramo normal corresponde ao interior do hiperboloide enquanto o ramo auto-acelerativo situa-se na região exterior a ele. Figura retirada de [Antoniadis \(2007\)](#).

gravitacional é escrita como [Dvali et al. \(2000b\)](#):

$$S = M_5^3 \int d^5x \sqrt{-\gamma} \mathcal{R} + \int d^4x \sqrt{-g} \left[-2M_5^3 K + \frac{M_4^2}{2} R - \sigma + \mathcal{L}_{\text{matter}} \right], \quad (2.104)$$

onde γ_{ab} é a métrica do *bulk*, com correspondente escalar de Ricci, \mathcal{R} , e M_5 é a escala de Planck no *bulk*. A métrica induzida na brana é $g_{\mu\nu}$, e $K = g^{\mu\nu} K_{\mu\nu}$ é o traço da curvatura extrínseca, $K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n g_{\mu\nu}$. Adicionalmente, a brana possui uma tensão, σ , as contribuições de matéria estão contidas em $\mathcal{L}_{\text{matter}}$ e o termo $M_4^2 R$ é gerado a partir de correções em um *loop* de matéria. O problema da hierarquia ($M_4 \gg M_5$) permite identificar uma escala característica, $r_c \sim M_4^2 / 2M_5^3$, tal que para $r < r_c$ a gravidade é 4D e a teoria situa-se na brana, e para $r > r_c$ a gravidade parece ser 5D.

As equações de campo podem ser divididas em duas partes: uma para o *bulk* e outra para a brana. Para o *bulk*, temos as equações de campo de Einstein no vácuo, tal que:

$$\mathcal{G}_{ab} = \mathcal{R}_{ab} - \frac{1}{2} \mathcal{R} \gamma_{ab} = 0, \quad (2.105)$$

com as condições de contorno na brana sendo dadas pelas condições de junção de Israel ([Clifton et al., 2012](#)),

$$2M_5^2 (K_{\mu\nu} - K g_{\mu\nu}) = M_4^2 G_{\mu\nu} + \sigma g_{\mu\nu} - \mathcal{T}_{\mu\nu}, \quad (2.106)$$

onde $\mathcal{T}_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_{\text{matter}}$ é o tensor energia-momento para a matéria adicional. [Deffayet \(2001\)](#); [Deffayet et al. \(2002\)](#) mostraram que existem dois vácuos distintos quando $\mathcal{T}_{\mu\nu} = 0$ e $\sigma > 0$, tal que

$$H = \frac{M_5^3}{M_4^2} \left[\epsilon + \sqrt{1 + \frac{M_4^2 \sigma}{6M_5^3}} \right], \quad (2.107)$$

onde $\epsilon = \pm 1$, o que corresponde a branas de Sitter com curvatura intrínseca. O valor do parâmetro ϵ caracteriza os dois ramos mencionados anteriormente: $\epsilon = -1$ caracteriza o ramo normal do modelo DGP e $\epsilon = 1$ caracteriza o ramo auto-acelerado.

Por outro lado, as equações de campo de Einstein na brana foram encontradas por [Shiromizu et al. \(2000\)](#), tal que

$$G_{\mu\nu} = (16\pi G r_c)^2 \Pi_{\mu\nu} - E_{\mu\nu}, \quad (2.108)$$

onde

$$\Pi_{\mu\nu} = -\frac{1}{4} \tilde{T}_{\mu\lambda} \tilde{T}^{\lambda}_{\nu} + \frac{1}{12} \tilde{T} \tilde{T}_{\mu\nu} + \frac{1}{24} [3\tilde{T}^{\alpha\beta} \tilde{T}_{\alpha\beta} - \tilde{T}^2] g_{\mu\nu}, \quad (2.109)$$

e

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = \mathcal{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{8\pi G} G_{\mu\nu}. \quad (2.110)$$

Aplicando as identidades de Bianchi, mostra-se que:

$$\nabla_\nu E^\nu_\mu = (16\pi G r_c)^2 \nabla_\nu \Pi^\nu_\mu. \quad (2.111)$$

Por fim, o tensor energia-momento continua satisfazendo a lei de conservação local: $\nabla_\nu T^\nu_\mu = 0$.

As soluções cosmológicas para um *bulk* de Minkowski ($E_{\mu\nu} = 0$) e uma brana sem tensão ($\sigma = 0$) foram obtidas como sendo ([Deffayet, 2001](#)),

$$H^2 + \frac{\kappa}{a^2} - \frac{\epsilon}{r_c} \sqrt{H^2 + \frac{\kappa}{a^2}} = \frac{8\pi G}{3} \rho. \quad (2.112)$$

Para $\rho = 0$ no ramo normal ($\epsilon = -1$) temos um espaço de Minkowski, enquanto no ramo auto-acelerado ($\epsilon = 1$) teremos um espaço de Sitter com constante de Hubble $H_\infty = \frac{1}{r_c}$, que dá origem à possibilidade de explicar a expansão acelerada do universo sem um termo de constante cosmológica explícito ([Deffayet et al., 2002](#)). Para a equação de aceleração, temos que:

$$2 \frac{dH}{dt} + 3H^2 + \frac{\kappa}{a^2} = -\frac{3H^2 + \frac{3\kappa}{a^2} - 2\epsilon r_c \sqrt{H^2 + \frac{\kappa}{a^2}}}{1 - 2\epsilon r_c \sqrt{H^2 + \frac{\kappa}{a^2}}} 8\pi G \rho. \quad (2.113)$$

Quando $r_c \gtrsim H_0^{-1}$, obtém-se o setor auto-acelerado em tempos tardios, desde que $H_0 \lesssim H_\infty$.

Uma vez que se defina o parâmetro adimensional característico como

$$\Omega_{r_c} = \frac{1}{4(H_0 r_c)^2}, \quad (2.114)$$

tem-se a seguinte relação sendo satisfeita

$$\Omega_m + 2\sqrt{\Omega_{r_c}}\sqrt{1 - \Omega_\kappa} + \Omega_\kappa = 1, \quad (2.115)$$

onde Ω_κ é o parâmetro de densidade adimensional de curvatura.

Quanto às restrições observacionais, a evolução do *background* no setor auto-acelerado tem sido bastante explorada na literatura, principalmente devido à possibilidade de explicar a expansão cósmica sem recorrer à energia escura. Para isso tem-se utilizado uma grande variedade de observáveis cosmológicos, como por exemplo, dados de SNe Ia, RCF, BAO, taxa de crescimento de estruturas, etc. No entanto, os estudos nesse sentido mostram que o modelo DGP é desfavorecido frente às observações cosmológicas (Alam and Sahni, 2006; Fairbairn and Gobar, 2006; Guo et al., 2006; Maartens and Majerotto, 2006; Song et al., 2007; Fang et al., 2008; Schmidt, 2009; Rubin et al., 2009; Santos et al., 2017). Na Fig. (2.3), mostramos os contornos de probabilidade nos níveis de confiança de 68.3% e 95.4% no plano $\Omega_{m0} - h$ para o modelo DGP (Zhang et al., 2012). As restrições para esses parâmetros foram feitas utilizando os seguintes conjuntos de dados: dados de supernovas da compilação *Supernova Legacy Survey* (SNLS3) (Conley et al., 2011), dados da RCF obtidos com o *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe 7-yr* (Komatsu et al., 2011) (WMAP), dados de BAO da compilação *Sloan Digital Sky Survey* (Percival et al., 2010), e medidas da constante de Hubble obtidas com o *Hubble Space Telescope* (Riess et al., 2011) (HST), apresentados em diferentes cores na Fig. (2.3). No painel da esquerda da Fig. (2.3), podemos perceber que existe uma inconsistência entre as diferentes sondas cosmológicas, o que implica no desfavorecimento do modelo DGP por esses observáveis.

O painel da direita da Fig. (2.3), por sua vez, mostra a evolução da taxa de crescimento de estruturas, $f(z)$, predita pelo modelo Λ CDM e pelo modelo DGP, juntamente com os dados do fator de crescimento f_{obs} . Novamente, notamos a diferença entre as previsões para a evolução de $f(z)$ de acordo com os dois modelos considerados. Todavia, não é possível distinguir entre eles tendo em vista esse conjunto de dados.

Além dos problemas referentes às restrições observacionais, mostrou-se que o modelo DGP apresenta um modo *ghost* no setor escalar do campo gravitacional (Goldberger and Wise, 1999; Koyama, 2002; Charmousis et al., 2006). O estudo das perturbações mostra que a gravidade no modelo DGP coincide com a teoria de Brans-Dicke, com o parâmetro de Brans-Dicke dado por

$$\omega_{BD} = \frac{3}{2}(\beta - 1), \quad (2.116)$$

$$\beta = 1 + 2H^2 r_c \left(H^2 + \frac{K}{a^2} \right)^{-1/2} \left[1 + \frac{\dot{H}}{3H^2} + \frac{2K}{3a^2 H^2} \right]. \quad (2.117)$$

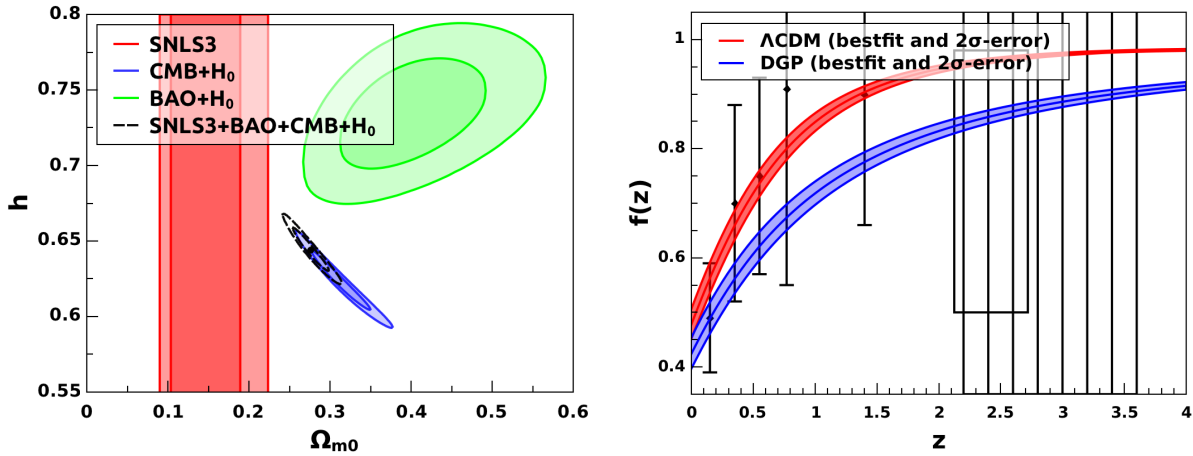


Figura 2.3.: *Painel da esquerda:* Contornos de probabilidade nos níveis de confiança de 68.3% e 95.4% no plano $\Omega_{m0} - h$, para o modelo DGP. Esta figura mostra a inconsistência entre as diferentes sondas cosmológicas para o modelo DGP. *Painel da direita:* A evolução de $f(z)$ predita pelos modelos Λ CDM e DGP. Os valores de melhor ajuste e as regiões de 2σ são determinadas pela análise utilizando o conjunto de dados SNIa+CMB+BAO+ H_0 . Figura retirada de [Zhang et al. \(2012\)](#).

O *ghost* é indicado pelo sinal negativo do parâmetro de Brans-Dicke ($\omega_{BD} < 0 \Rightarrow \beta < 1$). Isso exclui efetivamente o modelo DGP como alternativa para a energia escura, mas permite que ele permaneça como um *toy model* para ilustrar os tipos de comportamento que podem acontecer ao se modificar as equações de Einstein.

2.5. Gravidade modificada e ondas gravitacionais

Como visto nas seções anteriores, existe um número considerável de teorias de gravidade modificada propostas com o intuito de explicar as fases de expansão acelerada inicial e tardia do Universo sem recorrer à hipótese da energia escura (veja, por exemplo, os artigos de revisão [Nojiri and Odintsov, 2006](#); [Capozziello and De Laurentis, 2011b](#)). Para testar a viabilidade observacional dessas teorias, podemos utilizar, além dos dados observacionais padrão como supernovas, RCF, BAO, taxa de crescimento e o parâmetro de Hubble, por exemplo, as ondas gravitacionais (OGs) detectadas recentemente pelo LIGO. Além disso, a observação simultânea do evento de onda gravitacional GW170817 detectada pela Colaboração LIGO-VIRGO ([Abbott et al., 2017](#)) e sua contrapartida eletromagnética (EM) GRB170817A detectada pelo monitor de explosão de raios gama Fermi ([Goldstein et al., 2017](#)), resultante da fusão de estrelas de nêutrons binárias, inaugurou a era da astronomia multi-mensageira. Essa observação colocou uma restrição importante sobre a velocidade de propagação das OGs: elas se propagam com a velocidade da luz, tal que $|c_{OG}^2/c^2 - 1| \leq 6 \times 10^{-15}$ (com c_{OG} sendo a velocidade da onda gravitacional e c a velocidade da luz). Este resultado implica que muitas teorias de gravidade modificada não são mais viáveis ([Casalino et al., 2018](#)), pois algumas delas são construídas sobre a suposição de um meio cosmológico efetivo que quebra a invariância de Lorentz, implicando que as OGs não viajariam

com a velocidade da luz (Bettoni et al., 2017). Desde a observação desse evento simultâneo, muitos trabalhos tem estudado a viabilidade de diferentes teorias de gravidade modificada (Baker et al., 2017; Creminelli and Vernizzi, 2017; Ezquiaga and Zumalacárregui, 2017; Sakstein and Jain, 2017; Ezquiaga and Zumalacárregui, 2018). Nesta seção, abordaremos alguns desses estudos, destacando as principais consequências da restrição $c_{OG} \cong c$ sobre alguns modelos.

No contexto das teorias escalares-tensoriais, estudos com diferentes abordagens restringiram a gama de possibilidades dessa classe de teorias. As consequências desse resultado experimental para modelos de energia escura e de gravidade modificada caracterizadas por um único grau de liberdade escalar são discutidas na referência Creminelli and Vernizzi (2017). Nesse trabalho, os autores aplicam a abordagem da teoria de campo efetiva e, utilizando a restrição $c_{OG} \cong c$, obtiveram restrições e relações entre os coeficientes dos operadores, tal que teorias de Horndeski quárticas e de quinto grau foram excluídas^{¶¶}. Este fato implica ainda que o mecanismo de Vainshtein^{***} é válido apenas para teorias de terceiro grau e que nenhuma assinatura dos operadores lineares associados devem aparecer na estrutura em grande escala (Takushima et al., 2014). Por outro lado, Nojiri and Odintsov (2018) investigaram a propagação das ondas gravitacionais para teorias $f(R)$ e teorias do tipo escalar-tensorial e mostraram que a propagação depende de qual teoria se está considerando. Mesmo que a velocidade de propagação seja a mesma para as OGs e para a luz, eles encontraram uma diferença na fase de propagação. Neste sentido, é interessante aplicar a mesma metodologia às teorias $f(G)$ pois o termo quadrático de R presente na definição do invariante de Gauss-Bonnet poderia produzir uma pequena correção na propagação da OG. Todavia, é necessário investigar antes se a velocidade de propagação da OG nesse tipo de teoria é igual ou diferente à velocidade da luz.

A detecção conjunta da GW170817 e de sua contrapartida eletromagnética proporcionou que a astronomia multi-mensageira fosse, pela primeira vez, utilizada para restringir a geometria de dimensões extras (Visinelli et al., 2018). Como vimos, nos modelos de brana, a gravidade é a única força que se propaga livremente no *bulk* enquanto as outras forças estão confinadas na brana. A consequência imediata disto é que as ondas gravitacionais podem viajar ao longo de uma geodésica extra-dimensional, tal que o sinal da OG alcançaria o observador num intervalo de tempo mais curto se comparado com um sinal luminoso emitido simultaneamente, mesmo que os sinais viajem com a mesma velocidade (Chung and Freese, 2000). A partir dos dados do atraso temporal entre os sinais GW170817 e GRB170817A, Visinelli et al. (2018) obtiveram um limite superior para o raio de curvatura da dimensão extra de $\ell \lesssim 0.535\text{Mpc}$, num nível de confiança de 1σ . Esse valor é uma restrição fraca se comparada com restrições obtidas a partir de experimentos no sistema solar, que conseguem limites da ordem submilimétrica (Long

¶¶ A menos que se reduza o acoplamento conforme padrão para $(^4)R$. Para mais detalhes veja Creminelli and Vernizzi (2017).

*** Um mecanismo que permite esconder através de efeitos não lineares - tipicamente para distâncias menores que o chamado raio de Vainshtein que depende da fonte e da teoria considerada - alguns graus de liberdade cujos efeitos são importantes apenas para grandes distâncias, por exemplo, escalas cosmológicas (Babichev and Deffayet, 2013).

et al., 2002; Iorio, 2012; Linares et al., 2014; Tan et al., 2016), mas é um marco para restrição de dimensões extras a partir da astronomia multi-mensageira. Além disso, comparando as estimativas da distância de luminosidade, obtidas pela medida da OGs (d_{LOG}) e pela sua contrapartida eletromagnética (d_{LEM}), Pardo et al. (2018) mostraram que as OG propagam-se num espaço-tempo de dimensão $D \sim 4$, como esperado na Relatividade Geral.

As restrições advindas dos sinais GW170817 e GRB170817A também foram utilizadas para investigar as consequências sobre as teorias $f(T)$ (Cai et al., 2018). Esta classe de teorias é construída a partir de uma formulação baseada no escalar de torção, T , definido a partir da contração do tensor de torção $T_\mu \equiv T^\nu_{\nu\mu}$, onde $T_{\nu\mu} = \hat{\Gamma}^\lambda_{\nu\mu} - \hat{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$, e $\hat{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ são as conexões de Weitzenböck construídas a partir dos campos tétradas e^μ_A . A partir do estudo das propriedades de propagação das OGs através da abordagem da teoria de campo efetiva, que permite explorar as perturbações cosmológicas separadamente da evolução do *background*, encontrou-se que a velocidade das OGs é igual a velocidade da luz no limite Minkowskiano e, portanto, as restrições provenientes do sinal simultâneo OG-EM são trivialmente satisfeitas.

A gravidade de Hořava, caracterizada por conter termos de altas ordens nas derivadas espaciais que violam a invariância de Lorentz localmente, também foi analisada a partir da restrição $c_{OG} \cong c$ (Emir Gümrükçüoğlu et al., 2018). Além de impor limites sobre um de seus parâmetros, a restrição das OGs também impôs limites sobre a região permitida no espaço de parâmetros tri-dimensional da teoria (veja Figs. (2) e (3) de Emir Gümrükçüoğlu et al. (2018)). Ocasionalmente, esta teoria pode vir a ser excluída como uma possibilidade de teoria de gravidade renormalizável, todavia, são necessários limites mais robustos sobre outros parâmetros associados a ela.

Por fim, teorias que incluem um termo do tipo $f(\phi)\mathcal{G}$ à ação de Einstein-Hilbert são excluídas pelo evento GW170817, pois predizem uma velocidade de propagação para as OGs diferentes da velocidade da luz (Ezquiaga and Zumalacárregui, 2017). Todavia, como as teorias $f(R)$ permanecem viáveis, extensões do tipo $f(R, G)$ podem ser mantidas pois são teorias livres de singularidade onde a contribuição de Gauss-Bonnet reforça o comportamento de quintessência e da inflação^{†††} (Benetti et al., 2018). Além disso, teorias do tipo vetoriais-tensoriais, escalar-vetorial-tensorial, ou outras em que existem acoplamentos do tipo $R_{\mu\nu}v^\mu v^\nu$, são fortemente restringidas pois também modificam a velocidade de propagação das OGs. Em Ezquiaga and Zumalacárregui (2017) são discutidas em detalhes algumas das teorias que são afetadas por essa restrição.

De maneira geral, a astronomia multi-mensageira (OG-EM) tem se mostrado uma excelente ferramenta para testar modelos que buscam explicar a origem da aceleração cósmica a partir de modificações da geometria, de maneira que novos modelos e/ou teorias terão que satisfazer a forte restrição da velocidade de propagação das OGs. Além disso, as futuras detecções de OG-EM também serão determinantes para a busca por uma energia escura dinâmica, uma vez que se restrinja melhor a presença de polarizações adicionais (Ezquiaga and Zumalacárregui,

^{†††} Embora seja necessário um estudo detalhado sobre a velocidade de propagação das OGs nesse tipo de teoria.

2017).

2.6. Sumário

Neste capítulo, abordamos alguns dos muitos caminhos que estão sendo tomados na literatura para explicar o atual cenário de expansão cósmica. Algumas dessas alternativas têm sido bastante investigadas, com as teorias $f(R)$ desempenhando um papel de destaque nesse contexto. Recentemente, no entanto, o advento da astronomia multi-mensageira com a observação simultânea do evento de onda gravitacional e sua contrapartida eletromagnética, desfavoreceu muitas dessas teorias como boas candidatas a fornecerem modelos cosmológicos consistentes. O próximo capítulo será dedicado ao estudo da abordagem de sistemas dinâmicos aplicado às classes de teorias $f(R)$ e $f(\mathcal{G})$.

3 Sistemas dinâmicos e teorias de gravidade modificada

Neste capítulo, discutiremos brevemente definições básicas da teoria de sistemas dinâmicos e abordaremos sua aplicação no contexto de teorias de gravidade modificada, especialmente as teorias $f(R)$ e $f(\mathcal{G})$.

3.1. Alguns aspectos de sistemas dinâmicos

Podemos pensar em um sistema dinâmico como um sistema abstrato constituído de um espaço (espaço de fase ou espaço de estados) e alguma regra matemática que descreva a evolução de qualquer ponto nesse espaço. Em um sistema de interesse, o estado de um dado ponto será descrito por quantidades consideradas importantes sobre o sistema e o espaço de fase é o conjunto de todos os valores que estas quantidades podem assumir (Boehmer and Chan, 2014). Dessa forma, é possível analisar o mesmo sistema com diferentes conjuntos de variáveis, optando-se por aquelas que sejam mais adequadas ao problema em questão.

A origem da teoria de sistemas dinâmicos data do final do século XIX, com o trabalho de Poincaré (veja Hirsch, 1984, e referências lá citadas). Nele, é proposto o uso de métodos geométricos e topológicos para determinar as propriedades de um conjunto de soluções no espaço de fase ao invés de buscar por soluções exatas de uma equação diferencial.

A abordagem de sistemas dinâmicos é bastante utilizada para estudar sistemas físicos que evoluem com o tempo, ou seja, cujo estado num instante de tempo t pode ser descrito por um conjunto de pontos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{X}$, de um espaço de fase $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{R}$ e cuja evolução é governada por uma equação diferencial autônoma em \mathbf{X} , escrita como (Wiggins, 2003):

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}), \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{f} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$. A função \mathbf{f} pode ser vista como um campo vetorial em \mathbb{R}^n , tal que

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x})). \quad (3.2)$$

Portanto, as equações diferenciais (3.1) definem os campos vetoriais do sistema. Isso significa que, em qualquer ponto $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ e em qualquer tempo t , $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ define um campo vetorial em \mathbb{R}^n .

Um dos principais objetivos da abordagem de sistemas dinâmicos é determinar o comportamento assintótico futuro ($t \rightarrow +\infty$), uma vez que estamos interessados na evolução de longo prazo do sistema físico em questão. Em Cosmologia, é fundamental saber também o comportamento assintótico próximo da singularidade inicial, ou seja, no passado. Além de descrever o comportamento assintótico, é igualmente interessante descrever o comportamento intermediário. Dessa forma, o propósito de aplicar esse método é obter uma descrição qualitativa sobre como classes gerais de modelos cosmológicos evoluem desde tempos primordiais até o futuro distante.

Quando se deseja uma descrição qualitativa de uma classe de modelos cosmológicos é interessante que as equações que governam a dinâmica sejam compostas por um sistema autônomo de equações diferenciais ordinárias (EDOs). Dessa forma, a abordagem de sistemas dinâmicos pode ser facilmente realizada. Nesses casos, usualmente se introduz uma variável temporal (logarítmica) adimensional, de tal forma que os modelos possam ser analisados em todo período temporal (assume valores reais) e se escolhe conjunto de variáveis adimensionais. A partir dessas escolhas, destacamos que: (i) podemos obter um sistema dinâmico compacto, (ii) as variáveis são bem comportadas e possuem um significado físico “direto” e (iii) devido à simetria das equações, uma delas pode ser desacoplada (Coley, 1999). O fato de trabalharmos com uma variável temporal adimensional e com um conjunto de variáveis adimensionais faz com que as EDOs definam um fluxo, assim a evolução dos modelos cosmológicos pode ser analisada estudando-se as órbitas deste fluxo no espaço de fase. Para além disto, ainda é possível obter ambos os limites α e ω , de tal forma que existirá um atrator no passado e no futuro do espaço de fase (Coley, 1999).

Pode-se definir dois tipos de sistemas dinâmicos. O primeiro são os sistemas dinâmicos contínuos, cuja evolução é definida pelo conjunto de equações diferenciais ordinárias. O segundo é conhecido como sistemas dinâmicos discretos, os quais são definidos através de um mapeamento (Boehmer and Chan, 2014). No contexto de teorias de gravidade modificada, os sistemas dinâmicos são dimensionalmente finitos e do tipo contínuos. Neste caso, o requisito básico é que a função \mathbf{f} seja pelo menos diferenciável em \mathbf{X} .

Definição 1 (Ponto crítico ou ponto fixo). A equação autônoma $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ possui um ponto crítico (ou um ponto fixo) em $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ se e somente $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$.

A princípio, o sistema pode permanecer no ponto fixo indefinidamente, dependendo das condições de equilíbrio do ponto. O fato de um ponto fixo ser estável ou instável desempenha um

papel muito importante no sistema dinâmico e torna-se útil, então, fazer uma classificação dos pontos fixos baseada na sua estabilidade.

Definição 2 (Ponto fixo estável). Seja \mathbf{x}_0 um ponto fixo do sistema (3.1), ele é dito estável se para todo $\varepsilon > 0$ podemos encontrar um δ tal que se $\psi(t)$ é uma solução qualquer de (3.1), satisfazendo $\|\psi(t_0) - \mathbf{x}_0\| < \delta$, então a solução $\psi(t)$ existe para todo $t \geq t_0$ e satisfará $\|\psi(t) - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$.

Definição 3 (Ponto fixo assintoticamente estável). Seja \mathbf{x}_0 um ponto fixo estável do sistema (3.1), ele é chamado de assintoticamente estável se existe um número δ tal que se $\psi(t)$ é uma solução qualquer de (3.1), satisfazendo $\|\psi(t_0) - \mathbf{x}_0\| < \delta$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \mathbf{x}_0$.

Dito de outra forma, um ponto fixo \mathbf{x}_0 do sistema (3.1) é dito estável se todas as trajetórias que iniciam próximas ao ponto \mathbf{x}_0 permanecem próximas a ele à medida que t aumenta. Semelhantemente, um ponto fixo é dito assintoticamente estável se ele é estável e, além disso, todas as trajetórias inicialmente próximas a \mathbf{x}_0 tendem a \mathbf{x}_0 quando $t \rightarrow \infty$.

3.1.1. Teoria de estabilidade linear

Dado o conceito de estabilidade, veremos agora um método que pode ser utilizado para analisar as propriedades de estabilidade dos pontos fixos. A ideia básica é que podemos estudar o comportamento do sistema em torno dos pontos de equilíbrio e, então, analisar os sinais dos autovalores das equações linearizadas.

Na prática, a linearização do sistema se traduz em expandir as equações em série de Taylor próximas a \mathbf{x}_0 . Assim, uma vez que $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))$, a expansão em série de Taylor $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ próxima a \mathbf{x}_0 produz

$$f_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial t_j}(\mathbf{x}_0) y_j(t) + \frac{1}{2!} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial t_j \partial t_k}(\mathbf{x}_0) y_j(t) y_k(t) + \dots, \quad (3.3)$$

onde o vetor $\mathbf{y}(t)$ é definido como $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)$. Como queremos analisar o problema em $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ ($f(\mathbf{x}_0) = 0$), os termos não-lineares (y^n , $n \geq 2$) podem ser desprezados em uma primeira aproximação. Dessa forma, obtemos

$$f_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial t_j}(\mathbf{x}_0) y_j(t). \quad (3.4)$$

A derivada parcial pode ser interpretada como a matriz Jacobiano, tal que

$$J = \frac{\partial f_i}{\partial t_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial t_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial t_n} \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Os autovalores do Jacobiano J , calculados nos pontos críticos \mathbf{x}_0 , contém as informações sobre a estabilidade. Visto que J é uma matriz $n \times n$, teremos n autovalores reais e/ou complexos.

Considerando o sistema autônomo bi-dimensional

$$\frac{dx_1}{dt} = f(x_1, x_2), \quad (3.6)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = g(x_1, x_2), \quad (3.7)$$

podemos reescrevê-lo na forma:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A(t)\mathbf{x} + b, \quad (3.8)$$

onde A é uma matriz 2×2 , b é uma constante e $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.

Os autovalores de A são dados pelas raízes da equação característica:

$$\det(A(t) - \lambda I) = 0. \quad (3.9)$$

Em geral, isso produzirá uma equação polinomial de n -ésima ordem quando A for uma matriz $n \times n$. Para o sistema (3.8), teremos 2 autovalores (λ_1 e λ_2) que poderão ser reais e diferentes, reais e iguais ou complexos. Existem dois autovetores E_1 e E_2 associados aos autovalores λ_1 e λ_2 , que mudam de direção à medida em que se movem ao longo da trajetória \mathbf{x}_0 . Esses autovetores satisfazem a definição a seguir.

Definição 4 (Autovetores e autovalores). Dada uma matriz real A $n \times n$, um vetor não-nulo E satisfazendo

$$A(t)E_i(t) = \lambda_i(t)E_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.10)$$

é chamado de autovetor E e corresponde a um autovalor λ . A equação (3.10) é a equação de autovalores de A .

Podemos agora classificar os pontos fixos de acordo com sua estabilidade. No caso do sistema (3.8), a matriz Jacobiano é escrita como:

$$J = \begin{pmatrix} f_{,x_1} & f_{,x_2} \\ g_{,x_1} & g_{,x_2} \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

onde $f_{,x_1}$ significa diferenciação com respeito a x_1 . Os autovalores λ_1 e λ_2 são dados por:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(f_{,x_1} + g_{,x_2}) + \frac{1}{2}\sqrt{(f_{,x_1} - g_{,x_2})^2 + 4f_{,x_2}g_{,x_1}}, \quad (3.12)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(f_{,x_1} + g_{,x_2}) - \frac{1}{2}\sqrt{(f_{,x_1} - g_{,x_2})^2 + 4f_{,x_2}g_{,x_1}}, \quad (3.13)$$

e devem ser calculados nos pontos (x_{1_0}, x_{2_0}) .

O aumento ou diminuição da perturbação \mathbf{y} é determinado pelo sinal da parte real dos autovalores λ_i . A Tabela (3.1), retirada de [Boehmer and Chan \(2014\)](#), exemplifica todos os casos possíveis dos autovalores λ_1 e λ_2 . Assim, é possível entender as propriedades de estabilidade ou instabilidade dos pontos fixos (x_{10}, x_{20}) .

Tabela 3.1.: Estabilidade dos pontos críticos baseados nos autovalores λ_1 e λ_2 .

Autovalores	Descrição
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$	o ponto fixo é assintoticamente estável e as trajetórias começando perto desse ponto irão se aproximar dele quando $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_1(t), x_2(t)) = (x_{10}, x_{20})$
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$	o ponto fixo é instável e as trajetórias serão repelidas para longe do ponto quando $\lim_{t \rightarrow -\infty} (x(t), y(t)) = (x_0, y_0)$. Pode-se dizer que (x_{10}, x_{20}) é um atrator passado
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$	o ponto fixo é um ponto de sela. Algumas trajetórias serão repelidas e outras serão atraídas
$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$	com $\alpha > 0$ e $\beta \neq 0$ o ponto é uma espiral instável
$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$	com $\alpha < 0$ e $\beta \neq 0$ o ponto fixo é uma espiral estável
$\lambda_1 = i\beta, \lambda_2 = -i\beta$	as soluções são oscilatórias e o ponto é dito central

Em 3 ou mais dimensões, a classificação é a mesma, embora seja mais difícil fazê-la baseada apenas nos autovalores. Desde que tenhamos pontos fixos simples, ou seja, desde que $\det(A) \neq 0$, A^{-1} exista e nenhum dos autovalores seja 0, a teoria de estabilidade linear é válida e a classificação dos pontos críticos segundo sua estabilidade pode ser feita de acordo com a Tabela (3.1).

Para pontos fixos não simples ($\det(A) = 0$), o método de linearização falha e outros métodos são necessários para estudar as propriedades de estabilidade. Uma ferramenta relevante, neste caso, é o expoente característico de Lyapunov, utilizado principalmente para especificar como as perturbações crescem (ou diminuem) ao longo de uma trajetória.

Para cada solução não trivial \mathbf{y} do sistema (3.8), isto é, quando todos os pontos críticos são diferentes de zero, existirá um expoente característico de Lyapunov, definido por ([Anishchenko et al., 2014](#))

$$s[\mathbf{y}(t)] = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|\mathbf{y}(t)\|, \quad (3.14)$$

onde a barra indica limite superior e $\|\cdot\|$ denota a norma do vetor. Para N soluções linearmente independentes \mathbf{y}^i , onde $i = 1, 2, \dots, N$, formando uma matriz fundamental de soluções \mathbf{Y} do sistema (3.8), existirão N expoentes característicos de Lyapunov:

$$s_i = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|\mathbf{y}^i(t)\|, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.15)$$

Os expoentes organizados de maneira decrescente, $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_N$, formam o espectro de expoentes característicos de Lyapunov, em que cada expoente determina a taxa de contração ou

alongamento exponencial de uma componente da perturbação na direção de um autovetor da matriz fundamental, $\mathbf{Y}(t)$, ao longo da trajetória.

Entretanto, no caso de uma solução particular \mathbf{x}_0 de um sistema do tipo (3.8) ser um ponto de equilíbrio, ou seja, $f(\mathbf{x}_0) = 0$, os autovalores e autovetores da matriz A são constantes no tempo e os expoentes de Lyapunov coincidem com as partes reais dos autovalores ($s_i = \text{Re}\lambda_i$). Sendo assim, a classificação de estabilidade é feita de acordo com a Tabela (3.1). Para um espaço de fase com dimensão $N \geq 3$, o ponto de equilíbrio é considerado um atrator se for assintoticamente estável e se todos os expoentes de Lyapunov forem negativos. Por outro lado, este ponto é definido como repulsor quando todos os expoentes são positivos e um ponto de sela inclui expoentes positivos e negativos. Além disso, quando um dos expoentes (autovalores) for 0, é preciso considerar também os sinais de todos os outros expoentes, ou seja,

1. $\lambda_1 = 0, \lambda_i > 0$: o ponto é instável;
2. $\lambda_1 = 0, \lambda_i < 0$: o ponto é estável;
3. $\lambda_1 = 0, \lambda_i$ apresentam sinais diferentes: o ponto é uma sela.

Para uma descrição mais detalhada sobre os expoentes característicos de Lyapunov e a estabilidade de sistemas dinâmicos, indicamos ao leitor as referências [Bowtell \(2008\)](#), [Skokos \(2010\)](#) e [Anishchenko et al. \(2014\)](#). Para uma revisão sobre aplicações de sistemas dinâmicos em Cosmologia, indicamos os trabalhos de [Ellis and Wainwright \(1997\)](#), [Tavakol \(1997\)](#), [Coley \(1999\)](#) e [Boehmer and Chan \(2014\)](#).

3.2. Sistemas dinâmicos em teorias $f(R)$

O modelo cosmológico mínimo possui uma série de eras cosmológicas: inflação primordial, radiação, matéria e constante cosmológica. Desta forma, um modelo cosmológico genérico deveria começar com um período inflacionário, correspondendo a um repulsor no início do sistema dinâmico. Os repulsores, por sua vez, são caracterizados por valores negativos para todos os autovalores da matriz do Jacobiano associados a esse ponto, o que garante que todas as trajetórias evoluem para longe dele. Continuando com nosso modelo ideal, deveríamos ter agora dois pontos de sela, correspondendo às épocas dominadas pela radiação e, em seguida, pela matéria. O fato de serem dois pontos de sela faz com que algumas trajetórias sejam atraídas e, logo em seguida, repelidas por estes pontos, de forma que o universo irá evoluir através de ambas as épocas. Por fim, é necessário que tenhamos um atrator final representando a época de expansão acelerada (solução de Sitter), o que corresponde a todos os autovalores da matriz do Jacobiano negativos.

Em busca de analisar sob quais condições os modelos $f(R)$ são viáveis, a abordagem de sistemas dinâmicos tem sido bastante utilizada na literatura ([Amendola et al., 2007a](#); [Carlóni et al., 2005, 2015, 2018](#); [Ivanov and Toporensky, 2012](#)). De maneira geral, para discutir a dinâmica

cosmológica de uma teoria da gravidade $f(R)$, devem ser seguidos dois passos principais: (i) introduzir variáveis adimensionais convenientes e (ii) derivar as equações de evolução dessas variáveis. Nessa situação, os pontos fixos do sistema de equações representam alguns regimes assintóticos da evolução do Universo.

Tendo em vista que todas as teorias de gravidade modificada do tipo $f(R)$ são conformalmente idênticas a modelos de quintessência, nos quais a matéria está fortemente acoplada à energia escura, [Amendola et al. \(2007b\)](#) mostraram que o comportamento de modelos $f(R) = R + \alpha R^{-n}$ (com $n > 0$) no formalismo métrico, em altos *redshifts*, produz uma evolução cosmológica muito diferente da cosmologia padrão. Em tal caso, o fator de escala durante a fase dominada pela matéria cresce de acordo com $t^{1/2}$ ao invés da lei padrão $t^{2/3}$. Tal comportamento é demasiadamente inconsistente com as observações cosmológicas.

Essa característica comum aos modelos do tipo lei de potência $f(R) \propto R^{-n}$ ($n \neq -1$) passou despercebida durante algum tempo na literatura, até que [Amendola et al. \(2007a\)](#) estudou essa questão em detalhes e a estendeu para todas as Lagrangianas $f(R)$ bem comportadas. Nesse mesmo trabalho, [Amendola et al. \(2007a\)](#) encontram as condições gerais em que qualquer teoria $f(R)$ contém uma era da matéria padrão seguida por um atrator acelerado em um *background* espacialmente plano, homogêneo e isotrópico.

3.2.1. Equações autônomas

A seguir, caracterizamos todas as quantidades necessárias para o sistema de equações autônomo, a partir do qual serão analisadas as condições gerais de viabilidade dos modelos de gravidade $f(R)$. As equações básicas no frame de Jordan para uma teoria $f(R)$ foram vistas no capítulo anterior (seção 2.3.1). Variando a ação geral (Eq. 2.29) e utilizando a métrica FLRW plana, obtemos as seguintes equações de campo:

$$3f_R H^2 = \kappa(\rho_m + \rho_r) + \frac{1}{2}(f_R R - f) - 3H\dot{f}_R, \quad (3.16)$$

$$-2f_R \dot{H} = \kappa(\rho_m + \frac{4}{3}\rho_r) + \ddot{f}_R - H\dot{f}_R. \quad (3.17)$$

Neste ponto, é conveniente introduzir um conjunto de variáveis adimensionais:

$$x_1 = -\frac{\dot{F}}{HF}, \quad (3.18)$$

$$x_2 = -\frac{f}{6FH^2}, \quad (3.19)$$

$$x_3 = \frac{R}{6H^2} = \frac{\dot{H}}{H^2} + 2, \quad (3.20)$$

$$x_4 = \frac{\kappa^2 \rho_{\text{rad}}}{3FH^2}. \quad (3.21)$$

A partir da Eq. (3.16), temos a seguinte identidade algébrica

$$\Omega_m \equiv \frac{\kappa^2 \rho_m}{3FH^2} = 1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4. \quad (3.22)$$

As equações de evolução das variáveis $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ são facilmente calculadas:

$$\frac{dx_1}{dN} = -1 - x_3 - 3x_2 + x_1^2 - x_1x_3 + x_4, \quad (3.23)$$

$$\frac{dx_2}{dN} = \frac{x_1x_3}{m} - x_2(2x_3 - 4 - x_1), \quad (3.24)$$

$$\frac{dx_3}{dN} = -\frac{x_1x_3}{m} - 2x_3(x_3 - 2), \quad (3.25)$$

$$\frac{dx_4}{dN} = -2x_3x_4 + x_1x_4, \quad (3.26)$$

onde $N \equiv \ln a$ e

$$m \equiv \frac{d \log F}{d \log R} = \frac{Rf_{,RR}}{f_{,R}}, \quad (3.27)$$

$$r \equiv -\frac{d \log f}{d \log R} = -\frac{Rf_{,R}}{f} = \frac{x_3}{x_2}, \quad (3.28)$$

com $f_{,R} \equiv df/dR$ e $f_{,RR} \equiv d^2f/dR^2$.

É possível deduzir R em função de x_3/x_2 a partir da Eq. (3.28), tal que m agora também é uma função de x_3/x_2 e obtém-se a função $m(r)$. Se tomarmos o caso do modelo lei de potência com $f(R) = \alpha R^{-n}$, a variável m torna-se uma constante ($m = -n - 1$), com $r = n = x_3/x_2$. Neste caso, o sistema é reduzido para um conjunto de 3 equações com as variáveis x_1, x_2 e x_4 . Contudo, para modelos de gravidade $f(R)$ gerais, a variável m depende de r .

Por fim, é útil escrever as expressões para os parâmetros da equação de estado efetivo e da componente representando a energia escura:

$$\omega_{\text{eff}} = -\frac{1}{3}(2x_3 - 1), \quad (3.29)$$

$$\omega_{\text{DE}} = \frac{1}{3} \frac{1 - x_4y - 2x_3}{1 - y(1 - x_1 - x_2 - x_3)}, \quad (3.30)$$

onde $y = F/F_0$.

3.2.2. Dinâmica cosmológica

A dinâmica cosmológica é analisada através das propriedades analíticas do espaço de fase associado ao sistema de equações (3.23)-(3.26). Na ausência de radiação ($x_4 = 0$), os pontos críticos

do sistema para qualquer $m(r)$ são:

$$P_1 : (x_1, x_2, x_3) = (0, -1, 2), \quad \Omega_m = 0, \quad \omega_{eff} = -1, \quad (3.31)$$

$$P_2 : (x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 0), \quad \Omega_m = 2, \quad \omega_{eff} = 1/3, \quad (3.32)$$

$$P_3 : (x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0), \quad \Omega_m = 0, \quad \omega_{eff} = 1/3, \quad (3.33)$$

$$P_4 : (x_1, x_2, x_3) = (-4, 5, 0), \quad \Omega_m = 0, \quad \omega_{eff} = 1/3, \quad (3.34)$$

$$P_5 : (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{3m}{1+m}, -\frac{1+4m}{2(1+m)^2}, \frac{1+4m}{2(1+m)} \right), \quad \Omega_m = 1 - \frac{m(7+10m)}{2(1+m)^2},$$

$$\omega_{eff} = -\frac{m}{1+m}, \quad (3.35)$$

$$P_6 : (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{2(1-m)}{1+2m}, \frac{1-4m}{m(1+2m)}, -\frac{(1-4m)(1+m)}{m(1+2m)} \right), \quad \Omega_m = 0,$$

$$\omega_{eff} = \frac{2-5m-6m^2}{3m(1+2m)}, \quad (3.36)$$

onde $\Omega_m = 1 - x_1 - x_2 - x_3$.

Em linhas gerais, podemos analisar os pontos fixos conforme o comportamento do parâmetro da equação de estado efetivo. Em tal caso, as únicas soluções que produzem uma equação de estado exata para a era da matéria padrão, ou seja, $w_{eff} = 0 \rightarrow a \propto t^{2/3}$ ou $x_3 = 1/2$, são aquelas para $m = 0$ (P_5) ou para $m = -(5 \pm \sqrt{73})/12$ (P_6) (Capozziello et al., 2006). Porém, o último caso corresponde a $\Omega_m = 0$, o que não gera uma era da matéria dominada por um fluido não relativístico (Amendola et al., 2007c). Por outro lado, apenas P_1 , ou aqueles que se originam a partir de $P_{5,6}$, podem ser acelerados e apenas P_2 ou P_5 podem dar origem a eras da matéria. Todavia, P_2 corresponde a um valor de $\omega_{eff} = 1/3$ e pode ser descartado como uma era da matéria padrão, pois produz um comportamento do fator de escala $a \propto t^{1/2}$ (para mais detalhes, veja Amendola et al., 2007b). Por fim, P_5 parece descrever uma era da matéria padrão, mas apenas para um valor de m próximo de 0. Portanto, uma "boa" cosmologia seria dada por alguma trajetória passando próxima a P_5 e acabando em algum atrator acelerado.

No que se segue, a análise de estabilidade dos pontos fixos é feita baseada nas técnicas de linearização, comentadas brevemente na seção anterior, e é a partir dela que é realizada a classificação dos pontos fixos como atratores, selas ou repulsores no espaço de fase. Vale salientar que se assume um $m = m(r)$ e é definido um $m_i \equiv m(P_i)$.

- (1) P_1 : Ponto de de Sitter

O ponto P_1 corresponde às soluções de de Sitter ($\dot{H} = 0$) pois $\omega_{eff} = -1$ e apresenta os seguintes autovalores:

$$-3, \quad -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{25 - 16/m_1}}{2},$$

onde $m_1 = m(r = -2)$. Consequentemente, P_1 é estável quando $0 < m_1 \leq 1$ e um ponto

de sela caso contrário.

- (2) P_2 : ϕ MDE

Adotando a nomenclatura usada por Amendola (2000), tal que no *frame* de Einstein a função $f(R)$ corresponde a um cenário de quintessência acoplado com um potencial exponencial, considera-se que o ponto P_2 é caracterizado por uma época cinética em que matéria e campo coexistem com frações de energia constantes. O que é denotado como *ϕ -matter dominated epoch* (ϕ MDE). Os autovalores são:

$$-2, \frac{1}{2} \left[7 + \frac{1}{m_2} - \frac{m'_2}{m_2^2} r(1+r) \pm \sqrt{\left\{ 7 + \frac{1}{m_2} - \frac{m'_2}{m_2^2} r(1+r) \right\}^2 - 4 \left\{ 12 + \frac{3}{m_2} - \frac{m'_2}{m_2^2} r(3+4r) \right\}} \right],$$

onde a linha representa derivada com respeito a r . Assim sendo, P_2 pode ser um nó estável ou um ponto de sela.

Podemos ter um ponto de sela quando $m(r)$ for uma constante, tal que os autovalores se reduzem a $-2, 3, 4+1/m_2$. Para este ponto ser um nó estável, devemos estar no sub-espço $x_3 = rx_2$ para $-1/4 < m < 0$. Levando em conta as Eqs. (3.24) e (3.25), o termo x_3/m_2 deve se anular. Portanto, a condição necessária e suficiente para a existência do ponto P_2 é expressa de acordo com

$$\lim_{x_{2,3} \rightarrow 0} \frac{x_3}{m_2} = 0, \quad (3.37)$$

que implica em

$$\frac{f_{,R}}{H^2 f_{,RR}} \rightarrow 0, \quad (3.38)$$

para $R/H^2 \rightarrow 0$ e $f/f_{,R}H^2 \rightarrow 0$. Este fato, por sua vez, quando aplicado a vários modelos como, por exemplo, $f(R) = \log R$, $f(R) = R^n$, $f(R) = R + \alpha R^n$ e modelos $f(R)$ bem comportados no geral, mostra que uma era da matéria “errada” é comum aos modelos $f(R)$.

- (3) P_3 : Ponto puramente cinético

Este ponto corresponde a uma época “cinética”, mas também apresenta uma componente de matéria nula. Os autovalores correspondentes são

$$2, \frac{1}{2} \left[9 - \frac{1}{m_3} + \frac{m'_3}{m_3^2} r(1+r) \pm \sqrt{\left\{ 9 - \frac{1}{m_3} + \frac{m'_3}{m_3^2} r(1+r) \right\}^2 - 4 \left\{ 20 - \frac{5}{m_3} + \frac{m'_3}{m_3^2} r(5+4r) \right\}} \right],$$

o que revela que P_3 pode ser uma sela ou um nó instável. Quando $m(r)$ é constante os autovalores se reduzem para $2, 5, 4 - 1/m_3$. Neste caso, P_3 é instável para $m_3 < 0$ e $m_3 > 1/4$ e um ponto de sela caso contrário.

- (4) P_4

Os autovalores associados ao ponto P_4 são:

$$-5, -3, 4(1 + 1/m_4).$$

Sendo estável para $-1 < m_4 < 0$ e um ponto de sela caso contrário. Nem o ponto P_3 nem o ponto P_4 podem ser usados para caracterizar as épocas dominadas por matéria ou aceleração, devido o comportamento das componentes de matéria e parâmetro da equação de estado ($\Omega_m = 0$ e $\omega_{\text{eff}} = 1/3$).

- (5) P_5 : Soluções de escala

Esse ponto recebe esse nome pois produz soluções com a razão Ω_m/Ω_{DE} constante. No limite $m_5 \rightarrow 0$, P_5 representa uma era da matéria padrão com $a \propto t^{2/3}$ e $\Omega_m = 1$. Isso nos leva à condição necessária para existir uma era da matéria padrão exata,

$$m(r = -1) = 0. \quad (3.39)$$

Os autovalores associados são dados por

$$3(1 + m'_5), \frac{-3m_5 \pm \sqrt{m_5(256m_5^3 + 160m_5^2 - 31m_5 - 16)}}{4m_5(m_5 + 1)}.$$

Como queremos um m muito pequeno, no limite $|m_5| \ll 1$ os autovalores são reduzidos para

$$3(1 + m'_5), -\frac{3}{4} \pm \sqrt{-\frac{1}{m_5}}.$$

Modelos com $m_5 = Rf_{,RR}/f_{,R} < 0$ tem autovalores divergentes quando $m_5 \rightarrow 0$ (pela esquerda), o que implica que o sistema não pode ficar muito tempo em torno do ponto P_5 . Por outro lado, uma era aproximada da matéria existe se m_5 for negativo e não-nulo, mas neste caso os autovalores são muito grandes e o problema torna-se encontrar condições iniciais que façam o sistema permanecer próximo ao ponto por mais tempo. Outro caso interessante ocorre quando $0 < m_5 < 0.327$ pois os dois últimos autovalores na Eq. (3.40) são complexos com as partes reais negativas. Isso produz um ponto de sela com uma oscilação, de modo que o universo pode evoluir através do ponto P_5 e então seguir para um ponto acelerado. Uma vez que P_2 também é um ponto de sela, exceto para o caso específico em que é estável, qual trajetória será escolhida (P_2 ou P_5) vai depender das condições iniciais e, para isso, é necessário uma análise numérica.

- (6) P_6 : Ponto dominado por curvatura

Conforme a nomenclatura dada afirma, esse ponto é dominado pela curvatura com equação de estado efetiva dependente do valor de m . A condição de aceleração ($\omega_{\text{eff}} < -1/3$) é satisfeita quando $m_6 < -(1 + \sqrt{3})/2$, $-1/2 < m_6 < 0$ e $m_6 > (\sqrt{3} - 1)/2$, como mostra

a Fig. 3.1. Os autovalores são dados por:

$$-4 + \frac{1}{m_6}, \quad \frac{2 - 3m_6 - 8m_6^2}{m_6(1 + 2m_6)}, \quad -\frac{2(m_6^2 - 1)(1 + m_6')}{m_6(1 + 2m_6)}.$$

De tal forma que a estabilidade de P_6 depende de m_6 e m_6' .

O ponto P_6 é estável e acelerado em quatro regimes distintos:

[I] $m_6' > -1$

Quando $m_6' > -1$, P_6 é estável e acelerado em três regiões:

- (A) $m_6 < -(1 + \sqrt{3})/2$: P_6 é acelerado mas não é *phantom*, pois $\omega_{eff} > -1$. Possui $\omega_{eff} \rightarrow -1$ no limite $m_6 \rightarrow -\infty$.
- (B) $-1/2 < m_6 < 0$: P_6 é fortemente *phantom* com $\omega_{eff} < -7.6$.
- (C) $m_6 \geq 1$: P_6 admite um comportamento *phantom* com $-1.07 < \omega_{eff} \leq -1$. Possui $\omega_{eff} \rightarrow -1$ no limite $m_6 \rightarrow +\infty$ e $m_6 \rightarrow 1$.

[II] $m_6' < -1$

Quando $m_6' < -1$, o ponto P_6 é estável e acelerado na região em que:

- (D) $(\sqrt{3} - 1)/2 < m_6 < 1$: P_6 não é *phantom*, $\omega_{eff} > -1$.

Em decorrência dessa análise, a aceleração assintótica dos modelos $f(R)$ não pode ter uma equação de estado na faixa de $-7.6 < \omega_{eff} < -1.07$ (Amendola et al., 2007a).

Ao adicionar radiação, ou seja, incluir a variável x_4 na análise, os pontos $P_{1,6}$ permanecem os mesmos com $x_4 = 0$ e dois novos pontos são encontrados, ou seja,

- $P_7 : (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 1), \quad \Omega_m = 0, \quad \omega_{eff} = 1/3, \quad (3.40)$

- $P_8 : (x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{4m}{1+m}, -\frac{2m}{(1+m)^2}, \frac{2m}{1+m}, \frac{1-2m-5m^2}{(1+m)^2} \right), \quad \Omega_m = 0,$
 $\omega_{eff} = \frac{1-3m}{3+3m}. \quad (3.41)$

Notadamente, P_7 é um ponto de radiação padrão, cujos autovalores (quando $m(r)$ é constante) 1, 4, 4, -1 fazem dele um ponto de sela. O ponto P_8 , por sua vez, pode ser considerado uma nova era da radiação contendo energia escura não nula. Porém, como a equação de estado já é bem restrita pela nucleossíntese para ter o valor de 1/3, P_8 somente é aceitável como uma época dominada pela radiação se m_8 for próximo de 0.

Os autovalores de P_8 são:

$$1, \quad 4(1 + m_8'), \quad \frac{m_8 - 1 \pm \sqrt{81m_8^2 + 30m_8 - 15}}{2(m_8 + 1)}.$$

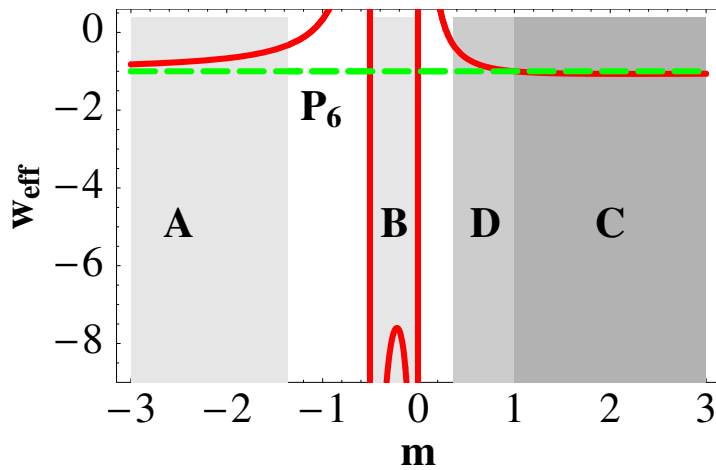


Figura 3.1.: Equação de estado efetiva ω_{eff} para P_6 em função de m . O ponto é estável e acelerado nas regiões cinza. Na região (A) $m < -(\sqrt{3} + 1)/2$, P_6 é sempre não *phantom* ($\omega_{eff} > -1$); na região (B) $-1/2 < m < 0$ é fortemente *phantom* ($\omega_{eff} < -7.6$); na região (C) $m \geq 1$ é um pouco *phantom* e na região (D) não é *phantom* ($\omega_{eff} > -1$). Em todas as outras regiões P_6 é desacelerado ou instável. Figura retirada de Amendola et al. (2007a).

No limite de $m_8 \rightarrow 0$, os dois últimos autovalores são complexos com partes reais negativas e, portanto, P_8 é uma sela em torno do ponto de radiação. Essa fato permite que as trajetórias sejam afastadas da era da radiação e seguidas por um dos pontos fixos dados anteriormente. Dado que P_8 está na linha $m = -r - 1$, assim como o ponto P_5 , uma vez que a condição para a existência do ponto P_5 como era da matéria ($m \approx 0$ e $r \approx -1$) seja satisfeita, também existirá um ponto de radiação na mesma região. Dessa forma, uma trajetória cosmológica viável pode começar em torno do ponto de radiação P_8 com $m \approx 0$ e, então, se conectar com o ponto de matéria P_5 com $m \approx 0$. Posteriormente, as soluções devem se aproximar de algum ponto acelerado.

3.2.3. Classificação de modelos $f(R)$

Para que um modelo cosmológico esteja em conformidade com as observações astronômicas, ele deve possuir uma época dominada por radiação seguida de uma época dominada por matéria e, por fim, uma época de expansão acelerada. No cenário de teorias $f(R)$, do ponto de vista de sistemas dinâmicos, essa sequência corresponde a uma era da matéria longa o suficiente para permitir a formação de estruturas, com equação de estado $\omega_{eff} = 0$ e um ponto atrator final (aceleração estável) para caracterizar a expansão acelerada.

Faz-se necessário examinar quais condições iniciais permitirão a evolução de uma época dominada pela radiação (P_7 ou P_8) seguida de P_2 ou P_5 . Isso porque P_2 (ϕ MDE) sempre existe como um ponto de sela ou estável desde que a condição (3.37) seja satisfeita. Uma vez que P_5 também exista como uma sela, são examinadas as condições que conduzem ao atrator final acelerado.

De modo geral, a cosmologia dos modelos $f(R)$ pode ser estudada através das propriedades geométricas da curva $m(r)$ no plano (r, m) e nas suas interseções com a linha crítica* $m = -r - 1$. A primeira condição para um modelo $f(R)$ ser aceitável é ele possuir uma era dominada pela matéria padrão. Isso acontece para P_5 quando $m(-1) \rightarrow 0$. Mas, se $m(-1)$ for não nulo, a época da matéria ainda pode ser caracterizada por $a \sim t^{2(1+m)/3}$, aceitável desde que $|m| \ll 1$. Vamos denominar o caso em que $|m| \ll 1$ como $P_5^{(0)}$. Desta forma, a partir da época da matéria $P_5^{(0)}$ em $(r, m) = (-1, 0)$, as trajetórias podem seguir para P_1 , ou ainda para os pontos P_5 (além de $P_5^{(0)}$) ou P_6 , os únicos que originam soluções aceleradas. P_1 é estável e acelerado apenas para $0 < m_1 \leq 1$. Todavia, a análise de estabilidade mostra que P_5 não é estável nas regiões em que é acelerado ($m_5 > 1/2$ e $m_5 < -1$). Portanto, a transição do ponto de matéria só pode ocorrer para um dos pontos acelerados P_1 ou P_6 .

Outra questão que deve ser avaliada é o sinal das derivadas de $m(r)$ referentes aos pontos P_5 e P_6 ($m'_{5,6} > -1$ ou $m'_{5,6} < -1$) pois, dependendo disso, podem existir regiões com direções proibidas no plano (r, m) , correspondendo a uma era da matéria estável ou uma época acelerada que não é estável. Isso pode ser visto na Fig.(3.2) onde são mostradas várias curvas de $m(r)$ pertencentes a uma das quatro classes gerais de modelos $f(R)$ (que serão descritas abaixo). Então, para um dado modelo $m(r)$, deve-se olhar para as interseções de $m(r)$ com $m = -r - 1$ para decidir se o modelo passa pelas condições de uma sequência matéria padrão-aceleração.

Modelos da Classe I são caracterizados por uma aceleração final precedida por uma fase ϕ MDE ($a \propto t^{1/2}$) ou não possuem uma fase de matéria antecedendo à época acelerada. A maioria dos modelos pertencentes a essa classe são claramente descartados, por exemplo, pela distância de diâmetro angular dos picos acústicos da RCF (Amendola et al., 2007b).

A Classe II abrange modelos que possuem uma época da matéria seguida de um ponto de de Sitter ($\omega_{eff} = -1$) desde que

$$0 \leq m(r) \leq 1 \quad \text{at} \quad r = -2 \quad \text{or} \quad m(r) = -r - 1 \rightarrow \pm\infty. \quad (3.42)$$

Além disso, a curva $m(r)$ conecta a vizinhança do ponto de matéria $P_5(r, m) = (-1, 0)$ com uma das regiões aceleradas.

A Classe III, por sua vez, compreende modelos em que a curva $m(r)$ intersecta a linha crítica para valores pequenos e negativos de m . Neste caso, os autovalores são muito altos e caracterizam um ponto de sela, tal que a era da matéria é muito curta. Ademais, as trajetórias são atraídas por um atrator fortemente *phantom* com $\omega_{eff} < -7.6$.

Por fim, modelos da Classe IV contém modelos que possuem uma era da matéria seguida por um atrator acelerado não-*phantom* ($\omega_{eff} \geq -1$) desde que $m = -r - 1$ e

$$(\sqrt{3} - 1)/2 < m(r) \leq 1 \quad \text{and} \quad m'(r) < -1. \quad (3.43)$$

* Chamada assim pois os pontos P_5 e P_6 se encontram nela.

Além do mais, esses modelos também satisfazem o requisito da curva $m(r)$ ser capaz de conectar a vizinhança do ponto de matéria $P_5(r, m) = (-1, 0)$ com uma das regiões aceleradas e, portanto, conduzir a uma cosmologia aceitável.

Indicamos ao leitor a referência [Amendola et al. \(2007a\)](#), onde é feito um estudo detalhado (analítico e numérico) de vários modelos $f(R)$ e, então, realizada a classificação de cada um deles. Além disto, podemos encontrar nesta mesma referência uma figura semelhante à Fig.(3.2) que ilustra o comportamento das curvas $m(r)$ para alguns dos modelos $f(R)$ analisados.

3.3. Sistemas dinâmicos em teorias $f(\mathcal{G})$

As teorias de gravidade com o termo de Gauss-Bonnet $\mathcal{G} = R^2 - 4R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\mu\nu\rho\sigma}$ tem sido bastante estudadas na literatura recentemente ([Antoniadis et al., 1994](#); [Cartier et al., 2000](#); [Tsujiikawa, 2002](#); [Nojiri et al., 2005](#); [Nojiri and Odintsov, 2005b](#); [Cognola et al., 2007](#); [Zhou et al., 2009](#)). Nesta seção, faremos um breve resumo da análise do espaço de fase de modelos $f(\mathcal{G})$, assim como serão inferidas as condições mediante as quais esses modelos de energia escura são cosmologicamente viáveis.

Seguindo a ideia de modificação da ação de Einstein-Hilbert por uma função genérica do escalar de Ricci, consideramos uma densidade Lagrangiana contendo uma função geral do escalar de Ricci e do termo de Gauss-Bonnet, $\sqrt{-g}f(R, \mathcal{G})$ ([Carroll et al., 2005b](#); [Cognola et al., 2007](#)). De maneira simplificada essa função foi substituída por $f(R, \mathcal{G}) = R + f(\mathcal{G})$, com a função $f(\mathcal{G})$ representando a energia escura ([Nojiri and Odintsov, 2005b](#); [Li et al., 2007b](#)) ou para explicar ambos os períodos de aceleração inicial e tardia do universo ([Nojiri et al., 2008](#); [De Laurentis et al., 2015](#)).

A ação geral da gravidade de Gauss-Bonnet pode ser escrita como ([Zhou et al., 2009](#))

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2}R + f(\mathcal{G}) + \mathcal{L}_r + \mathcal{L}_m \right), \quad (3.44)$$

onde \mathcal{L}_r e \mathcal{L}_m são as Lagrangianas de radiação e matéria, respectivamente. Variando a ação (3.44) com respeito ao tensor métrico $g_{\mu\nu}$, obtemos as equações de campo para a gravidade $f(\mathcal{G})$:

$$\begin{aligned} & R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \\ & + 8[R_{\mu\rho\nu\sigma} + R_{\rho\nu}g_{\sigma\mu} - R_{\rho\sigma}g_{\nu\mu} - R_{\mu\nu}g_{\sigma\rho} + R_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} \\ & + \frac{1}{2}R(g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})]\nabla^\rho\nabla^\sigma f_{\mathcal{G}} + (\mathcal{G}f_{\mathcal{G}} - f)g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento da radiação e matéria.

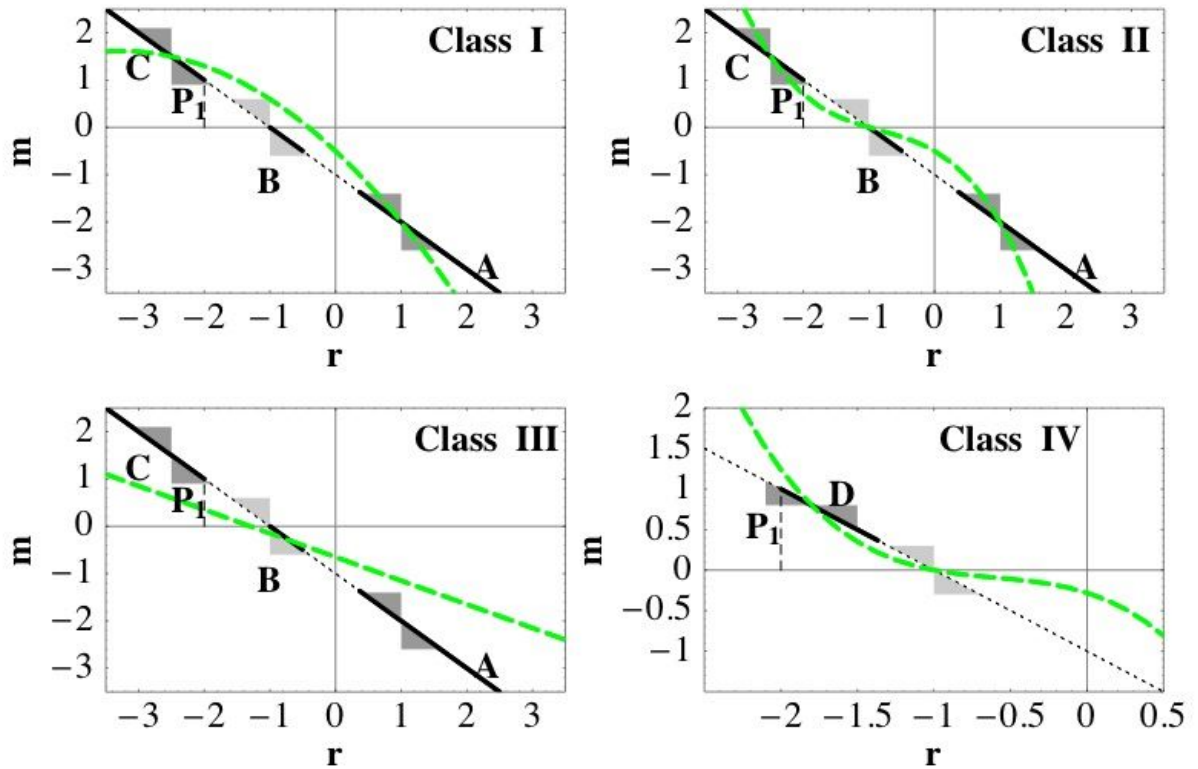


Figura 3.2.: Plano (r, m) para as quatro classes de modelos $f(R)$. Em todos os painéis a linha diagonal é a linha crítica $m = -r - 1$. Nos trechos pontilhados, P_6 não é acelerado nem instável, se assumimos $m'_6 > -1$. Nos trechos sólidos nomeados de A, B e C, P_6 é acelerado e estável, novamente assumindo $m'_6 > -1$ (a região D é omitida por clareza exceto no painel da Classe IV). Os triângulos cinza representam direções proibidas próximas aos pontos críticos. As linhas tracejadas em verde são curvas $m(r)$ hipotéticas, que intersectam a linha crítica nos pontos críticos P_5 and P_6 . A interseção em $(r, m) = (-1, 0)$ (triângulos em cinza claro) corresponde a época dominada pela matéria $P_5^{(0)}$. Em modelos da Classe I, a curva $m(r)$ não intersecta $(r, m) = (-1, 0)$ e, portanto, não existe era da matéria padrão. Em modelos da Classe II, o ponto $(r, m) = (-1, 0)$ está conectado ao ponto de de Sitter P_1 (ao longo do segmento $0 < m \leq 1$ em $r = -2$) e, portanto, representa uma solução cosmológica viável. Os dois pontos críticos adicionais nas regiões A e C são instáveis uma vez que as curvas entram nos triângulos proibidos e não são, portanto, aceitáveis como estágios finais acelerados. Em modelos da Classe III, a linha $m(r)$ com inclinação $m' > -1$ intersecta a linha crítica em valores de m negativos na faixa fortemente phantom (B). Note que, as curvas com $m'_5 < -1$ que são atraídas por P_6 nas regiões (A), (B) e (C) são possíveis, mas tais casos não são viáveis devido a ausência de uma era da matéria prolongada para $m < 0$. Em modelos da Classe IV, a curva $m(r)$ conecta a era da matéria com $m'_5 > -1$ à região (D) com a derivada $m'_6 < -1$ e, portanto, representa uma cosmologia viável com uma era da matéria seguida por uma aceleração estável ($\omega_{\text{eff}} > -1$). Nenhuma trajetória única pode cruzar a linha crítica $m = -r - 1$: cada solução fica presa entre duas raízes sucessivas na linha crítica. Figura retirada de Amendola et al. (2007a).

Considerando a métrica FLRW plana, as Eqs.(3.45) se reduzem a

$$3H^2 = \mathcal{G}f_{\mathcal{G}} - f - 24H^3 \dot{f}_{\mathcal{G}} + \rho_r + \rho_m, \quad (3.46)$$

$$-2\dot{H} = -8H^3 \dot{f}_{\mathcal{G}} + 16H\dot{H}\dot{f}_{\mathcal{G}} + 8H^2 \ddot{f}_{\mathcal{G}} + \frac{4}{3}\rho_r + \rho_m. \quad (3.47)$$

As densidades ρ_r e ρ_m satisfazem as equações de continuidade usuais

$$\dot{\rho}_m = -3H\rho_m \quad \text{e} \quad \dot{\rho}_r = -4H\rho_r. \quad (3.48)$$

Reescrevendo as Eqs. (3.46) e (3.47) como

$$3H^2 = \rho \quad \text{e} \quad -2\dot{H} = p + \rho, \quad (3.49)$$

as contribuições geométricas para a densidade e a pressão da energia escura são naturalmente definidas como

$$\rho_{DE} = \mathcal{G}f_{\mathcal{G}} - f - 24H^3 \dot{f}_{\mathcal{G}}, \quad (3.50)$$

$$p_{DE} = 16H^3 \dot{f}_{\mathcal{G}} + 16H\dot{H}\dot{f}_{\mathcal{G}} + 8H^2 \ddot{f}_{\mathcal{G}} - \mathcal{G}f_{\mathcal{G}} + f, \quad (3.51)$$

de tal forma que a equação de continuidade da energia escura é válida

$$\rho_{DE} + 3H(p_{DE} + \rho_{DE}) = 0, \quad (3.52)$$

e o parâmetro da equação de estado torna-se

$$\omega_{DE} = \frac{p_{DE}}{\rho_{DE}} = \frac{16H^3 \dot{f}_{\mathcal{G}} + 16H\dot{H}\dot{f}_{\mathcal{G}} + 8H^2 \ddot{f}_{\mathcal{G}} - \mathcal{G}f_{\mathcal{G}} + f}{\mathcal{G}f_{\mathcal{G}} - f - 24H^3 \dot{f}_{\mathcal{G}}}. \quad (3.53)$$

Também é comum definir o parâmetro da equação de estado efetivo como

$$\omega_{eff} = -1 - \frac{2\dot{H}}{3H^2}, \quad (3.54)$$

e as densidades de energia adimensionais

$$\Omega_X = \frac{\rho_X}{3H^2}, \quad X = r, m, DE. \quad (3.55)$$

3.3.1. Equações autônomas

O procedimento padrão para a análise de sistemas dinâmicos é definir um conjunto de variáveis adimensionais e derivar a evolução de cada uma delas. Desta forma, a dinâmica cosmológica de um modelo $f(\mathcal{G})$ poderá ser avaliada a partir da análise de pontos fixos e estabilidade do

sistema autônomo definido. Neste caso, as variáveis adimensionais escolhidas são:

$$x_1 = \frac{\mathcal{G}f_{\mathcal{G}}}{3H^2}, \quad x_2 = -\frac{f}{3H^2}, \quad x_3 = -8Hf_{\mathcal{G}}, \quad x_4 = \Omega_r = \frac{\rho_r}{3H^2}, \quad x_5 = \frac{\mathcal{G}}{24H^4} = \frac{\dot{H}}{H^2} + 1.$$

Em termos dessas variáveis, a Eq.(3.46) é reduzida à seguinte identidade algébrica:

$$\Omega_m = 1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4. \quad (3.56)$$

Além disto, as expressões para ω_{DE} e ω_{eff} podem ser reescritas em função das variáveis x_i como:

$$\omega_{DE} = \frac{-2x_5 - x_4 - 1}{3(x_1 + x_2 + x_3)}, \quad (3.57)$$

$$\omega_{eff} = -\frac{1}{3}(2x_5 + 1). \quad (3.58)$$

Derivando cada uma delas com respeito ao tempo adimensional $N = \ln(a/a_i)$ (a_i é o valor inicial do fator de escala), obtém-se:

$$\frac{dx_1}{dN} = -\frac{x_3x_5}{m} - x_3x_5 - 2x_1x_5 + 2x_1, \quad (3.59)$$

$$\frac{dx_2}{dN} = \frac{x_3x_5}{m} - 2x_2x_5 + 2x_2, \quad (3.60)$$

$$\frac{dx_3}{dN} = -x_3 + 2x_5 - x_3x_5 + 1 - 3x_1 - 3x_2 + x_4, \quad (3.61)$$

$$\frac{dx_4}{dN} = -2x_4 - 2x_4x_5, \quad (3.62)$$

$$\frac{dx_5}{dN} = -\frac{x_3x_5^2}{x_1m} - 4x_5^2 + 4x_5, \quad (3.63)$$

onde

$$m = \frac{\mathcal{G}f_{\mathcal{G}\mathcal{G}}}{f_{\mathcal{G}}}, \quad (3.64)$$

$$r = -\frac{\mathcal{G}f_{\mathcal{G}}}{f} = \frac{x_1}{x_2}. \quad (3.65)$$

Para tornar o sistema (3.59)-(3.63) autônomo, podemos expressar \mathcal{G} em função de x_1/x_2 a partir da Eq. (3.65), desde que a forma de $f(\mathcal{G})$ seja dada. Por exemplo, para o modelo $f(\mathcal{G}) = \alpha(G^p - \beta)^q$, existe a linha $m(r) = (1 - q)r/q + p - 1$ no plano $m-r$. Recordando a análise de sistemas dinâmicos para modelos $f(R)$, percebemos que existe uma função similar $m(r)$, a partir da qual pode ser examinada a viabilidade desses modelos de gravidade de acordo com o comportamento da curva $m(r)$ no plano $m-r$. Dada a forma de $f(\mathcal{G})$, é possível ainda expressar \mathcal{G} e H em termos de x_2 e x_5 , tal que, substituindo esse resultado na Eq. (3.59), x_1 pode ser escrito em função de x_2 e x_5 e, portanto, este se torna uma variável independente que pode ser eliminada do sistema. Todavia, nem toda forma de $f(\mathcal{G})$ vai permitir que x_1 seja eliminado facilmente.

Portanto, é mais eficiente resolver o sistema em 5 dimensões (3.59)-(3.63) de maneira analítica e/ou numérica.

3.3.2. Dinâmica cosmológica

Para estudar as propriedades globais da dinâmica dos modelos $f(\mathcal{G})$ vamos analisar os pontos críticos associados ao sistema dinâmico de primeira ordem descrito pelas Eqs. (3.59-3.63). Neste caso, devemos fazer o lado direito das Eqs. (3.59-3.63) iguais a zero. Ao fazer isso surge uma nova característica. Ao invés de pontos críticos aparecem linhas de pontos críticos (variedades de equilíbrio), denominadas linhas críticas:

$$\begin{aligned}
 L_1 & : \{x_1 = 1 - x_2, x_2 = x_2, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1\}, \\
 & \quad \Omega_m = 0, \quad \Omega_r = 0, \quad \Omega_{DE} = 1, \quad \omega_{DE} = -1, \quad \omega_{eff} = -1, \\
 L_2 & : \{x_1 = \frac{1}{6}x_3, x_2 = -\frac{1}{3}x_3, x_3 = x_3, x_4 = 0, x_5 = -\frac{1}{2}, m = -\frac{1}{2}\}, \\
 & \quad \Omega_m = 1 - \frac{5}{6}x_3, \quad \Omega_r = 0, \quad \Omega_{DE} = \frac{5}{6}x_3, \quad \omega_{DE} = 0, \quad \omega_{eff} = 0, \\
 L_3 & : \{x_1 = \frac{x_5}{x_5 - 2}, x_2 = -\frac{2x_5}{x_5 - 2}, x_3 = \frac{2(x_5 - 1)}{x_5 - 2}, x_4 = 0, x_5 = x_5, m = -\frac{1}{2}\}, \\
 & \quad \Omega_m = 0, \quad \Omega_r = 0, \quad \Omega_{DE} = 1, \quad \omega_{DE} = -\frac{2}{3}x_5 - \frac{1}{3}, \quad \omega_{eff} = -\frac{2}{3}x_5 - \frac{1}{3}, \\
 L_4 & : \{x_1 = \frac{1}{4}x_3, x_2 = -\frac{1}{2}x_3, x_3 = x_3, x_4 = 1 - \frac{3}{4}x_3, x_5 = -1, m = -\frac{1}{2}\}, \\
 & \quad \Omega_m = 0, \quad \Omega_r = 1 - \frac{3}{4}x_3, \quad \Omega_{DE} = \frac{3}{4}x_3, \quad \omega_{DE} = \frac{1}{3}, \quad \omega_{eff} = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

As linhas críticas são caracterizadas por retas no espaço de fase, por exemplo, $x_1 = 1 - x_2$ para L_1 . Note que as linhas L_1 , L_2 e L_4 tem diferentes valores de x_5 , que são 1, $-1/2$ e -1 , respectivamente e, portanto, não se intersectam. Por outro lado, L_3 intersecta L_1 em $(-1, 2, 0, 0, 1)$, com L_2 em $(1/5, -2/5, 6/5, 0, -1/2)$ e com L_4 em $(1/3, -2/3, 4/3, 0, -1)$.

Geralmente, as linhas críticas surgem quando em um sistema não linear a matriz Jacobiano do sistema linearizado produz pelo menos um autovalor zero. O aparecimento de variedades de equilíbrio pode estar associado também ao fato do sistema não linear possuir alguma simetria ou poder ter sua dimensionalidade reduzida. A estabilidade de um ponto crítico, nesses casos, é determinada pelos autovalores não nulos. A justificativa para tal é que ao longo das linhas críticas praticamente não existe dinâmica (ou seja, a estabilidade não muda ao longo da direção do autovetor associado ao autovalor nulo), tal que a dinâmica próxima ao ponto crítico pode ser vista como a estabilidade do espaço de fase reduzido, que é obtido a partir da supressão da direção do autovalor zero. A exceção ocorre quando a estabilidade do ponto crítico muda ao longo da linha crítica. Neste caso, o sistema é considerado como uma bifurcação sem parâmetros (veja Fiedler et al., 2000; Liebscher, 2010, para maiores detalhes).

Note que $m = -1/2$ é a condição de existência das linhas L_2 , L_3 e L_4 . Além disso, para L_2 , L_3

e L_4 , é válida a condição $r = x_1/x_2 = -1/2$. Portanto, para estas linhas críticas temos a seguinte relação sendo satisfeita

$$m\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}. \quad (3.66)$$

Isso significa que as linhas L_2 , L_3 e L_4 estão no ponto $(-1/2, -1/2)$ no plano $m-r$. Percebe-se também que L_2 e L_4 correspondem a soluções nas quais a energia escura escala com matéria e radiação, respectivamente. Logo, são soluções que podem representar as épocas de matéria e radiação padrão, desde que a condição (3.66) seja satisfeita.

Para a análise de estabilidade, vamos nomear um ponto arbitrário em uma linha crítica como, por exemplo, P_1 para L_1 .

- $P_1: (1 - x_{20}, x_{20}, 0, 0, 1)$, ponto de de-Sitter

Este ponto é caracterizado como ponto de deSitter, pois $\Omega_m = 0$, $\Omega_r = 0$, $\Omega_{DE} = 1$ e $\omega_{eff} = -1$, válido para qualquer ponto ao longo da linha L_1 , ou seja, para qualquer valor de x_{20} (um valor de x_2). Os autovalores associados a este ponto são:

$$0, \quad -4, \quad -3, \quad -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{25 + \frac{8}{(x_{20} - 1)m_1}}, \quad (3.67)$$

onde $m_1 = m(r_1 = (1 - x_{20})/x_{20})$. Para este ponto ser uma espiral estável no sub-espço dos dois últimos autovalores, devemos ter:

$$0 < m_1 < \frac{8}{25(1 - x_{20})} \quad (x_{20} < 1) \quad \text{ou} \quad \frac{8}{25(1 - x_{20})} < m_1 < 0 \quad (x_{20} > 1), \quad (3.68)$$

e para ser um nó estável:

$$\frac{8}{25(1 - x_{20})} < m_1 < \frac{1}{2(1 - x_{20})} \quad (x_{20} < 1) \quad (3.69)$$

ou

$$\frac{1}{2(1 - x_{20})} < m_1 < \frac{8}{25(1 - x_{20})} \quad (x_{20} > 1), \quad (3.70)$$

sendo um ponto instável, caso contrário. Um caso interessante é que a condição de espiral estável (3.68) é limitada pela curva $m_{ds}(r) = (r+1)/2r$, que contém o ponto $(-1/2, -1/2)$. Portanto, a área estável de L_1 está conectada com L_2 , L_3 e L_4 no plano $m-r$, como visto na Fig. (3.3).

- $P_2: (\frac{1}{6}x_{30}, -\frac{1}{3}x_{30}, x_{30}, 0, -\frac{1}{2})$,

Observe que a energia escura escala com a matéria ($\Omega_m/\Omega_{DE} = (6 - 5x_{30})/5x_{30}$) e não há

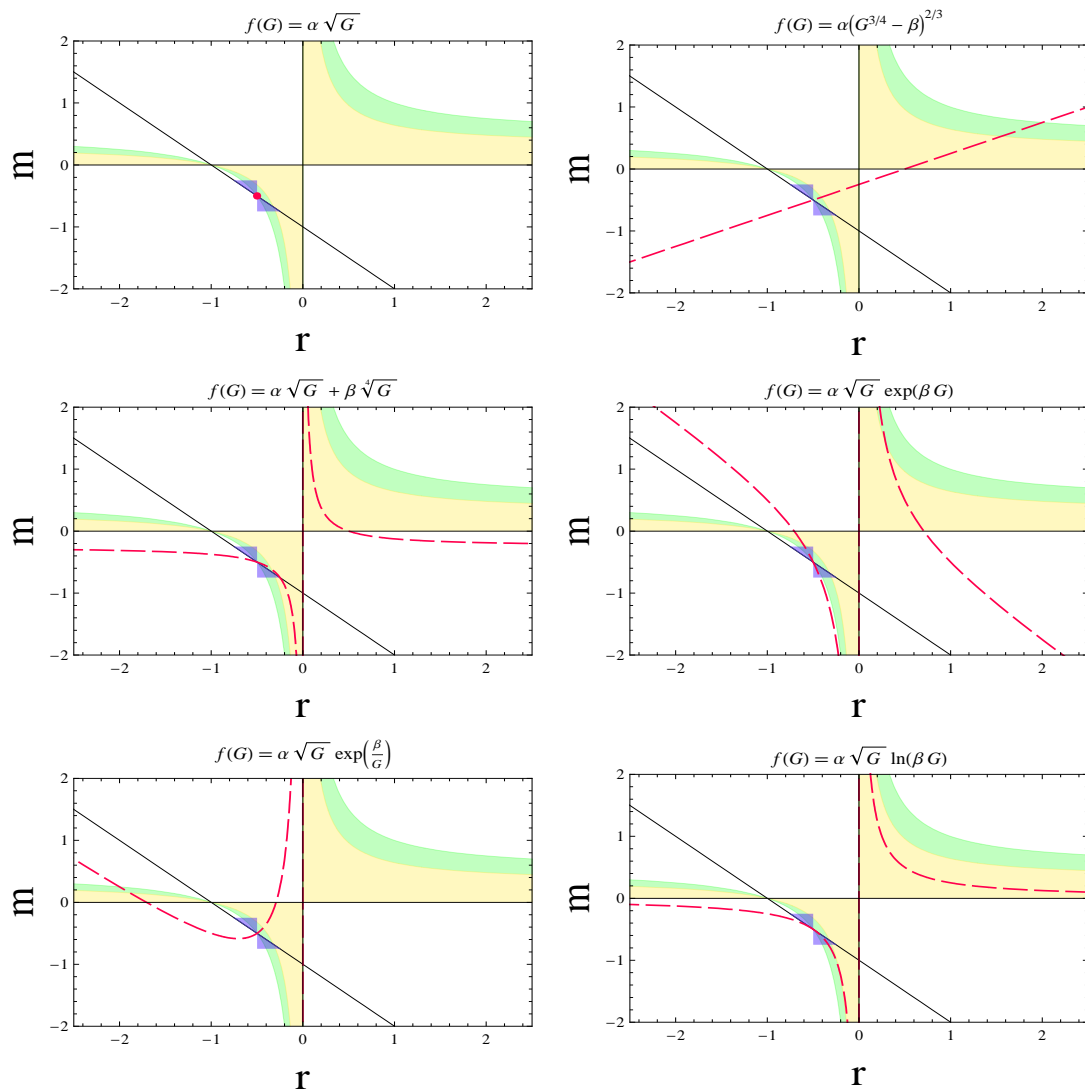


Figura 3.3.: As curvas $m(r)$ (linhas vermelhas tracejadas) para vários modelos $f(\mathcal{G})$. Uma vez que esses modelos $f(\mathcal{G})$ envolvem funções tais como $\sqrt{\mathcal{G}}$, $\mathcal{G}^{1/4}$ ou $\ln(\beta \mathcal{G})$, \mathcal{G} em $f(\mathcal{G})$ pode ser entendido como $|\mathcal{G}|$. Note que, o ponto de matéria (radiação) P_2 (P_4) e o ponto do tipo-phantom P_3 estão localizados em $(-1/2, -1/2)$. Para se ter uma era dominada pela matéria, a curva deve passar através do ponto $(-1/2, -1/2)$, enquanto não acessando o ponto a partir das direções proibidas (triângulos em azul claro). As áreas em verde claro e amarelo claro são o nó potencialmente estável e regiões em espiral estáveis do ponto de Sitter P_1 , respectivamente. Evoluindo ao longo da curva $m(r)$, o sistema tipicamente não pode passar por nenhum ponto de intersecção com o eixo m ($r = 0$) e a linha reta particular $m_c(r) = -r - 1$ (linha sólida preta). Todavia, o sistema pode evoluir através dos infinitos pontos da curva $m(r)$. Figura retirada de Zhou et al. (2009).

radiação ($x_4 = 0$). Os autovalores associados ao sistema linearizado são:

$$0, \quad -1, \quad 3(m'(-\frac{1}{2}) + 1), \quad -\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4} \sqrt{\frac{96 - 71x_{30}}{x_{30}}}, \quad (3.71)$$

onde $m'(-1/2) = dm(r)/dr|_{r=-1/2}$. Este ponto é um caso em que a estabilidade muda ao longo da linha crítica, fato conhecido como ponto de bifurcação. Se tomarmos os dois últimos autovalores, a estabilidade muda nos pontos $x_{30} = 0$ ou $x_{30} = 96/71$: quando $x_{30} < 0$ ou $x_{30} > 96/71$ o ponto é estável, sendo instável para os outros casos.

Para P_2 representar um ponto de matéria padrão ($\Omega_m \simeq 1$), x_{30} precisa ser próximo de 0, mas nesse caso temos um problema de divergência nos dois últimos autovalores. Se $x_{30} \rightarrow 0$ (pela direita), estes autovalores divergem em $-\infty$ e $+\infty$. Contudo, se x_{30} é um valor positivo muito pequeno (mas não infinitesimal), os dois autovalores são grandes e finitos com sinais opostos. A consequência disso é que se o sistema evolui na direção desses pontos, ele não permanece tempo suficiente para que a era da matéria forme as estruturas observadas hoje, e portanto, é inaceitável. Por outro lado, se $x_{30} \rightarrow 0$ (pela esquerda), os dois últimos autovalores são complexos com a parte real negativa, o que significa que os autovalores são estáveis. Todavia, a parte imaginária diverge e então o sistema oscila rapidamente no subespaço associado. Para o sistema deixar o ponto da era da matéria padrão e entrar em um ponto acelerado, devemos garantir que $3(m'(-1/2) + 1) > 0$ para que o ponto seja instável. Isso corresponde a

$$m'(-\frac{1}{2}) > -1. \quad (3.72)$$

O resultado disso são direções proibidas no plano $m - r$, como mostra a Fig. 3.3.

- $P_3: (\frac{x_{50}}{x_{50}-2}, -\frac{2x_{50}}{x_{50}-2}, \frac{2(x_{50}-1)}{x_{50}-2}, 0, x_{50})$, ponto dominado por energia escura

Note que este ponto não possui matéria nem radiação, logo, é dominado por energia escura. Ele pode representar radiação quando $x_{50} = -1$ e matéria quando $x_{50} = -1/2$; pode ser um ponto de quintessência ($-1 < \omega_{DE} < -1/3$) se $0 < x_{50} < 1$ e um ponto do tipo *phantom* ($\omega_{DE} < -1$) se $x_{50} > 1$. Os autovalores do sistema linearizado são:

$$0, \quad -2x_{50} - 1, \quad -x_{50} - 2, \quad -2x_{50} - 2, \quad -2(x_{50} - 1)(m'(-\frac{1}{2}) + 1). \quad (3.73)$$

Será um ponto estável quando uma das seguintes condições for satisfeita

$$-\frac{1}{2} < x_{50} < 1 \quad \text{e} \quad m'(-\frac{1}{2}) < -1, \quad (3.74)$$

ou

$$x_{50} > 1 \quad \text{e} \quad m'(-\frac{1}{2}) > -1. \quad (3.75)$$

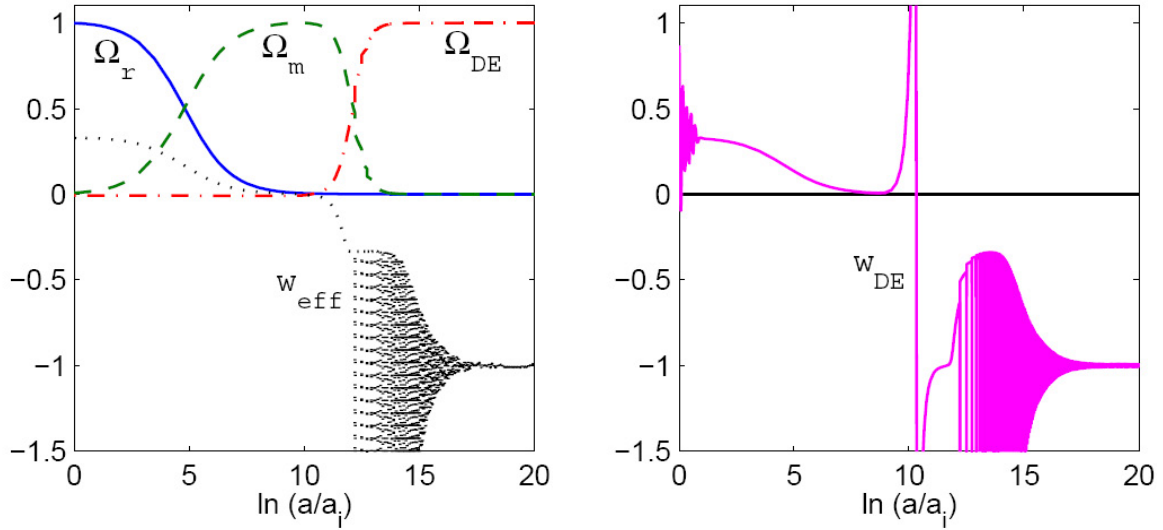


Figura 3.4.: Evolução cósmica para o caso $f(G) = \alpha(G^{\frac{3}{4}} - \beta)^{\frac{2}{3}}$. Quando o sistema oscila para o ponto de de-Sitter, w_{DE} assim como w_{eff} vão abaixo da divisão $w = -1$. Figura retirada de Zhou et al. (2009).

A condição (3.75) é consistente com a condição (3.72). Logo, se quisermos uma direção instável para o sistema deixar o ponto de matéria padrão P_2 , P_3 pode ser um ponto do tipo *phantom* co-existindo com o ponto estável de de Sitter P_1 . Para qual ponto o universo vai evoluir dependerá das condições iniciais.

- $P_4: \left(\frac{1}{4}x_{30}, -\frac{1}{2}x_{30}, x_{30}, 1 - \frac{3}{4}x_{30}, -1\right)$

Este ponto não possui matéria e a energia escura pode simular a radiação. Os autovalores associados ao sistema linearizado são:

$$0, \quad 1, \quad 4\left(m'\left(-\frac{1}{2}\right) + 1\right), \quad -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{64 - 47x_{30}}{x_{30}}}. \quad (3.76)$$

Novamente pode ser feita uma análise de estabilidade no sub-espço dos dois últimos autovalores: para $x_{30} < 0$ ou $x_{30} > 64/47$ temos um ponto estável, e em outros casos é instável. Para que P_4 seja um ponto de radiação padrão ($\Omega_r \simeq 1$), x_{30} precisa ser próximo de 0, mas, ao mesmo tempo, $x_{30} = 0$ é uma singularidade dos dois autovalores. Como vimos, se x_{30} é um pouco maior que 0, P_2 é extremamente instável; se x_{30} é um pouco menor do que 0, P_2 é estável no sub-espço, mas o sistema oscila consideravelmente quando vai na sua direção.

À vista do que foi exposto na análise de estabilidade, uma trajetória cosmológica viável no espaço de fase deveria iniciar-se próxima ao ponto de radiação padrão P_4 (com x_{30} um pouco menor do que 0), em seguida passando próximo ao ponto de matéria P_2 (também com x_{30} um pouco menor do que 0) e evoluindo para o estágio final acelerado, seja ele o ponto de de Sitter P_1 ou o ponto do tipo *phantom* P_3 . Olhando para o plano $m - r$ essa evolução corresponde a uma trajetória que se inicia próxima ao ponto $(-1/2, -1/2)$, onde os pontos de radiação padrão

e matéria padrão estão localizados, depois afastando-se lentamente dele para algum ponto da área estável de P_1 ou voltando para P_3 , que também reside no ponto $(-1/2, -1/2)$. Dadas as condições de viabilidade, deve-se então analisar a curva $m(r)$ de um certo modelo $f(\mathcal{G})$ e então indicar sua exequibilidade (ou não).

Zhou et al. (2009) analisaram pelo menos 6 modelos $f(\mathcal{G})$ cujas curvas $m(r)$ podem ser obtidas analiticamente (ou numericamente). Para o modelo $f(\mathcal{G}) = \alpha(\mathcal{G}^p - \beta)^q$, em particular, trajetórias cosmológicamente viáveis são obtidas para o caso em que uma época de de Sitter ou uma época do tipo *phantom* é o estágio de aceleração final. As trajetórias simulam o cenário Λ CDM nas épocas dominadas por radiação e matéria, mas produzem uma assinatura distinta no estágio final. Essa assinatura é caracterizada por ω_{DE} indo para valores abaixo de $\omega = -1$ no final da época dominada pela matéria e oscilando rapidamente, também abaixo de $\omega = -1$, ao evoluir para o ponto de de Sitter P_1 . Isso pode ser visualizado na Fig. (3.4), retirada de Zhou et al. (2009).

Trabalhos mais recentes também tem explorado o espaço de fase da gravidade $f(\mathcal{G})$ sob outros pontos de vista (Carloni and Mimoso, 2017; Oikonomou, 2018). Carloni and Mimoso (2017) estudaram as condições de viabilidade de diferentes modelos $f(\mathcal{G})$ restringindo condições gerais para a forma da ação gravitacional que proporcionam comportamentos específicos como, por exemplo, o surgimento da expansão acelerada. Oikonomou (2018), por sua vez, analisou o espaço de fase da gravidade $f(\mathcal{G})$ utilizando um conjunto de variáveis adimensionais diferente daquele usado por Zhou et al. (2009). Essa escolha permitiu que ele encontrasse um único ponto de de Sitter instável, tanto na presença quanto na ausência de matéria e radiação.

3.4. Sumário

Neste capítulo, apresentamos uma breve introdução sobre a abordagem de sistemas dinâmicos, pontos fixos e teoria de estabilidade linear, assim como a aplicação dessa técnica no contexto de teorias de gravidade $f(R)$ e $f(\mathcal{G})$. A partir da análise de estabilidade, identificamos sob quais condições essas teorias são viáveis. Além das abordagens apresentadas aqui, existem na literatura diversos estudos que utilizam o método de sistemas dinâmicos para investigar uma vasta gama de modelos cosmológicos. Esses estudos conseguem boas restrições e até mesmo excluem modelos utilizando bases puramente teóricas (Bahamonde et al., 2018). Por outro lado, é possível também identificar modelos que precisam de uma análise mais detalhada através da comparação com os dados observacionais. Nesse sentido, indicamos ao leitor a referência Bahamonde et al. (2018), para uma revisão mais completa sobre a aplicação de sistemas dinâmicos em modelos cosmológicos, mais especificamente os que tentam explicar a aceleração cósmica atual. Bahamonde et al. (2018) abordaram desde modelos de campo escalar canônicos e não-canônicos, modelos de interação de energia escura e modelos de gravidade modificada. Além disso, alguns modelos são selecionados e discutidos com maior riqueza de detalhes e interpretados no contexto da evolução cosmológica atual.

4 Análise de sistemas dinâmicos para a cosmologia $f(R, \mathcal{G})$

Como vimos no Capítulo 2, uma das motivações iniciais para modificação da Teoria da Relatividade Geral foi explicar a aceleração cósmica sem recorrer à existência de uma componente exótica de energia escura. Além disso, estender a teoria de gravidade possibilita a inclusão de correções quânticas na TRG na forma de termos de curvatura de altas ordens. Nesse sentido, várias combinações de invariantes de curvatura tem sido examinadas na literatura como, por exemplo, $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ e $R_{\mu\nu\sigma\rho}R^{\mu\nu\sigma\rho}$ (Bamba et al., 2014; Myrzakulov et al., 2015). No caso do invariante de Kretschmann ($R_{\mu\nu\sigma\rho}R^{\mu\nu\sigma\rho}$), estudos mostram que a introdução desse termo na ação de Einstein-Hilbert leva a soluções que aumentam a anisotropia espacial (Barrow and Hervik, 2006; Toporensky and Tretyakov, 2007), fato incompatível com as observações. Por outro lado, uma vez que o invariante topológico de Gauss-Bonnet \mathcal{G} está relacionado com a formulação de teorias de gravidade com correções quânticas, considerar uma teoria que contenha tanto o escalar de Ricci quanto o termo Gauss-Bonnet, nos permitirá levar em conta todos os graus de liberdade de curvatura possíveis para estender a TRG, uma vez que o escalar de Ricci e ambos os tensores de Ricci e Riemann estão presentes na definição de \mathcal{G} .

Sabemos também que um dos principais problemas ao estudar teorias de gravidade de altas ordens é a dificuldade extrema de encontrar soluções exatas devido à alta não-linearidade exibida por essas teorias. Este fato torna difícil obter soluções analíticas e/ou numéricas que possam ser comparadas com as observações. Dada esta condição, uma série recente de estudos tem aderido à abordagem de sistemas dinâmicos, como mostrado no Capítulo 3 e nas referências Amendola et al. (2007a) e Carloni et al. (2005, 2009) para teorias $f(R)$ e em Nojiri and Odintsov (2005b); Cognola et al. (2006); Li et al. (2007b); De Felice and Tsujikawa (2009a); Zhou et al. (2009) para teorias $f(\mathcal{G})$. Essa metodologia relativamente simples possibilita a obtenção de soluções numéricas e, mais importante, obtém uma descrição qualitativa da dinâmica global desses modelos.

Devemos enfatizar, contudo, que na literatura existem trabalhos que estudaram soluções cos-

mológicas que podem reproduzir um cenário Λ CDM e/ou um comportamento de quintessência para a gravidade de Gauss-Bonnet, considerando escolhas explícitas das funções $f(\mathcal{G})$, $f(R, \mathcal{G})$ ou um campo escalar acoplado com a gravidade (Nojiri et al., 2005; Elizalde et al., 2010). Além disso, uma abordagem diferente de sistemas dinâmicos tem sido utilizada para estudar as condições de estabilidade para diferentes evoluções cosmológicas em universos FLRW, tais como uma época inflacionária e uma época de aceleração tardia como descritas pelo modelo Λ CDM (de la Cruz-Dombriz and Saez-Gomez, 2012). Por fim, tão importante quanto as condições de estabilidade, foi verificado que a gravidade de Gauss-Bonnet pode produzir um modo fantasma (Calcagni et al., 2006) em um universo vazio e anisotrópico, o chamado *background* do tipo Kasner (De Felice and Tanaka, 2010). Todavia, esse problema pode ser aliviado no limite FLRW, principalmente se uma teoria efetiva descrevendo um pequeno desvio do universo FLRW e/ou modificações da gravidade se anulam em tempos primordiais (De Felice and Tanaka, 2010).

Neste capítulo, vamos aplicar o método de sistemas dinâmicos, descrito no capítulo anterior, para estudar a viabilidade de teorias de gravidade $f(R, \mathcal{G})$. Este tipo de teoria tem sido bastante estudada, inspirada principalmente na teoria de cordas*. O estudo de soluções cosmológicas da ação efetiva de supercordas corrigida em um *loop* prediz, por exemplo, que o termo de Gauss-Bonnet, quando acoplado com campos escalares, produz uma cosmologia sem singularidade inicial (Antoniadis et al., 1994) (veja ainda Nojiri et al., 2006, e referências lá citadas). Além disso, o invariante topológico de Gauss-Bonnet pode resolver deficiências da gravidade $f(R)$ e contribuir para a expansão acelerada (De Felice and Suyama, 2009b; Myrzakulov et al., 2011; Capozziello et al., 2014b; De Laurentis and Lopez-Revelles, 2014a; De Laurentis, 2015b; De Laurentis et al., 2015). O método consiste em formular as equações de evolução como um sistema autônomo de equações diferenciais ordinárias, utilizando para tal um conjunto de variáveis adequado. Escolhemos empregar esse formalismo a uma classe particular de modelos para analisar suas soluções e estabilidade correspondentes. Nas próximas seções, apresentamos as equações básicas da gravidade $f(R, \mathcal{G})$, definimos o conjunto de variáveis para montar o sistema de equações e analisamos os pontos fixos e estabilidade das soluções. Os resultados apresentados a seguir estão contidos na referência Santos Da Costa et al. (2018).

4.1. Equações básicas

Uma ação mais geral incluindo o escalar de Ricci e o invariante de Gauss-Bonnet pode ser escrita como (De Laurentis, 2015b)

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int dx^4 \sqrt{-g} [f(R, \mathcal{G}) + \mathcal{L}_m], \quad (4.1)$$

* Onde o termo de Gauss-Bonnet é utilizado, por exemplo, como propagador para calcular os coeficientes que parametrizam as correções em dois *loops* na ação efetiva de cordas (Metsaev and Tseytlin, 1987; Gasperini et al., 1997).

onde o invariante de Gauss-Bonnet é dado por

$$\mathcal{G} \equiv R^2 - 4R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta\rho\sigma}R^{\alpha\beta\rho\sigma}, \quad (4.2)$$

com $\kappa^2 = 8\pi G$, sendo G a constante de Newton e \mathcal{L}_m a densidade lagrangiana de matéria padrão (usamos unidades físicas tal que $c = k_B = \hbar = 1$).

No que se segue, estudaremos a dinâmica cosmológica de um cenário derivado da ação (4.1) a partir do formalismo métrico. Assim, a variação da ação (4.1) com respeito ao tensor métrico $g_{\mu\nu}$ produz as seguintes equações de campo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa^2 T_{\mu\nu}^m + T_{\mu\nu}^{GB}, \quad (4.3)$$

onde o tensor energia-momento é definido da maneira usual

$$T_{\mu\nu}^m = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (4.4)$$

e o tensor de Gauss-Bonnet é dado por

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{GB} &= \nabla_\mu \nabla_\nu f_R - g_{\mu\nu} \square f_R + 2R \nabla_\mu \nabla_\nu f_{\mathcal{G}} - 2g_{\mu\nu} R \square f_{\mathcal{G}} - 4R_\mu^\lambda \nabla_\lambda \nabla_\nu f_{\mathcal{G}} - 4R_\nu^\lambda \nabla_\lambda \nabla_\mu f_{\mathcal{G}} \\ &+ 4R_{\mu\nu} \square f_{\mathcal{G}} + 4g_{\mu\nu} R^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta f_{\mathcal{G}} + 4R_{\mu\nu\alpha\beta} \nabla^\alpha \nabla^\beta f_{\mathcal{G}} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} (R f_R + \mathcal{G} f_{\mathcal{G}} - f) \\ &+ (1 - f_R) \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} R \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Note que \square é o operador de d'Alembert no espaço-tempo curvo e daqui em diante usaremos as notações

$$f_R \equiv \frac{\partial f(R, \mathcal{G})}{\partial R} \quad \text{e} \quad f_{\mathcal{G}} \equiv \frac{\partial f(R, \mathcal{G})}{\partial \mathcal{G}}, \quad (4.6)$$

para as derivadas parciais com respeito a R e \mathcal{G} .

Considerando a métrica FLRW plana ($k = 0$), o escalar de Ricci e o invariante de Gauss-Bonnet podem ser escritos como

$$R = 6(2H^2 + \dot{H}), \quad (4.7)$$

$$\mathcal{G} = 24H^2(H^2 + \dot{H}), \quad (4.8)$$

onde os pontos significam derivadas com relação ao tempo. Além disso, as equações da dinâmica obtidas a partir da Eq. (4.3), utilizando a métrica FLRW, são dadas por:

$$3f_R H^2 = \kappa^2(\rho_m + \rho_r) + \frac{1}{2}(f_R R - f - 6H\dot{f}_R + \mathcal{G}f_{\mathcal{G}} - 24H^3\dot{f}_{\mathcal{G}}), \quad (4.9)$$

e

$$2f_R\dot{H} = -\kappa^2\left(\rho_m + \frac{4}{3}\rho_r\right) + H\dot{f}_R - \ddot{f}_R + 4H^3\dot{f}_G - 8H\dot{H}\dot{f}_G - 4H^2\ddot{f}_G, \quad (4.10)$$

com as densidades de matéria e radiação, ρ_m e ρ_r , respectivamente, satisfazendo as equações de continuidade usuais

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = 0, \quad e \quad \dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0. \quad (4.11)$$

Podemos reescrever as Eqs. (4.9) e (4.10) como

$$3f_R H^2 = \kappa^2(\rho_m + \rho_{rad} + \rho_{GB}), \quad (4.12)$$

$$2f_R\dot{H} = -\kappa^2\left(\rho_m + \frac{4}{3}\rho_{rad} + \rho_{GB} + p_{GB}\right), \quad (4.13)$$

para que tenhamos as seguintes identidades

$$\kappa^2\rho_{GB} = \frac{1}{2}(f_R R - f - 6H\dot{f}_R + \mathcal{G}f_G - 24H^3\dot{f}_G), \quad (4.14)$$

$$-\kappa^2(\rho_{GB} + p_{GB}) = H\dot{f}_R - \ddot{f}_R + 4H^3\dot{f}_G - 8H\dot{H}\dot{f}_G - 4H^2\ddot{f}_G. \quad (4.15)$$

As densidade de energia ρ_{GB} e de pressão p_{GB} de uma componente geométrica de energia escura definidas dessa forma, satisfazem a equação de conservação

$$\dot{\rho}_{GB} = -3H(\rho_{GB} + p_{GB}). \quad (4.16)$$

Portanto, o parâmetro da equação de estado, $w_{GB} \equiv p_{GB}/\rho_{GB}$, é escrito como

$$\omega_{GB} = -1 - \frac{H\dot{f}_R - \ddot{f}_R + 4H^3\dot{f}_G - 8H\dot{H}\dot{f}_G - 4H^2\ddot{f}_G}{\frac{1}{2}(f_R R - f - 6H\dot{f}_R + \mathcal{G}f_G - 24H^3\dot{f}_G)}. \quad (4.17)$$

Podemos definir ainda um parâmetro da equação de estado efetivo como

$$\omega_{eff} = -1 - \frac{2\dot{H}}{3H^2}. \quad (4.18)$$

Na próxima seção, usaremos as equações (4.9) e (4.10) para configurar a análise do sistema dinâmico.

4.2. Sistema dinâmico para a gravidade $f(R, \mathcal{G})$

O primeiro passo para encontrar as condições sob as quais uma teoria $f(R, \mathcal{G})$ consegue reproduzir bem as eras cosmológicas e explicar a recente aceleração do universo, utilizando apenas modificações na geometria do espaço-tempo, é a análise da estabilidade das soluções de siste-

mas dinâmicos. Isto porque soluções exatas de um sistema não-linear de equações diferenciais de quarta ordem (como as Eqs. (4.9) e (4.10)) são difíceis de serem obtidas.

A seguir, aplicaremos a abordagem de sistemas dinâmicos desenvolvida por [Carloni et al. \(2005\)](#), [Amendola et al. \(2007a\)](#), [Ivanov and Toporensky \(2012\)](#) e [Carloni et al. \(2015\)](#), detalhada no Capítulo 3, para a cosmologia da gravidade de quarta ordem $f(R, \mathcal{G})$. A fim de discutir a dinâmica cosmológica desta teoria, seguiremos dois passos: (i) introduziremos variáveis adimensionais convenientes e (ii) deduziremos as equações de evolução dessas variáveis, de tal forma que os pontos fixos deste sistema de equações representam alguns regimes assintóticos na evolução do Universo.

A partir da equação (4.9) podemos deduzir a seguinte expressão adimensional:

$$1 = \frac{\kappa^2(\rho_m + \rho_r)}{3f_R H^2} + \frac{R}{6H^2} - \frac{f}{6f_R H^2} - \frac{\dot{f}_R}{f_R H} + \frac{Gf_G}{6f_R H^2} - \frac{4H\dot{f}_G}{f_R}. \quad (4.19)$$

Definindo as variáveis:

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv \frac{\dot{f}_R}{f_R H}, \\ x_2 &\equiv \frac{f}{6f_R H^2}, \\ x_3 &\equiv \frac{R}{6H^2}, \\ x_4 &\equiv \frac{\kappa^2 \rho_r}{3f_R H^2}, \\ x_5 &\equiv \frac{Gf_G}{6f_R H^2}, \\ x_6 &\equiv \frac{4H\dot{f}_G}{f_R}, \\ x_7 &\equiv \frac{\kappa^2 \rho_m}{3f_R H^2}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

a partir da Eq. (4.19), obtemos a seguinte identidade algébrica:

$$1 = -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 + x_7, \quad (4.21)$$

juntamente com os parâmetros de densidade

$$\Omega_m \equiv x_7, \quad (4.22)$$

$$\Omega_r \equiv x_4 \quad (4.23)$$

$$\Omega_{GB} \equiv -x_1 - x_2 + x_3 + x_5 - x_6 \quad (4.24)$$

Introduzimos também uma variável de tempo adimensional, isto é, o tempo logarítmico $N = \ln a(t)$. Assim, tomando as derivadas dessas variáveis com relação a N , obtemos o seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dN} &= \frac{\ddot{f}_R}{f_R H^2} - x_1^2 - x_1 \frac{\dot{H}}{H^2}, \\
\frac{dx_2}{dN} &= \frac{\dot{f}}{6f_R H^3} - x_1 x_2 - 2x_2 \frac{\dot{H}}{H^2}, \\
\frac{dx_3}{dN} &= \frac{\dot{R}}{6H^3} - 2x_3 \frac{\dot{H}}{H^2}, \\
\frac{dx_4}{dN} &= -2x_3 x_4 - x_1 x_4, \\
\frac{dx_5}{dN} &= \frac{\dot{\mathcal{G}}}{\mathcal{G}H} x_5 + \frac{\mathcal{G}}{24H^4} x_6 - x_1 x_5 - 2x_5(x_3 - 2), \\
\frac{dx_6}{dN} &= x_6 \frac{\dot{H}}{H^2} + 4 \frac{\ddot{f}_{\mathcal{G}}}{f_R} - x_1 x_6, \\
\frac{dx_7}{dN} &= -3x_7 - x_1 x_7 - 2x_7 \frac{\dot{H}}{H^2}.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

A fim de completar o sistema, devemos ter todos os termos no lado direito das equações acima expressos em termos das variáveis especificadas nas Eqs. (4.21). Dessa forma, com ajuda das Eqs. (4.7), (4.8) e (4.10) encontramos que:

$$\frac{\dot{H}}{H^2} = x_3 - 2, \tag{4.26}$$

$$\frac{\dot{f}}{6f_R H^3} = -\frac{x_1 x_3}{b}, \tag{4.27}$$

$$\frac{\dot{R}}{6H^3} = \frac{x_1 x_3}{b}, \tag{4.28}$$

$$\frac{\mathcal{G}}{24H^4} = x_3 - 1, \tag{4.29}$$

$$\frac{\dot{\mathcal{G}}}{\mathcal{G}H} = \frac{1}{(x_3 - 1)} \left[\frac{x_1 x_3}{b} + 2(x_3 - 2)^2 \right], \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned}
\frac{4\ddot{f}_{\mathcal{G}}}{f_R} &= -3x_7 - 4x_4 + x_1 + 2\frac{x_1 x_3}{b} + x_6(5 - 2x_3) - 2(x_3 - 2) \\
&\quad + \frac{x_5}{x_3 - 1} \left[2(x_3 - 2)^2 + \frac{x_1 x_3}{b} \right] - \frac{\ddot{f}_R}{f_R H^2},
\end{aligned} \tag{4.31}$$

e o sistema torna-se:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dN} &= \Gamma - x_1^2 - x_1(x_3 - 2), \\
\frac{dx_2}{dN} &= -\frac{x_1 x_3}{b} - x_2(2x_3 - 4 + x_1), \\
\frac{dx_3}{dN} &= \frac{x_1 x_3}{b} - 2x_3(x_3 - 2), \\
\frac{dx_4}{dN} &= -2x_3 x_4 - x_1 x_4,
\end{aligned} \tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}\frac{dx_5}{dN} &= \frac{x_5}{(x_3 - 1)} \left[\frac{x_1 x_3}{b} + 2(x_3 - 2)^2 \right] + x_6(x_3 - 1) - x_1 x_5 - 2x_5(x_3 - 2), \\ \frac{dx_6}{dN} &= -x_6(x_1 + x_3 - 3) - 3x_7 - 4x_4 - 2(x_3 - 2) + x_1 + 2\frac{x_1 x_3}{b} + \frac{x_5}{x_3 - 1} \left[2(x_3 - 2)^2 + \frac{x_1 x_3}{b} \right] - \Gamma, \\ \frac{dx_7}{dN} &= -x_7(2x_3 + x_1 - 1),\end{aligned}$$

onde

$$b \equiv \frac{d \ln f_R}{d \ln R} = \frac{R f_{RR}}{f_R} \quad \text{e} \quad r \equiv -\frac{d \ln f}{d \ln R} = -\frac{R f_R}{f}. \quad (4.33)$$

Este conjunto de equações descreve a evolução cosmológica geral de uma teoria de gravidade $f(R, \mathcal{G})$, onde o fator $\Gamma \equiv \frac{\ddot{f}_R}{f_R H^2}$ especifica a teoria.

Podemos definir ainda as seguintes expressões:

$$\omega_{eff} = -\frac{1}{3}(2x_3 - 1), \quad (4.34)$$

$$\omega_{GB} = -1 - \frac{1}{3} \left\{ \frac{3x_7 + 4x_4 + 2(x_3 - 2) - 2\frac{x_1 x_3}{b} - \frac{x_5}{(x_3 - 1)} \left[2(x_3 - 2)^2 + \frac{x_1 x_3}{b} \right]}{1 - x_4 - x_7} \right\}. \quad (4.35)$$

Em geral, o sistema não é passível de resolução, a menos que Γ seja escrito em termos das variáveis dinâmicas (4.21). Na próxima seção, consideraremos um caso particular para $f(R, \mathcal{G})$ fisicamente motivado e estudaremos sua dinâmica e estabilidade em um universo FLRW plano.

4.3. $f(R, \mathcal{G})$ tipo lei de potência

Nesta seção, nos deteremos a uma classe de modelos relacionada à presença das simetrias de Noether (Capozziello et al., 2014b) e que representa um cenário inflacionário duplo (veja, por exemplo, De Laurentis et al., 2015)

$$f(R, \mathcal{G}) = \alpha R^n \mathcal{G}^m, \quad (4.36)$$

onde m, n são números reais e α é uma constante.

Nesse caso, a partir das Eqs. (4.21) e (4.33), temos que:

$$b = n - 1, \quad (4.37)$$

$$x_3 = -n x_2, \quad (4.38)$$

$$x_6 = \frac{x_5}{(x_3 - 1)} \left\{ \frac{n x_1}{b} + \frac{(m - 1)}{(x_3 - 1)} \left[2(x_3 - 2)^2 + \frac{x_1 x_3}{b} \right] \right\}. \quad (4.39)$$

Portanto, usando essas relações e a restrição (4.21), podemos eliminar as equações para x_1 , x_2 e x_6 do nosso sistema, restando um conjunto de apenas quatro equações:

$$\begin{aligned}\frac{dx_3}{dN} &= \frac{x_1 x_3}{n-1} - 2x_3(x_3 - 2), \\ \frac{dx_4}{dN} &= -2x_3 x_4 - x_1 x_4, \\ \frac{dx_5}{dN} &= \frac{x_5 m}{x_3 - 1} \left[\frac{x_1 x_3}{b} + 2(x_3 - 2)^2 \right] + \frac{x_1 x_5}{n-1} - 2x_5(x_3 - 2), \\ \frac{dx_7}{dN} &= -x_7(2x_3 + x_1 - 1),\end{aligned}\tag{4.40}$$

onde

$$x_1 = \frac{-1 + x_3 \frac{n+1}{n} + x_4 + x_7 + x_5(m-1) \left[\frac{1}{m-1} - 2 \frac{(x_3-2)^2}{(x_3-1)^2} \right]}{1 + \frac{[n(x_3-1) + (m-1)x_3] x_5}{b(x_3-1)^2}}.\tag{4.41}$$

4.3.1. Pontos fixos

Os pontos fixos podem ser obtidos fazendo as equações do sistema (4.40) iguais a zero, com $m = 1 - n$. As coordenadas dos pontos fixos x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 e x_6 são:

$$\begin{aligned}P_1 : & \left(\frac{-4n+1}{n}, \frac{-2n+2}{n^2}, \frac{2n-2}{n}, \frac{-5n^2+4n+2}{n^2}, 0, 0 \right), \quad \Omega_m = 0, \quad \omega_{eff} = -\frac{3n-4}{3n}, \\ P_2 : & \left(\frac{2n^2+2n-4}{2n^2-3n-1}, \frac{-4n^2+5n}{2n^3-3n^2-n}, \frac{4n^2-5n}{2n^2-3n-1}, 0, 0, 0 \right), \quad \Omega_m = 0, \quad \omega_{eff} = -\frac{6n^2-7n+1}{6n^2-9n-3}, \\ P_3 : & (0, 0, 0, 1, 0, 0), \quad \Omega_m = 0, \quad \omega_{eff} = \frac{1}{3}, \\ P_4 : & (1, 0, 0, 0, 0, 0), \quad \Omega_m = 2, \quad \omega_{eff} = \frac{1}{3}, \\ P_5 : & \left(-\frac{(3n-3)}{n}, \frac{3-4n}{2n^2}, \frac{4n-3}{2n}, 0, 0, 0 \right), \quad \Omega_m = \frac{-8n^2+5n+3}{2n^2}, \quad \omega_{eff} = \frac{1-n}{n}, \\ P_6 : & \left(0, -\frac{2}{n}, 2, 0, \frac{-2-n}{n}, 0 \right), \quad \Omega_m = 0, \quad \omega_{eff} = -1, \\ P_7 : & \left(-4(2n-1)(n-1), 0, 0, 0, \frac{8n^2-12+3}{8n^2-12n-1}, \frac{4n(2n-3)(8n^2-12n+3)}{8n^2-12-1} \right), \\ & \Omega_m = 0, \quad \omega_{eff} = \frac{1}{3}, \\ P_8 : & (-1, 0, 0, 0, 0, 0), \quad \Omega_m = 0, \quad \omega_{eff} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Note que, na maioria dos casos (com exceção dos pontos $P_{3,4,8}$), as coordenadas dos pontos fixos são dependentes do valor do parâmetro n . Contudo, existem valores de n para os quais os pontos fixos adquirem um caráter assintótico: $n = 0, 1, \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}, \frac{3 \pm \sqrt{11}}{4}$. O primeiro caso, $n = 0$,

corresponde a uma gravidade de Gauss-Bonnet (Li et al., 2007b) [†]. O caso $n = 1$ corresponde ao termo de Einstein, para o qual este sistema de variáveis é inútil. Finalmente, os casos onde $n = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}, \frac{3 \pm \sqrt{11}}{4}$ não são permitidos. Portanto, para nossos propósitos, esses valores de n podem ser excluídos.

Podemos ver que P_3 é um ponto que representa a época de radiação padrão e o ponto P_1 pode ser uma nova era de radiação que contém energia escura geométrica não-nula ($x_{1,2,3} \neq 0$). Devemos notar também que o parâmetro da equação de estado efetivo é muito bem restringido pela nucleossíntese para um valor próximo à $1/3$ (na época dominada pela radiação) (Amendola et al., 2007a) e, portanto, consideramos que P_1 seja uma era de radiação apenas para n próximo de 1.

Apenas os pontos P_6 e aqueles originários de $P_{2,5}$ podem ser acelerados, visto que $\omega_{eff} = -1$ ou $\omega_{eff} \propto n$, respectivamente. Os pontos P_4 e P_5 podem dar origem a uma era de matéria, pois $\Omega_m \neq 0$. Porém, o ponto P_4 é caracterizado por $\omega_{eff} = 1/3$, o qual pode ser descartado como sendo uma era da matéria padrão, uma vez que isso produz um comportamento do fator de escala do tipo $a \propto t^{1/2}$ (Amendola et al., 2007a). Por outro lado, as soluções que podem originar uma era da matéria padrão, ou seja $\omega_{eff} = 0$ ($a \propto t^{2/3}$), existem apenas para $n = \frac{1}{6}$ (P_2) ou $n = 1$ (P_5). Todavia, o caso do ponto fixo P_2 corresponde a $\Omega_m = 0$, logo esse ponto não promove uma era da matéria dominada por um fluido não-relativístico. Dessa forma, resta apenas o ponto P_5 como possível correspondente à era da matéria, mas exclusivamente para n próximo de 1.

Além disso, o ponto fixo P_2 tem um parâmetro da equação de estado efetivo, cujo valor depende de n . Assim, podemos ver que a condição para aceleração ($\omega_{eff} < -1/3$) é válida quando $n < \frac{1}{4}(3 - \sqrt{17})$ e $n > \frac{1}{4}(3 + \sqrt{17})$. O comportamento de ω_{eff} como uma função de n é mostrado na Fig. 4.1.

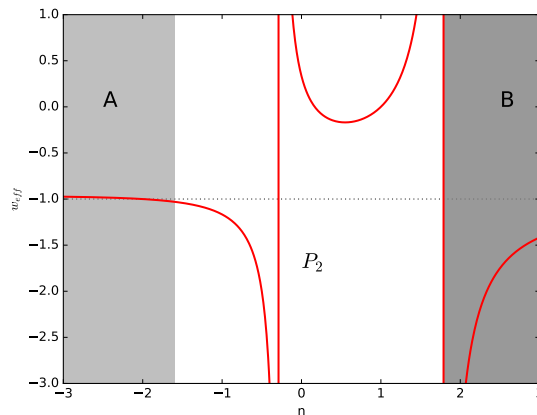


Figura 4.1.: Parâmetro da equação de estado efetivo ω_{eff} para P_2 em função de n . Este ponto fixo é estável e acelerado nas regiões em cinza. Na região (A) este ponto é um pouco *phantom* com $-1.03 < \omega_{eff} < -1$ e na região (B) ele é fortemente *phantom* com $\omega_{eff} < -1.4$.

[†] Note que, neste caso, devemos considerar a ação gravitacional escrita como $S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R+f(G)}{2\kappa} + \mathcal{L}_m \right)$.

Tabela 4.1.: Autovalores associados aos pontos fixos para $f(R, \mathcal{G}) = \alpha R^n \mathcal{G}^{1-n}$.

Ponto	Autovalores
P_1	$[0, 1, -\frac{4n-4}{n}, \frac{8n^2-11n+4}{n(n-1)}]$
P_2	$[-\frac{10n^2-8n-4}{2n^2-3n-1}, -\frac{8n^2-5n-3}{2n^2-3n-1}, -\frac{2n(4n-5)}{2n^2-3n-1}, -\frac{4n^3-7n+5}{2n^3-5n^2+2n+1}]$
P_3	$[0, 1, 4, \frac{8n^2-12n+5}{n-1}]$
P_4	$[0, -1, \frac{4n-3}{n-1}, \frac{8n^2-12n+5}{n-1}]$
P_5	$[0, -1, \frac{3-n}{2n^2-n-1}, -\frac{4n-3}{n}, \frac{6n^2-8n+3}{n(n-1)}]$
P_6	$[-3, \frac{1}{n-1}, -4, -4]$
P_7	$[-8n+8, 8n^2-12n+4, 8n^2-12n+5, \frac{8n^2-12n+5}{n-1}]$
P_8	$[1, 2, \frac{4n-5}{n-1}, \frac{8n^2-12n+5}{n-1}]$

Tabela 4.2.: Estabilidade dos pontos fixos para $f(R, \mathcal{G}) = \alpha R^n \mathcal{G}^{1-n}$.

	$n < -1.59$	$-1.59 < n < \frac{1}{4}(3 - \sqrt{17})$	$\frac{1}{4}(3 - \sqrt{17}) < n < \frac{3}{4}$	$\frac{3}{4} < n < \frac{1}{5}(2 + \sqrt{14})$
P_1	Sela	Sela	Sela	Sela
P_2	Atrator	Sela	Atrator	Atrator
P_3	Sela	Sela	Sela	Sela
P_4	Sela	Sela	Sela	Atrator
P_5	Sela	Sela	Sela	Atrator
P_6	Atrator	Atrator	Atrator	Atrator
P_7	Sela	Sela	Sela	Sela
P_8	Sela	Sela	Sela	Sela
	$\frac{1}{5}(2 + \sqrt{14}) < n < \frac{5}{4}$	$\frac{5}{4} < n < \frac{1}{4}(3 + \sqrt{17})$	$n > \frac{1}{4}(3 + \sqrt{17})$	
P_1	Sela	Sela	Sela	
P_2	Sela	Sela	Atrator	
P_3	Repulsor	Repulsor	Repulsor	
P_4	Sela	Sela	Sela	
P_5	Sela	Sela	Sela	
P_6	Sela	Sela	Sela	
P_7	Sela	Sela	Sela	
P_8	Sela	Repulsor	Repulsor	

4.3.2. Estabilidade

A estabilidade dos pontos fixos pode ser encontrada utilizando técnicas bem conhecidas que envolvem a linearização das equações da dinâmica em torno dos pontos de equilíbrio e a busca pelos autovalores correspondentes à matriz de linearização (o Jacobiano). Uma vez que o Jacobiano esteja bem definido, podemos classificar os pontos fixos de acordo com o sinal da parte real dos autovalores como: nós estáveis ou atratores (todos os autovalores não nulos com parte real negativa), nós instáveis ou repulsores (todos os autovalores não nulos com parte real positiva), ou pontos de sela (alguns autovalores não nulos positivos e alguns negativos)[‡]. Os resultados estão resumidos nas tabelas (4.1) e (4.2).

O ponto fixo P_2 comporta-se como um nó estável puro para $n < -1.59$, $\frac{1}{4}(3 - \sqrt{17}) < n < \frac{1}{5}(2 + \sqrt{14})$ e $n > \frac{1}{4}(3 + \sqrt{17})$. Para todos os outros valores de n , este ponto é uma sela. Portanto,

[‡] Um autovalor com parte real nula significa que a estabilidade é indiferente ao longo de uma sub-variedade unidimensional do espaço de fase; nesta análise não consideramos tais tipos de autovalores.

o ponto P_2 é estável e acelerado apenas para $n < -1.59$ ou $n > \frac{1}{4}(3 + \sqrt{17})$. O ponto de radiação P_3 comporta-se como um nó estável puro para $n > \frac{1}{5}(2 + \sqrt{14})$. Para todos os outros valores de n , este ponto é uma sela. Embora os autovalores do novo ponto de radiação P_1 dependam do valor do parâmetro n , ele sempre tem um caráter sela-nó, qualquer que seja o valor de n . Os pontos fixos P_4 e P_5 são estáveis quando $\frac{3}{4} < n < \frac{1}{5}(2 + \sqrt{14})$ e tem caráter de sela caso contrário. O ponto fixo P_6 ou ponto de de Sitter ($\Omega_m = 0$ e $\omega_{eff} = -1$) é estável quando $n < \frac{1}{5}(2 + \sqrt{14})$, caso contrário é um ponto de sela. O ponto fixo P_7 tem o caráter de sela sempre, independente do valor do parâmetro n . Finalmente, o ponto fixo P_8 pode ser um nó instável para $n > \frac{5}{4}$ ou uma sela para todos os outros valores do parâmetro n .

Na Fig. 4.3, mostramos a evolução de várias quantidades para $n = -2$ e $n = 3.5$. Para $n = -2$, vemos nos painéis superiores apenas uma pequena elevação na densidade de matéria mas se olharmos para o comportamento do parâmetro da equação de estado efetivo veremos uma transição rápida da época da radiação para uma época acelerada. Embora tenhamos um pico na densidade de matéria para $n = 3.5$ (painéis inferiores), não é possível dizer qual componente é dominante. Devemos então observar o comportamento de ω_{eff} e perceber que uma era dominada pela matéria está praticamente ausente, uma vez que o modelo tem uma época dominada por radiação com uma rápida transição para um universo acelerado com $\omega_{eff} < -1$.

Além disso, constatamos a partir da análise de estabilidade (veja Tabela (4.2)) que, na faixa $3/4 < n < (2 + \sqrt{14})/5$, os pontos do tipo matéria P_4 e P_5 comportam-se como nós estáveis e o sistema não poderia evoluir para uma época acelerada. Isto é melhor visualizado nas Figs. (4.2) e (4.4). A primeira exibe o comportamento de Ω_m e ω_{eff} em função de n . Como vimos, a única possibilidade de P_5 representar uma era do tipo matéria ocorre quando n é próximo de 1 para que ω_{eff} seja próximo de 0. Contudo, para tal valor de n este ponto é um atrator (região (A) da Fig. (4.2)). Consequentemente, o sistema não pode evoluir para um estágio acelerado. A figura (4.4), por sua vez, mostra esse comportamento através da evolução dos parâmetros de densidade e do parâmetro da EoS efetivo para os valores de $n = 0.9$ e $n = 0.98$, respectivamente. Para $n = 0.9$ (painéis superiores) o sistema evolui para um atrator (P_4) com $\Omega_m = 2$ e $\omega_{eff} = 1/3$. Semelhantemente, quando $n = 0.98$ (painéis inferiores), o sistema evolui para o atrator P_5 , caracterizado por um universo com $\sim 10\%$ de matéria e $\sim 90\%$ de uma componente acelerada e com $\omega_{eff} \approx 0.02$.

É importante mencionar que, quando as variáveis x_5 e x_6 são nulas, o espaço de fase apresenta os mesmos pontos fixos obtidos previamente para a gravidade $f(R)$ em Amendola et al. (2007a).

4.4. Sumário

Neste capítulo, aplicamos a abordagem de sistemas dinâmicos a uma classe de teorias de gravidade $f(R, \mathcal{G}) = \alpha R^n \mathcal{G}^{1-n}$. O fato de termos focado nosso trabalho em um modelo específico fez nossa análise menos geral do que o ideal, mas nos permitiu investigar informações sobre o comportamento global dessa cosmologia. Encontramos alguns resultados importantes sobre

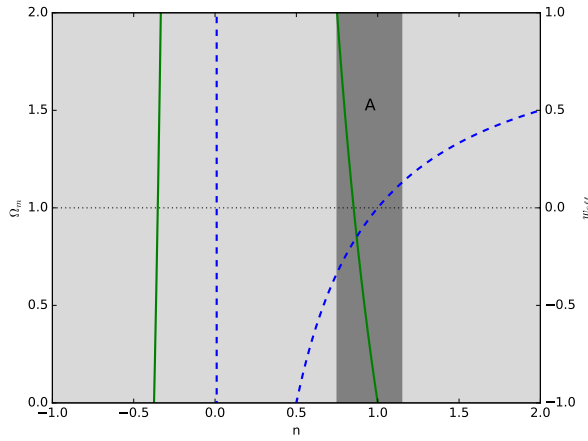


Figura 4.2.: Comportamento do parâmetro de densidade de matéria e do parâmetro da equação de estado efetivo, Ω_m (linha verde sólida) e ω_{eff} (linha azul tracejada), respectivamente, para o ponto fixo P_5 em função do parâmetro n . Este ponto é um atrator quando $3/4 < n < (2 + \sqrt{14})/5$ (região cinza escuro, A) e uma sela (regiões em cinza claro), caso contrário.

essa classe de teorias, descritos de maneira geral como:

- O modelo $f(R, \mathcal{G})$ tem uma era dominada pela radiação padrão qualquer que seja o valor do parâmetro n (P_3).
- Uma era dominada pela matéria está presente exclusivamente para $n \rightarrow 1$, o que produz ω_{eff} próximo à 0 (P_5). Contudo, a partir da análise de estabilidade percebemos que para esse valor de n este ponto comporta-se como um atrator, e consequentemente, não pode representar uma era dominada por matéria.
- Outra maneira possível de se obter um ponto do tipo matéria é para valores de $n < \frac{3}{4}$ ou $n > \frac{1}{5}(2 + \sqrt{14})$ em P_5 . Porém, como nesse caso $\omega_{eff} \neq 0$, esse ponto também não pode representar uma época dominada por matéria.
- Conseguimos dois pontos fixos que admitem uma expansão acelerada, o ponto P_6 para $n < \frac{1}{5}(2 + \sqrt{14})$ e o ponto P_2 para $n < -1.59$ e $n > \frac{1}{4}(3 + \sqrt{17})$.

Quanto à falta de uma época de dominação da matéria, [De Laurentis et al. \(2015\)](#) já haviam considerado essa classe de modelos para estudar o fator de crescimento e notaram que para valores de $n > 1$, o universo acelera para sempre sem a possibilidade de formação de estruturas. Finalmente, verificamos que essa classe particular de modelos não pode descrever uma cosmologia razoável dada por qualquer trajetória passando perto de P_3 ou P_1 (para $n \approx 1$), passando então por uma época dominada por matéria e chegando a um atrator acelerado. Entretanto, um estudo mais detalhado no contexto de teorias de gravidade $f(R, \mathcal{G})$ considerando dados observacionais será feito no próximo capítulo.

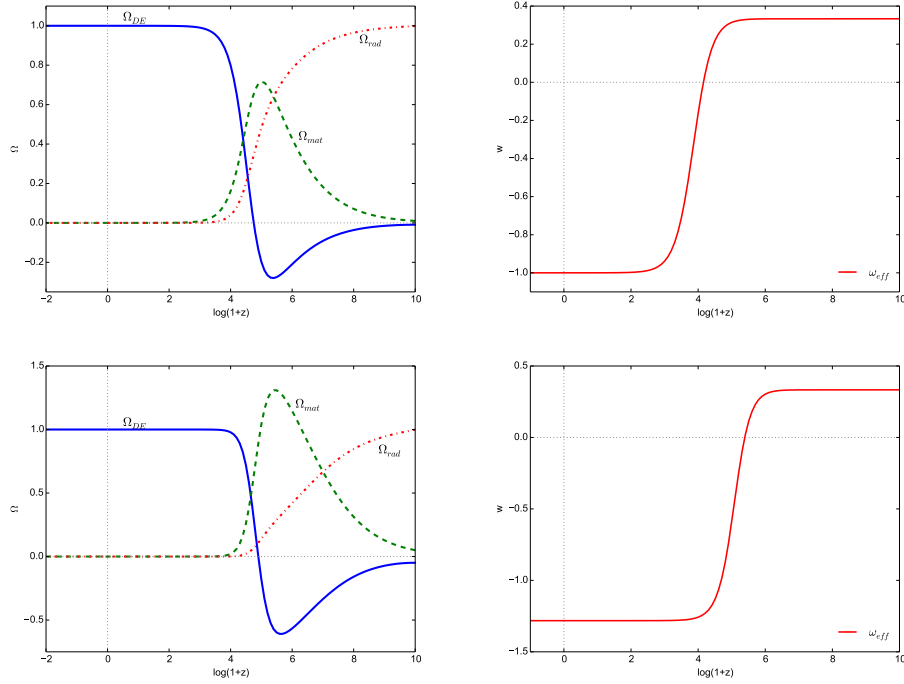


Figura 4.3.: Painéis superiores: Evolução cósmica dos parâmetros de densidade para o modelo $f(R, G) = \alpha R^n G^{1-n}$, com $n = -2$. Painéis inferiores: O mesmo que nos painéis superiores mas para $n = 3.5$. Ambos consideram as seguintes condições iniciais $x_1 = 4.9 \times 10^{-3}$, $x_2 = -10^{-8}$, $x_3 = 10^{-9}$, $x_4 = 0.999$, $x_5 = x_6 = 0$ no *redshift* $z = 2.2 \times 10^4$.

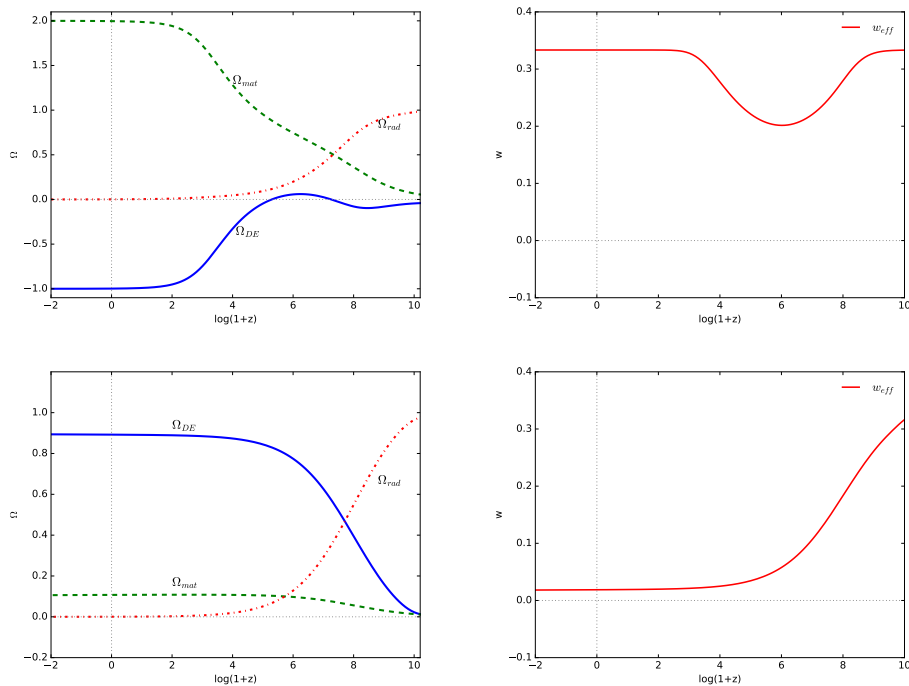


Figura 4.4.: Painéis superiores: Evolução cósmica dos parâmetros de densidade do modelo $f(R, G) = \alpha R^n G^{1-n}$ para $n = 0.9$, com as condições iniciais $x_1 = 4.9 \times 10^{-2}$, $x_2 = -10^{-6}$, $x_3 = 10^{-4}$, $x_4 = 0.999$, $x_5 = x_6 = 0$ no *redshift* $z = 3 \times 10^4$. Painéis inferiores: O mesmo que nos painéis superiores, mas para $n = 0.98$ e com as condições iniciais $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 10^{-3}$, $x_4 = 0.98$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$ no *redshift* $z = 3 \times 10^4$. Neste caso, o universo tem uma época dominada por radiação e evolui para um atrator correspondente ao ponto P_5 , com 10% de densidade de matéria e 90% de “energia escura”, sendo $\omega_{eff} = 0.02$.

5 Aspectos observacionais da cosmologia $f(R, \mathcal{G})$

No capítulo anterior, introduzimos a teoria de gravidade de Gauss-Bonnet. Vimos a formulação da teoria, seus parâmetros e o comportamento global de sua dinâmica.

Neste capítulo, baseados nos resultados de [Benetti et al. \(2018\)](#), estudaremos soluções do tipo lei de potência, $a(t) \sim t^s$, para a classe de modelos $f(R, \mathcal{G}) = \alpha R^n \mathcal{G}^{1-n}$. Nesse cenário, estamos adotando uma abordagem completamente geométrica para a energia escura através do parâmetro da equação de estado. Os termos geométricos começam a contribuir mais significativamente em uma determinada época ([Nojiri et al., 2017](#)) e, assim, podem ser relacionados com fenômenos importantes na evolução do universo, tais como o processo de formação de estruturas e os estágios de aceleração inicial e tardia. Logo, as previsões teóricas podem ser confrontadas com os dados observacionais a fim de verificar sua viabilidade observacional. Um caso típico é a inflação que gera perturbações de densidade com um espectro aproximadamente invariante em escala, as quais podem ser diretamente observadas através das medidas das flutuações de temperatura da RCF ([Ade et al., 2016a](#); [Akrami et al., 2018](#)).

Como vimos no Capítulo 2, uma questão importante e que deve ser explorada depois do evento de onda gravitacional GW170817, reportado em [Abbott et al. \(2017\)](#), é que muitas teorias alternativas de gravidade podem ser descartadas quando se considera um limite superior na velocidade de propagação da onda gravitacional, determinado a partir das observações como sendo $|c_g/c - 1| \leq 5 \cdot 10^{-16}$ ([Ezquiaga and Zumalacárregui, 2017](#)). Nesse quadro, teorias $f(R)$ continuam válidas, enquanto a TRG estendida com um termo do tipo $f(\phi)\mathcal{G}^*$ parece ser excluída pelas observações ([Ezquiaga and Zumalacárregui, 2017](#)). Apesar de um acoplamento não mínimo do termo de Gauss-Bonnet com um campo escalar estar em desacordo com a medição recente da GW170817, teorias do tipo $f(R, \mathcal{G})$ permanecem, pois esta é uma teoria livre de singularidade e a contribuição de \mathcal{G} melhora o comportamento da quintessência de curvatura ([Capozziello, 2002a](#)) e da inflação ([De Laurentis et al., 2015](#)).

* Aqui $f(\phi)$ é um função de um campo fantasma arbitrário ([Nojiri et al., 2005](#)).

Neste capítulo, investigaremos as predições observacionais da classe de modelos $f(R, \mathcal{G}) = \alpha R^n \mathcal{G}^{1-n}$, utilizando tanto o espectro de potência das flutuações de temperatura da RCF quanto o espectro de potência da matéria. Para este fim, realizaremos uma análise MCMC com os dados de RCF da colaboração Planck (2015) (Aghanim et al., 2016b), juntamente com observações de SNe Ia da colaboração *Joint Light-Curve Analysis* (Betoule et al., 2014), medidas locais do parâmetro de Hubble, H_0 (Riess et al., 2016), e dados de galáxias do levantamento SDSS (Beutler et al., 2014).

5.1. Formalismo

As características básicas da cosmologia de Gauss-Bonnet estão detalhadas na seção (4.1). O parâmetro da equação de estado, devido à componente geométrica, é definido como:

$$\omega_{GDE} = -1 - \frac{H\dot{f}_R - \ddot{f}_R + 4H^3\dot{f}_G - 8H\dot{H}\dot{f}_G - 4H^2\ddot{f}_G}{\frac{1}{2}(f_R R - f - 6H\dot{f}_R + \mathcal{G}f_G - 24H^3\dot{f}_G)}. \quad (5.1)$$

Especificamente, o termo de Gauss-Bonnet faz o papel de energia escura geométrica e contribui para densidade cosmológica efetiva de acordo com a fórmula

$$H(z) = H_0 \left[\Omega_m a^{-3} + \Omega_r a^{-4} + \Omega_{(\mathcal{G}\mathcal{B})} a^{-3(1+w_{(\mathcal{G}\mathcal{B})})} \right]^{1/2}. \quad (5.2)$$

Isto significa que o valor efetivo da contribuição de Gauss-Bonnet pode ser medido calculando as contribuições da matéria padrão e da radiação em diferentes épocas, ou seja,

$$\Omega_{(\mathcal{G}\mathcal{B})} = 1 - \Omega_m - \Omega_r. \quad (5.3)$$

É importante ressaltar que o acoplamento f_R^{-1} não afeta a dinâmica da matéria padrão (e radiação) nas Eqs. (4.9) e (4.10), se permanecermos no *frame* de Jordan. Nesse *frame*, a estrutura geodésica, seguida pelas partículas de matéria e fótons, é inalterada e permanece acoplada minimamente às equações de campo. Isso significa que apenas a parte geométrica, ou seja, o lado esquerdo das equações de campo, é estendido ao se assumir uma gravidade $f(R, \mathcal{G})$. Contudo, a situação muda completamente no *frame* de Einstein. Nesse caso, o resultado da transformação conforme acopla a matéria ao tensor energia-momento. Isso significa que Ω_m deve ser redefinido enquanto os resultados para Ω_r permanecem inalterados, uma vez que a radiação é conformalmente invariante.

Contudo, a forma da $f(R, \mathcal{G})$ é o que determina a evolução de $w_{(\mathcal{G}\mathcal{B})}$. Vamos considerar novamente o seguinte tipo de gravidade $f(R, \mathcal{G})$:

$$f(R, \mathcal{G}) = \alpha R^n \mathcal{G}^{1-n}. \quad (5.4)$$

Para soluções do tipo lei de potência da forma $a(t) = a_0 t^s$, proposta por De Laurentis (2015b),

obtemos as seguintes relações

$$n_1 = \frac{1+s}{2} \quad \text{and} \quad n_2 = \frac{1}{1+2s(s-1)} - 2s, \quad (5.5)$$

tal que a Eq. (5.1) pode ser escrita em termos de n e s como:

$$w_{(\mathcal{GB})} = \frac{3-2(n+s)}{3s}, \quad (5.6)$$

onde n pode assumir os valores n_1 ou n_2 .

5.2. Análise

A fim de produzir as predições observacionais do modelo, modificamos o código CAMB (do inglês, *Code for Anisotropies in the Microwave Background*) (Lewis et al., 2000) introduzindo o parâmetro geométrico s , como descrito acima. Para comparar as predições do modelo com os dados, realizamos uma análise MCMC utilizando o pacote disponível do CosmoMC (Lewis and Bridle, 2002).

Na Fig. (5.1), mostramos o comportamento de $\omega_{(\mathcal{GB})}$ com o parâmetro geométrico s para ambas as relações n_1 e n_2 . Note que, assintoticamente, $\omega_{(\mathcal{GB})}$ comporta-se como o modelo Λ CDM, com $\omega_{(\mathcal{GB})} \rightarrow -1$ para o caso n_1 . Na Fig. (5.2), mostramos a evolução da densidade geométrica $\rho_{(\mathcal{GB})}$ para ambas as relações n_1 (painel superior) e n_2 (painel inferior). Em particular, notamos que para valores positivos de s a densidade geométrica cresce muito rapidamente no passado e tende a zero hoje (para ambas n_1 e n_2). Este fato não permitiria uma evolução dinâmica do universo dominado por outras componentes no passado (radiação e matéria), uma vez que a componente geométrica seria dominante. Para valores negativos de s , a relação n_1 permite uma evolução da densidade crescente com o tempo e dominante (apenas) hoje. Como queremos estudar valores viáveis do parâmetro geométrico, ou seja, valores que consigam descrever bem os dados observacionais, restringimos nossa análise para explorar valores negativos do parâmetro s considerando apenas a relação n_1 .

Notamos ainda que o efeito do parâmetro geométrico é um desvio leve na posição dos picos do espectro de potência de temperatura, além de influenciar a amplitude do espectro de potência da matéria, como mostra a Fig. (5.3). Percebe-se também que para valores de $s < -5$, as predições observacionais permanecem praticamente inalteradas. Assim, consideramos como um intervalo apropriado para a nossa análise o *prior* $-20 < s < -0.005$.

Variamos, além do parâmetro geométrico, o conjunto usual de parâmetros cosmológicos: densidade bariônica ($\Omega_b h^2$), densidade de matéria escura ($\Omega_c h^2$), a razão entre o horizonte do som e a distância de diâmetro angular no desacoplamento (θ), a profundidade ótica (τ), a amplitude escalar primordial (A_s) e o índice espectral (n_s). Consideramos condições iniciais puramente adiabáticas, fixando a soma das massas dos neutrinos em 0.06 eV e um universo com

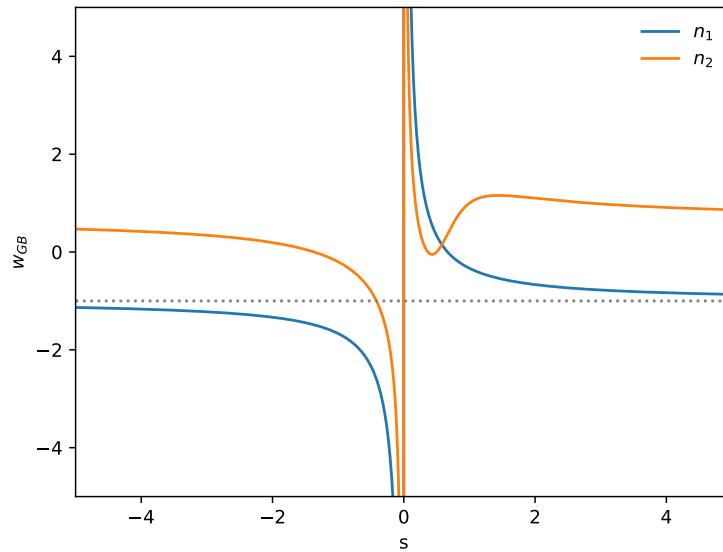


Figura 5.1.: Comportamento de ω_{GB} com o parâmetro geométrico s para ambas as soluções n_1 e n_2 . Observe que assintoticamente $\omega_{GB} \rightarrow -1$ para o caso n_1 .

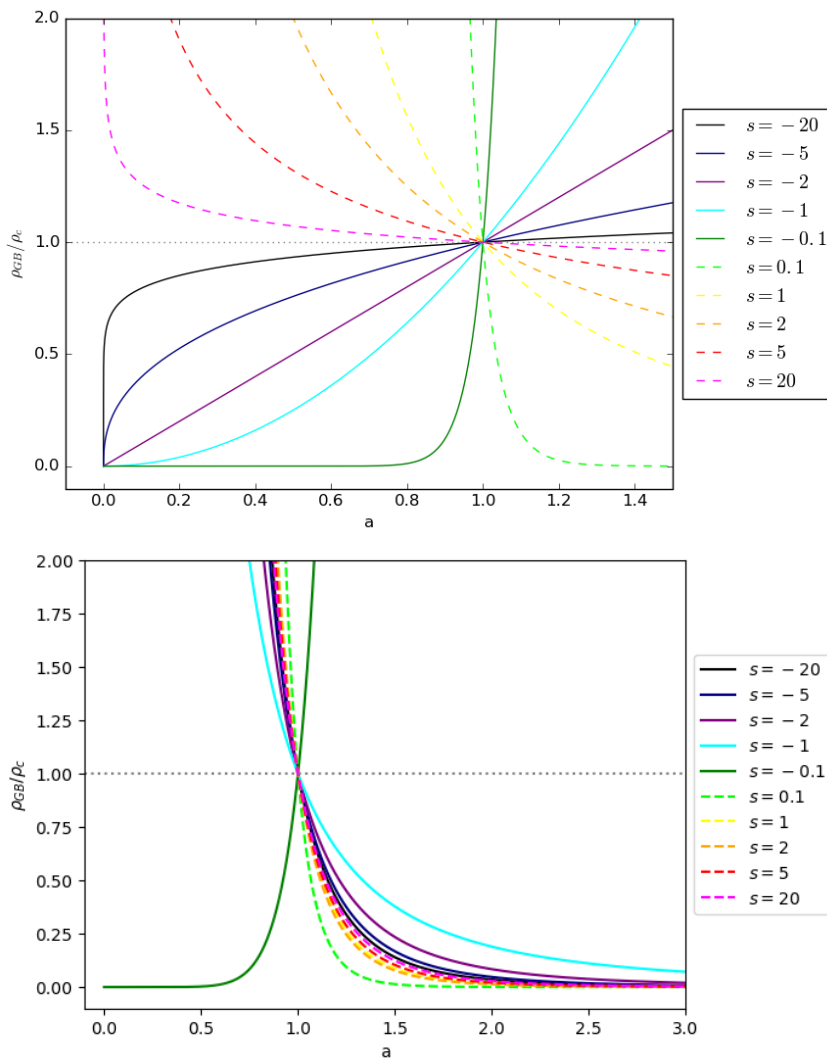


Figura 5.2.: Evolução da densidade geométrica $\rho_{(GB)}$ para ambas as soluções n_1 (painel superior) e n_2 (painel inferior) com o fator de escala a .

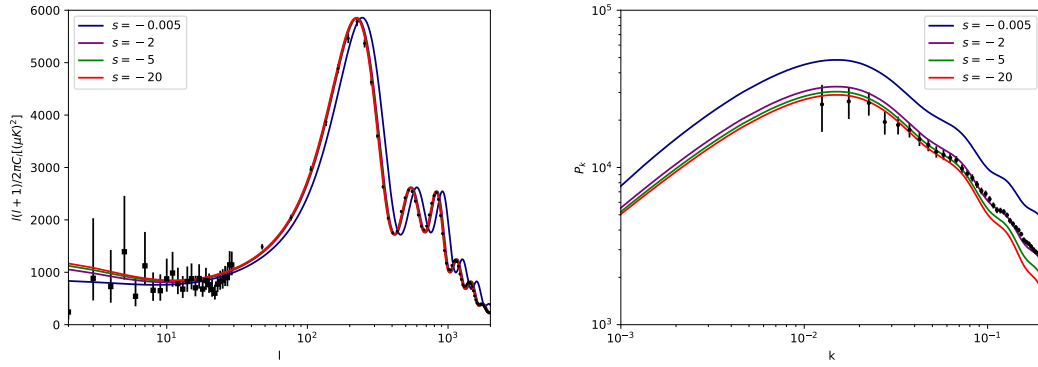


Figura 5.3.: Espectros das flutuações de temperatura (painel da esquerda) e de matéria (painel da direita) para vários valores do parâmetro s . Os dados no espectro de potência da temperatura são os dados binados da liberação Planck (2015), enquanto os dados do espectro de potência da matéria referem-se ao levantamento de dados de galáxias do SDSS DR-11.

curvatura nula. Os *priors* usados nos parâmetros cosmológicos e geométrico são mostrados na Tab. (5.1). Utilizamos os dados recentes da RCF da Colaboração Planck (Aghanim et al., 2016b), considerando o espectro de potência em altos multipolos obtidos de mapas da missão completa nas frequências 100-, 143-, e 217-GHz, e dados em baixos multipolos da *likelihood* conjunta TT, EE, BB e TE, sendo que EE e BB referem-se aos espectros de auto-correlação dos modos E e B de polarização da RCF e TE é a polarização de temperatura da correlação cruzada (daqui em diante “PLC2”). Combinamos os dados da RCF com um conjunto de dados estendidos, composto por Supernovas do tipo Ia, medidas locais da constante de Hubble e dados de galáxias:

- para os dados de SNe Ia, utilizamos a amostra “Joint Light-curve Analysis”(JLA) (Betoule et al., 2014);
- para as medidas locais de H_0 utilizamos os resultados de Riess et al. (2016) na taxa de expansão local, $H_0 = 73.24 \pm 1.74 \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$ (68% C.L.), baseados em medidas diretas feitas com o satélite espacial Hubble (HST);
- para os dados de galáxias, utilizamos as medidas do espectro de potência da matéria da amostra *Baryon Oscillation Spectroscopic Survey* (BOSS) CMASS DR-11 (cobrindo o intervalo de redshift $z = 0.43 - 0.7$) do experimento *Sloan Digital Sky Survey* (SDSS) (Beutler et al., 2014), disponível publicamente no website da colaboração SDSS[†].

O conjunto estendido de dados (Ext) utilizado em nossa análise compreende os dados PLC2, HST, JLA e SDSS.

[†] www.sdss3.org

Tabela 5.1.: *Priors* nos parâmetros do modelo.

Parâmetro	Faixa do <i>Prior</i>
$\Omega_b h^2$	[0.005 : 0.1]
$\Omega_c h^2$	0.001 : 0.99]
θ	[0.5 : 10.0]
τ	[0.01 : 0.8]
n_s	[0.8 : 1.2]
$\log 10^{10} A_s$	[2.0 : 4.0]
s	[-20 : -0.005]

Tabela 5.2.: Limites de confiança de 68% e valores de melhor ajuste para os parâmetros cosmológicos e geométrico. O primeiro bloco de colunas mostra as restrições para o modelo $\omega_{\mathcal{GB}}$ usando os dados PLC2, enquanto o segundo bloco de colunas refere-se as restrições usando o conjunto de dados Ext, a saber o conjunto PLC2+HST+JLA+SDSS. A tabela é dividida em duas seções: na seção superior estão os parâmetros primários e na seção inferior os derivados. As últimas linhas apresentam os valores de ΔBIC , os quais referem-se a diferença com respeito ao modelo ΛCDM usando o mesmo conjunto de dados. Note que o limite superior do parâmetro geométrico s refere-se ao nível de confiança de 95%.

Parâmetro	PLC2	Ext
Primário		
$100 \Omega_b h^2$	2.224 ± 0.024	2.228 ± 0.022
$\Omega_c h^2$	0.1196 ± 0.0022	0.1193 ± 0.0018
θ	1.04090 ± 0.00048	1.04098 ± 0.00044
τ	0.077 ± 0.020	0.079 ± 0.019
$\ln 10^{10} A_s$	3.088 ± 0.038	3.091 ± 0.037
n_s	0.9657 ± 0.0064	0.9670 ± 0.0055
s	< -0.005	-10.94 ± 4.35
Derivado		
H_0	73.26 ± 6.91	69.74 ± 0.99
Ω_m	0.272 ± 0.043	0.293 ± 0.010
$\Omega_{\mathcal{GB}}$	0.728 ± 0.043	0.707 ± 0.010
$w_{(\mathcal{GB})}$	> -134	-1.06 ± 0.02
ΔBIC	19.1	4.4

5.3. Resultados

Os resultados principais da nossa análise são mostrados na Tab.(5.2), onde vemos as restrições para os parâmetros cosmológicos e geométrico. Mostramos ainda na Fig. (5.4) as distribuições de probabilidade posterior de s e dos parâmetros derivados H_0 e Ω_{GB} (a constante de Hubble e o parâmetro de densidade da contribuição geométrica). Para comparação, mostramos também as restrições no parâmetro de densidade de energia escura, Ω_Λ , do modelo padrão Λ CDM.

Na primeira coluna da Tab. (5.2) percebemos que, enquanto as restrições nos parâmetros primários concordam com os resultados do modelo Λ CDM (veja, por exemplo, Ade et al., 2016b), encontramos um valor muito alto para o parâmetro de Hubble, o qual discorda em 1σ das previsões do Λ CDM (veja também a curva verde da Fig. 5.4). A contribuição do parâmetro Ω_{GB} também é maior com respeito à densidade de energia escura do modelo Λ CDM. Tais diferenças podem ser explicadas se considerarmos que o efeito da contribuição geométrica é um desvio na posição dos picos do espectro de potência da temperatura e na amplitude do espectro de potência da matéria (veja o painel esquerdo e direito na Fig.5.3). De fato, essas assinaturas estão relacionadas, no modelo cosmológico padrão, com os valores de Ω_Λ e H_0 (Dodelson, 2003). Isto significa que, uma vez que o parâmetro geométrico no contexto de ω_{GB} produz um desvio nos picos das anisotropias de temperatura, como aquele produzido pelos valores de Ω_Λ e H_0 no contexto Λ CDM, H_0 deve então assumir valores mais altos para compensar tal desvio. Além disso, vemos que a distribuição de probabilidade posterior do parâmetro s não é Gaussiana. Este parâmetro é fracamente restringido usando apenas os dados PLC2, mas as restrições melhoram quando consideramos o conjunto de dados estendidos (assim como as restrições nos parâmetros H_0 e Ω_{GB}).

O melhor ajuste do modelo ω_{GB} usando os dados PLC2 (curva azul) e o Ext (curva verde) é mostrado na Fig. (5.5). Notamos que ambos estão em acordo com os dados do Planck (Aghanim et al., 2016b) para o espectro de potência das anisotropias de temperatura, enquanto o conjunto de dados Ext descreve melhor os dados do SDSS-DR11 no espectro de potência da matéria (painel da direita). Este resultado seria contraditório com a análise de sistemas dinâmicos desenvolvida no capítulo anterior se olhássemos apenas para o espectro de potência da temperatura, uma vez que temos um bom ajuste entre o modelo e os dados observacionais. Todavia, é importante analisar a viabilidade do modelo do ponto de vista estatístico. Essa análise foi feita calculando o *Bayesian Information Criteria* (BIC), um indicador que considera o ponto que maximiza a distribuição de probabilidade posterior para comparar os modelos, levando em conta o número de pontos de dados e o número de parâmetros extras dos modelos considerados. O valor de BIC é dado por

$$BIC = -2 \ln \mathcal{L}(d|\theta) + k \ln N,$$

onde $\mathcal{L}(d|\theta)$ é a *likelihood* máxima. O número de pontos total é $N = 2499$ (multipolos ℓ do Planck CamSpec+commander) para o conjunto PLC2 e $N = 3279$ ($\ell + H_0$ + dados de galáxias

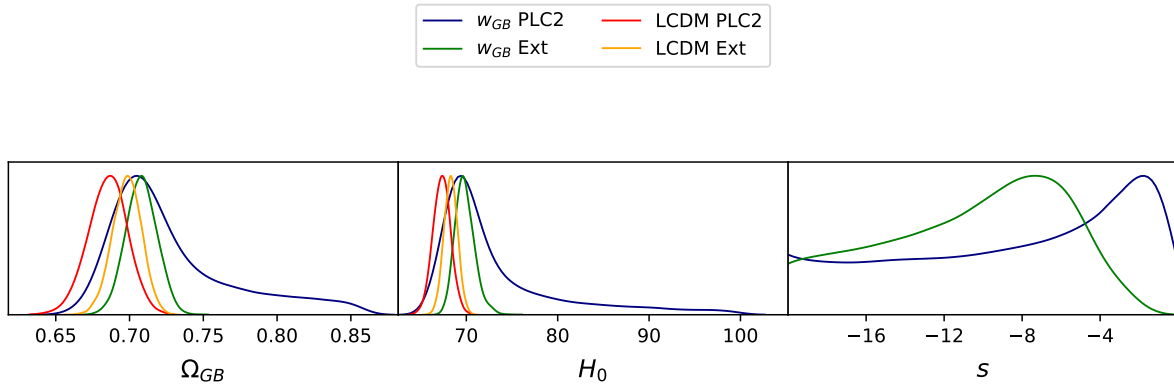


Figura 5.4.: Distribuição de probabilidade para os parâmetros cosmológicos do modelo $\omega_{(\mathcal{G}\mathcal{B})}$, usando o conjunto de dados PLC2 (linha verde) e Ext (linha azul). Para comparação, mostramos também a distribuição de probabilidade para os parâmetros cosmológicos do modelo Λ CDM, usando o conjunto de dados PLC2 (linha vermelha) e Ext (linha preta). A contribuição total da densidade geométrica, $\Omega_{\mathcal{G}\mathcal{B}}$, é comparada com a densidade de energia escura, Ω_{Λ} , do modelo cosmológico padrão.

+ supernovas) para o conjunto de dados Ext, e o número de parâmetros extras são $k = 6$ e $k = 7$, para os modelos Λ CDM e $\omega_{\mathcal{G}\mathcal{B}}$, respectivamente. Desta forma, $\Delta BIC \equiv BIC_i - BIC_{\Lambda\text{CDM}}$ representa a preferência do modelo de referência sobre o modelo i , e $\Delta BIC \leq 2$, $2 < \Delta BIC \leq 6$, $6 < \Delta BIC \leq 10$ e $\Delta BIC \geq 10$ significa um suporte para o modelo de referência do tipo fraco, positivo, forte e muito forte, respectivamente (Kass and Raftery, 1995).

Os valores de ΔBIC com respeito ao modelo Λ CDM são mostrados nas últimas linhas da Tab. 5.2. Para o conjunto de dados PLC2 o valor de $\Delta BIC = 19.1$ indica um forte suporte para o modelo de referência e quando utilizamos o conjunto de dados Ext esse valor diminui para $\Delta BIC = 4.4$, mas ainda indica um suporte positivo em favor do modelo Λ CDM. Portanto, descartamos este modelo como um modelo cosmológicamente viável também a partir da análise observacional.

Além disso, é importante notar que o vínculo sobre o parâmetro s não é restritivo nem Gaussiano, como mencionado anteriormente. Ela depende do limite $\omega_{(\mathcal{G}\mathcal{B})} \rightarrow -1$ (veja Fig. 5.1), de modo que para valores de $s < -5$ existem poucas mudanças nas previsões observacionais, ou seja, todos os valores de s produzem quase o mesmo observável. Por fim, o valor de melhor ajuste corresponde a uma evolução de densidade $\frac{\rho_{(\mathcal{G}\mathcal{B})}(z)}{\rho_{c,0}} = a^{-3(1+\omega_{\mathcal{G}\mathcal{B}})} \sim a^{0.3}$, o que significa uma densidade que está crescendo com o tempo.

5.4. Sumário

As teorias de gravidade $f(R, \mathcal{G})$ levam em consideração todos os graus de liberdade de curvatura provenientes do tensor de Riemann ao se combinar o escalar de curvatura de Ricci com o invariante topológico de Gauss-Bonnet. Esta classe de modelos está relacionada com teorias de campo quânticas no espaço curvo (Barth and Christensen, 1983; Birrell and Davies, 1984) e tem sido amplamente investigadas como uma generalização da gravidade $f(R)$ (De Laurentis

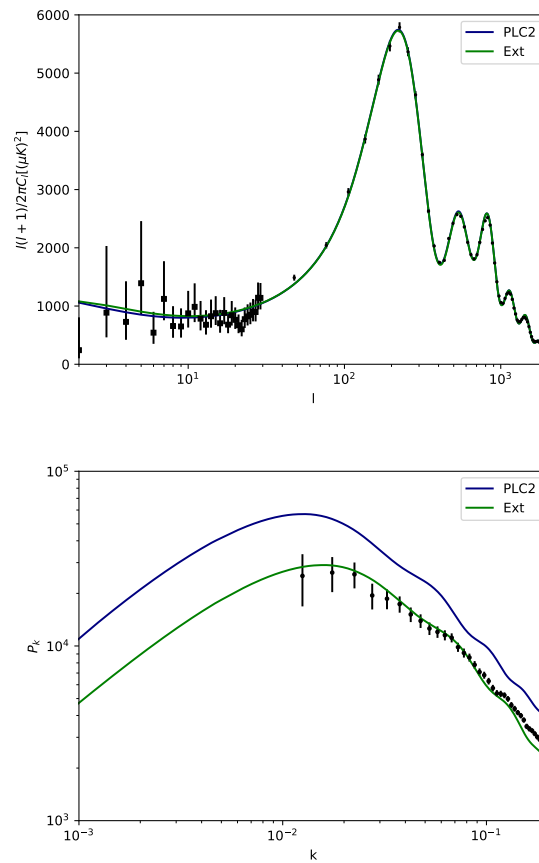


Figura 5.5.: Espectros das flutuações de temperatura (painel superior) e de matéria (painel inferior) para o modelo $\omega_{\mathcal{GB}}$, para os valores de melhor ajuste usando os dados PLC2 e Ext. No espectro de potência da temperatura os dados são obtidos da liberação de dados do Planck (2015), enquanto os dados no espectro de potência da matéria referem-se aos dados de galáxias do SDSS DR11.

et al., 2015).

Neste capítulo, examinamos a viabilidade observacional de soluções do tipo lei de potência (De Laurentis, 2015b) para um classe de modelos deduzida a partir das simetrias de Noether, cuja forma da função é $f(R, \mathcal{G}) = \alpha R^n \mathcal{G}^{1-n}$ (Capozziello et al., 2014b). Apresentamos soluções de aceleração viáveis obtidas a partir de termos geométricas no parâmetro da equação de estado $w_{(\mathcal{G})}$. Além disso, ao confrontarmos este modelo com os dados, percebemos um desvio na posição dos picos no espectro de potência das flutuações de temperatura da RCF e um aumento na amplitude do espectro de potência da matéria, se comparados ao modelo cosmológico padrão. A viabilidade observacional desta abordagem foi testada comparando-se as previsões teóricas com dados conjuntos da RCF, SNe Ia, medidas locais de H_0 e dados de galáxias. Constatamos que o modelo se ajusta bem aos dados, tanto no que se refere ao espectro de potência da temperatura quanto à distribuição de matéria, apenas para valores elevados para H_0 e para a densidade geométrica total Ω_{GB} . No entanto, apesar desta descrição geométrica, assumindo soluções do tipo lei de potência, descrever os dados observacionais recentes sem contribuições adicionais de energia escura, este modelo é descartado ao efetuarmos a comparação de modelos utilizando o valor de BIC. Além de ter uma densidade que evolui como uma função que cresce com o tempo.

É importante ressaltar aqui que as soluções n_1 e n_2 tem um comportamento lei de potência determinado pelas simetrias de Noether. Esta suposição parece muito simples para abranger toda a evolução cosmológica, iniciando com a inflação, evoluindo para eras dominadas por radiação/matéria e, finalmente, terminando com um comportamento de energia escura. Contudo, como discutido em detalhes em De Laurentis and Lopez-Revelles (2014a), é possível mostrar que soluções do tipo

$$a = a_0(t - t_0)^{\frac{2n}{3(1+w)}}, \quad (5.7)$$

surgem como fases transientes em quaisquer teorias estendidas, por exemplo, a gravidade $f(R)$. Aqui, assim como antes, ω é um índice barotrópico. Estas transições de fase podem evoluir para comportamentos acelerados representando atratores para sistemas dinâmicos que descrevem a cosmologia relacionada (Carloni et al., 2005). Em qualquer caso, a mesma solução exata, combinando a sequência de inflação, radiação, matéria e energia escura, é irrealista para ser encontrada em qualquer teoria de gravidade do tipo lei de potência.

6 Uma extensão do modelo inflacionário de Starobinsky

A inclusão de um cenário inflacionário no universo primordial é um dos pontos centrais na construção de modelos cosmológicos viáveis, uma vez que sua existência produz uma explicação natural para os problemas da homogeneidade, planezza e horizonte, além de esclarecer o processo de crescimento de estruturas em grande escala e das flutuações de temperatura da RCF (Liddle, 2001). Como é bem conhecido, uma propriedade interessante das teorias $f(R)$ é que elas são equivalentes a teorias do tipo escalar-tensoriais, mediante uma transformação conforme que leva a teoria do *frame* de Jordan (FJ) ao *frame* de Einstein (FE). A nomenclatura de *frames* não tem relação com os referenciais inerciais da TRE, mas sim com o fato de que a transformação conforme permite que as equações de campo sejam similares às equações de Einstein da TRG. Essa técnica tem sido utilizada, principalmente, como uma ferramenta para obter soluções exatas a partir de soluções conhecidas da TRG (Sen and Dunn, 1971; Belinski and Khalatnikov, 1973; Barrow and ichi Maeda, 1990; Serna et al., 2002).

No Capítulo 2, descrevemos brevemente a dinâmica inflacionária do modelo de Starobinsky, que inclui uma correção quadrática do escalar de Ricci, R^2 . O potencial equivalente deste modelo (no FE) foi analisado na literatura e os resultados indicam bons ajustes com os dados observacionais mais recentes, se comparado com outros modelos (Martin et al., 2014a; Akrami et al., 2018). Em Martin et al. (2014a) os autores investigaram os modelos inflacionários mais estudados na literatura até o momento através de uma análise Bayesiana de comparação de modelos. Eles utilizaram os dados da RCF obtidos na primeira liberação de dados do satélite Planck (Ade et al., 2014) e calcularam a evidência e a complexidade de 193 modelos de inflação de campo único com rolamento lento (Martin et al., 2014b), a partir do algoritmo MultiNest e da biblioteca ASPIC. Os resultados encontrados por eles apontam que apenas 26% dos modelos em questão são favorecidos pela evidência Bayesiana, o que corresponde a 15 dos modelos considerados. Ao incluir a complexidade na análise, esse número diminui para 9% (9 modelos),

sendo todos os potenciais do tipo platô*.

Neste capítulo, abordaremos a dinâmica inflacionária a partir do *frame* de Einstein em detalhes, assim como os aspectos teóricos e as previsões observacionais para uma extensão do modelo de Starobinsky, ainda não reportada na literatura (Santos da Costa et al., prep).

6.1. Equações básicas

A ação para uma teoria $f(R)$ é escrita como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [f(R) + \mathcal{L}_m(\Psi, g_{\mu\nu})]. \quad (6.1)$$

Como visto na seção (2.3.1), a Eq. (6.1) pode ser reescrita como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \varphi R - U(\varphi) + \mathcal{L}_m(\Psi, g_{\mu\nu}) \right], \quad (6.2)$$

onde

$$\varphi = f_R, \quad U(\varphi) = \frac{1}{2}(Rf_R - f), \quad (6.3)$$

o que significa que uma teoria $f(R)$ pode ser expressa como uma teoria de Brans-Dicke (escalar-tensorial) no FJ com o parâmetro de Brans-Dicke $\omega_{BD} = 0$.

Note ainda que, no FJ, o campo auxiliar φ está acoplado não minimamente com a gravidade. Para remover este acoplamento, vamos considerar a seguinte transformação conforme

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \varphi g_{\mu\nu}, \quad d\tilde{t} = \sqrt{\varphi} dt, \quad \tilde{a} = \sqrt{\varphi} a, \quad (6.4)$$

que nos permite reescrever a ação (6.2) da seguinte forma:

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{1}{2} \tilde{R} - \frac{3}{4} \left(\frac{\tilde{\nabla} \varphi}{\varphi} \right)^2 - \frac{U(\varphi)}{\varphi^2} + \mathcal{L}_m(\Psi, \tilde{g}_{\mu\nu}) \right], \quad (6.5)$$

onde $\tilde{\nabla}$ é a derivada com respeito às coordenadas \tilde{x}^μ .

A partir da escolha do potencial no FE, $\phi = \sqrt{\frac{3}{2}} \ln \varphi$, a ação (6.5) é reescrita em termos de $\tilde{g}_{\mu\nu}$ e ϕ , isto é,

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{1}{2} \tilde{R} - \frac{1}{2} (\tilde{\nabla} \phi)^2 - V(\phi) + \mathcal{L}_m(\Psi, \tilde{g}_{\mu\nu}) \right], \quad (6.6)$$

* Um potencial do tipo platô é um potencial que se torna plano no infinito (Martin, 2018).

onde

$$V(\phi) = \frac{(Rf_R - f)}{2f_R^2} = \frac{U(\varphi)}{\varphi^2} \Big|_{\varphi=\varphi(\phi)}. \quad (6.7)$$

Note que o potencial do campo inflaton é obtido uma vez que se especifique a forma da função $f(R)$, permitindo analisar a dinâmica inflacionária do modelo a partir do FE. Outra opção é considerar uma forma funcional para o potencial $V(\phi)$, que será equivalente a alguma forma funcional de $f(R)$. O modelo de Starobinsky pode ser analisado nos dois cenários, tal que a função $f(R) = R + R^2/(6M^2)$ (analisada na seção (2.3.1)) corresponde ao seguinte potencial (Martin et al., 2014b)

$$V(\phi) = \Lambda^4 \left[1 - \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{Pl}}\right) \right]^2, \quad (6.8)$$

onde Λ^4 é a amplitude do potencial (determinada a partir do espectro de potência primordial na escala *pivot* escolhida[†]).

Para entendermos a dinâmica inflacionária, vamos assumir que o conteúdo energético do Universo primordial é dominado pelo campo escalar $\phi(t)$, de maneira que a densidade Lagrangiana presente na ação (6.6) pode ser substituída por (Martin, 2018):

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi) + \mathcal{L}_m(\phi, \Psi), \quad (6.9)$$

onde $\mathcal{L}_m(\phi, \Psi)$ descreve a interação do campo inflaton com os campos de matéria. O tensor energia-momento é obtido ao variarmos a ação correspondente à Lagrangiana (6.9) com respeito ao tensor métrico, tal que

$$T_\beta^\alpha = g^{\alpha\nu}\partial_\nu\phi\partial_\beta\phi - \delta_\beta^\alpha \left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + V(\phi) \right]. \quad (6.10)$$

Utilizando a métrica FLRW plana, as densidades de energia e pressão são escritas como:

$$\rho_\phi = -T_0^0 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad P_\phi = \frac{1}{3}\delta_j^i T_i^j = \delta_\beta^\alpha \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (6.11)$$

Vemos que a densidade de energia é positiva desde que $V(\phi) > 0$. Por outro lado, se o potencial domina sobre o termo cinético, a pressão adquire caráter negativo, $P < 0$. Isso pode acontecer em duas situações: i) a energia cinética é pequena, o que significa que o campo inflaton varia lentamente ao longo do seu potencial; ii) ou que o potencial é plano. Portanto, se o campo inflaton domina a densidade de energia no Universo primordial e o seu potencial é quase plano, o período de inflação pode ocorrer.

[†] Escala *pivot* é um ponto escolhido arbitrariamente para calcular o potencial primordial. Este valor pode ser próximo ao valor da escala correspondente ao modo que sai do horizonte de Hubble durante a inflação, mas não é exatamente o mesmo ponto.

Por fim, a evolução do campo inflaton é dirigida pela equação de Friedmann

$$H^2 = \frac{\kappa}{3} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right], \quad (6.12)$$

e pela equação de Klein-Gordon, que é obtida a partir da variação da ação correspondente a Lagrangiana (6.9) com respeito a ϕ (num universo FLRW plano):

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0, \quad (6.13)$$

onde (') denota a derivada com respeito ao campo ϕ .

Como mencionado na seção (2.3.1), para que exista uma fase de aceleração inicial o parâmetro de Hubble H deve variar lentamente, ou seja, $\dot{H} \sim 0$. Ou ainda $\frac{\dot{H}}{H^2} \ll 1$, pois esta é a única combinação possível com \dot{H} que possuímos. Isto indica que, durante um tempo de expansão $1/H$, a variação de H é muito menor que a unidade. Usando este resultado na equação de Friedmann, obtemos a primeira condição de rolamento lento:

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi). \quad (6.14)$$

Além disso, quando o termo cinético do campo escalar é desprezível com respeito ao potencial, a Eq. (6.11) produz:

$$P_\phi \approx -\rho_\phi \approx -V(\phi) \approx \text{constante}. \quad (6.15)$$

Logo, quando o potencial do campo escalar domina sobre o termo cinético, ele se comporta como uma constante cosmológica. Devemos salientar que esta condição de rolamento lento não necessita que o potencial seja estritamente plano (veja [Kolb and Turner, 1990](#); [Mukhanov et al., 1992](#)).

A condição $\frac{\dot{H}}{H^2} \ll 1$ é normalmente expressa em termos de um parâmetro, ϵ , denominado parâmetro de rolamento lento

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{H} \right), \quad (6.16)$$

tal que, a inflação ocorre enquanto a condição $\epsilon \ll 1$ for válida. Isto pode ser garantido desde que ϵ varie lentamente ($\dot{\epsilon} \sim 0$),

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= 2 \frac{\dot{H}^2}{H^3} - \frac{\ddot{H}}{H^2} \\ &= 2H\epsilon^2 + 2\epsilon \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Reescrevendo a Eq. (6.17) como

$$\dot{\epsilon} = 2H\epsilon(\epsilon - \eta), \quad (6.18)$$

temos

$$\eta = -\frac{1}{H} \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}}, \quad (6.19)$$

que é um segundo parâmetro de rolamento lento, tal que $\eta \ll 1$ garante que a inflação ocorra. Além disto, aplicando esse resultado na Eq. (6.19), obtemos

$$3H\dot{\phi} \approx -V'(\phi). \quad (6.20)$$

Nesta situação, $\epsilon \ll 1$ e $\eta \ll 1$ são quantidades de primeira ordem e $\dot{\epsilon}$ é uma quantidade de segunda ordem. É suficiente nesse momento trabalharmos apenas com os parâmetros ϵ e η , embora seja possível continuar tomando derivadas temporais desses parâmetros e construir uma hierarquia (Martin, 2018).

É ainda útil definir os parâmetros ϵ e η em termos de quantidades relacionadas com o potencial do campo inflaton e suas derivadas. Combinando a definição (6.16) com o fato de que

$$\dot{H} = -\frac{M_{Pl}^2}{2} \dot{\phi}^2, \quad (6.21)$$

obtemos:

$$\epsilon = \frac{3\dot{\phi}^2}{2V + \dot{\phi}^2} = \frac{3\dot{\phi}^2}{2V} + \mathcal{O}\left[\left(\frac{\dot{\phi}^2}{2V}\right)^2\right]. \quad (6.22)$$

Tomando a condição (6.14), chegamos a

$$\epsilon = \frac{M_{Pl}^2}{2} \left(\frac{V'}{V}\right)^2 \equiv \epsilon_V. \quad (6.23)$$

Por outro lado, esperamos que o parâmetro η dependa de derivadas segundas do potencial, uma vez que apresenta derivadas segundas do campo ϕ . Usando as Eqs. (6.19) e (6.20), obtemos:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{V'' + 3\dot{H}}{3H^2} \Rightarrow \\ \eta + \epsilon &= M_{Pl}^2 \frac{V''}{V} \equiv \eta_V. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Durante a inflação, temos $\epsilon_V, \eta_V \ll 1$ e a inflação acaba quando a primeira condição de rolamento lento é violada, isto é $\epsilon_V = 1$. Além disso, o potencial não precisa ser exatamente plano, basta apenas que suas derivadas sejam muito pequenas se comparadas com o próprio

potencial (Kolb and Turner, 1990; Mukhanov et al., 1992; Liddle, 2015).

Por fim, é importante avaliar a quantidade de inflação, que é medida através do número de e-folds e expressa como:

$$N \equiv \int_{a_{ini}}^{a_{end}} d \ln a = \int_{t_{ini}}^{t_{end}} H dt = \int_{\phi_{ini}}^{\phi_{end}} \frac{H}{\dot{\phi}} |d\phi| = \int_{\phi_{end}}^{\phi_{ini}} \frac{|d\phi|}{\sqrt{2\epsilon}} \approx \int_{\phi_{end}}^{\phi_{ini}} \frac{|d\phi|}{\sqrt{2\epsilon_V}}. \quad (6.25)$$

Para resolver o problema do horizonte são necessários entre 40 e 60 e-folds (cujo valor exato depende da temperatura do reaquecimento; Baumann, 2018). Todos os parâmetros mencionados anteriormente são utilizados para caracterizar se a inflação é bem sucedida. Eles também desempenham um papel importante no controle da dinâmica das perturbações cosmológicas durante a inflação, principalmente o número de e-folds que é utilizado para calcular quando um modo particular sai do horizonte durante a inflação.

Além de resolver os problemas associados à cosmologia do MCP, a inflação também é capaz de explicar a origem das estruturas em grande escala do Universo através do crescimento de flutuações quânticas primordiais (Padmanabhan, 2010). Durante a inflação tais flutuações quânticas em pequenas escalas são rapidamente deslocadas para escalas muito maiores do que o tamanho do horizonte, onde elas são “congeladas” como perturbações na métrica de fundo. Essas perturbações podem ser de dois tipos: escalares (ou perturbações de curvatura), que são as responsáveis pela formação de estruturas, pois estão acopladas com o tensor energia-momento da matéria, e as tensoriais (ondas gravitacionais), que não estão acopladas com a matéria. Ambas perturbações contribuem para as flutuações de temperatura que observamos na RCF, sendo as perturbações escalares interpretadas como flutuações na densidade de matéria do Universo. A física associada com as perturbações cosmológicas primordiais é calculada no cenário da TQC utilizando, principalmente, várias funções de correlações parametrizadas em termos do espectro de potência das perturbações. Uma descrição detalhada da Teoria de Perturbações Cosmológicas pode ser encontrada em Mukhanov et al. (1992), Riotto (2002), Baumann (2009) e Baumann (2018).

O espectro de potência das perturbações de curvatura escalar é dado por (Riotto, 2002):

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{1}{2M_{Pl}^2 \epsilon} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{k}{aH} \right)^{n_s-1} \equiv A_s^2 \left(\frac{k}{aH} \right)^{n_s-1}, \quad (6.26)$$

ou ainda,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{1}{12\pi^2} \frac{V^3}{M_{Pl}^6 (V')^2} \Big|_{k=aH}, \quad (6.27)$$

onde k é o número de onda associado a um dado modo que cruza o horizonte durante a inflação, $k = aH$. O índice espectral das perturbações de curvatura, n_s , é definido como

$$n_s - 1 = \frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d \ln k} = 2\eta - 6\epsilon, \quad (6.28)$$

tal que, um espectro invariante de escala é caracterizado por $n_s = 1$. Da mesma forma, é possível calcular o espectro de potência para as perturbações tensoriais responsáveis pela produção das ondas gravitacionais primordiais,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{T}}(k) = \frac{8}{M_{Pl}^2} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 \left(\frac{k}{aH} \right)^{n_T} \equiv A_T^2 \left(\frac{k}{aH} \right)^{n_T}, \quad (6.29)$$

onde o índice espectral das perturbações tensoriais é dado por:

$$n_T = \frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{T}}}{d \ln k} = -2\epsilon. \quad (6.30)$$

Notamos que a perturbação tensorial é quase invariante de escala com sua amplitude dependendo apenas do valor do parâmetro de Hubble durante a inflação. Isto implica em dizer que ela depende apenas da escala de energia $V^{1/4}$ associada ao potencial do inflaton. Portanto, a detecção de ondas gravitacionais seria uma medida direta da escala de energia associada ao inflaton (Riotto, 2002).

Finalmente, note que estes resultados predizem uma relação de consistência que é válida para os modelos de inflação dirigidos por um campo escalar único. A razão da amplitude tensorial-escalar é definida como

$$r = \frac{A_T^2}{A_s^2} = \frac{8 \left(\frac{H}{2\pi M_{Pl}} \right)^2}{(2\epsilon)^{-1} \left(\frac{H}{2\pi M_{Pl}} \right)^2} = 16\epsilon \quad \text{ou} \quad r = -8n_T. \quad (6.31)$$

Vale notar que, em casos nos quais as observações das flutuações de temperatura da RCF indicam a não validade da relação (6.31) não significa que a inflação esteja errada ou mesmo a não existência de uma fase inflacionária, mas apenas que ela não é dirigida por um campo único. De fato, existem modelos de inflação em que esta é dirigida por mais de um campo escalar, mas que está fora do escopo desse trabalho e por isso indicamos ao leitor as referências Bartolo et al. (2001) e Wands et al. (2002).

Por outro lado, desvios de um espectro de potência do tipo lei de potência podem ser caracterizados por parâmetros de rolamento lento de altas ordens. Neste sentido, a abordagem de continuar a tomar derivadas temporais destes parâmetros permite construir uma hierarquia de equações de fluxo inflacionária, bem estabelecida em Martin (2018), tal que

$$\epsilon_{n+1} \equiv \frac{d \ln |\epsilon_n|}{dN} \quad \text{para} \quad n \geq 0, \quad (6.32)$$

onde $\epsilon_0 \equiv H_{ini}/H$ é o topo da hierarquia e $N \equiv \ln(a/a_{ini})$ é o número de e-folds (Schwarz et al., 2001; Leach et al., 2002). Os três primeiros parâmetros de fluxo de Hubble são escritos como:

$$\epsilon_1 \simeq \frac{M_{Pl}^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2, \quad (6.33)$$

$$\epsilon_2 \simeq 2M_{Pl}^2 \left[\left(\frac{V'}{V} \right)^2 + \frac{V''}{V} \right], \quad (6.34)$$

$$\epsilon_3 \simeq 2M_{Pl}^4 \left[\frac{V'''V'}{V} - 3 \frac{V''}{V} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 + 2 \left(\frac{V'}{V} \right)^4 \right]. \quad (6.35)$$

Portanto, dado um modelo de inflação, podemos caracterizá-lo na ordem mais baixa do rolamento lento através de três parâmetros independentes: $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$ e n_s . Para incluir efeitos com dependência de escala existe o chamado *running* do índice espectral escalar, $dn_s/d \ln k$, definido como:

$$\frac{dn}{d \ln k} \equiv n_{run} = -\frac{1}{1-\epsilon} \frac{d}{dN} (2\eta - 4\epsilon) = 10\epsilon\eta - 8\epsilon^2 + \dots \quad (6.36)$$

O *running* é um parâmetro independente e em modelos de campo único tem valor desprezível. Desta forma, podemos utilizá-lo para verificar a viabilidade de modelos inflacionários, uma vez que uma detecção indicando a dependência de escala no índice espectral pode descartar uma grande parte dos modelos de inflação de campo único.

Além disso, diferentes formas para o espectro de potência primordial podem ser consideradas afim de explicar oscilações ou características que existem no espectro de potência das flutuações de temperatura da RCF. A falta de potência em grandes escalas angulares ($\ell < 40$), por exemplo, pode ser modulada pela presença de oscilações no espectro de potência primordial motivada pela física do universo primordial (veja [Iqbal et al., 2015](#), e referências lá citadas). Para um estudo considerando diferentes modelos inflacionários que produzem características no espectro de potência primordial, veja o apêndice [A](#).

Por fim, podemos resumir os passos para calcular as predições teóricas de um modelo particular de inflação da seguinte forma:

- A partir do potencial $V(\phi)$, calculamos os parâmetros de rolamento lento ϵ e η ;
- A partir de ϵ , calculamos o número de e-folds N como uma função do campo ϕ ;
- Invertemos $N(\phi)$ para encontrar ϕ_N , onde ϕ_N é o valor do campo do inflaton quando ainda existem N e-folds até o fim da inflação;
- Calculamos, então, $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$, n_s e $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$ como funções de ϕ .

6.2. O modelo

Analisaremos agora as consequências observacionais de uma generalização do modelo inflacionário de Starobinsky, dada por:

$$V(\phi) = V_0 \left[1 - \left(1 - \beta \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{Pl}} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right]^2, \quad (6.37)$$

que pode ser reescrita como

$$V(\phi) = V_0 \left[1 - \exp_{1-\beta} \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{Pl}} \right) \right]^2, \quad (6.38)$$

onde V_0 é a amplitude do potencial e estamos utilizando a seguinte propriedade da função exponencial generalizada

$$\exp_{1-\beta}(f) = [1 + \beta f]^{\frac{1}{\beta}}. \quad (6.39)$$

Note que o único parâmetro livre deste modelo é β , sendo ele o parâmetro que caracteriza o quanto este modelo se desvia do modelo de melhor ajuste dos dados[‡], isto é,

$$V(\phi) = V_0 \left[1 - \exp \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{Pl}} \right) \right]^2. \quad (6.40)$$

Na Fig. (6.1), vemos o comportamento do potencial para diferentes valores de β . Observe que para valores de $\beta < 0$ temos um comportamento de campo grande para $0 < \phi < 10^{\S}$. Por outro lado, para valores de $\beta > 0$ a evolução do campo ϕ até o mínimo de seu potencial pode ser plana ($\phi > 5$) ou pode acontecer de forma não suave ($0 < \phi < 5$).

Dado o potencial (6.37), escrevemos o parâmetro de rolamento lento ϵ_V , dado pela Eq. (6.23):

$$\begin{aligned} \epsilon_V &= M_{Pl}^2 \left(\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2 \\ &= \frac{4}{3} \left(1 - \beta \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{Pl}} \right)^{\frac{2}{\beta}-2} \left[1 - \left(1 - \beta \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{Pl}} \right)^{\frac{1}{\beta}} \right]^{-2}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

[‡] Analiticamente, podemos tomar o limite $\beta \rightarrow 0$ em ambas as Eqs. (6.38) e (6.37) para recuperar o modelo de Starobinsky. Todavia, em termos numéricos, faz sentido tomar este limite na Eq. (6.38), para evitar termos de divergência.

[§] ϕ em unidades de M_{Pl} .

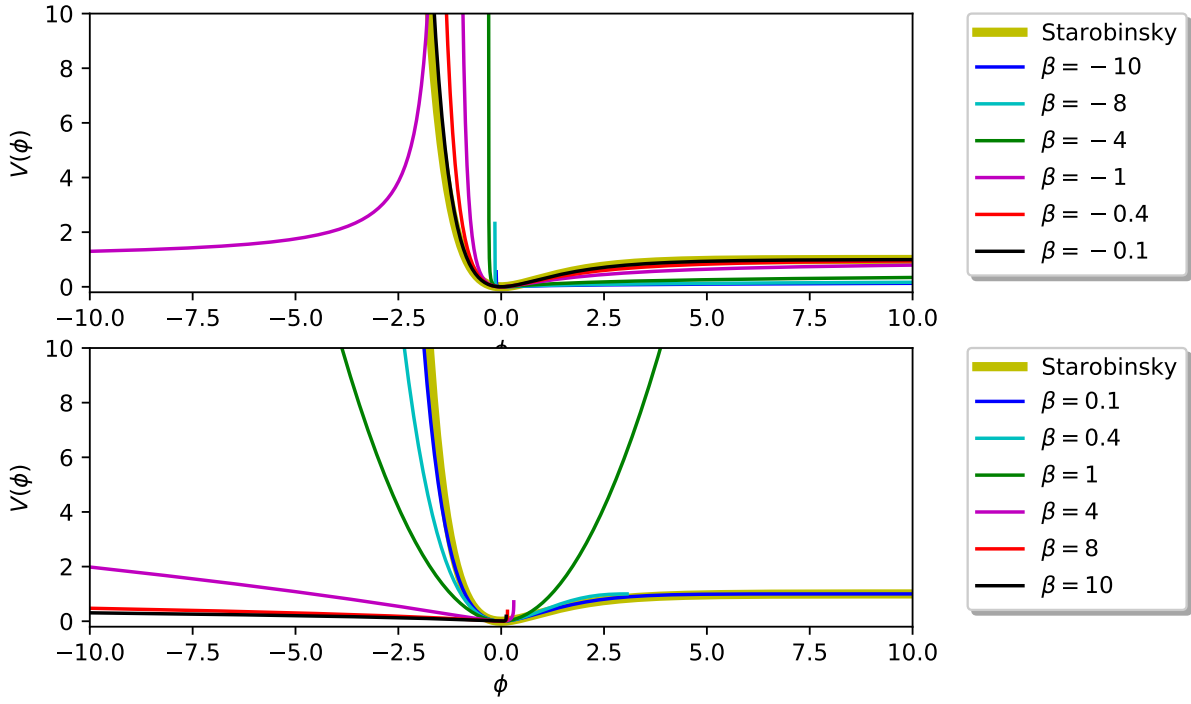


Figura 6.1.: Comportamento do potencial de Starobinsky generalizado para diferentes valores do parâmetro β .

Assim, utilizando a Eq. (6.25), escrevemos o número de e-folds como:

$$\begin{aligned}
 N &= \int_{\phi_{end}}^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{2\epsilon}} \\
 &= \int_{\phi_{end}}^{\phi} \sqrt{\frac{3}{8}} \left[\left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \beta \frac{\phi}{M_{Pl}} \right)^{1-1/\beta} - 1 + \beta \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{Pl}} \right] d\phi \\
 &= \sqrt{\frac{3}{8}} M_{Pl} \left[-\left(\frac{\phi}{M_{Pl}} \right) + \frac{\beta}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{\phi}{M_{Pl}} \right)^2 - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{(2\beta-1)} \left(1 - \beta \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{Pl}} \right)^{2-1/\beta} \right]_{\phi_{end}}^{\phi} \quad (6.42)
 \end{aligned}$$

A condição $\epsilon_V = 1$ viabiliza encontrar o valor do campo no fim da inflação, ϕ_{end} . Porém, a expressão (6.41) não permite inversão direta e deve ser resolvida numericamente. Este resultado pode ser visto na Fig. (6.2), onde mostramos os valores de ϕ e β para os quais a condição $\epsilon_V = 1$ é válida (pontos em preto no painel superior e em vermelho no inferior). Por fim, ajustamos uma função polinomial para cada uma das duas soluções: uma correspondente a valores de $\phi_{end} > 0$ e $\beta < 0.4$ e outra para $\phi_{end} < 0$ e $\beta > 0.1$, as quais denominaremos solução 1 e solução 2, respectivamente. As expressões polinomiais ajustadas para ϕ_{end} em ambas as soluções são dadas por:

- Solução 1:

$$\begin{aligned}
 \phi_{end} &= 9.6061 \times 10^{-1} + 1.5826 \times 10^{-1} \beta + 4.0105 \times 10^{-2} \beta^2 + \\
 &\quad 4.9408 \times 10^{-3} \beta^3 + 2.1727 \times 10^{-4} \beta^4 \quad (6.43)
 \end{aligned}$$

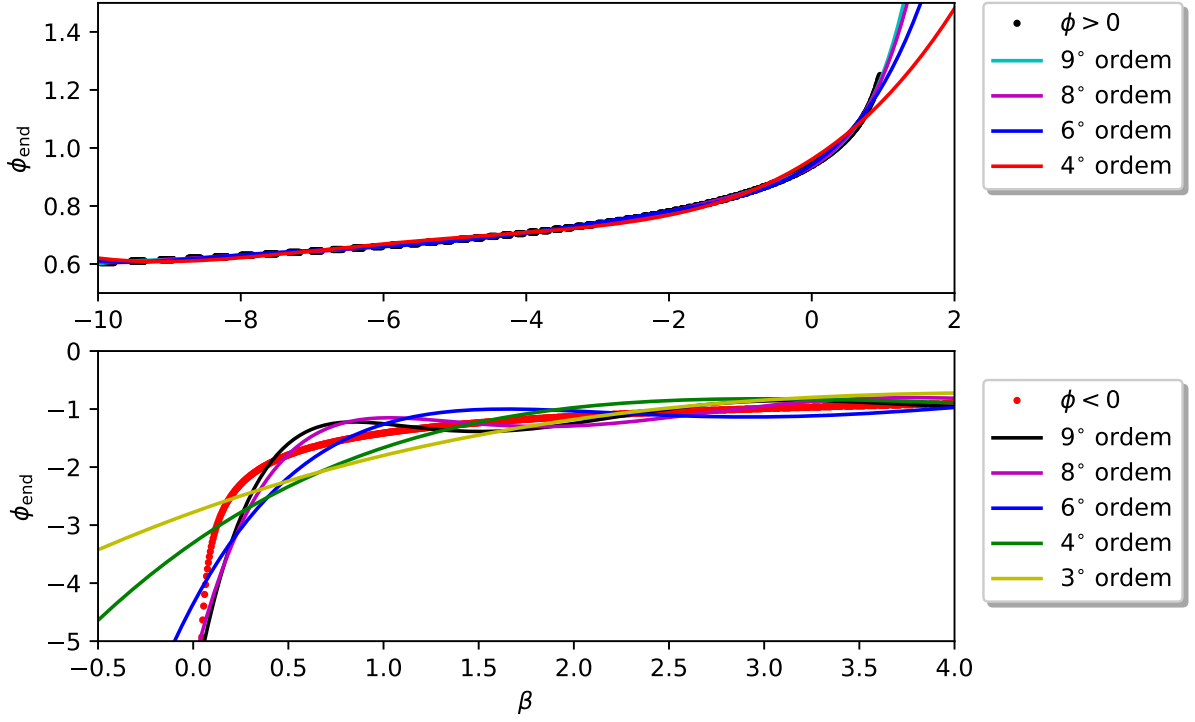


Figura 6.2.: Valores de ϕ_{end} e β correspondentes a $\epsilon_V = 1$. As curvas sólidas representam ajustes polinomiais.

• Solução 2:

$$\begin{aligned}
 \phi_{end} = & -7.6343 + 39.2807\beta - 97.4171\beta^2 + 124.5036\beta^3 - 93.3097\beta^4 + \\
 & 44.3178\beta^5 - 13.9577\beta^6 + 2.9830\beta^7 - 4.3455 \times 10^{-1}\beta^8 + \\
 & 4.2481 \times 10^{-2}\beta^9 - 2.6655 \times 10^{-3}\beta^{10} + 9.6981 \times 10^{-5}\beta^{11} - \\
 & 1.5552 \times 10^{-6}\beta^{12}
 \end{aligned} \tag{6.44}$$

A amplitude do potencial, V_0 , é obtida através do espectro de potência primordial das perturbações de curvatura, calculada na escala onde o maior modo da RCF sai do horizonte na escala ϕ_* , isto é,

$$P_R = \frac{1}{24\pi^2} \frac{V(\phi)}{\epsilon} \Big|_{k=k_*}. \tag{6.45}$$

O valor de $P_R(k_*)$ é determinado pela normalização do COBE para 2.2×10^{-9} na escala $k_* = 0.05 \text{Mpc}^{-1}$ (Ade et al., 2014). Substituindo $V(\phi)$ na Eq. (6.45) e invertendo para V_0 , obtemos

$$V_0 = \frac{32\pi^2 P_R \chi^{2/\beta-2}}{(1 - \chi^{1/\beta})^4}, \tag{6.46}$$

onde $\chi \equiv 1 - \beta \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi_*}{M_{Pl}}$.

O valor do campo ϕ_* está relacionado ao número de e-folds dado pela Eq. (6.42), no qual

a escala *pivot*, definida anteriormente, cruza o horizonte de Hubble durante a inflação. Note que, a expressão (6.42) não pode ser invertida para ϕ_N e, novamente, recorreremos à solução numérica. Nesse caso, encontramos valores de ϕ e β para os quais a condição $N_* = 55$ é válida e, em seguida, ajustamos uma função polinomial para ϕ_* . Da mesma forma, o valor do campo no início da inflação ϕ_{ini} é obtido ao considerarmos $N_{ini} = 70$ na Eq. (6.42). Semelhantemente, a expressão não é inversível e devemos tratar com soluções numéricas que resultam em funções polinomiais ajustadas de acordo com a validade da condição $N_{ini} = 70$. Os resultados das funções polinomiais ajustadas para ϕ_* e ϕ_{ini} são mostrados na Fig. (6.3). Para ambas as soluções, obtemos ajustes polinomiais de 6° ordem para ϕ_* e ϕ_{ini} , tal que:

- Solução 1:

$$\begin{aligned} \phi_* = & 5.3761 - 2.5686\beta - 1.4498\beta^2 - 4.1119 \times 10^{-1}\beta^3 - \\ & 6.1549 \times 10^{-2}\beta^4 - 4.6186 \times 10^{-3}\beta^5 - 1.3667 \times 10^{-4}\beta^6 \end{aligned} \quad (6.47)$$

$$\begin{aligned} \phi_{ini} = & 5.6398 - 3.1617\beta - 1.7662\beta^2 - 4.9973 \times 10^{-1}\beta^3 - \\ & 7.4742 \times 10^{-2}\beta^4 - 5.6069 \times 10^{-3}\beta^5 - 1.6589 \times 10^{-4}\beta^6 \end{aligned} \quad (6.48)$$

- Solução 2:

$$\begin{aligned} \phi_* = & -25.4825 + 16.6261\beta - 8.0719\beta^2 + 2.1072\beta^3 - 2.9749 \times 10^{-1}\beta^4 + \\ & 2.1373 \times 10^{-2}\beta^5 - 6.1174 \times 10^{-4}\beta^6 \end{aligned} \quad (6.49)$$

$$\begin{aligned} \phi_{ini} = & -27.2418 + 15.9651\beta - 7.2345\beta^2 + 1.7972\beta^3 - 2.4459 \times 10^{-1}\beta^4 + \\ & 1.7089 \times 10^{-2}\beta^5 - 4.7854 \times 10^{-4}\beta^6 \end{aligned} \quad (6.50)$$

Vemos, a partir da Fig. (6.3), que as condições de rolamento lento restringem o intervalo do parâmetro β para $-10 < \beta < 0.4$ para a solução 1 (painel superior) e $0.4 < \beta < 10$ para a solução 2 (painel inferior). Todavia, o modelo de Starobinsky só é recuperado no limite de $\beta \rightarrow 0$ para a solução 1, onde $\phi_{ini} = 5.6398$ e $\phi_* = 5.3761$. Isso porque a solução 2, no intervalo $0.4 < \beta < 10$, representa um modelo de campo pequeno (conforme vemos na Fig. (6.1), painel inferior) e, portanto, não recuperamos o modelo de Starobinsky como o caso limite de $\beta \rightarrow 0$.

Finalmente, o índice espectral, n_s , e a razão tensorial-escalar, r , tomam a seguinte forma:

$$n_s = 1 + \frac{8}{3} \frac{(1 - \xi)^{\frac{1}{\beta}-2}}{\left[1 - (1 - \xi)^{\frac{1}{\beta}}\right]^2} \left\{ \beta \left[1 - (1 - \xi)^{\frac{1}{\beta}}\right] - 1 - (1 - \xi)^{\frac{1}{\beta}} \right\}, \quad (6.51)$$

$$r = \frac{64}{3} (1 - \xi)^{\frac{2}{\beta}-2} \left[1 - (1 - \xi)^{\frac{1}{\beta}}\right]^{-2}, \quad (6.52)$$

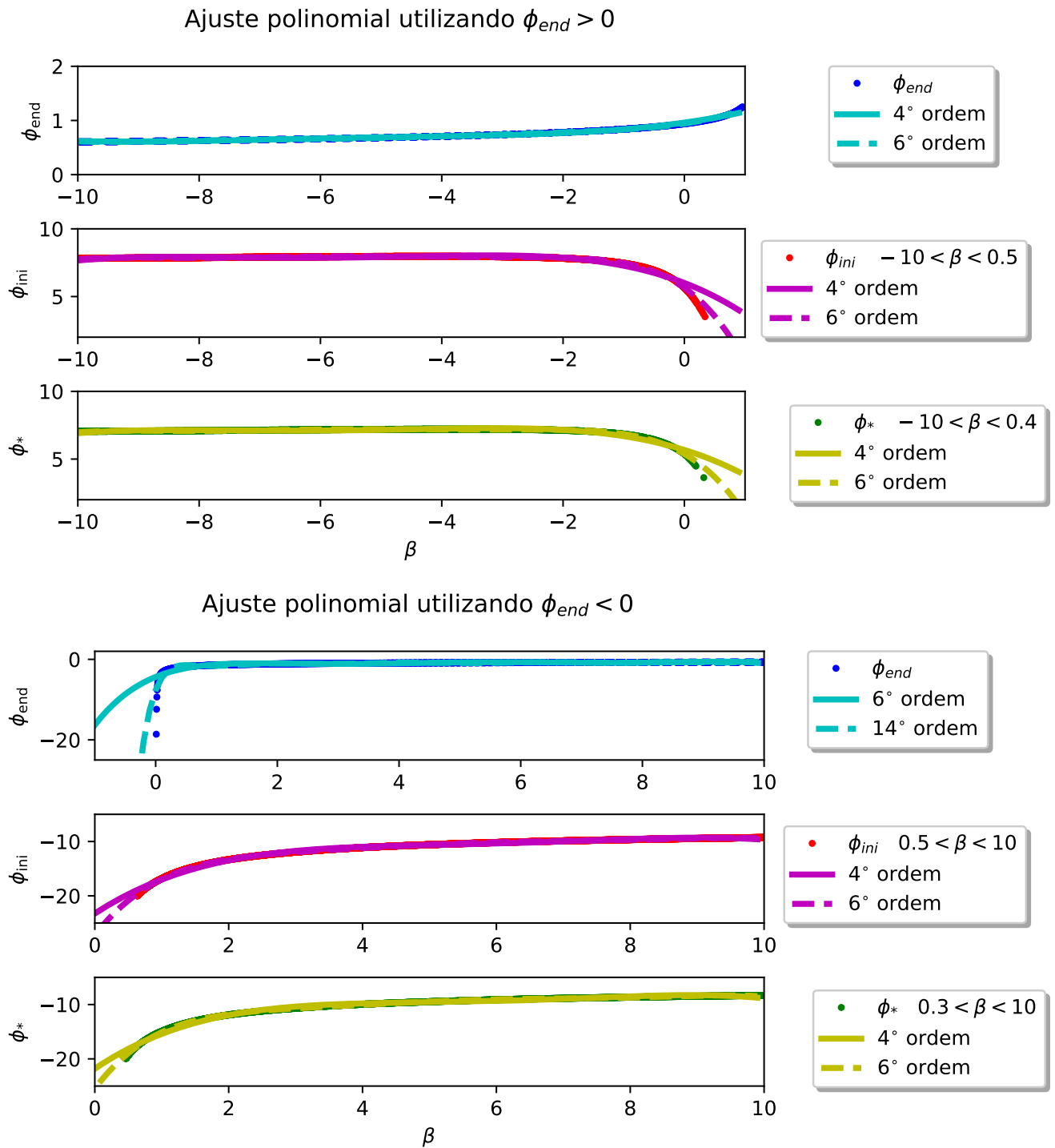


Figura 6.3.: Ajustes polinomiais para ϕ_{end} , ϕ_{ini} e ϕ_* , para ambas as soluções 1 e 2.

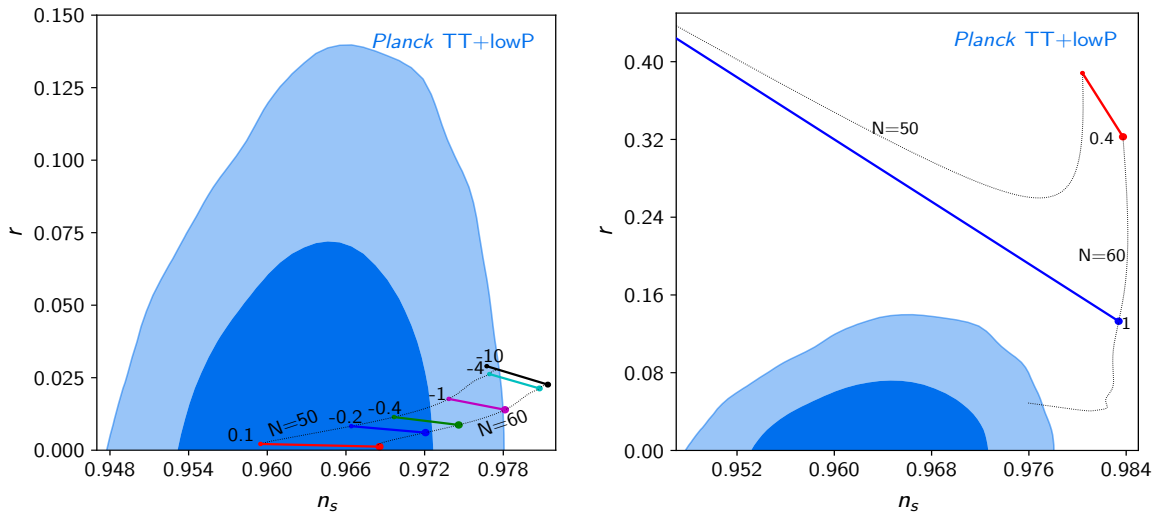


Figura 6.4.: O plano $n_s - r$ para a faixa de parâmetros β satisfazendo a Eq. (6.42), considerando dois valores para o número de e-folds, $N = 50$ e $N = 60$. Os contornos são referentes às regiões de confiança de 68% e 95% obtidas a partir dos dados do Planck (2018) usando a escala pivot de $k_* = 0.05 \text{Mpc}^{-1}$. O painel esquerdo assume a solução 1 enquanto o painel direito assume a solução 2.

onde $\xi \equiv \beta \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\phi}{M_{Pl}}}$. A relação entre n_s e r é dada por:

$$r = 8(n_s - 1)(1 - \xi)^{\frac{1}{\beta}} \left\{ (\beta - 1) - \beta(1 - \xi)^{\frac{1}{\beta}} \right\}. \quad (6.53)$$

O plano $n_s - r$ para ambas as soluções 1 e 2 pode ser visto na Fig. (6.4). Consideramos os valores de β que satisfazem a Eq. (6.42) para dois números de e-folds: $N = 50$ e $N = 60$. Os contornos correspondem aos níveis de confiança de 68% e 95% obtidos a partir dos dados mais recentes do Planck (Aghanim et al., 2018). Note que, para a solução 1 (painel esquerdo) os valores de n_s e r crescem à medida que o valor de β torna-se mais negativo. Os resultados para a solução 1 ($-10 < \beta < 0.4$) não são muito restritivos, pois todos os valores preditos estão dentro da região de confiança de 95% ($N = 50$). Por outro lado, os valores de n_s e r preditos pela solução 2 ($0.4 < \beta < 10$) estão fora em mais de 2σ da região permitida pelos dados do Planck, conforme observamos no painel direito da Fig. (6.4). Baseados nesse resultados e no critério de recuperação do modelo de Starobinsky no limite de $\beta \rightarrow 0$, consideraremos apenas a solução 1 como uma extensão viável do modelo de Starobinsky. Ainda assim, vale salientar que o fato das predições teóricas de um modelo serem compatíveis com o plano $n_s - r$ não significa que este é um bom modelo quando comparado com outros cenários de inflação (Campista et al., 2017). Devemos seguir com a análise e verificar suas predições para o espectro de potência das flutuações de temperatura e então compará-las com os dados do Planck.

Afim de produzir as predições teóricas para o espectro de potência das flutuações de temperatura deste modelo e explorar o espaço de parâmetros cosmológicos, adotamos o CAMB, incluído na versão no pacote CosmoMC. Nesse caso, ao lidar com o potencial dado pela Eq. (6.37) devemos calcular a dinâmica e perturbações deste modelo e construir o espectro de potência

primordial. Para este fim, adaptamos o código MODECODE (Mortonson et al., 2011) que é uma versão adaptada do código CAMB para modelos com potenciais. As quantidades essenciais para implementar as modificações referentes ao modelo de Starobinsky generalizado no CAMB são:

$$V(\phi), \quad V'(\phi), \quad V''(\phi), \quad V_0 \quad \text{e} \quad \phi_{ini}, \quad (6.54)$$

onde (') denota derivada com respeito ao campo ϕ e ϕ_{ini} é o valor do campo no início da inflação. Para encontrar os valores de V_0 e ϕ_{ini} , devemos aplicar o método descrito anteriormente.

O MODECODE calcula o espectro das flutuações de temperatura da RCF resolvendo numericamente as equações da dinâmica inflacionária, isto é, as equações de Friedmann e de Klein-Gordon, assim como as componentes de Fourier associadas às perturbações de curvatura produzidas pelas flutuações do campo escalar ϕ . Essas componentes são soluções da equação de Mukhanov-Sasaki (Weinberg, 2008)

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{z''}{z} \right) u_k = 0, \quad (6.55)$$

onde $u \equiv -z\mathcal{R}$ e $z \equiv a\dot{\phi}/H$. O espectro de potência primordial das perturbações de curvatura $\mathcal{P}(k)$ definido em termos do valor esperado do vácuo de \mathcal{R} é

$$\langle \mathcal{R}^*(k)\mathcal{R}(k') \rangle = \frac{2\pi^2}{k^3} \delta^3(k - k') \mathcal{P}(k), \quad (6.56)$$

onde δ é a função delta de Dirac e o fator $2\pi^2/k^3$ é escolhido para obedecer as convenções usuais de Fourier. Segue-se então que $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$ está relacionado a u_k e z via:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \left| \frac{u_k}{z} \right|^2. \quad (6.57)$$

Portanto, dada a forma do potencial $V(\phi)$, as equações da dinâmica são integradas para obter H e ϕ em função do tempo e daí obtém-se a solução u_k do modo k . Por fim, a partir de u_k , calcula-se o espectro de potência das perturbações de curvatura quando o modo cruza o horizonte.

A análise observacional desse modelo está em andamento, onde estamos considerando as quantidades descritas ao longo deste capítulo para a implementação do modelo nos algoritmos do CosmoMC e MODECODE.

6.3. Sumário

Uma das ferramentas mais relevantes para estudar a física do Universo primordial é a radiação cósmica de fundo em micro-ondas. Por outro lado, a equivalência entre as teorias $f(R)$ e as teorias escalares-tensoriais nos permite analisar modelos de gravidade modificada através do seu potencial no *frame* de Einstein. A equivalência entre os *frames* nos permite dizer, por exemplo, que uma extensão do potencial de Starobinsky (no FE) corresponderia a uma extensão

da função $f(R) = R + R^2/(6M^2)$ (no FJ) incluindo potências do escalar de Ricci, além do termo quadrático R^2 .

Neste capítulo, estudamos uma extensão do modelo de Starobinsky, cujo potencial $V(\phi) = V_0 \left[1 - \exp_{1-\beta} \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{Pl}} \right) \right]^2$ recupera o modelo original no limite de $\beta \rightarrow 0$. A partir da análise do potencial, dos parâmetros de rolamento lento e do número de e-folds, obtivemos soluções para os valores dos campos ϕ_{ini} , ϕ_* e ϕ_{end} , dependentes do parâmetro β para as duas soluções encontradas. No entanto, baseados no critério de recuperação do modelo de Starobinsky e nas previsões teóricas obtidas para o plano $n_s - r$ (veja Fig. (6.4)), restringimos o intervalo do parâmetro β para $-10 < \beta < 0.4$, o que significa que podemos descartar a solução 2 como uma forma de extensão viável para o potencial de Starobinsky.

De maneira geral, os resultados obtidos para a solução 1 referentes ao índice espectral, n_s , e a razão tensorial-escalar, r , não são muito restritivos, pois as previsões são muito similares às daquelas do modelo Λ CDM, estando dentro da região de confiança de 95% dos dados do Planck. Logo, faz-se necessário uma análise que considere todo o espaço de parâmetros e utilize os dados da RCF, uma vez que, o modelo ser compatível com o plano $n_s - r$ não é garantia de sucesso.

7 Conclusões

O aumento na qualidade dos dados observacionais decorrente do avanço tecnológico recente levou a Cosmologia à era da precisão (Peebles, 2003). Esse fato nos deu a possibilidade de testar quantitativamente diversas hipóteses utilizadas na construção de modelos cosmológicos, assim como distinguir entre diferentes modelos, tanto no nível de *background* quanto no nível perturbativo. Neste contexto, diferentes observáveis cosmológicos como, por exemplo, as observações de SNe Ia, da estrutura em grande escala e das flutuações de temperatura da RCF, indicam que o Universo está acelerando. Atualmente, a busca por uma teoria que explique a aceleração cósmica é bastante intensa, uma vez que o MCP só consegue explicá-la às custas de uma componente exótica de energia escura. Dentre os diversos cenários alternativos, as teorias de gravidade modificada tem se mostrado candidatas viáveis e eficazes, uma vez que utilizam apenas modificações com termos geométricos, produzindo o período de expansão acelerada. Além disso, tais modificações/extensões da TRG indicam um caminho em direção a uma teoria de gravitação quântica, pois permitem construir teorias que são renormalizáveis (Faraoni and Capozziello, 2011b).

Nesta tese, discutimos a viabilidade observacional de uma classe de teorias de gravidade do tipo $f(R, \mathcal{G})$ a partir do método de sistemas dinâmicos e estudamos as implicações cosmológicas para soluções do tipo lei de potência. Os resultados indicam que esta classe de modelos não consegue reproduzir a sequência de eras cosmológicas, porém quando estudamos as soluções do tipo lei de potência conseguimos descrever os dados observacionais sem recorrer à contribuição de energia escura. Além disso, analisamos a viabilidade de extensão do modelo de Starobinsky para descrever o período inflacionário. Os resultados obtidos não são muito restritivos e requerem uma análise mais robusta explorando todo o espaço de parâmetros e considerando dados observacionais.

No capítulo 2, vimos as principais motivações para se estender a TRG e explicar a expansão cósmica atual sem recorrer à energia escura. Revisamos algumas classes de teorias de gravidade modificada, como as teorias com campos extras, teorias com dimensões extras e teorias de ordem superior, onde se encaixam as teorias $f(R)$ e $f(R, \mathcal{G})$, que desempenham um papel

de destaque no cenário atual. Além disso, ressaltamos as restrições recentes impostas pelas ondas gravitacionais, que tem desfavorecido muitas dessas teorias como boas teorias do campo gravitacional.

No capítulo 3, apresentamos a abordagem de sistemas dinâmicos, assim como uma breve discussão sobre a teoria de estabilidade linear. Esse método tem sido utilizado no contexto de teorias de gravidade modificada para investigar a viabilidade de diversos modelos cosmológicos através da análise de estabilidade dos pontos fixos, que representam regimes assintóticos na evolução do Universo. Em particular, abordamos a aplicação desse método sobre as classes de modelos $f(R)$ e $f(\mathcal{G})$, ambos os casos já estudados na literatura. De maneira geral, este tipo de estudo consegue restrições que são suficientes para descartar modelos com bases puramente teóricas, mas também consegue indicar modelos que necessitam de uma análise mais detalhada considerando dados observacionais.

No capítulo 4, detivemo-nos a aplicar a abordagem de sistemas dinâmicos à classe de teorias de gravidade $f(R, \mathcal{G})$. Iniciamos com as equações básicas da teoria, partindo da ação gravitacional para deduzir as equações de Friedmann modificadas, utilizando para isso o formalismo métrico e considerando um universo homogêneo e isotrópico plano. Em seguida, introduzimos um conjunto de variáveis adimensionais e deduzimos as equações de evolução correspondentes. Para obter os pontos fixos deste sistema de equações, consideramos a classe de modelos $f(\mathcal{G}) = \alpha R^n \mathcal{G}^{1-n}$, relacionada com a presença das simetrias de Noether (Capozziello et al., 2014a).

A partir da análise de estabilidade dos pontos fixos obtidos constatamos que o modelo $f(R, \mathcal{G}) = \alpha R^n \mathcal{G}^{1-n}$ possui uma era dominada pela radiação padrão, independente do valor de n . Encontramos, também, que dois dos pontos fixos admitem uma expansão acelerada, o ponto P_6 para $n < \frac{1}{5}(2 + \sqrt{14})$ e o ponto P_2 para $n < -1.59$ e $n > \frac{1}{4}(3 + \sqrt{17})$. Todavia, não é possível obter uma era dominada pela matéria e, portanto, essa classe particular de modelos não consegue descrever uma cosmologia razoável, dada por alguma trajetória passando próximo de um ponto de radiação, seguindo por uma era dominada pela matéria até chegar a um atrator acelerado.

Embora a análise de sistemas dinâmicos tenha indicado que esta classe de teorias $f(R, \mathcal{G})$ não representa uma cosmologia viável, julgamos necessário um estudo detalhado deste modelo levando em conta dados observacionais. No capítulo 5, consideramos soluções do tipo lei de potência para o fator de escala, $a(t) \sim t^s$, para o modelo $f(R, \mathcal{G}) = \alpha R^n \mathcal{G}^{1-n}$, tal que executamos uma abordagem completamente geométrica para a energia escura através do parâmetro da equação de estado. Vale salientar que a suposição de uma solução do tipo lei de potência é muito simples para abranger toda a evolução cosmológica, mas soluções desse tipo podem ser consideradas aproximações de soluções mais gerais, representando fases transientes em teorias de gravidade estendidas (De Laurentis and Lopez-Revelles, 2014a).

Modificamos o código CAMB introduzindo o parâmetro da equação de estado modificado, dado pela Eq. (5.6), para produzir as previsões observacionais do modelo. Percebemos que o efeito do parâmetro geométrico s no espectro de potência angular das flutuações de temperatura

da RCF é um desvio leve na posição dos picos, além de influenciar na amplitude do espectro de potência da matéria. Para restringir os parâmetros cosmológicos e o geométrico, exploramos o espaço de parâmetros utilizando o algoritmo CosmoMC. Consideramos dois conjuntos de dados para a análise estatística, um contendo apenas dados de temperatura da RCF em baixos e altos multipolos obtidos pela colaboração Planck (2015), denominado PLC2, e outro combinando dados da RCF com dados de SNe Ia, medidas locais da constante de Hubble e dados da estrutura em grande escala, denominado Ext. As restrições obtidas para os dois conjuntos de dados estão em acordo com os dados do Planck (2015) para o espectro de potência das flutuações de temperatura, enquanto que o conjunto de dados Ext descreve melhor os dados do SDSS-DR11 para o espectro de potência da matéria. Todavia, este modelo é descartado ao efetuarmos a comparação de modelos utilizando o valor de BIC.

No capítulo 6, fundamentados na equivalência entre as teorias escalares-tensoriais e as teorias $f(R)$, analisamos os aspectos teóricos de uma extensão do potencial inflacionário de Starobinsky, dado pela Eq. (6.38), que considera apenas um parâmetro livre, β , caracterizando o desvio do modelo de Starobinsky padrão (Eq. 6.8). As condições de rolamento lento e as previsões teóricas obtidas para o plano $n_s - r$ restringiram o intervalo do parâmetro β à faixa de valores $-10 < \beta < 0.4$, implicando em um comportamento de campo grande para o potencial estendido. No entanto, as previsões para o índice espectral n_s e para a razão tensorial-escalar r não foram muito restritivas, uma vez que estão dentro da região de confiança de 95% dos dados do Planck e, portanto, indistinguíveis do modelo Λ CDM.

É fundamental, contudo, que se considere uma análise explorando todo o espaço de parâmetros e utilizando dados observacionais para averiguar a viabilidade observacional do modelo, dado que a compatibilidade com o plano $n_s - r$ não garante que este será consistente com diferentes observações astronômicas (Campista et al., 2017). Neste sentido, a análise estatística pode ser feita através da modificação e uso dos algoritmos MODECODE e CosmoMC. Como vimos, estes códigos calculam o espectro das flutuações de temperatura resolvendo numericamente as equações da dinâmica inflacionária a partir do potencial e de suas derivadas. As modificações a serem implementadas nos códigos estão sendo desenvolvidas, conforme mostramos no capítulo 6, onde calculamos as quantidades $V(\phi)$, $V'(\phi)$, $V''(\phi)$, V_0 e ϕ_{ini} .

Apesar dos esforços que tem sido feitos nos últimos anos, ainda não entendemos a natureza da energia escura (Sahni and Starobinsky, 2000; Carroll, 2001; Peebles and Ratra, 2003; Padmanabhan, 2003; Alcaniz, 2006; Copeland et al., 2006; Amendola and Tsujikawa, 2010). Esse fato nos motiva a continuar buscando alternativas que expliquem a aceleração cósmica sem empregar essa componente exótica de energia. As teorias de gravidade modificada constituem um caminho promissor, neste sentido, uma vez que a expansão acelerada é obtida apenas através de termos geométricos incluídos na ação gravitacional de Einstein-Hilbert. Todavia, é importante mencionar que considerar apenas observáveis de *background* (distâncias de luminosidade e de diâmetro angular e a taxa de expansão cósmica) não é suficiente para distinguir se a aceleração cósmica é um efeito dinâmico (devido a energia escura) ou um efeito geométrico (devido uma

modificação da gravidade). Portanto, quantidades perturbativas, como as flutuações de temperatura da RCF (já consideradas nesse trabalho), ou a taxa de crescimento, que avalia como o crescimento das perturbações da densidade de matéria evoluem e formam as estruturas, devem ser levados em conta como uma ferramenta discriminante entre diferentes modelos cosmológicos.

Do ponto de vista observacional, a precisão dos dados atuais fornece restrições fracas favorecendo desvios da TRG (Ferreira, 2019). Neste sentido, a próxima geração de experimentos visa aumentar a precisão das quantidades de *background* e perturbativas. O J-PAS (do inglês *Javalambre Physics of the Accelerating Universe Astrophysical Survey*) (Bennítez and Dupke, 2015), um projeto que já está em andamento, produzirá medidas de *redshift* fotométrico de alta precisão para milhões de galáxias, medidas de BAO radial e medidas do efeito de lenteamento fraco, sensível ao fator de crescimento. Ainda em fase de construção, temos o Satélite Euclid (ESA, 2019), financiado pela Agência Espacial Europeia, com lançamento previsto para 2022, cuja finalidade é entender a natureza e propriedades da energia escura, matéria escura e gravidade. A missão explorará essas diferentes questões através de medidas de lenteamento fraco, medidas de BAO e de *Redshift Space Distortion*, construindo um catálogo com o espectro de bilhões de galáxias. Em paralelo, o DESI (do inglês *Dark Energy Spectroscopic Instrument*) (Levi, 2019), um telescópio sendo construído nos Estados Unidos, deve começar a operar ainda em 2019. O objetivo principal é mapear a estrutura em grande escala do universo através de um grande e profundo levantamento de galáxias, proporcionando restrições sobre modelos de energia escura. O LSST (do inglês, *Large Synoptic Survey Telescope*) (NSF, 2019), com base no Deserto do Atacama, fará imagens contínuas do céu numa área de 20,000 graus quadrados, acumulando cerca de 20 terabytes de dados por noite. O LSST deve iniciar suas atividades em 2023 e foi planejado para, dentre outros temas, responder questões sobre a estrutura e evolução do universo. Ele irá estudar como a energia escura evolui com o tempo (ou *redshift*) ou ainda como a matéria escura influencia o crescimento de estruturas em escalas cósmicas. Por fim, podemos citar o projeto SKA (do inglês, *Square Kilometre Array*) (Cesarsky, 2012), que será o maior rádio telescópio do mundo com dois sítios, um na África do Sul e outro na Austrália. O SKA fará um levantamento da emissão HI de galáxias na faixa de frequência entre 50 – 1760 MHz, mapeando a estrutura em grande escala do Universo até $z \approx 3 - 4$. Portanto, além de precisão, devemos reconhecer que teremos disponível uma quantidade gigantesca de dados, muito maior do que qualquer compilação que dispomos atualmente, todos esperando ser explorados na busca por respostas ou, talvez, novas perguntas.

A Análise Bayesiana de modelos de espectro de potência primordial

Como mencionado no capítulo 6, podemos considerar diferentes parametrizações para o espectro de potência primordial como uma alternativa para explicar características do espectro de potência das flutuações de temperatura da RCF. Neste sentido, em Santos da Costa et al. (2018), foi utilizada a abordagem Bayesiana de comparação de modelos para analisar oito modelos inflacionários com a característica em comum de possuir um corte no infra-vermelho, afim de explicar a falta de potência em grandes escalas angulares exibida no espectro de temperatura da RCF. Alguns dos modelos são inspirados em mudanças das condições físicas durante a inflação ou representados por alguma mudança no potencial inflacionário, seja durante a fase de rolamento lento ou no início da inflação*. De maneira geral, podemos dividir os modelos estudados em duas categorias principais: as parametrizações empíricas, capazes de produzir a baixa potência em grandes escalas, e os modelos motivados fisicamente, que podem modular o potencial primordial com a característica observada. A forma funcional de cada uma das parametrizações pode ser vista na tabela (A.1). Para efeito de ilustração, na Fig. (A.1) mostramos as oscilações introduzidas no espectro primordial por estes modelos inflacionários usando os valores de melhor ajuste da tabela (A.3).

Na tabela (A.1), k_c é a escala em que a potência primordial cai para zero. Além disso, para o modelo PIK

$$A_s^* = \frac{2\pi^2}{H_{inf}^2} \frac{A_s}{k_0 |A(k_0) - B(k_0)|^2}. \quad (\text{A.1})$$

onde

$$A = \frac{e^{-ik/H_{inf}}}{\sqrt{32H_{inf}/\pi}} \left[\mathcal{H}_0^{(2)}\left(\frac{k}{2H_{inf}}\right) - \left(\frac{H_{inf}}{k} + i\right) \mathcal{H}_1^{(2)}\left(\frac{k}{2H_{inf}}\right) \right],$$

* Para uma descrição detalhada de cada um dos oito modelos considerados, indicamos ao leitor Santos da Costa et al. (2018) e referências lá citadas.

Tabela A.1.: Formas funcionais das parametrizações consideradas na análise Bayesiana.

Modelo	Parametrização
Power-law (PL)	$\mathcal{P}_{PL}(k) = A_s \left(\frac{k}{k_0}\right)^{n_s-1}$
<i>Running spectral index</i> (RN)	$\ln P(k) = \ln A_s + (n_s - 1) \ln\left(\frac{k}{k_0}\right) + \frac{\alpha_s}{2} \ln^2\left(\frac{k}{k_0}\right)$
<i>Sharp cutoff</i> (SC)	$P(k) = \begin{cases} A_s \left(\frac{k}{k_c}\right)^{n_s-1}, & \text{para } k > k_c \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$
<i>Exponential cutoff</i> (EC)	$P(k) = \mathcal{P}_{PL}(k) \left[1 - e^{-(k/k_c)^\alpha}\right]$
<i>Pre-inflationary radiation domination</i> (PIR)	$P(k) = A_s k^{1-n_s} \frac{1}{4y^4} \left e^{-2iy}(1+2iy) - 1 - 2y^2 \right ^2$
<i>Pre-inflationary kinetic domination</i> (PIK)	$P(k) = A_s^* \left(\frac{k}{k_0}\right)^{n_s-1} \frac{H_{inf}^2}{2\pi^2} k \left A - B \right ^2$
Starobinsky (SB)	$P(k) = \mathcal{P}_{PL}(k) \mathcal{D}^2(y, \Delta)$
<i>Starobinsky cutoff</i> (SBC)	$P(k) = \mathcal{P}_{PL}(k) \left[1 - e^{-(\epsilon k/k_c)^\alpha}\right] \mathcal{D}^2(y, \Delta)$

e

$$B = \frac{e^{ik/H_{inf}}}{\sqrt{32H_{inf}/\pi}} \left[\mathcal{H}_0^{(2)}\left(\frac{k}{2H_{inf}}\right) - \left(\frac{H_{inf}}{k} - i\right) \mathcal{H}_1^{(2)}\left(\frac{k}{2H_{inf}}\right) \right],$$

sendo H_{inf} o parâmetro de Hubble durante a inflação e $\mathcal{H}_0^{(2)}$ e $\mathcal{H}_1^{(2)}$ são as funções de Hankel de segundo tipo de ordem 0 e 1, respectivamente.

Por fim, para o modelo SB e SBC

$$\mathcal{D}^2(y, \Delta) = \left[1 + \frac{9\Delta^2}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y^3}\right)^2 + \frac{3\Delta}{2} \left(4 + 3\Delta - \frac{3\Delta}{y^4}\right) \frac{1}{y^2} \cos 2y + 3\Delta \left(1 - (1 + 3\Delta) \frac{1}{y^2} - \frac{3\Delta}{y^4}\right) \frac{1}{y} \sin 2y \right],$$

onde $y = k/k_c$ e $\Delta = \frac{A_+ - A_-}{A_+}$. Este modelo é caracterizado pelo potencial escalar

$$V(\phi) = \begin{cases} V_0 + A_+(\phi - \phi_0), & \text{para } \phi > \phi_0 \\ V_0 + A_-(\phi - \phi_0), & \text{para } \phi < \phi_0 \end{cases},$$

onde V_0 é o valor do potencial em $\phi = \phi_0$, e A_+ e A_- são parâmetros maiores do que 0.

A.1. Metodologia

A análise Bayesiana de comparação de modelos considera que o melhor modelo é aquele que alcança o melhor compromisso entre qualidade de ajuste aos dados e preditividade. Na prática, enquanto um modelo com mais parâmetros livres sempre ajustará melhor os dados (ou pelo menos tão bem quanto) do que um modelo com menos parâmetros, tal complexidade adicional deve ser evitada sempre que um modelo mais simples fornece uma descrição adequada das observações. Desta forma, a comparação Bayesiana de modelos avalia o quanto a complexidade extra de um modelo é requerida pelos dados, dando preferência modelos que descrevam bem os dados sobre um grande fração de volume do espaço de parâmetros.

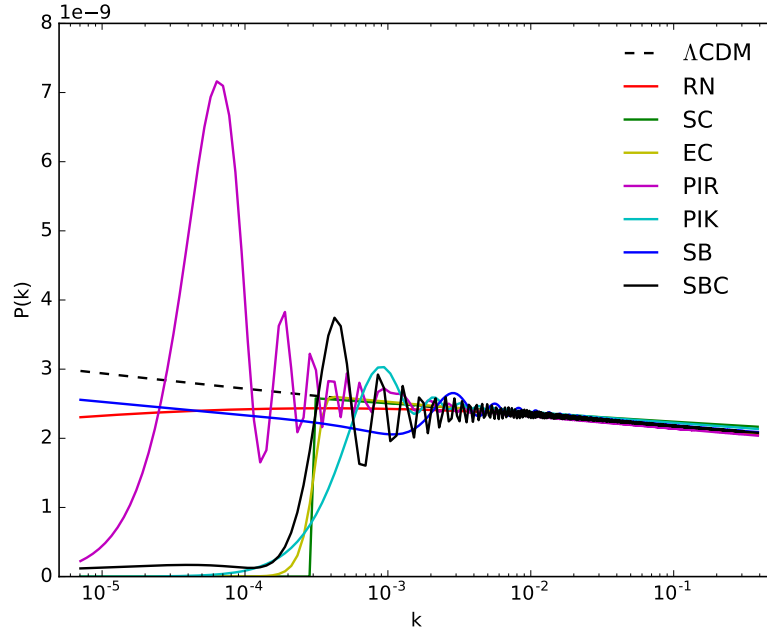


Figura A.1.: Espectro de potência primordial para os modelos analisados usando os valores de melhor ajuste da tabela (A.3).

A principal ferramenta para avaliação do desempenho de um modelo à luz dos dados é o que se chama de evidência Bayesiana, a qual é baseada no teorema de Bayes

$$p(\theta | d, M) = \frac{p(d | \theta, M)\pi(\theta | M)}{p(d | M)}, \quad (\text{A.2})$$

que relaciona a probabilidade posterior ($p(\theta | d, M)$) para os parâmetros θ dado que tenhamos os dados d e o modelo M , com a *likelihood* ($p(d | \theta, M)$) e a função de distribuição de probabilidade prévia ($\pi(\theta | M)$). A evidência, que aparece no denominador do teorema de Bayes, é dada por:

$$p(d | M) = \int_{\Omega} p(d | \theta, M)\pi(\theta | M)d\theta, \quad (\text{A.3})$$

onde Ω se refere ao espaço de parâmetros considerado pelo modelo M .

A discriminação entre dois modelos concorrentes pode ser obtida ao tomar-se a razão entre suas evidências:

$$B_{ij} \equiv \frac{p(d | M_i)}{p(d | M_j)}. \quad (\text{A.4})$$

Este termo é conhecido como fator de Bayes do modelo i relativo ao modelo j . A maneira mais usual de elencar os modelos de interesse é adotar a escala de Jeffrey para interpretar os valores de $\ln B_{ij}$ em termos da força da evidência de um modelo de referência escolhido M_j : $\ln B_{ij} = 0 - 1$, $\ln B_{ij} = 1 - 2.5$, $\ln B_{ij} = 2.5 - 5$ e $\ln B_{ij} > 5$ indica, respectivamente, uma preferência inconclusiva, fraca, moderada e forte do modelo M_i relativa ao modelo M_j (valores

Tabela A.2.: Limites de confiança de 68% para os parâmetros cosmológicos usando os dados do Planck TT+lowP.

Modelo	Parâmetro						
	$100 \Omega_b h^2$	$\Omega_c h^2$	θ	τ	$\ln 10^{10} A_s$	n_s	H_0
Λ CDM	2.222 ± 0.022	0.1197 ± 0.0021	1.04085 ± 0.00045	0.077 ± 0.018	3.088 ± 0.034	0.9654 ± 0.0059	67.32 ± 0.95
RN	2.237 ± 0.026	0.1196 ± 0.0021	1.04093 ± 0.00047	0.088 ± 0.021	3.112 ± 0.041	0.9652 ± 0.0062	67.51 ± 0.97
SC	2.221 ± 0.023	0.1197 ± 0.0022	1.04086 ± 0.00048	0.082 ± 0.019	3.284 ± 0.039	0.9652 ± 0.0061	67.32 ± 0.97
EC	2.224 ± 0.024	0.1197 ± 0.0022	1.04086 ± 0.00048	0.085 ± 0.022	3.104 ± 0.042	0.9651 ± 0.0066	67.34 ± 1.01
PIR	2.222 ± 0.023	0.1197 ± 0.0021	1.04086 ± 0.00046	0.076 ± 0.019	2.983 ± 0.046	1.035 ± 0.0061	67.33 ± 0.94
PIK	2.225 ± 0.024	0.1194 ± 0.0023	1.04089 ± 0.00049	0.084 ± 0.021	3.100 ± 0.040	0.9662 ± 0.0064	67.45 ± 1.02
SB	2.222 ± 0.023	0.120 ± 0.0022	1.04084 ± 0.00047	0.085 ± 0.020	3.104 ± 0.039	0.9641 ± 0.0065	67.18 ± 0.99
SBC	2.224 ± 0.0024	0.120 ± 0.0022	1.04089 ± 0.00048	0.084 ± 0.021	3.100 ± 0.040	0.9659 ± 0.0064	67.44 ± 1.00

negativos indicam o oposto, ou seja, uma preferência *inconclusiva*, fraca, moderada e forte do modelo M_j com respeito ao modelo M_i) (Jeffreys, 1998).

Para aplicar essa metodologia, foram adotados três códigos disponíveis na literatura: CAMB, CosmoMC e MULTINEST, necessários para gerar o espectro de potência, estimar parâmetros cosmológicos e realizar a comparação entre diferentes modelos, respectivamente. Inicialmente foi modificado o código CAMB (Lewis et al., 2000) para calcular o espectro de potência angular das anisotropias de temperatura da RCF para cada um dos oito modelos inflacionários considerados. A evidência, por sua vez, foi calculada implementando o algoritmo de amostragem aninhada do MULTINEST (Feroz and Hobson, 2008; Feroz et al., 2009, 2013) na versão mais recente do pacote CosmoMC (Lewis and Bridle, 2002).

Foi adotado o conjunto de dados da RCF fornecidos pela Colaboração Planck (Aghanim et al., 2016a), que considera dados de temperatura em altos- ℓ dos mapas de temperatura da missão completa em 100-, 143-, e 217-GHz, $30 < \ell < 2508$, e dados de polarização em baixos multipolos (*low-P*), $2 < l < 29$. Além disso, foi adotado o modelo Λ CDM como o modelo de referência, o qual está parametrizado com o seu conjunto usual de parâmetros: densidade bariônica ($\Omega_b h^2$), densidade de matéria escura ($\Omega_c h^2$), a razão entre o horizonte do som e a distância de diâmetro angular no desacoplamento (θ), a profundidade ótica (τ), a amplitude escalar primordial (A_s) e o índice espectral (n_s).

A.2. Resultados

Os resultados principais dessa análise são mostrados nas tabelas (A.2) e (A.3), onde estão listadas as restrições para os parâmetros cosmológicos usuais e para os parâmetros primordiais extras, para os oito modelos considerados em Santos da Costa et al. (2018). Nas últimas linhas da tabela (A.3), são apresentados os valores de $\Delta\chi^2_{best}$ e $\ln B_{ij}$ (fator de Bayes) obtidos considerando a cosmologia Λ CDM como referência. O painel esquerdo da figura (A.2) mostra os contornos 2D e as distribuições posteriores uni-dimensionais para os parâmetros que descrevem o modelo RN nos níveis de confiança de 68% e 95%. Adicionalmente, é mostrado no painel direito da figura (A.2) o espectro de potência angular para todos os modelos examinados, os quais são obtidos utilizando os valores de melhor ajuste da tabela (A.3).

Tabela A.3.: Limites de confiança de 68% para os parâmetros primordiais usando os dados do Planck TT+lowP. Os valores de $\Delta\chi^2_{best}$ e $\ln B_{ij}$ referem-se à diferença com respeito ao modelo Λ CDM, ou seja $\Delta\chi^2_{best} = \chi^2_{\Lambda\text{CDM}} - \chi^2_{\text{modelo}}$.

Parâmetro	Modelo						
	RN	SC	EC	PIR	PIK	SB	SBC
α_s	Média	-0.0088 ± 0.0078
	Melhor ajuste	-0.007
$10^4 k_c$	Média	...	2.478 ± 0.894	3.006 ± 1.654	< 0.5682	...	< 14.57
	Melhor ajuste	...	3.035	4.716	0.343	...	8.175
α	Média	< 7.764
	Melhor ajuste	0.578
$10^4 H_{inf}$	Média	2.475 ± 1.257	...
	Melhor ajuste	3.475	...
Δ	Média	0.0859 ± 0.0856
	Melhor ajuste	0.0811
$\Delta\chi^2_{best}$	0.89	-1.18	-1.36	-0.31	1.56	3.46	-0.21
$\ln B_{ij}$	-2.9	-17.7	-	-19.6	-19.7	-14.4	-
Força da Evidência	Moderada	Forte	-	Forte	Forte	Forte	-

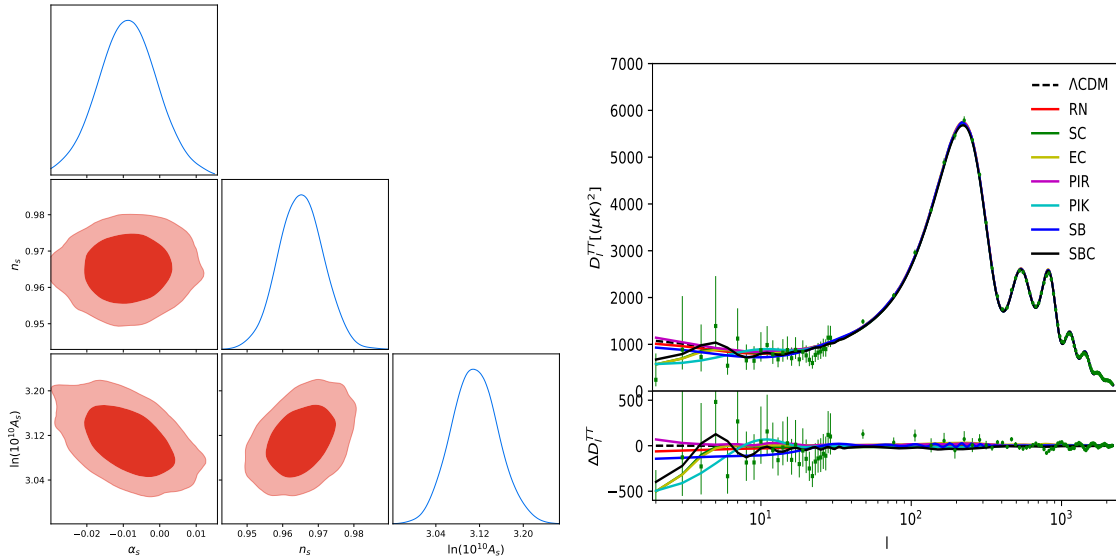


Figura A.2.: *Esquerda:* Distribuições de probabilidade bi-dimensional e uni-dimensional para os parâmetros A_s , n_s e α_s do espectro de potência primordial para o modelo RN. *Direita:* Espectro de potência angular de melhor ajuste para todos os modelos considerados na análise. Os pontos correspondem aos dados do Planck (Aghanim et al., 2016a) e o painel inferior mostra os resíduos com respeito ao modelo de referência (Λ CDM).

É possível ainda comparar nossos resultados com o trabalho recente de Iqbal et al. (2015) (IQ15), onde foi realizada uma análise MCMC utilizando os dados do WMAP-9anos (Hinshaw et al., 2013) juntamente com a primeira liberação de dados da colaboração Planck (Ade et al., 2014). Estes autores adotaram os critérios de seleção de modelos *Akaike Information Criteria* (AIC) e *Bayesian Information Criteria* (BIC), que consideram apenas o ponto que maximiza a distribuição de probabilidade posterior para comparar os modelos, levando em conta o número de pontos de dados e o número de parâmetros extras dos modelos considerados. Esses métodos diferem da abordagem de comparação de modelos Bayesiana discutida anteriormente, uma vez que, nesta última a comparação de modelos leva em conta todo o espaço de parâmetros.

Foi observado que a introdução de características primordiais não produz mudanças significativas nas restrições dos parâmetros cosmológicos. A única exceção se dá para o modelo PIR, cujo valor médio do índice espectral n_s cresce até atingir um *red tilt* ($n_s > 1$). Nossos resultados para o modelo RN são completamente consistentes com aqueles encontrados por IQ15 e a análise mais recente da Colaboração Planck (Ade et al., 2016a), confirmando que o valor zero para o *running* do índice espectral α_s está fora do nível de confiança de 68%. Mesmo com um χ^2 melhor com relação ao modelo PL, o desvio do modelo cosmológico padrão é muito pequeno para ser suportado pelos dados e encontramos que este modelo é moderadamente descartado, confirmando também os resultados recentes de Heavens et al. (2017).

Para a parametrização empírica SC, as restrições para a escala de corte k_c mostra um bom acordo com aquele encontrado por IQ15. Contudo, a comparação Bayesiana de modelos realizada mostra que o modelo SC é fortemente descartado com relação ao modelo PL, enquanto que o valor de AIC encontrado por IQ15 para este modelo indica que ele é tão bom quanto o modelo PL.

A diferença dos modelos EC e SBC é que a distribuição de densidade de probabilidade para o parâmetro α nunca vai a zero, ou seja, não possui um volume fechado. Isto implica que não é possível calcular uma evidência Bayesiana apropriada, e no melhor dos casos podemos apenas calcular os valores de AIC e BIC para esses modelos afim de compará-los com outros trabalhos. Isto continua a acontecer mesmo se aumentamos a faixa do prior para α , uma vez que as predições não mudam para valores altos desse parâmetro. Assim, foi calculado o valor de BIC, dado por

$$BIC = -2 \ln \mathcal{L}(d|\theta) + k \ln N,$$

onde o número de pontos N é 2499 (multipolos do Planck CamSpec+commander) e os números de parâmetros extras são $k = 2$ e $k = 3$, para os modelos EC e SBC, respectivamente. Desta forma, $\Delta BIC \equiv BIC_i - BIC_{\Lambda CDM}$ representa a preferência do modelo de referência sobre o modelo i , e $\Delta BIC \leq 2$, $2 < \Delta BIC \leq 6$, $6 < \Delta BIC \leq 10$ e $\Delta BIC \geq 10$ significa um suporte para o modelo de referência do tipo fraco, positivo, forte e muito forte, respectivamente (Kass and Raftery, 1995). Comparando, então, o modelo EC com o Λ CDM encontramos que $\Delta BIC = 17.01$, o que significa que o modelo PL é fortemente favorecido sobre o modelo EC, o que

está também em acordo com o que IQ15 encontraram. Ao mesmo tempo, o modelo SBC exibe $\Delta BIC = 23.68$, o que significa que é fortemente desfavorecido com respeito ao modelo padrão.

Por fim, lidando com os modelos fisicamente motivados, temos que a escala de corte da parametrização PIR está em acordo com as restrições de IQ15. Como podemos ver no painel da direita da Fig. (A.2) (linha magenta) sua predição é muito próxima da curva do Λ CDM ($\Delta\chi_{best}^2 \sim 0$). Para o modelo PIK, encontramos um valor de k_c maior do que o encontrado por IQ15. Isto implica em uma oscilação estendida (até $\ell \sim 20$) e uma potência menor em grandes escalas. O fator de Bayes mostra que estes modelos são fortemente desfavorecidos comparados com o modelo PL, o que está em acordo com os resultados de IQ15. Para o modelo SB, encontramos que as restrições nos parâmetros primordiais (k_c e Δ) são completamente consistentes com aqueles encontrados por IQ15, todavia, o resultado da seleção de modelos está em desacordo. Os resultados de IQ15 (AIC) favorecem esse modelo com respeito ao modelo de referência, enquanto nossa análise Bayesiana indica que ele é fortemente desfavorecido.

A partir da análise Bayesiana de comparação de modelos e do critério BIC empregados neste estudo, observamos que os dados recentes da RCF favorecem o modelo de lei de potência, adotado na cosmologia padrão Λ CDM, com forte evidência com respeito a todos os outros modelos considerados nesse estudo (veja Tabela A.3). Enfatizamos, ainda, que tais resultados constituem a primeira análise na literatura que considera uma comparação de modelos Bayesiana para a maioria dos modelos considerados e que os resultados encontrados descartam estes modelos como uma possível explicação para a falta de potência observada em grandes escalas angulares no espectro de potência da RCF e motiva, portanto, a busca por soluções alternativas.

B Lista de Publicações

- “An extension of the Starobinsky inflationary model”;
Santos da Costa, S., Benetti, M., Silva, R., Neves, R.M.P., Alcaniz, J. S.;
em preparação (2019).
- “Observational constraints on Gauss-Bonnet cosmology”;
Benetti, M., **Santos da Costa, S.**, Capozziello, S., Alcaniz, J. S., De Laurentis, M. F.;
International Journal of Modern Physics D 27, 8, 1850084 (2018).
- “Dynamical analysis on $f(R, \mathcal{G})$ cosmology”;
Santos da Costa, S., Roig, F. V., Alcaniz, J. S., Capozziello, S., De Laurentis, M. F.,
Benetti, M.;
Classical and Quantum Gravity 35, 075013 (2018).
- “A Bayesian analysis of inflationary primordial spectrum models using Planck data”;
Santos da Costa, S., Benetti, M., Alcaniz, J.;
Journal of Cosmology and Astroparticle Physics 03, 004 (2018).
- “Searching for deviations from the general relativity theory with gas mass fraction of galaxy clusters and complementary probes”;
Holanda, R.F.L., Pereira, S.H., **Santos da Costa, S.**;
Physical Review D 95, 084006 (2017).
- “Two new tests to the distance duality relation with galaxy clusters”;
Santos da Costa, S., Busti, V.C., Holanda, R.F.L.
JCAP Journal of Cosmology and Astroparticle Physics 010, 061 (2015).

Referências Bibliográficas

- Abbott, B. et al. (2017). GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral. *Phys. Rev. Lett.*, 119(16):161101. [pg: 35, 77]
- Abbott, B. P. and *et al.* (2016). Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116:061102. [pg: 2, 7]
- Adams, J. C. (1846). Explanation of the observed irregularities in the motion of uranus, on the hypothesis of disturbance by a more distant planet; with a determination of the mass, orbit, and position of the disturbing body. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 7:149–152. [pg: 1]
- Ade, P., Aghanim, N., Arnaud, M., Arroja, F., Ashdown, M., Aumont, J., Baccigalupi, C., Ballardini, M., Banday, A., Barreiro, R., et al. (2016a). Planck 2015 results-xx. constraints on inflation. *Astronomy & Astrophysics*, 594:A20. [pg: 13, 77, 112]
- Ade, P. A., Aghanim, N., Armitage-Caplan, C., Arnaud, M., Ashdown, M., Atrio-Barandela, F., Aumont, J., Baccigalupi, C., Banday, A. J., Barreiro, R., et al. (2014). Planck 2013 results. xv. cmb power spectra and likelihood. *Astronomy & Astrophysics*, 571:A15. [pg: 87, 97, 112]
- Ade, P. A. R. et al. (2016b). Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 594:A13. [pg: 83]
- Aghanim, N., Akrami, Y., Ashdown, M., Aumont, J., Baccigalupi, C., Ballardini, M., Banday, A., Barreiro, R., Bartolo, N., Basak, S., et al. (2018). Planck 2018 results. vi. cosmological parameters. *arXiv preprint arXiv:1807.06209*. [pg: 24, 100]
- Aghanim, N., Arnaud, M., Ashdown, M., Aumont, J., Baccigalupi, C., Banday, A., Barreiro, R., Bartlett, J., Bartolo, N., Battaner, E., et al. (2016a). Planck 2015 results-xi. cmb power spectra, likelihoods, and robustness of parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 594:A11. [pg: 13, 110, 111]

- Aghanim, N. et al. (2016b). Planck 2015 results. XI. CMB power spectra, likelihoods, and robustness of parameters. *Astron. Astrophys.*, 594:A11. [pg: 78, 81, 83]
- Akrami, Y., Arroja, F., Ashdown, M., Aumont, J., Baccigalupi, C., Ballardini, M., Banday, A., Barreiro, R., Bartolo, N., Basak, S., et al. (2018). Planck 2018 results. x. constraints on inflation. *arXiv preprint arXiv:1807.06211*. [pg: 3, 10, 24, 77, 87]
- Akune, K., Maeda, K.-i., and Ohta, N. (2006). Inflation from superstring and m-theory compactification with higher order corrections.-ii.-case of quartic weyl terms. *Physical Review D*, 73(10):103506. [pg: 28]
- Alam, U. and Sahni, V. (2006). Confronting braneworld cosmology with supernova data and baryon oscillations. *Phys. Rev.*, D73:084024. [pg: 34]
- Albrecht, A. and Steinhardt, P. J. (1982). Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking. *Phys. Rev. Lett.*, 48:1220–1223. [Adv. Ser. Astrophys. Cosmol.3,158(1987)]. [pg: 3]
- Alcaniz, J. S. (2002). Some observational consequences of brane world cosmologies. *Phys. Rev. D*, 65:123514. [pg: 11, 31]
- Alcaniz, J. S. (2006). Dark Energy and Some Alternatives: A Brief Overview. *Braz. J. Phys.*, 36:1109. [pg: 105]
- Alcaniz, J. S. and Lima, J. A. S. (1999). New limits on Ω_Λ and Ω_m from old galaxies at high redshift. *Astrophys. J.*, 521:L87. [pg: 2]
- Amendola, L. (2000). Coupled quintessence. *Phys. Rev. D*, 62:043511. [pg: 48]
- Amendola, L., Gannouji, R., Polarski, D., and Tsujikawa, S. (2007a). Conditions for the cosmological viability of f(R) dark energy models. *Phys. Rev.*, D75:083504. [pg: 44, 45, 50, 51, 53, 54, 63, 67, 71, 73]
- Amendola, L., Polarski, D., and Tsujikawa, S. (2007b). Are $f(r)$ dark energy models cosmologically viable? *Phys. Rev. Lett.*, 98:131302. [pg: 45, 47, 52]
- Amendola, L., Polarski, D., and Tsujikawa, S. (2007c). Power-laws f(R) theories are cosmologically unacceptable. *Int. J. Mod. Phys.*, D16:1555–1561. [pg: 47]
- Amendola, L. and Tsujikawa, S. (2010). *Dark energy: theory and observations*. Cambridge University Press. [pg: 105]
- Anderson, L. and et al (2014). The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: baryon acoustic oscillations in the Data Releases 10 and 11 Galaxy samples. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 441(1):24–62. [pg: 13]

- Anishchenko, V. S., Vadvivasova, T. E., and Strelkova, G. I. (2014). Stability of dynamical systems: Linear approach. In *Deterministic Nonlinear Systems*, pages 23–35. Springer. [pg: 43, 44]
- Antoniadis, I. (2007). Gravity modifications from extra dimensions. *J. Phys. Conf. Ser.*, 68:012013. [pg: 30, 32]
- Antoniadis, I., Arkani-Hamed, N., Dimopoulos, S., and Dvali, G. (1998). New dimensions at a millimeter to a fermi and superstrings at a TeV. *Physics Letters B*, 436:257–263. [pg: 29]
- Antoniadis, I., Rizos, J., and Tamvakis, K. (1994). Singularity - free cosmological solutions of the superstring effective action. *Nucl. Phys.*, B415:497–514. [pg: 53, 64]
- Arkani-Hamed, N., Dimopoulos, S., and Dvali, G. R. (1998). The Hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. *Phys. Lett.*, B429:263–272. [pg: 30]
- Armendariz-Picon, C., Mukhanov, V., and Steinhardt, P. J. (2001). Essentials of k-essence. *Physical Review D*, 63(10):103510. [pg: 10]
- Artymowski, M. and Lalak, Z. (2014). Inflation and dark energy from $f(R)$ gravity. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2014(09):036. [pg: 24, 25]
- Babichev, E. and Deffayet, C. (2013). An introduction to the vainshtein mechanism. *Classical and Quantum Gravity*, 30(18):184001. [pg: 36]
- Bahamonde, S., Böhmer, C. G., Carloni, S., Copeland, E. J., Fang, W., and Tamanini, N. (2018). Dynamical systems applied to cosmology: dark energy and modified gravity. *Phys. Rept.*, 775-777:1–122. [pg: 62]
- Baker, T., Bellini, E., Ferreira, P. G., Lagos, M., Noller, J., and Sawicki, I. (2017). Strong constraints on cosmological gravity from gw170817 and grb 170817a. *Phys. Rev. Lett.*, 119:251301. [pg: 36]
- Ballardini, M., Finelli, F., Umiltà, C., and Paoletti, D. (2016). Cosmological constraints on induced gravity dark energy models. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2016(05):067. [pg: 13]
- Bamba, K., Myrzakulov, R., Odintsov, S. D., and Sebastiani, L. (2014). Trace-anomaly driven inflation in modified gravity and the BICEP2 result. *Phys. Rev.*, D90(4):043505. [pg: 63]
- Banados, M. (2008). Eddington-Born-Infeld action for dark matter and dark energy. *Phys. Rev.*, D77:123534. [pg: 15]
- Bañados, M., Ferreira, P. G., and Skordis, C. (2009). Eddington-born-infeld gravity and the large scale structure of the universe. *Physical Review D*, 79(6):063511. [pg: 15, 16]

- Banados, M., Gomberoff, A., Rodrigues, D. C., and Skordis, C. (2009). Note on bigravity and dark matter. *Physical Review D*, 79(6):063515. [pg: 15]
- Barboza Jr., E. M. (2010). *Sobre a expansão acelerada do Universo e a natureza da energia escura*. PhD thesis, Observatório Nacional, Rio de Janeiro - RJ. [pg: 11]
- Barrow, J. D. (1993). Scalar-tensor cosmologies. *Physical Review D*, 47(12):5329. [pg: 11]
- Barrow, J. D. and Hervik, S. (2006). On the evolution of universes in quadratic theories of gravity. *Phys. Rev.*, D74:124017. [pg: 63]
- Barrow, J. D. and ichi Maeda, K. (1990). Extended inflationary universes. *Nuclear Physics B*, 341(1):294 – 308. [pg: 87]
- Barth, N. H. and Christensen, S. M. (1983). Quantizing Fourth Order Gravity Theories. 1. The Functional Integral. *Phys. Rev.*, D28:1876. [pg: 84]
- Bartolo, N., Matarrese, S., and Riotto, A. (2001). Adiabatic and isocurvature perturbations from inflation: Power spectra and consistency relations. *Phys. Rev. D*, 64:123504. [pg: 93]
- Bartolo, N. and Pietroni, M. (1999). Scalar-tensor gravity and quintessence. *Physical Review D*, 61(2):023518. [pg: 11]
- Baumann, D. (2009). Tasi lectures on inflation. *arXiv preprint arXiv:0907.5424*. [pg: 92]
- Baumann, D. (2018). Tasi lectures on primordial cosmology. *arXiv preprint arXiv:1807.03098*. [pg: 92]
- Belinski, V. A. and Khalatnikov, I. M. (1973). Effect of Scalar and Vector Fields on the Nature of the Cosmological Singularity. *Sov. Phys. JETP*, 36:591. [pg: 87]
- Benetti, M., Santos da Costa, S., Capozziello, S., Alcaniz, J. S., and De Laurentis, M. (2018). Observational constraints on Gauss–Bonnet cosmology. *Int. J. Mod. Phys.*, D27(08):1850084. [pg: 5, 37, 77]
- Bennítez, N. and Dupke, R. (2015). Javalambre physics of the accelerating universe astrophysical survey. <http://www.j-pas.org/>. [pg: 106]
- Bergmann, P. G. (1968). Comments on the scalar-tensor theory. *International Journal of Theoretical Physics*, 1(1):25–36. [pg: 11, 12]
- Bertotti, B., Iess, L., and Tortora, P. (2003). A test of general relativity using radio links with the cassini spacecraft. *Nature*, 425(6956):374. [pg: 13]
- Betoule, M. et al. (2014). Improved cosmological constraints from a joint analysis of the SDSS-II and SNLS supernova samples. *Astron. Astrophys.*, 568:A22. [pg: 78, 81]

- Bettoni, D., Ezquiaga, J. M., Hinterbichler, K., and Zumalacárregui, M. (2017). Speed of gravitational waves and the fate of scalar-tensor gravity. *Phys. Rev. D*, 95:084029. [pg: 36]
- Beutler, F. et al. (2014). The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: Testing gravity with redshift-space distortions using the power spectrum multipoles. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 443(2):1065–1089. [pg: 78, 81]
- Birrell, N. D. and Davies, P. C. W. (1984). *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK. [pg: 9, 28, 84]
- Boehmer, C. G. and Chan, N. (2014). Dynamical systems in cosmology. In *LTCC Advanced Mathematics Series: Volume 5 Dynamical and Complex Systems*, pp. 121-156 (2017). [pg: 39, 40, 43, 44]
- Bowtell, G. (2008). Dynamical systems year 2. [pg: 44]
- Brans, C. and Dicke, R. H. (1961a). Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. *Phys. Rev.*, 124:925–935. [pg: 3]
- Brans, C. and Dicke, R. H. (1961b). Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. *Physical review*, 124(3):925. [pg: 13]
- Brans, C. H. (2005). The roots of scalar-tensor theory: an approximate history. *arXiv preprint gr-qc/0506063*. [pg: 11]
- Brax, P. and van de Bruck, C. (2003). Cosmology and brane worlds: a review. *Classical and Quantum Gravity*, 20(9):R201. [pg: 30]
- Buras, A. J., Ellis, J., Gaillard, M. K., and Nanopoulos, D. V. (1978). Aspects of the grand unification of strong, weak and electromagnetic interactions. *Nuclear Physics B*, 135(1):66–92. [pg: 9]
- Cai, Y.-F., Li, C., Saridakis, E. N., and Xue, L.-Q. (2018). $f(t)$ gravity after gw170817 and grb170817a. *Physical Review D*, 97(10):103513. [pg: 37]
- Calcagni, G., de Carlos, B., and De Felice, A. (2006). Ghost conditions for Gauss-Bonnet cosmologies. *Nucl. Phys.*, B752:404–438. [pg: 64]
- Caldwell, R. (1998). Rr caldwell, r. dave, and pj steinhardt, phys. rev. lett. 80, 1582 (1998). *Phys. Rev. Lett.*, 80:1582. [pg: 10]
- Caldwell, R. R. and Kamionkowski, M. (2009). The physics of cosmic acceleration. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 59:397–429. [pg: 12]

- Campista, M., Benetti, M., and Alcaniz, J. (2017). Testing non-minimally coupled inflation with cmb data: a bayesian analysis. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2017(09):010. [pg: 100, 105]
- Capozziello, S. (2002a). Curvature quintessence. *International Journal of Modern Physics D*, 11(04):483–491. [pg: 3, 4, 77]
- Capozziello, S. (2002b). Curvature quintessence. *International Journal of Modern Physics D*, 11(04):483–491. [pg: 11, 17]
- Capozziello, S., Cardone, V. F., Carloni, S., and Troisi, A. (2003). Curvature quintessence matched with observational data. *International Journal of Modern Physics D*, 12(10):1969–1982. [pg: 11]
- Capozziello, S. and De Laurentis, M. (2011a). Extended theories of gravity. *Physics Reports*, 509(4):167 – 321. [pg: 4]
- Capozziello, S. and De Laurentis, M. (2011b). Extended Theories of Gravity. *Phys. Rept.*, 509:167–321. [pg: 35]
- Capozziello, S., De Laurentis, M., and Faraoni, V. (2009). The special issue in cosmology. *Open Astron. J*, 2:1874. [pg: 4]
- Capozziello, S., De Laurentis, M., and Odintsov, S. D. (2014a). Noether symmetry approach in gauss–bonnet cosmology. *Modern Physics Letters A*, 29(30):1450164. [pg: 4, 104]
- Capozziello, S., De Laurentis, M., and Odintsov, S. D. (2014b). Noether Symmetry Approach in Gauss-Bonnet Cosmology. *Mod. Phys. Lett.*, A29(30):1450164. [pg: 64, 69, 86]
- Capozziello, S., de Ritis, R., Rubano, C., and Scudellaro, P. (1996). Nöther symmetries in cosmology. *La Rivista del Nuovo Cimento (1978-1999)*, 19(4):1–114. [pg: 10]
- Capozziello, S. and Francaviglia, M. (2008a). Extended theories of gravity and their cosmological and astrophysical applications. *General Relativity and Gravitation*, 40(2):357–420. [pg: 4]
- Capozziello, S. and Francaviglia, M. (2008b). Extended theories of gravity and their cosmological and astrophysical applications. *General Relativity and Gravitation*, 40(2-3):357–420. [pg: 11]
- Capozziello, S., Nojiri, S., Odintsov, S. D., and Troisi, A. (2006). Cosmological viability of $f(R)$ -gravity as an ideal fluid and its compatibility with a matter dominated phase. *Phys. Lett.*, B639:135–143. [pg: 47]
- Carloni, S., Dunsby, P. K. S., Capozziello, S., and Troisi, A. (2005). Cosmological dynamics of R^{*n} gravity. *Class. Quant. Grav.*, 22:4839–4868. [pg: 44, 63, 67, 86]

- Carloni, S., Koivisto, T., and Lobo, F. S. N. (2015). Dynamical system analysis of hybrid metric-Palatini cosmologies. *Phys. Rev.*, D92(6):064035. [pg: 44, 67]
- Carloni, S. and Mimoso, J. P. (2017). Phase space of modified Gauss–Bonnet gravity. *Eur. Phys. J.*, C77(8):547. [pg: 62]
- Carloni, S., Rosa, J. L., and Lemos, J. P. S. (2018). Cosmology of $f(R, \square R)$ gravity. [pg: 44]
- Carloni, S., Troisi, A., and Dunsby, P. K. S. (2009). Some remarks on the dynamical systems approach to fourth order gravity. *Gen. Rel. Grav.*, 41:1757–1776. [pg: 63]
- Carroll, S. M. (2001). The Cosmological constant. *Living Rev. Rel.*, 4:1. [pg: 105]
- Carroll, S. M., De Felice, A., Duvvuri, V., Easson, D. A., Trodden, M., and Turner, M. S. (2005a). Cosmology of generalized modified gravity models. *Physical Review D*, 71(6):063513. [pg: 28]
- Carroll, S. M., De Felice, A., Duvvuri, V., Easson, D. A., Trodden, M., and Turner, M. S. (2005b). The Cosmology of generalized modified gravity models. *Phys. Rev.*, D71:063513. [pg: 53]
- Cartier, C., Copeland, E. J., and Madden, R. (2000). The Graceful exit in string cosmology. *JHEP*, 01:035. [pg: 53]
- Casalino, A., Rinaldi, M., Sebastiani, L., and Vagnozzi, S. (2018). Alive and well: mimetic gravity and a higher-order extension in light of GW170817. *Classical and Quantum Gravity*, 36(1):017001. [pg: 35]
- Cavaglia, M. (2003). Black hole and brane production in TeV gravity: A Review. *Int. J. Mod. Phys.*, A18:1843–1882. [pg: 31]
- Cesarsky, C. (2012). The square kilometre array (ska). <https://www.skatelescope.org/the-ska-project/>. [pg: 106]
- Charmousis, C., Gregory, R., Kaloper, N., and Padilla, A. (2006). DGP Spectroscopy. *JHEP*, 10:066. [pg: 34]
- Cheung, K. (2003). Collider phenomenology for models of extra dimensions. In *DPF 2003: Annual Meeting of the Division of Particles and Fields (DPF) of the American Physical Society (APS) Philadelphia, Pennsylvania, April 5-8, 2003*. [pg: 31]
- Chiba, T. (1999). Quintessence, the gravitational constant, and gravity. *Physical Review D*, 60(8):083508. [pg: 11]
- Chiba, T. (2003). $1/R$ gravity and scalar - tensor gravity. *Phys. Lett.*, B575:1–3. [pg: 19]

- Chiba, T., Okabe, T., and Yamaguchi, M. (2000). Kinetically driven quintessence. *Physical Review D*, 62(2):023511. [pg: 10]
- Chung, D. J. H. and Freese, K. (2000). Can geodesics in extra dimensions solve the cosmological horizon problem? *Phys. Rev. D*, 62:063513. [pg: 36]
- Clifton, T. and Barrow, J. D. (2005). The existence of gödel, einstein, and de sitter universes. *Physical Review D*, 72(12):123003. [pg: 27]
- Clifton, T., Ferreira, P. G., Padilla, A., and Skordis, C. (2012). Modified gravity and cosmology. *Physics reports*, 513(1-3):1–189. [pg: 3, 11, 13, 14, 16, 26, 27, 29, 32]
- Codello, A., Joergensen, J., Sannino, F., and Svendsen, O. (2015). Marginally Deformed Starobinsky Gravity. *JHEP*, 02:050. [pg: 25]
- Cognola, G., Elizalde, E., Nojiri, S., Odintsov, S., and Zerbini, S. (2007). String-inspired Gauss-Bonnet gravity reconstructed from the universe expansion history and yielding the transition from matter dominance to dark energy. *Phys. Rev.*, D75:086002. [pg: 53]
- Cognola, G., Elizalde, E., Nojiri, S., Odintsov, S. D., and Zerbini, S. (2006). Dark energy in modified Gauss-Bonnet gravity: Late-time acceleration and the hierarchy problem. *Phys. Rev.*, D73:084007. [pg: 63]
- Cognola, G. and Zerbini, S. (2008). Homogeneous cosmologies in generalized modified gravity. *International Journal of Theoretical Physics*, 47(12):3186–3200. [pg: 28]
- Coley, A. A. (1999). Dynamical systems in cosmology. In *Spanish Relativity Meeting (ERE 99) Bilbao, Spain, September 7-10, 1999*. [pg: 40, 44]
- Conley, A. et al. (2011). Supernova Constraints and Systematic Uncertainties from the First 3 Years of the Supernova Legacy Survey. *Astrophys. J. Suppl.*, 192:1. [pg: 34]
- Copeland, E. J. (2004). *Inflation – In the Early Universe and Today*, pages 53–107. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg. [pg: 3]
- Copeland, E. J., Liddle, A. R., and Wands, D. (1998). Exponential potentials and cosmological scaling solutions. *Physical Review D*, 57(8):4686. [pg: 10]
- Copeland, E. J., Sami, M., and Tsujikawa, S. (2006). Dynamics of dark energy. *Int. J. Mod. Phys.*, D15:1753–1936. [pg: 105]
- Creminelli, P. and Vernizzi, F. (2017). Dark energy after gw170817 and grb170817a. *Phys. Rev. Lett.*, 119:251302. [pg: 36]

- Daxecker, F. (2004). The physicist and astronomer christoper scheiner-biography letters, works. *The Physicist and Astronomer Christopher Scheiner-Biography, Letters, Works, by Franz Daxecker. Innsbruck, Austria: Publications at Innsbruck University, 2004.* [pg: 1]
- De Felice, A. and Suyama, T. (2009a). Vacuum structure for scalar cosmological perturbations in modified gravity models. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2009(06):034. [pg: 4]
- De Felice, A. and Suyama, T. (2009b). Vacuum structure for scalar cosmological perturbations in Modified Gravity Models. *JCAP*, 0906:034. [pg: 64]
- De Felice, A., Suyama, T., and Tanaka, T. (2011). Stability of schwarzschild-like solutions in $f(r, g)$ gravity models. *Physical Review D*, 83(10):104035. [pg: 4]
- De Felice, A. and Tanaka, T. (2010). Inevitable ghost and the degrees of freedom in $f(R, G)$ gravity. *Prog. Theor. Phys.*, 124:503–515. [pg: 64]
- De Felice, A. and Tsujikawa, S. (2009a). Construction of cosmologically viable $f(G)$ dark energy models. *Phys. Lett.*, B675:1–8. [pg: 63]
- De Felice, A. and Tsujikawa, S. (2009b). Construction of cosmologically viable $f(g)$ gravity models. *Physics Letters B*, 675(1):1 – 8. [pg: 4]
- De Felice, A. and Tsujikawa, S. (2009c). Solar system constraints on $f(\mathcal{G})$ gravity models. *Phys. Rev. D*, 80:063516. [pg: 4]
- De Felice, A. and Tsujikawa, S. (2010). $f(R)$ theories. *Living Rev. Rel.*, 13:3. [pg: 11, 17, 25, 26]
- de la Cruz-Dombriz, A. and Saez-Gomez, D. (2012). On the stability of the cosmological solutions in $f(R, G)$ gravity. *Class. Quant. Grav.*, 29:245014. [pg: 64]
- De la Cruz-Dombriz, A. and Sáez-Gómez, D. (2012). Black holes, cosmological solutions, future singularities, and their thermodynamical properties in modified gravity theories. *Entropy*, 14(9):1717–1770. [pg: 4]
- De Laurentis, M. (2015a). Topological invariant quintessence. *Modern Physics Letters A*, 30(12):1550069. [pg: 4]
- De Laurentis, M. (2015b). Topological invariant quintessence. *Mod. Phys. Lett.*, A30(12):1550069. [pg: 64, 78, 86]
- De Laurentis, M. and Lopez-Revelles, A. J. (2014a). Newtonian, Post Newtonian and Parameterized Post Newtonian limits of $f(R, G)$ gravity. *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, 11:1450082. [pg: 64, 86, 104]

- De Laurentis, M. and Lopez-Revelles, A. J. (2014b). Newtonian, post-newtonian and parametrized post-newtonian limits of $f(r, \mathcal{G})$ gravity. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 11(10):1450082. [pg: 4]
- De Laurentis, M., Paoletta, M., and Capozziello, S. (2015). Cosmological inflation in $F(R, \mathcal{G})$ gravity. *Phys. Rev.*, D91(8):083531. [pg: 53, 64, 69, 74, 77, 84]
- De Witt, B. (1963). Dynamical theory of groups and fields. *Relativity, groups and topology*, 787. [pg: 27]
- Deffayet, C. (2001). Cosmology on a brane in minkowski bulk. *Physics Letters B*, 502(1):199 – 208. [pg: 31, 33]
- Deffayet, C., Dvali, G. R., and Gabadadze, G. (2002). Accelerated universe from gravity leaking to extra dimensions. *Phys. Rev.*, D65:044023. [pg: 31, 33]
- Dialektopoulos, K. F. and Capozziello, S. (2018). Noether Symmetries as a geometric criterion to select theories of gravity. *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, 15(supp01):1840007. [pg: 10]
- Dodelson, S. (2003). *Modern cosmology*. Elsevier. [pg: 83]
- Dodwell, G. F. and Davidson, C. (1924). Determination of the deflection of light by the sun's gravitational field from observations made at cordillo downs, south australia, during the total eclipse of 1922 september 21. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 84:150. [pg: 1, 7]
- Drake, S. (1973). Galileo's discovery of the law of free fall. *Scientific American*, 228(5):84–93. [pg: 1]
- Drake, S. (2003). *Galileo at work: his scientific biography*. Courier Corporation. [pg: 1]
- Drake, S. et al. (1957). *Discoveries and opinions of Galileo*. Doubleday New York. [pg: 1]
- Drummond, I. (2001). Bimetric gravity and “dark matter”. *Physical Review D*, 63(4):043503. [pg: 14, 15]
- Dvali, G., Gabadadze, G., and Porrati, M. (2000a). 4d gravity on a brane in 5d minkowski space. *Physics Letters B*, 485(1-3):208–214. [pg: 11]
- Dvali, G. R., Gabadadze, G., and Porrati, M. (2000b). 4-D gravity on a brane in 5-D Minkowski space. *Phys. Lett.*, B485:208–214. [pg: 31, 32]
- Easson, D. A. (2004). Modified gravitational theories and cosmic acceleration. *International Journal of Modern Physics A*, 19(31):5343–5350. [pg: 28]
- Einstein, A. (1925). Sitzungsber. *Kgl. Preuss. Akad. Wiss*, 3:1925. [pg: 20]

- Einstein, A. et al. (1916). The foundation of the general theory of relativity. *Annalen der Physik*, 49(7):769–822. [pg: 1]
- Eisenstein, D. J. and *et al.* (2005). Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of SDSS luminous red galaxies. *The Astrophysical Journal*, 633(2):560–574. [pg: 2]
- Elizalde, E., Myrzakulov, R., Obukhov, V. V., and Saez-Gomez, D. (2010). LambdaCDM epoch reconstruction from F(R,G) and modified Gauss-Bonnet gravities. *Class. Quant. Grav.*, 27:095007. [pg: 64]
- Ellis, G. F. R. and Wainwright, J. (1997). *Dynamical systems in cosmology*. Cambridge University Press. [pg: 44]
- Emir Gümrükçüoğlu, A., Saravani, M., and Sotiriou, T. P. (2018). Hořava gravity after gw170817. *Phys. Rev. D*, 97:024032. [pg: 37]
- ESA (2019). Euclid satellite. <http://sci.esa.int/euclid/>. [pg: 106]
- Exirifard, Q. and Sheikh-Jabbari, M. (2008). Lovelock gravity at the crossroads of palatini and metric formulations. *Physics Letters B*, 661(2-3):158–161. [pg: 27]
- Ezquiaga, J. M. and Zumalacárregui, M. (2017). Dark energy after gw170817: Dead ends and the road ahead. *Phys. Rev. Lett.*, 119:251304. [pg: 36, 37, 77]
- Ezquiaga, J. M. and Zumalacárregui, M. (2018). Dark Energy in light of Multi-Messenger Gravitational-Wave astronomy. *Front. Astron. Space Sci.*, 5:44. [pg: 36]
- Fairbairn, M. and Goobar, A. (2006). Supernova limits on brane world cosmology. *Phys. Lett.*, B642:432–435. [pg: 34]
- Fang, W., Hu, W., and Lewis, A. (2008). Crossing the phantom divide with parametrized post-friedmann dark energy. *Phys. Rev. D*, 78:087303. [pg: 34]
- Faraoni, V. and Capozziello, S. (2011a). *Beyond Einstein Gravity*, volume 170. Springer, Dordrecht. [pg: 4, 13]
- Faraoni, V. and Capozziello, S. (2011b). *Beyond Einstein Gravity*, volume 170. Springer, Dordrecht. [pg: 8, 9, 10, 11, 103]
- Feroz, F. and Hobson, M. (2008). Multimodal nested sampling: an efficient and robust alternative to markov chain monte carlo methods for astronomical data analyses. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 384(2):449–463. [pg: 110]

- Feroz, F., Hobson, M., and Bridges, M. (2009). Multinest: an efficient and robust bayesian inference tool for cosmology and particle physics. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 398(4):1601–1614. [pg: 110]
- Feroz, F., Hobson, M., Cameron, E., and Pettitt, A. (2013). Importance nested sampling and the multinest algorithm. *arXiv preprint arXiv:1306.2144*. [pg: 110]
- Ferraris, M., Francaviglia, M., and Reina, C. (1982). Variational formulation of general relativity from 1915 to 1925 “palatini’s method” discovered by einstein in 1925. *General relativity and gravitation*, 14(3):243–254. [pg: 20]
- Ferreira, P. G. (1997). Pg ferreira and m. joyce, phys. rev. lett. 79, 4740 (1997). *Phys. Rev. Lett.*, 79:4740. [pg: 10]
- Ferreira, P. G. (2019). Cosmological Tests of Gravity. [pg: 106]
- Fiedler, B., Liebscher, S., and Alexander, J. C. (2000). Generic hopf bifurcation from lines of equilibria without parameters: I. theory. *Journal of Differential equations*, 167(1):16–35. [pg: 57]
- Flanagan, E. E. (2004). Palatini form of $1/r$ gravity. *Physical review letters*, 92(7):071101. [pg: 22]
- Fujii, Y. (1982). Origin of the gravitational constant and particle masses in a scale-invariant scalar-tensor theory. *Physical Review D*, 26(10):2580. [pg: 10]
- Fujii, Y. and Maeda, K.-i. (2003). *The scalar-tensor theory of gravitation*. Cambridge University Press. [pg: 11]
- Gasperini, M., Maggiore, M., and Veneziano, G. (1997). Towards a non-singular pre-big-bang cosmology. *Nuclear Physics B*, 494(1-2):315–328. [pg: 28, 64]
- Gasperini, M. and Veneziano, G. (1993). Pre-big-bang in string cosmology. *Astroparticle Physics*, 1(3):317–339. [pg: 28]
- Georgi, H. and Glashow, S. L. (1974). Unity of all elementary-particle forces. *Phys. Rev. Lett.*, 32:438–441. [pg: 9]
- Glashow, S. L. (1961). Partial Symmetries of Weak Interactions. *Nucl. Phys.*, 22:579–588. [pg: 9]
- Gleick, J. and Alexanderson, G. L. (2005). Isaac newton. *The Mathematical Intelligencer*, 27(3):74–76. [pg: 1]
- Goldberger, W. D. and Wise, M. B. (1999). Modulus stabilization with bulk fields. *Phys. Rev. Lett.*, 83:4922–4925. [pg: 34]

- Goldstein, A. et al. (2017). An Ordinary Short Gamma-Ray Burst with Extraordinary Implications: Fermi-GBM Detection of GRB 170817A. *Astrophys. J.*, 848(2):L14. [pg: 35]
- Guo, Z.-K., Zhu, Z.-H., Alcaniz, J. S., and Zhang, Y.-Z. (2006). Constraints on the dgp model from recent supernova observations and baryon acoustic oscillations. *Astrophys. J.*, 646:1–7. [pg: 34]
- Guth, A. H. (1981). Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Phys. Rev. D*, 23:347–356. [pg: 3, 24]
- Guzzo, L. et al. (2008). A test of the nature of cosmic acceleration using galaxy redshift distortions. *Nature*, 451:541–545. [pg: 31]
- Heavens, A., Fantaye, Y., Sellentin, E., Eggers, H., Hosenie, Z., Kroon, S., and Mootoivaloo, A. (2017). No evidence for extensions to the standard cosmological model. *Physical review letters*, 119(10):101301. [pg: 112]
- Hebecker, A. and March-Russell, J. (2001). Randall-Sundrum II cosmology, AdS / CFT, and the bulk black hole. *Nucl. Phys.*, B608:375–393. [pg: 31]
- Hinshaw, G., Larson, D., Komatsu, E., Spergel, D., Bennett, C., Dunkley, J., Nolte, M., Halpern, M., Hill, R., Odegard, N., et al. (2013). Nine-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: cosmological parameter results. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 208(2):19. [pg: 112]
- Hirsch, M. W. (1984). The dynamical systems approach to differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 11(1):1–64. [pg: 39]
- Hořava, P. (2009a). Membranes at quantum criticality. *Journal of High Energy Physics*, 2009(03):020. [pg: 16]
- Hořava, P. (2009b). Quantum gravity at a lifshitz point. *Physical Review D*, 79(8):084008. [pg: 16]
- Hořava, P. (2009c). Spectral dimension of the universe in quantum gravity at a lifshitz point. *Physical review letters*, 102(16):161301. [pg: 16]
- Horava, P. and Witten, E. (1996). Eleven-dimensional supergravity on a manifold with boundary. *Nucl. Phys.*, B475:94–114. [pg: 29]
- Hu, W. (1998). Structure formation with generalized dark matter. *The Astrophysical Journal*, 506(2):485. [pg: 15]
- Iorio, L. (2012). Model-independent constraints on r-3 extra-interactions from orbital motions. *Annalen der Physik*, 524(6-7):371–377. [pg: 37]

- Iqbal, A., Prasad, J., Souradeep, T., and Malik, M. A. (2015). Joint planck and WMAP assessment of low CMB multipoles. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2015(06):014–014. [pg: 94, 112]
- Ishak, M. and Moldenhauer, J. (2009). A minimal set of invariants as a systematic approach to higher order gravity models. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2009(01):024. [pg: 26]
- Isham, C. J., Salam, A., and Strathdee, J. (1973). Relativity-f gravity and gravitational collapse. *Nature Physical Science*, 244:82. [pg: 15]
- Ivanov, M. M. and Toporensky, A. V. (2012). Cosmological dynamics of fourth order gravity with a Gauss-Bonnet term. *Grav. Cosmol.*, 18:43–53. [pg: 44, 67]
- Jacobson, T. (2008). Einstein-aether gravity: a status report. *arXiv preprint arXiv:0801.1547*. [pg: 11]
- Jeffreys, H. (1998). *The theory of probability*. OUP Oxford. [pg: 110]
- Kaluza, T. (1921). Zum Unitätsproblem der Physik. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, 1921:966–972. [Int. J. Mod. Phys.D27,no.14,1870001(2018)]. [pg: 3, 29]
- Kass, R. E. and Raftery, A. E. (1995). Bayes factors. *Journal of the american statistical association*, 90(430):773–795. [pg: 84, 112]
- Klein, O. (1926a). Quantentheorie und fünfdimensionale relativitätstheorie. *Zeitschrift für Physik*, 37(12):895–906. [pg: 3, 29]
- Klein, O. (1926b). The Atomicity of Electricity as a Quantum Theory Law. *Nature*, 118:516. [pg: 3, 29]
- Kofman, L., Mukhanov, V. F., and Pogosian, D. Y. (1987). Evolution of inhomogeneities in inflationary models in a theory of gravitation with higher derivatives. *Sov. Phys. JETP*, 66:433. [pg: 24]
- Kolb, E. W. and Turner, M. S. (1990). The Early Universe. *Front. Phys.*, 69:1–547. [pg: 90, 92]
- Komatsu, E., Dunkley, J., Nolta, M. R., Bennett, C. L., Gold, B., Hinshaw, G., Jarosik, N., Larson, D., Limon, M., Page, L., Spergel, D. N., Halpern, M., Hill, R. S., Kogut, A., Meyer, S. S., Tucker, G. S., Weiland, J. L., Wollack, E., and Wright, E. L. (2009). Five-Year WMAP Observations: Cosmological Interpretation. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 180(2):330–376. [pg: 2]
- Komatsu, E. et al. (2011). Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation. *Astrophys. J. Suppl.*, 192:18. [pg: 34]

- Koyama, K. (2002). Radion and large scale anisotropy on the brane. *Phys. Rev.*, D66:084003. [pg: 34]
- Koyama, K. (2016). Cosmological Tests of Modified Gravity. *Rept. Prog. Phys.*, 79(4):046902. [pg: 23]
- Krauss, L. M. and Turner, M. S. (1995). The Cosmological constant is back. *Gen. Rel. Grav.*, 27:1137–1144. [pg: 2]
- Leach, S. M., Liddle, A. R., Martin, J., and Schwarz, D. J. (2002). Cosmological parameter estimation and the inflationary cosmology. *Physical Review D*, 66(2):023515. [pg: 93]
- Levi, M. (2019). The dark energy spectroscopic instrument (desi). <https://www.desi.lbl.gov/>. [pg: 106]
- Lewis, A. and Bridle, S. (2002). Cosmological parameters from CMB and other data: A Monte Carlo approach. *Phys. Rev.*, D66:103511. [pg: 79, 110]
- Lewis, A., Challinor, A., and Lasenby, A. (2000). Efficient computation of CMB anisotropies in closed FRW models. *Astrophys. J.*, 538:473–476. [pg: 79, 110]
- Li, B., Barrow, J. D., and Mota, D. F. (2007a). Cosmology of ricci-tensor-squared gravity in the palatini variational approach. *Physical Review D*, 76(10):104047. [pg: 27]
- Li, B., Barrow, J. D., and Mota, D. F. (2007b). The Cosmology of Modified Gauss-Bonnet Gravity. *Phys. Rev.*, D76:044027. [pg: 53, 63, 71]
- Liddle, A. (2015). *An introduction to modern cosmology*. John Wiley & Sons. [pg: 92]
- Liddle, A. R. (2001). Acceleration of the universe. *New Astronomy Reviews*, 45(4-5):235–253. [pg: 87]
- Liddle, A. R. and Lyth, D. H. (2000). *Cosmological inflation and large-scale structure*. Cambridge University Press. [pg: 25]
- Liebscher, S. (2010). Dynamics near manifolds of equilibria of codimension one and bifurcation without parameters. *arXiv preprint arXiv:1004.3410*. [pg: 57]
- Linares, R., Morales-Técolt, H. A., Pedraza, O., and Pimentel, L. O. (2014). Gravitational potential of a point mass in a brane world. *Phys. Rev. D*, 89:066002. [pg: 37]
- Linde, A. D. (1982). A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems. *Phys. Lett.*, 108B:389–393. [Adv. Ser. Astrophys. Cosmol.3,149(1987)]. [pg: 3]

- Lobo, F. (2008). The dark side of gravity: Modified theories of gravity, invited chapter to appear in an edited collection” dark energy-current advances and ideas”. *arXiv preprint arXiv:0807.1640*. [pg: 4]
- Long, J. C., Chan, H. W., Churnside, A. B., Gulbis, E. A., Varney, M. C. M., and Price, J. C. (2002). Upper limits to submillimeter-range forces from extra space-time dimensions. [*Nature*421,922(2003)]. [pg: 31, 36]
- Lukas, A., Ovrut, B. A., Stelle, K. S., and Waldram, D. (1999). The Universe as a domain wall. *Phys. Rev.*, D59:086001. [pg: 29]
- Maartens, R. and Koyama, K. (2010). Brane-World Gravity. *Living Rev. Rel.*, 13:5. [pg: 30, 31]
- Maartens, R. and Majerotto, E. (2006). Observational constraints on self-accelerating cosmology. *Phys. Rev.*, D74:023004. [pg: 34]
- Maeda, K.-i. and Ohta, N. (2005). Inflation from superstring and m-theory compactification with higher order corrections. *Physical Review D*, 71(6):063520. [pg: 28]
- Martin, J. (2018). The Theory of Inflation. In *200th Course of Enrico Fermi School of Physics: Gravitational Waves and Cosmology (GW-COSM) Varenna (Lake Como), Lecco, Italy, July 3-12, 2017*. [pg: 88, 89, 91, 93]
- Martin, J., Ringeval, C., Trota, R., and Vennin, V. (2014a). The best inflationary models after planck. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2014(03):039. [pg: 87]
- Martin, J., Ringeval, C., and Vennin, V. (2014b). Encyclopædia Inflationaris. *Phys. Dark Univ.*, 5-6:75–235. [pg: 3, 10, 87, 89]
- Mena, O., Santiago, J., and Weller, J. (2006). Constraining inverse-curvature gravity with supernovae. *Physical review letters*, 96(4):041103. [pg: 28]
- Meng, X. and Wang, P. (2004a). Palatini formulation of modified gravity with squared scalar curvature. *General Relativity and Gravitation*, 36(12):2673–2680. [pg: 23]
- Meng, X. and Wang, P. (2004b). Palatini formulation of the $r-1$ -modified gravity with an additional squared scalar curvature term. *Classical and Quantum Gravity*, 22(1):23. [pg: 23]
- Meng, X.-H. and Wang, P. (2004c). R^2 corrections to the cosmological dynamics of inflation in the palatini formulation. *Classical and Quantum Gravity*, 21(8):2029. [pg: 23]
- Metsaev, R. and Tseytlin, A. A. (1987). Order α' (two-loop) equivalence of the string equations of motion and the σ -model weyl invariance conditions: dependence on the dilaton and the antisymmetric tensor. *Nuclear Physics B*, 293:385–419. [pg: 28, 64]

- Mijić, M. B., Morris, M. S., and Suen, W.-M. (1986). The r^2 cosmology: Inflation without a phase transition. *Physical Review D*, 34(10):2934. [pg: 24]
- Moldenhauer, J. and Ishak, M. (2009). A minimal set of invariants as a systematic approach to higher order gravity models: physical and cosmological constraints. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2009(12):020. [pg: 26]
- Mortonson, M. J., Peiris, H. V., and Easther, R. (2011). Bayesian analysis of inflation: parameter estimation for single field models. *Physical Review D*, 83(4):043505. [pg: 101]
- Mukhanov, V. (2005). *Physical foundations of cosmology*. Cambridge university press. [pg: 2, 3, 24]
- Mukhanov, V. F. and Chibisov, G. (1981). Quantum fluctuations and a nonsingular universe. *JETP Lett.*, 33:532–535. [pg: 24]
- Mukhanov, V. F., Feldman, H. A., and Brandenberger, R. H. (1992). Theory of cosmological perturbations. *Physics Reports*, 215:203–333. [pg: 90, 92]
- Myrzakulov, R., Odintsov, S., and Sebastiani, L. (2015). Inflationary universe from higher-derivative quantum gravity. *Phys. Rev.*, D91(8):083529. [pg: 63]
- Myrzakulov, R., Saez-Gomez, D., and Tureanu, A. (2011). On the Λ CDM Universe in $f(G)$ gravity. *Gen. Rel. Grav.*, 43:1671–1684. [pg: 64]
- Nagata, R., Chiba, T., and Sugiyama, N. (2002). Observational consequences of the evolution of primordial fluctuations in scalar-tensor cosmology. *Physical Review D*, 66(10):103510. [pg: 13]
- Newcomb, S. (1895). *The elements of the four inner planets and the fundamental constants of astronomy*. US Government Printing Office. [pg: 1]
- Nichol, R. C., Percival, W. J., Cole, S., Eisenstein, D. J., Peacock, J. A., Pope, A. C., and Szalay, A. S. (2007). Measuring the Baryon Acoustic Oscillation scale using the Sloan Digital Sky Survey and 2dF Galaxy Redshift Survey. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 381(3):1053–1066. [pg: 2]
- Nojiri, S. and Odintsov, S. D. (2005a). Modified gauss–bonnet theory as gravitational alternative for dark energy. *Physics Letters B*, 631(1-2):1–6. [pg: 4]
- Nojiri, S. and Odintsov, S. D. (2005b). Modified Gauss-Bonnet theory as gravitational alternative for dark energy. *Phys. Lett.*, B631:1–6. [pg: 53, 63]
- Nojiri, S. and Odintsov, S. D. (2005c). Modified gauss–bonnet theory as gravitational alternative for dark energy. *Physics Letters B*, 631(1):1 – 6. [pg: 4]

- Nojiri, S. and Odintsov, S. D. (2006). Introduction to modified gravity and gravitational alternative for dark energy. *eConf*, C0602061:06. [Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.4,115(2007)]. [pg: 35]
- Nojiri, S. and Odintsov, S. D. (2007). Introduction to modified gravity and gravitational alternative for dark energy. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 04(01):115–145. [pg: 4, 11]
- Nojiri, S. and Odintsov, S. D. (2011). Unified cosmic history in modified gravity: From $f(r)$ theory to lorentz non-invariant models. *Physics Reports*, 505(2):59 – 144. [pg: 4]
- Nojiri, S. and Odintsov, S. D. (2018). Cosmological bound from the neutron star merger gw170817 in scalar–tensor and $f(r)$ gravity theories. *Physics Letters B*, 779:425 – 429. [pg: 36]
- Nojiri, S., Odintsov, S. D., and Oikonomou, V. K. (2017). Modified Gravity Theories on a Nutshell: Inflation, Bounce and Late-time Evolution. *Phys. Rept.*, 692:1–104. [pg: 77]
- Nojiri, S., Odintsov, S. D., and Sasaki, M. (2005). Gauss-Bonnet dark energy. *Phys. Rev.*, D71:123509. [pg: 53, 64, 77]
- Nojiri, S., Odintsov, S. D., and Tretyakov, P. V. (2008). From inflation to dark energy in the non-minimal modified gravity. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, 172:81–89. [pg: 53]
- Nojiri, S.-i., Odintsov, S. D., and Sami, M. (2006). Dark energy cosmology from higher-order, string-inspired gravity, and its reconstruction. *Physical Review D*, 74(4):046004. [pg: 28, 64]
- Nordström, G. (2007). On the possibility of unifying the electromagnetic and the gravitational fields. *arXiv preprint physics/0702221*. [pg: 29]
- Nordtved Jr, K. (1970). Post-newtonian metric for a general class of scalar-tensor gravitational theories and observational consequences. *The Astrophysical Journal*, 161:1059. [pg: 12]
- NSF (2019). The largesynoptic survey telescope (lsst). <http://www.lsst.org>. [pg: 106]
- Oikonomou, V. K. (2018). Autonomous dynamical system approach for inflationary Gauss–Bonnet modified gravity. *Int. J. Mod. Phys.*, D27(05):1850059. [pg: 62]
- Oliveira, T. B. R. d. F. (2010). Teorias $f(r)$ de gravidade na formulação de palatini. Master’s thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Norte. [pg: 22]
- Olmo, G. J. (2005a). Post-newtonian constraints on $f(r)$ cosmologies in metric and palatini formalism. *Physical Review D*, 72(8):083505. [pg: 22]

- Olmo, G. J. (2005b). Post-Newtonian constraints on $f(R)$ cosmologies in metric and Palatini formalism. *Phys. Rev.*, D72:083505. [pg: 23]
- Olmo, G. J., Sanchis-Alepuz, H., and Tripathi, S. (2009). Dynamical aspects of generalized palatini theories of gravity. *Physical Review D*, 80(2):024013. [pg: 27]
- Ostrogradsky, M. (1850). Mémoires sur les équations différentielles, relatives au problème des isopérimètres. *Mem. Acad. St. Petersburg*, 6(4):385–517. [pg: 16]
- Padmanabhan, T. (2003). Cosmological constant: The Weight of the vacuum. *Phys. Rept.*, 380:235–320. [pg: 105]
- Padmanabhan, T. (2010). *Gravitation: foundations and frontiers*. Cambridge University Press. [pg: 92]
- Pardo, K., Fishbach, M., Holz, D. E., and Spergel, D. N. (2018). Limits on the number of spacetime dimensions from GW170817. *JCAP*, 1807(07):048. [pg: 37]
- Peebles, P. J. E. (2003). From Precision Cosmology to Accurate Cosmology. In *Proceedings, 37th Rencontres de Moriond, The cosmological Model: Les Arcs, Savoie, France, Mar 16-23, 2002*, pages 3–12. [pg: 103]
- Peebles, P. J. E. and Ratra, B. (2003). The Cosmological constant and dark energy. *Rev. Mod. Phys.*, 75:559–606. [592(2002)]. [pg: 2, 105]
- Percival, W. J. et al. (2010). Baryon Acoustic Oscillations in the Sloan Digital Sky Survey Data Release 7 Galaxy Sample. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 401:2148–2168. [pg: 34]
- Perlmutter, S., Aldering, G., Goldhaber, G., Knop, R. A., Nugent, P., Castro, P. G., Deustua, S., Fabbro, S., Goobar, A., Groom, D. E., Hook, I. M., Kim, A. G., Kim, M. Y., Lee, J. C., Nunes, N. J., Pain, R., Pennypacker, C. R., Quimby, R., Lidman, C., Ellis, R. S., Irwin, M., McMahon, R. G., Ruiz-Lapuente, P., Walton, N., Schaefer, B., Boyle, B. J., Filippenko, A. V., Matheson, T., Fruchter, A. S., Panagia, N., Newberg, H. J. M., Couch, W. J., and Project, T. S. C. (1999). Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, 517(2):565–586. [pg: 2]
- Pires, N., Santos, J., and Alcaniz, J. (2010). Cosmographic constraints on a class of palatini $f(R)$ gravity. *Physical Review D*, 82(6):067302. [pg: 23]
- Randall, L. and Sundrum, R. (1999a). An alternative to compactification. *Physical Review Letters*, 83(23):4690. [pg: 29]
- Randall, L. and Sundrum, R. (1999b). Large mass hierarchy from a small extra dimension. *Physical Review Letters*, 83(17):3370. [pg: 29]

- Ratra, B. and Peebles, P. J. (1988). Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field. *Physical Review D*, 37(12):3406. [pg: 10]
- Riess, A. G. et al. (2016). A 2.4% Determination of the Local Value of the Hubble Constant. *Astrophys. J.*, 826(1):56. [pg: 78, 81]
- Riess, A. G., Filippenko, A. V., Challis, P., Clocchiatti, A., Diercks, A., Garnavich, P. M., Gilliland, R. L., Hogan, C. J., Jha, S., Kirshner, R. P., Leibundgut, B., Phillips, M. M., Reiss, D., Schmidt, B. P., Schommer, R. A., Smith, R. C., Spyromilio, J., Stubbs, C., Suntzeff, N. B., and Tonry, J. (1998). Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, 116(3):1009–1038. [pg: 2]
- Riess, A. G., Macri, L., Casertano, S., Lampeitl, H., Ferguson, H. C., Filippenko, A. V., Jha, S. W., Li, W., and Chornock, R. (2011). A 3% Solution: Determination of the Hubble Constant with the Hubble Space Telescope and Wide Field Camera 3. *Astrophys. J.*, 730:119. [Erratum: *Astrophys. J.*732,129(2011)]. [pg: 34]
- Riotto, A. (2002). Inflation and the theory of cosmological perturbations. *arXiv preprint hep-ph/0210162*. [pg: 92, 93]
- Rosen, N. (1973). A bi-metric theory of gravitation. *General Relativity and Gravitation*, 4(6):435–447. [pg: 13]
- Rosenthal, E. (2009). Extended palatini action for general relativity. *Physical Review D*, 80(8):084029. [pg: 27]
- Ross, A. J., Samushia, L., Howlett, C., Percival, W. J., Burden, A., and Manera, M. (2015). The clustering of the SDSS DR7 main Galaxy sample - I. A 4 per cent distance measure at $z = 0.15$. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 449(1):835–847. [pg: 13]
- Rubin, D., Linder, E. V., Kowalski, M., Aldering, G., Amanullah, R., Barbary, K., Connolly, N. V., Dawson, K. S., Faccioli, L., Fadeyev, V., Goldhaber, G., Goobar, A., Hook, I., Lidman, C., Meyers, J., Nobili, S., Nugent, P. E., Pain, R., Perlmutter, S., Ruiz-Lapuente, P., Spadafora, A. L., Strovink, M., Suzuki, N., and Swift, H. (2009). Looking beyond lambda with the Union supernova compilation. *The Astrophysical Journal*, 695(1):391–403. [pg: 34]
- Sahni, V. and Shtanov, Y. (2003). Braneworld models of dark energy. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2003(11):014. [pg: 11]
- Sahni, V. and Starobinsky, A. A. (2000). The Case for a positive cosmological Lambda term. *Int. J. Mod. Phys.*, D9:373–444. [pg: 105]
- Sakstein, J. and Jain, B. (2017). Implications of the neutron star merger gw170817 for cosmological scalar-tensor theories. *Phys. Rev. Lett.*, 119:251303. [pg: 36]

- Salam, A. (1968). Elementary particle theory. In *Prog. Of the Nobel Symposium, 1968, Stockholm, Sweden*, volume 367. [pg: 9]
- Santos, B., Campista, M., Santos, J., and Alcaniz, J. S. (2012). Cosmology with Hu-Sawicki gravity in Palatini Formalism. *Astron. Astrophys.*, 548:A31. [pg: 23]
- Santos, B., Devi, N. C., and Alcaniz, J. S. (2017). Bayesian comparison of nonstandard cosmologies using type Ia supernovae and BAO data. *Phys. Rev.*, D95(12):123514. [pg: 34]
- Santos, B. d. (2013). *Aspectos Observacionais em Teorias $f(R)$ no Formalismo de Palatini*. PhD thesis, Observatório Nacional, Rio de Janeiro - RJ. [pg: 23]
- Santos da Costa, S., Benetti, M., and Alcaniz, J. (2018). A bayesian analysis of inflationary primordial spectrum models using planck data. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2018(03):004–004. [pg: 5, 107, 110]
- Santos da Costa, S. et al. (in prep.). An extension of the starobinsky inflationary model. *in prep.* [pg: 5, 88]
- Santos Da Costa, S., Roig, F. V., Alcaniz, J. S., Capozziello, S., De Laurentis, M., and Benetti, M. (2018). Dynamical analysis on $f(R, \mathcal{G})$ cosmology. *Class. Quant. Grav.*, 35(7):075013. [pg: 5, 64]
- Sbisa, F. (2014). Classical and quantum ghosts. *European Journal of Physics*, 36(1):015009. [pg: 16]
- Schmidt, F. (2009). Self-Consistent Cosmological Simulations of DGP Braneworld Gravity. *Phys. Rev.*, D80:043001. [pg: 34]
- Schwarz, D. J., Terrero-Escalante, C. A., and García, A. A. (2001). Higher order corrections to primordial spectra from cosmological inflation. *Physics Letters B*, 517(3-4):243–249. [pg: 93]
- Sen, D. K. and Dunn, K. A. (1971). A scalar-tensor theory of gravitation in a modified riemannian manifold. *Journal of Mathematical Physics*, 12(4):578–586. [pg: 87]
- Serna, A., Alimi, J.-M., and Navarro, A. (2002). Convergence of scalar-tensor theories towards general relativity and primordial nucleosynthesis. *Classical and Quantum Gravity*, 19(5):857–874. [pg: 87]
- Shea, W. R. and Artigas, M. (2003). *Galileo in Rome: The rise and fall of a troublesome genius*. Oxford University Press. [pg: 1]
- Shiromizu, T., Maeda, K.-i., and Sasaki, M. (2000). The Einstein equation on the 3-brane world. *Phys. Rev.*, D62:024012. [pg: 33]

- Shtanov, Y. and Sahni, V. (2003). Bouncing braneworlds. *Physics Letters B*, 557(1-2):1–6. [pg: 29]
- Skokos, C. (2010). The Lyapunov Characteristic Exponents and their computation. *Lect. Notes Phys.*, 790:63–135. [pg: 44]
- Skordis, C. (2009). The tensor-vector-scalar theory and its cosmology. *Classical and Quantum Gravity*, 26(14):143001. [pg: 11]
- Song, Y.-S., Sawicki, I., and Hu, W. (2007). Large-Scale Tests of the DGP Model. *Phys. Rev.*, D75:064003. [pg: 34]
- Sotiriou, T. P. (2006a). Constraining $f(R)$ gravity in the palatini formalism. *Classical and Quantum Gravity*, 23(4):1253. [pg: 23]
- Sotiriou, T. P. (2006b). $f(R)$ gravity and scalar–tensor theory. *Classical and Quantum Gravity*, 23(17):5117. [pg: 22]
- Sotiriou, T. P. (2006c). $f(R)$ gravity and scalar-tensor theory. *Class. Quant. Grav.*, 23:5117–5128. [pg: 23]
- Sotiriou, T. P. (2006d). Unification of inflation and cosmic acceleration in the palatini formalism. *Physical Review D*, 73(6):063515. [pg: 23]
- Sotiriou, T. P. and Faraoni, V. (2010). $f(R)$ Theories Of Gravity. *Rev. Mod. Phys.*, 82:451–497. [pg: 11, 22]
- Spergel, D. N., Bean, R., Dore, O., Nolta, M. R., Bennett, C. L., Dunkley, J., Hinshaw, G., Jarosik, N., Komatsu, E., Page, L., Peiris, H. V., Verde, L., Halpern, M., Hill, R. S., Kogut, A., Limon, M., Meyer, S. S., Odegard, N., Tucker, G. S., Weiland, J. L., Wollack, E., and Wright, E. L. (2007). Three-Year Wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations: Implications for cosmology. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 170(2):377–408. [pg: 2]
- Spergel, D. N., Verde, L., Peiris, H. V., Komatsu, E., Nolta, M. R., Bennett, C. L., Halpern, M., Hinshaw, G., Jarosik, N., Kogut, A., Limon, M., Meyer, S. S., Page, L., Tucker, G. S., Weiland, J. L., Wollack, E., and Wright, E. L. (2003). First-Year Wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations: Determination of cosmological parameters. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 148(1):175–194. [pg: 2]
- Starobinskii, A. (1979). Spectrum of relict gravitational radiation and the early state of the universe. *JETP Letters*, 30:682–685. [pg: 24]
- Starobinsky, A. A. (1980). A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity. *Phys. Lett.*, B91:99–102. [771(1980)]. [pg: 3, 17, 24]

- Starobinsky, A. A. (1984). Nonsingular model of the universe with the quantum-gravitational de sitter stage and its observational consequences. In *Quantum Gravity*, pages 103–128. Springer. [pg: 24]
- Staveley-Smith, L., Beutler, F., Blake, C., Watson, F., Colless, M., Saunders, W., Parker, Q., Jones, D. H., and Campbell, L. (2011). The 6dF Galaxy Survey: baryon acoustic oscillations and the local Hubble constant. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 416(4):3017–3032. [pg: 13]
- Takushima, Y., Terukina, A., and Yamamoto, K. (2014). Bispectrum of cosmological density perturbations in the most general second-order scalar-tensor theory. *Phys. Rev. D*, 89:104007. [pg: 36]
- Tan, W.-H., Yang, S.-Q., Shao, C.-G., Li, J., Du, A.-B., Zhan, B.-F., Wang, Q.-L., Luo, P.-S., Tu, L.-C., and Luo, J. (2016). New test of the gravitational inverse-square law at the submillimeter range with dual modulation and compensation. *Phys. Rev. Lett.*, 116:131101. [pg: 37]
- Tavakol, R. (1997). Introduction to dynamical systems dynamical systems in cosmology ed j wainwright and gfr ellis. [pg: 44]
- Tegmark, M. and *et al.* (2004). Cosmological parameters from sdss and wmap. *Phys. Rev. D*, 69:103501. [pg: 2]
- Tegmark, M. and *et al.* (2006). Cosmological constraints from the sdss luminous red galaxies. *Phys. Rev. D*, 74:123507. [pg: 2]
- Toporensky, A. V. and Tretyakov, P. V. (2007). De Sitter stability in quadratic gravity. *Int. J. Mod. Phys.*, D16:1075–1086. [pg: 63]
- Tsujikawa, S. (2002). Density perturbations in the ekpyrotic universe and string inspired generalizations. *Phys. Lett.*, B526:179–185. [pg: 53]
- Vilenkin, A. (1985). Classical and quantum cosmology of the starobinsky inflationary model. *Physical Review D*, 32(10):2511. [pg: 24]
- Visinelli, L., Bolis, N., and Vagnozzi, S. (2018). Brane-world extra dimensions in light of gw170817. *Phys. Rev. D*, 97:064039. [pg: 36]
- Vollick, D. N. (2003). $1/r$ curvature corrections as the source of the cosmological acceleration. *Physical Review D*, 68(6):063510. [pg: 22, 23]
- Wands, D., Bartolo, N., Matarrese, S., and Riotto, A. (2002). Observational test of two-field inflation. *Physical Review D*, 66(4):043520. [pg: 93]

- Weinberg, S. (1967). A Model of Leptons. *Phys. Rev. Lett.*, 19:1264–1266. [pg: 9]
- Weinberg, S. (1989). The cosmological constant problem. *Rev. Mod. Phys.*, 61:1–23. [pg: 3, 10]
- Weinberg, S. (2008). *Cosmology*. Oxford University Press. [pg: 2, 3, 10, 101]
- Westfall, R. S. and Devons, S. (1981). Never at rest: A biography of isaac newton. [pg: 1]
- Weyl, H. (1918). Gravitation and electricity. *Sitzungsber. Königl. Preuss. Akad. Wiss.*, 26:465–480. [pg: 17]
- Wiggins, S. (2003). *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, volume 2. Springer Science & Business Media. [pg: 39]
- Woodard, R. (2007). Avoiding dark energy with $1/r$ modifications of gravity. In *The Invisible Universe: Dark Matter and Dark Energy*, pages 403–433. Springer. [pg: 16]
- Zhang, W.-S., Cheng, C., Huang, Q.-G., Li, M., Li, S., Li, X.-D., and Wang, S. (2012). Testing modified gravity models with recent cosmological observations. *Sci. China Phys. Mech. Astron.*, 55:2244–2258. [pg: 34, 35]
- Zhou, S.-Y., Copeland, E. J., and Saffin, P. M. (2009). Cosmological Constraints on $f(G)$ Dark Energy Models. *JCAP*, 0907:009. [pg: 53, 59, 61, 62, 63]