

Ximena Beatriz Saad Olivera



Observatório Nacional

Programa de Pós-Graduação

Observatório Nacional

Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações

Deteccão de planetas nos dados do Kepler

Orientador: Dr. David Nesvorný

Co-orientador: Dr. Fernando Virgilio Roig

Rio de Janeiro

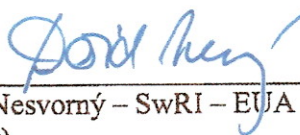
27 de Junho de 2019

"DETECÇÃO DE PLANETAS NOS DADOS DO KEPLER".

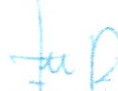
XIMENA BEATRIZ SAAD OLIVERA

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ASTRONOMIA DO OBSERVATÓRIO NACIONAL COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTORA EM ASTRONOMIA.

Aprovada por:



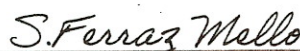
Dr. David Nesvorný – SwRI – EUSA
(Orientador)



Dr. Fernando Virgílio Roig - ON/MCTIC
(Coorientador)



Dr. Rodney da Silva Gomes - ON/MCTIC



Dr. Sylvio Ferraz Mello - IAG/USP



Dr. Othon Cabo Winter - UNESP



Dr. André Izidoro Ferreira da Costa - UNESP

RIO DE JANEIRO – BRASIL

27 DE JUNHO DE 2019

Agradecimentos

Agradeço:

- Em primeiro lugar aos meus orientadores o Dr. David Nesvorný e o Dr. Fernando Roig, que confiaram em mim para levar a cabo este projeto e pelos ensinamentos ao longo destes quatro anos.
- Ao Dr. David Kipping pela sua colaboração no trabalho.
- À minha mãe, por ter me dado a liberdade e ter me impulsado a atingir meus sonhos, pelo seu apoio e amor incondicional.
- A Rodrigo, o meu companheiro de vida pelo apoio diário e constante tanto na parte pessoal quanto na parte acadêmica.
- Às minhas irmãs, Lourdes e Lucrecia, por me acompanhar ainda à distância em cada passo.
- Aos meus sobrinhos, Federico, Catalina e Lorenzo, pelos áudios e sorrisos que tornam meus dias mais felizes.
- Ao Dr. Cristian Giuppone por ter sido o primeiro a me mostrar o caminho na ciência.
- Aos meus amigos e colegas de pós-graduação do ON, Alvaro Alvarez Candal, Yolanda Jiménez Teja e Sandro de Souza, pelas longas conversas e inúmeros conselhos. A Javier González Sánchez e Verônica Loatac Loaiza por manter-se próximos e me ajudar em inúmeras questões ao longo do trabalho. A todos os meus amigos do ON, pelas vivências compartilhadas.
- A Cintia F. Martinez e Matias Garcia, meus irmãos argentinos que compartilham o mesmo sonho, continuar crescendo e fazendo o que amamos além dos obstáculos.
- Aos professores do programa de pós-graduação pelos ensinamentos e orientações.
- Ao Observatório Nacional;
- À Capes pelo financiamento;

*"In all caos there is a cosmos,
in all disorder a secret order."
Carl Jung*

Sumário

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	Evolução na história dos exoplanetas	19
1.2	Dinâmica planetária	20
1.2.1	A órbita Kepleriana	20
1.2.2	A órbita em 3 dimensões	22
1.2.3	Ressonâncias de movimentos médios	23
1.3	Propriedades de Exoplanetas e Técnicas de Detecção	24
1.3.1	Propriedades de exoplanetas	24
1.3.2	Métodos de detecção	32
1.4	Trânsitos planetários	34
1.4.1	A curva de luz	34
1.4.2	Missões de observação	38
2	VARIAÇÕES NOS TEMPOS DE TRÂNSITO	41
2.1	Introdução	41
2.1.1	Modelos analíticos da sinal de TTVs	41
2.2	Método de Inversão	45
2.2.1	Simulações de N-corpos	47
2.2.2	Inferência Bayesiana	48
2.3	Amostra	51
2.3.1	Grupo A	53
2.3.2	Grupo B	55
2.4	Etapas do trabalho	60
3	CARACTERIZAÇÃO DOS PARÂMETROS PLANETÁRIOS NO SISTEMA KEPLER-49 COM A ANÁLISE DE TTVS DE KEPLER-46B	63
3.1	Sinopse	63
4	UM JÚPITER QUENTE EM ÓRBITA EXCÊNTRICA NO SISTEMA KEPLER-419	73
4.1	Sinopse	73
5	ANÁLISE DOS TTVS NO SISTEMA KEPLER-59	83
5.1	Sinopse	83
6	CONCLUSÕES	95
	Referências	97

Lista de ilustrações

Figura 1 – Histograma do número de descobertas de exoplanetas desde as primeiras observações até março de 2019.	20
Figura 2 – Elementos orbitais do sistema estrela-planeta.	23
Figura 3 – Localização de planetas nos diagramas período-massa e período-excentricidade	25
Figura 4 – Função de densidade de probabilidade para planetas com diferente período	27
Figura 5 – Histograma do número de planetas em função do raio planetário	28
Figura 6 – Distribuição de planetas próximos à estrela.	29
Figura 7 – Mapa esquemático do crescimento de planetas.	31
Figura 8 – Curva e geometria de um trânsito planetário	35
Figura 9 – Geometria do trânsito projetado.	36
Figura 10 – Geometria de curvas de luz de dois trânsitos exoplanetários.	36
Figura 11 – Planetas confirmados e candidatos a planetas derivados da missão Kepler.	40
Figura 12 – Sensibilidade na detecção da massa do planeta transitante HD 209458 ao redor da ressonância 1:1	43
Figura 13 – Sinais de TTV de um planeta Júpiter quente em órbita circular, provocados por um planeta tipo Terra em órbita exterior	46
Figura 14 – Distribuições a posteriori como produto entre distribuições a priori e funções <i>Likelihood</i>	49
Figura 15 – Sistema de coordenadas utilizado no trabalho.	50
Figura 16 – TTVs do planeta Kepler-46b.	54
Figura 17 – TTVs do planeta Kepler-419b.	55
Figura 18 – TTVs dos planetas Kepler-50b e c.	56
Figura 19 – TTVs do planeta Kepler-59c.	57
Figura 20 – TTVs dos planetas Kepler-59b e c.	58
Figura 21 – TTVs dos planetas Kepler-145b e c.	59
Figura 22 – TTVs dos planetas Kepler-210b e c.	60

Lista de tabelas

Tabela 1 – Amostra de planetas Kepler considerada neste trabalho	53
Tabela 2 – Dados do sistema Kepler-46	54
Tabela 3 – Dados do sistema Kepler-419	55
Tabela 4 – Dados do sistema Kepler-50	56
Tabela 5 – Dados do sistema Kepler-59	57
Tabela 6 – Dados do sistema Kepler-145	58
Tabela 7 – Dados do sistema Kepler-210	60

Resumo

Nesta tese apresentamos os resultados referentes à caracterização completa dos parâmetros dinâmicos de três sistemas planetários, Kepler-46, Kepler-419 e Kepler-59, através da análise das variações nos tempos centrais de trânsito (TTVs) dos planetas Kepler-46b, Kepler-419b e Kepler-59b e c, respectivamente. A análise, baseada no método de inversão dos TTVs, utiliza um código que mistura duas ferramentas: (i) o algoritmo **MultiNest** que está fundamentado na teoria de Bayes, permitindo fazer inferência de parâmetros e, na presença de mais de uma solução, determinar aquela com a máxima probabilidade, e (ii) um eficiente integrador de N-corpos adaptado a partir do algoritmo **Swift** para determinar os tempos dos trânsitos. Os resultados inferidos mostram dois sistemas com um planeta que transita e um planeta que não transita, e um sistema onde os dois planetas transitam. Nos dois primeiros casos, os planetas apresentam características de massa e raio de planetas gigantes, enquanto que no terceiro caso um dos planetas é uma super-Terra e o outro um sub-Netuno. Os resultados mostram que, a técnica utilizada aqui, é suficiente para encontrar soluções dinâmicas completas dos sistemas, através dos trânsitos planetários e das variações nos tempos centrais de trânsito. Para Kepler-46, se determina a massa do planeta Kepler-46b pela primeira vez e se alerta sobre a possibilidade do planeta Kepler-46c, que no momento não transita, começar a transitar nos próximos anos. No sistema Kepler-419 as soluções aqui obtidas são comparáveis com as soluções de outros autores a partir de observações de velocidade radial da estrela, fato que demonstra que a técnica de TTVs por si só consegue caracterizar de maneira robusta as massas e os elementos orbitais dos planetas, independentemente de outras técnicas. Por último, para Kepler-59 se determinam pela primeira vez de forma precisa as massas de Kepler-59b e Kepler-59c. O resultado fornece informação da densidade dos planetas, mostrando que o mais interno teria perdido a sua camada de H e He devido a efeitos provocados pela estrela central como, por exemplo, foto-evaporação.

Abstract

In this thesis, we present results about the complete characterization of dynamical parameters in three planetary systems, Kepler-46, Kepler-419 and Kepler-59, through the analysis of the transit timing variations (TTVs) of Kepler-46b, Kepler-419b and Kepler-59b and c, respectively. The analysis is based on the TTVs inversion method and uses the Bayesian inference algorithm *MultiNest*, which allows to make parameter inference and, in the presence of more than one solution, to determine the one with the maximum probability. This algorithm is coupled with an efficient N-body integrator, adapted from the popular algorithm *Swift* to determine the transits times. The results show two systems with a transiting planet and a non-transiting planet, and one system where the two planets transit. In the first two systems, the planets have masses and radii of giant planets, while in the last system, one planet is a super-Earth and the other a sub-Neptune. The results show that the technique used here is sufficient to find complete solutions of the planets through planetary transits and TTVs. For Kepler-46, the mass of the planet Kepler-46b is determined for the first time and it is suggested that Kepler-46c, that presently does not transit, will begin to transit in the next years. For the Kepler-419 system, the obtained parameter values are comparable to solutions obtained by other authors through measurements of radial velocity. This fact demonstrates that the technique of TTVs detection alone is able to robustly characterize the mass and orbital parameters of planetary systems. Finally, for Kepler-59, the planetary masses of Kepler-59b and Kepler-59c are determined for the first time. The TTV fit provides information about the density of the planets, showing that the innermost one would have lost its H and He envelopes due to effects, like photo-evaporation, caused by the central star.

1 Introdução

O estudo de planetas extrasolares, conhecidos também como exoplanetas, é um dos temas de pesquisa com maior impacto na astronomia moderna. Com os milhares de exoplanetas descobertos e confirmados até o momento, bem como com os candidatos a serem exoplanetas, percebe-se que eles não são objetos raros no cosmos. De fato, as análises estatísticas mais recentes mostram que, ao redor de cada estrela da vizinhança solar, haveria pelos menos um planeta (Howard et al., 2012). Além disso, as observações tem mostrado que existe uma grande diversidade de exoplanetas (Rowe et al., 2014; Morton et al., 2016), porém aqueles planetas com tamanhos entre o tamanho da Terra e de Netuno seriam os mais frequentes na Galaxia (Fressin et al., 2013).

A descoberta destes objetos tem base em diferentes técnicas de detecção. Todas elas, além de detectar novos planetas, têm a finalidade de caracterizar as propriedades físicas e orbitais deles tais como raio, massa, período, etc. Estes parâmetros são pesquisados para determinar as densidades dos planetas e as configurações dinâmicas dos sistemas. Esses parâmetros são importantes pois podem ser usados para se entender a formação e evolução dos sistemas planetários, e as conexões com o Sistema Solar. Para isto, precisa-se de uma estatística significativa de exoplanetas que é conseguida através de grandes levantamentos observacionais.

Desde o lançamento em 2009 da sonda espacial Kepler (Batalha et al., 2010), a técnica fotométrica de trânsitos planetários aumentou a quantidade de descobertas, conseguindo caracterizar aproximadamente 70% dos exoplanetas conhecidos até o momento. Embora essa técnica seja vantajosa para identificar o tamanho do planeta, e a partir dele estimar a massa planetária usando uma relação de massa-raio planetário (Wolfgang et al., 2016), não consegue determinar a massa estelar como parâmetro independente. Por outro lado, a técnica de velocidade radial, baseada em observações espectroscópicas, consegue fornecer uma massa mínima do planeta mas sem dar informação a respeito do seu raio. Desta maneira, a utilização de ambas as técnicas é ideal para determinar a massa e o raio do planeta, o que leva ao conhecimento da sua densidade. Lamentavelmente, o fato das estrelas observadas pelo Kepler serem distantes ou muito fracas (com magnitudes aparentes $V > 15$) implica que não é possível fazer observações espectroscópicas das mesmas com facilidade. Além disto, um dos problema da espectroscopia é o custo econômico envolvido devido ao tempo requerido para as observações.

No entanto, a utilização da técnica de variações nos tempos de trânsito ou TTVs, do inglês *Transit Timing Variations*, consegue fornecer uma estimativa das massas dos planetas. Devido a esta técnica ter os seus fundamentos nas observações de trânsitos planetários, trabalhar com ela acaba sendo uma escolha quase que natural. Quando apenas um planeta transita a estrela, os intervalos entre trânsitos consecutivos são exatamente iguais ao período orbital do planeta. Porém, sob a presença de mais de um planeta, o planeta transitante apresenta um pequeno desvio do seu movimento Kepleriano devido à interação gravitacional mútua entre os planetas. Deste modo, o tempo entre trânsitos é alterado variando o valor do período entre cada par de trânsitos (Miralda-Escudé, 2002; Agol et al., 2005; Holman & Murray, 2005). O ajuste do sinal destes TTVs, formado pelos tempos

de trânsito subtraídos de uma efeméride linear correspondente ao movimento Kepleriano, é feito através de simulações de N-corpos, permitindo estimar os parâmetros planetários e as massas dos planetas através da construção de modelos dinâmicos específicos para cada sistema. Mas esta técnica também apresenta um problema: o longo tempo computacional necessário para realizar as simulações numéricas e a subsequente escolha da melhor solução (Nesvorný et al., 2012).

Com base no exposto até o momento, o objetivo desta tese é trabalhar com ferramentas comumente utilizadas na análise de TTVs, mas implementadas de forma que sejam capazes de reduzir o tempo computacional da análise e assim contribuir para aumentar o número de exoplanetas com uma caracterização completa de parâmetros físicos e orbitais.

Esta tese apresenta os conceitos necessários para um melhor entendimento do problema, bem como a metodologia utilizada para alcançar o objetivo. O produto final são três trabalhos realizados sobre alguns sistemas exoplanetários específicos. O conteúdo da tese encontra-se organizado da seguinte forma:

- No Capítulo 1, apresenta-se uma visão geral da evolução das descobertas de exoplanetas. Descreve-se o problema de dois corpos, a fim de entender os parâmetros planetários a serem buscados. Em seguida, é apresentada uma descrição qualitativa e quantitativa das propriedades dos exoplanetas obtidas a partir de análises estatísticas. Por último, descrevem-se as principais técnicas de detecção e as equações que permitem o conhecimento das propriedades planetárias.
- No Capítulo 2, descreve-se qualitativamente a técnica de TTVs e apresentam-se alguns dos modelos analíticos que se ajustam às observações. Estes últimos são mostrados a fim de visualizar os parâmetros envolvidos nos sinais de TTVs. Posteriormente, apresenta-se o método de inversão para a análise dos TTVs. Em seguida, explicam-se os algoritmos empregados neste trabalho para o desenvolvimento do método. Neste capítulo também são apresentados os sistemas planetários onde o método é utilizado. Por último, explica-se a metodologia utilizada ao longo do projeto de pesquisa.
- No capítulo 3, mostram-se os resultados obtidos a partir da análise de TTVs de Kepler-46b com observações de trânsitos fornecidas por um colaborador do trabalho. Os resultados são comparados com a literatura.
- No capítulo 4, estudam-se os TTVs presentes no planeta Kepler-419b, obtidos a partir de um catálogo público, e se apresentam os parâmetros determinados pela nossa técnica. Também aqui os resultados são comparados com os obtidos na literatura.
- No capítulo 5, apresenta-se a análise realizada das observações de TTVs de Kepler-59b e Kepler-59c. O estudo revela, pela primeira vez, uma caracterização completa do sistema.
- Por último, o Capítulo 6 contém as conclusões gerais do trabalho e as propostas de trabalhos futuros.

1.1 Evolução na história dos exoplanetas

Os primeiros planetas conhecidos pela humanidade são aqueles visíveis a olho nu: Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno. Embora não se conheça uma data específica para a sua descoberta, as observações escritas vêm da civilização babilônica que remonta ao século XX a.C. (Sachs, 1974). O resto dos planetas do Sistema Solar foram descobertos pela observação através de telescópios. Urano em 1781 por William Herschel e Neptuno em 1846 por Urbain Le Verrier e Johann Gottfried Galle. Mas a percepção de planetas ao redor de outras estrelas tem sido refletida desde o terceiro século a.C. por diversos filósofos, como Demócrito (460-370 a.C), Epicuro (341-270 a.C.), e Giordano Bruno (1548-1600) que escreveu sobre o tema na sua obra *De l'infinito universo e Mondi* (Do infinito universo e os mundos, 1584): “Inúmeros sóis existem, inúmeras Terras giram ao redor destes sóis de maneira similar à qual os oito planetas giram em torno do nosso Sol”.

Ao longo do tempo, cogitou-se que estes planetas localizados para além do Sistema Solar deviam se apresentar com uma luminosidade bilhões de vezes menor que a estrela hospedeira e provavelmente se encontrariam a dezenas e centenas de parsecs, deixando uma separação angular entre o planeta e a estrela de 0,5 a 0,1 segundos de arco. Estes dois efeitos tornaram exigente a observação direta destes planetas, ainda nos comprimentos de onda onde a relação de intensidade estrela/planeta não é significativa. Para superar este problema, foram desenvolvidas outras técnicas de observação como pulsar timing, lentes gravitacionais, astrometria, velocidade radial, trânsitos planetários e análise das variações nos tempos dos trânsitos. Elas são denominadas de técnicas indiretas, porque estão baseadas na observação de efeitos na estrela devida à presença de um ou mais planetas em órbita ao redor dela.

A partir de 1985 as observações de estrelas mostravam a possível presença de planetas (Schilling, 1985). Mas, infelizmente, nesse momento muitas delas foram rejeitadas e outras só confirmadas anos depois. Por exemplo, em 1988 pesquisadores anunciaram variações na velocidade radial de Gamma Cephei A, uma das componentes do par binário Gamma Cephei. Mas naquele momento não conseguiram identificar o motivo das variações (Campbell et al., 1988). Um ano depois Lawton & Wright (1989) obtiveram medições similares na estrela e, desta vez, as atribuíram à presença de um planeta com período de 2,5 anos. Porém, somente em 2003, com a melhoria da instrumentação, se conseguiu a confirmação de tal planeta (Hatzes et al., 2003). Outro exemplo é a descoberta de um objeto perturbando a velocidade radial da estrela HD 114762. Tal objeto foi classificado inicialmente como anã marrom (Latham et al., 1989). Anos depois, através das observações conjuntas de velocidade radial e trânsitos da estrela, o objeto foi incluído dentro do catálogo de planetas extrasolares (Butler et al., 2003).

Tudo isto levou a que os primeiros planetas extrasolares confirmados fossem os planetas PSR 1257+12 b e c. Eles foram descobertos por variações no período de pulsações do pulsar PSR 1257+12. Tais variações indicaram a presença de dois corpos de massa terrestre, afastados da estrela a uma distância similar à qual Mercúrio se encontra do Sol (Wolszczan & Frail, 1992).

Por outro lado, a descoberta do primeiro planeta orbitando ao redor de uma estrela similar ao Sol foi feita em 1995 por Mayor & Queloz. Eles observaram variações na velocidade radial da estrela 51 Pegasi que interpretaram como sendo produzidas por um planeta da metade da massa de Júpiter e bastante próximo da estrela, cerca de oito vezes mais próximo que Mercúrio do Sol. Ele foi

nomeado como 51 Pegasi b.

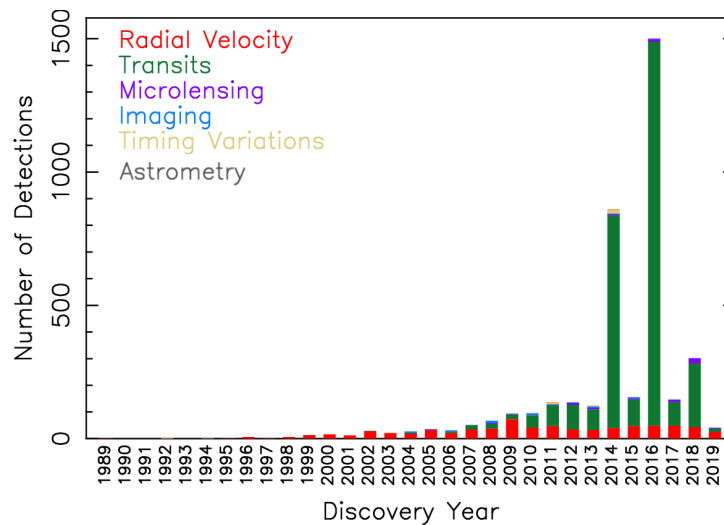


Figura 1 – Histograma do número de descobertas de exoplanetas desde as primeiras observações até Março de 2019. As cores representam as diferentes técnicas de detecção: em vermelho velocidade radial, em verde trânsitos planetários, em lilás lentes gravitacionais, em azul imagem direta e em amarelo as variações no tempo, que incluem tanto pulsar timing quanto variações no tempo de trânsito (fonte: <http://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/>).

O aumento no interesse desta área de pesquisa, junto com o desenvolvimento de nova instrumentação e as melhorias nas técnicas de observação tais como câmeras CCD, espectroscopia de alta resolução e o avanço no processamento de imagens, são as sementes da crescente descoberta de planetas extrassolares. Até o presente momento, se conhecem aproximadamente 4000 exoplanetas, e 2500 objetos com sinais similares aos planetas, mas que ainda não foram confirmados.

Na Figura 1, é possível notar a evolução nas descobertas de exoplanetas por ano e por técnica de detecção. A técnica espectroscópica dominou o campo das descobertas durante 15 anos, mas nos últimos anos a técnica fotométrica de trânsitos planetários tem ocupado esse primeiro lugar. Cada técnica de detecção possui pontos fortes e fracos, no entanto, até o momento, nenhuma delas fornece individualmente uma informação completa dos sistemas. Em particular, as técnicas de velocidade radial e de trânsitos planetários são complementares, fornecendo uma visão geral das características dos planetas. Porém, as estrelas que apresentam trânsitos nem sempre conseguem ser observadas espectroscopicamente. Por outro lado, nos últimos 8 anos tem-se atingido a precisão suficiente para observar variações nos tempos dos trânsitos geradas por perturbações de planetas tipo Terra. Assim, a combinação das técnicas de trânsitos planetários e variações nos tempos de trânsitos começou a ser útil para a confirmação de exoplanetas.

1.2 Dinâmica planetária

1.2.1 A órbita Kepleriana

No problema de dois corpos, a expressão analítica que define as forças entre eles utiliza a lei de gravitação de Newton. A equação resultante permite o conhecimento da órbita de um dos corpos relativo ao outro. Neste caso, da órbita do planeta ao redor da estrela.

A expressão da distância mútua entre o planeta e a estrela é

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}, \quad (1.1)$$

onde a é o semieixo maior da órbita, e é a excentricidade da órbita, com valores $0 \leq e < 1$ para órbitas fechadas (elipses) e $e \geq 1$ para órbitas abertas (parábola e hipérbolas), e f é a *anomalia verdadeira*.

Para órbitas fechadas, o planeta descreve a trajectória sobre uma elipse com a estrela num dos focos. Quando o planeta se encontra na posição onde $f = 0$, a distância entre o planeta e a estrela é mínima. O ponto onde isso acontece é chamado de *pericentro*. Quando o planeta se encontra no ponto onde $f = \pi$, a distância entre o planeta e a estrela é máxima. O ponto é conhecido como *apocentro*. As distâncias em tais pontos são

$$r_{peri} \equiv q = a(1 - e), \quad r_{apo} \equiv Q = a(1 + e). \quad (1.2)$$

Quanto à velocidade do planeta na órbita, ela fica definida em coordenadas polares como

$$v^2 = \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}^2 + r^2 \dot{f}^2, \quad (1.3)$$

onde

$$v_r \equiv \dot{r} = n a \frac{e \sin f}{\sqrt{1 - e^2}}, \quad v_f \equiv r \dot{f} = n a \frac{1 + e \cos f}{\sqrt{1 - e^2}}, \quad (1.4)$$

são as velocidades radial e tangencial, respectivamente, onde se define a frequência orbital ou *movimento médio* do planeta como

$$n = \frac{2\pi}{P} = \sqrt{G(m_\star + m_P)} a^{-3/2}, \quad (1.5)$$

sendo P o período orbital, G a constante de gravitação universal e m_\star e m_P as massas da estrela e do planeta, respectivamente. Logo, a equação 1.3 pode ser escrita como,

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad (1.6)$$

onde $\mu = G(m_\star + m_P)$. Usando a relação entre μ e n , as velocidades do planeta no pericentro e no apocentro da órbita podem-se escrever como

$$v_{peri} = n a \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}, \quad v_{apo} = n a \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}}. \quad (1.7)$$

Uma integral de movimento do problema, é o momento angular. A expressão dele por unidade de masa é

$$h = n a^2 \sqrt{1 - e^2}. \quad (1.8)$$

Esta equação contém informação importante a respeito das características da órbita. Integrando a expressão para o momento angular, se obtém que

$$A = \int_0^P \frac{1}{2} h dt = \frac{1}{2} P h.$$

Agora, tomando o quadrado da expressão anterior, e lembrando que: a área de uma elipse com semi-eixo maior a e semieixo menor b é $A = \pi a b$, e que a relação entre semieixos da elipse é $b = a\sqrt{1 - e^2}$, se consegue a seguinte expressão para o período P

$$P^2 = 4\pi^2 \frac{a^3}{\mu}. \quad (1.9)$$

Expressão também conhecida como, terceira lei de Kepler.

A equação 1.1 não depende explicitamente do tempo. A sua dependência temporal é dada através da inclusão de dois ângulos adicionais chamados de *anomalia excêntrica* e *anomalia média*. Um desenvolvimento mais detalhado disto pode ser encontrado em Murray & Dermott (1999). Para o propósito deste trabalho apresentam-se apenas algumas das expressões mais importantes.

A anomalia média, M , é uma quantidade angular que têm dependência linear com o tempo através de

$$M(t) = n(t - t_0), \quad (1.10)$$

onde t é o tempo, e t_0 é o tempo inicial (o tempo da passagem pelo pericentro). A anomalia excêntrica, E , está relacionada com M segundo

$$M = E - e \sin E, \quad (1.11)$$

que é conhecida como *equação de Kepler* e é uma equação transcendental, cuja solução pode ser obtida através de métodos iterativos. Uma vez que o valor de E é determinado, a anomalia verdadeira é computada segundo

$$\tan \frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}. \quad (1.12)$$

Desta maneira consegue-se a relação entre f e t .

1.2.2 A órbita em 3 dimensões

Para caracterizar a orientação do plano da órbita (x, y, z) no espaço, com respeito a um sistema de referência cartesiano arbitrário (X, Y, Z) (centrado na posição da estrela), se precisam de três ângulos: a inclinação i , a longitude do nodo ascendente Ω , e o argumento do pericentro ω (ver Figura 2). A inclinação do plano orbital i é o ângulo medido a partir do plano de referência (X, Y) com respeito ao plano da órbita. Se a órbita tem $i \neq 0^\circ$ então ela intersecta o plano de referência (X, Y) ao longo de uma linha chamada *linha dos nodos*, em cujos extremos se encontram os chamados *nodos*. O nodo ascendente é o ponto onde o planeta passa de valores negativos a valores positivos de Z . Enquanto que o nodo descendente indica o ponto onde o planeta passa de valores positivos a valores negativos de Z . Assim, a orientação da órbita só fica determinada quando é conhecida a posição angular do nodo ascendente a partir de uma direção de referência arbitrária, isto é, a longitude do nodo ascendente Ω . Por último, ω é o ângulo que indica a orientação da elipse no plano da órbita. Ele é medido sobre o plano da órbita a partir do nodo ascendente até o pericentro da órbita.

Os chamados parâmetros ou elementos orbitais a , e , i , ω , Ω e M definem univocamente a posição e velocidade do planeta com respeito à estrela. Enquanto que os dois primeiros elementos se

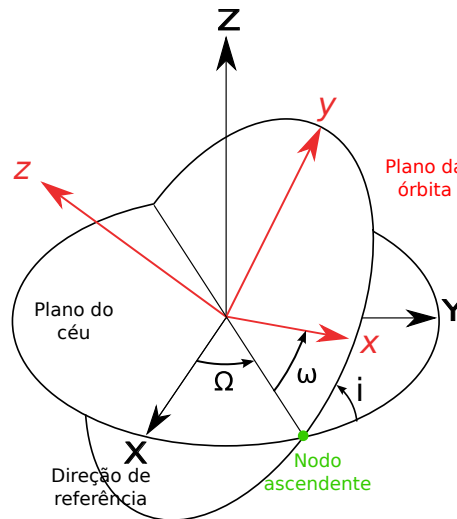


Figura 2 – Elementos orbitais do sistema estrela-planeta.

referem ao tamanho e forma da órbita, os três seguintes fornecem a orientação da órbita no espaço e o último indica a posição do planeta na sua órbita no tempo t .

Nas definições anteriores foi considerado que $i \neq 0$ e $e \neq 0$. Mas, se $e = 0$ então o pericentro da órbita não fica definido e portanto M também não. Por outro lado, se $i = 0$ a longitude do nodo ascendente não está definida e tanto ω quanto M também não ficam definidos. Para evitar estas indeterminações são introduzidas duas definições alternativas dos ângulos: a *longitude do pericentro*, $\varpi = \omega + \Omega$ e a *longitude média* $\lambda = M + \omega + \Omega$. Assim, neste caso, o conjunto de elementos orbitais que se utiliza é a , e , i , ϖ , Ω e λ .

1.2.3 Ressonâncias de movimentos médios

No problema de N-corpos com $N \geq 3$, a expressão baseada na lei de gravitação de Newton que descreve a força que N-1 corpos exercem sobre o corpo N é descrita por

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{N-1} \frac{G m_i m_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}, \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (1.13)$$

onde \mathbf{r}_i , \mathbf{r}_j são as posições dos diferentes corpos e m_i , m_j são as massas dos corpos. Infelizmente, neste caso a solução não pode ser expressada em forma analítica e só é possível desenvolver modelos que se aproximem da solução. Nestes modelos podem aparecer termos que representam uma relação entre as frequências orbitais, produto da influência gravitacional periódica entre os corpos. Estas frequências orbitais estão associadas a: o movimento médio do corpo, o movimento da linha dos nodos e o movimento da linha das apsides, que define a direção do pericentro da órbita. As relações entre estas frequências para diferentes corpos (ou inclusive para um mesmo corpo) são chamadas de ressonâncias, e levam a configurações que podem resultar dinamicamente estáveis ou instáveis.

Dois corpos encontram-se em *ressonância de movimentos médios* (RMM) quando o período orbital de um corpo é uma fração do período do outro. Se n_1 e n_2 são os movimentos médios dos corpos, onde 1 se refere a um corpo numa órbita mais interna e 2 a um corpo numa órbita mais

externa, a ressonância é representada pela relação:

$$\frac{n_1}{n_2} \approx \frac{p+q}{p} \quad (1.14)$$

e é usulamente denominada de ressonância $p+q:p$, onde p e q são valores inteiros. A ordem da ressonância é caracterizada pelo q . Quanto menor é a ordem de uma ressonância se diz que ela é mais forte. A ressonância de menor ordem possível é a de ordem zero não existindo limites para a maior ordem possível. A força de uma ressonância e a sua *largura* (área ocupada pela configuração ressonante no espaço de fases do sistema) são inversamente proporcionais à sua ordem. Portanto, ressonâncias de muito alta ordem não costumam ter influência significativa na dinâmica de um sistema.

1.3 Propriedades de Exoplanetas e Técnicas de Detecção

1.3.1 Propriedades de exoplanetas

Os exoplanetas são difíceis de detectar devido ao tamanho reduzido, ao baixo contraste com a estrela e à distância, entre outros fatores. Apesar destas dificuldades, existem técnicas que os detectam e que determinam parâmetros físicos dos planetas, tais como a massa e o raio.

Na figura 3 mostra-se, um diagrama de período vs. massa e outro de período vs. excentricidade, de todos os exoplanetas conhecidos ¹. Assim, por exemplo, nota-se que as técnicas de velocidade radial e astrometria são mais adequadas para resolver planetas com órbitas de longo período do que a técnica de trânsitos. Ou ainda, que a técnica de imageamento direto é mais eficiente na detecção de planetas brilhantes, massivos e a distâncias bem afastadas da estrela. Deste modo, percebe-se que cada técnica de detecção é naturalmente enviesada em diferentes regiões dos diagramas.

De fato, a quantidade de observações acumuladas nos últimos 25 anos é grande o suficiente para que haja uma distinção dos planetas segundo suas características físicas e dinâmicas. Lamentavelmente, ainda não existe um consenso para a classificação de tipos de planetas, e aqui adotaremos a descrição a partir de massa e raio planetário feita por [Borucki et al. \(2011\)](#), [Stevens & Gaudi \(2013\)](#), [Gaudi et al. \(2005\)](#) e [Huang et al. \(2016\)](#).

- **Planetas tipo Júpiter.** Existe um grupo de planetas chamado de *Jupiteres quentes* (do inglês *hot Jupiters*) definidos como planetas da massa e tamanho de Júpiter ($100 M_{\oplus} < m < 10^3 M_{\oplus}$ e $6 R_{\oplus} < R < 15 R_{\oplus}$) com períodos entre 3 e 9 dias ($a \leq 0,1$ au). Quando o período é menor a 3 dias ($a \leq 0,025$ au), os planetas são denominados *Jupiteres muito quentes* (do inglês *very hot Jupiters*). E quando o período é ainda menor, $P \leq 1$ d, denominam-se *Jupiteres quentes de período curto* (do inglês *ultra-short-period hot Jupiters*). Para além dos períodos de 10 dias ($a \sim 0,1-1$ au), os planetas são chamados de *Jupiteres mornos* (do inglês *warm Jupiters*), e quando $a > 1$ au, os planetas são chamados de *Jupiteres frios* (do inglês *cold Jupiters*)
- **Planetas tipo Netuno.** Os planetas com massas $10 M_{\oplus} < m < 100 M_{\oplus}$ e raios $2 R_{\oplus} < R < 6 R_{\oplus}$ são classificados como planetas tipo Netuno. Por sua vez, existe uma subdivisão dentro

¹ Os dados apresentados envolvem detecções ou confirmações de planetas por pelo menos duas técnicas de detecção.

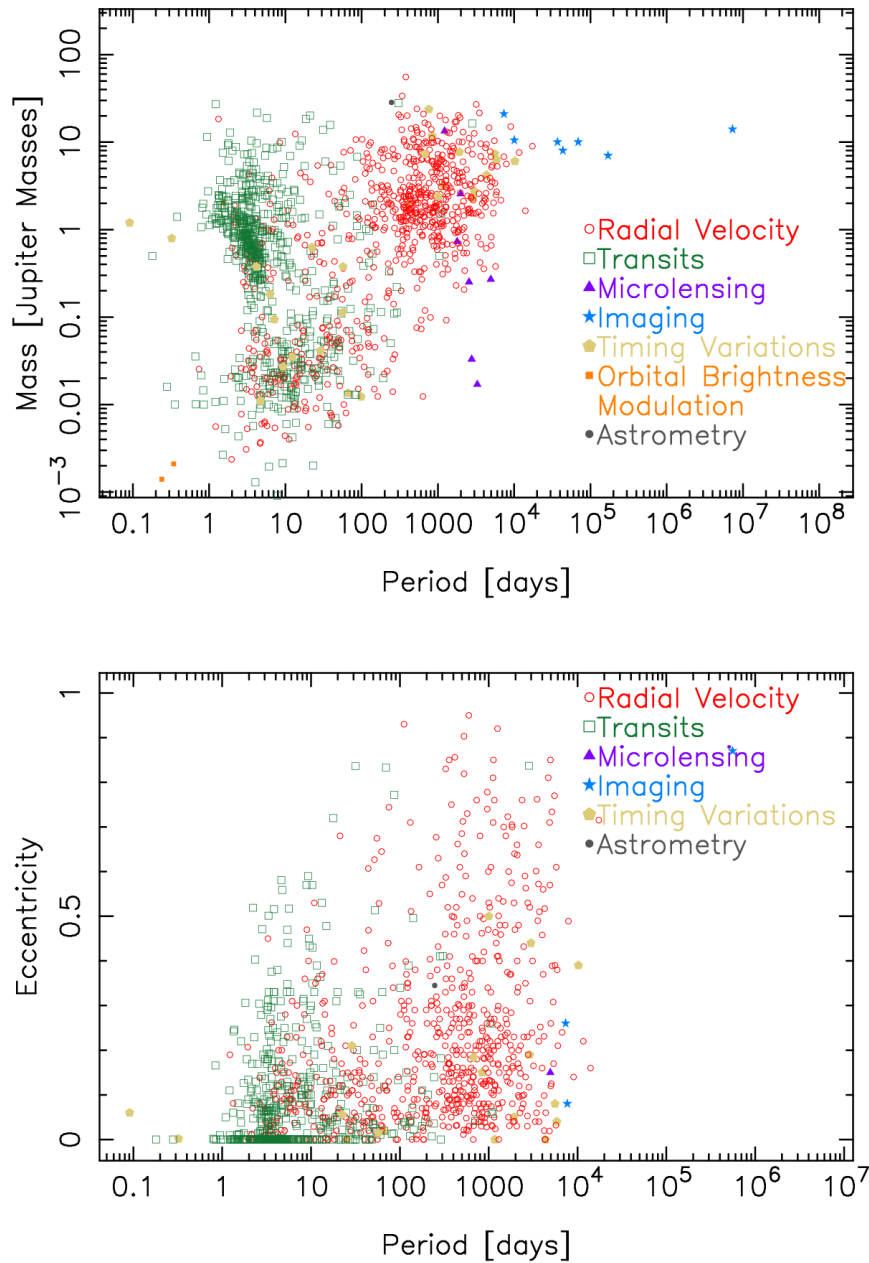


Figura 3 – Localização de planetas nos diagramas período-massa (painel superior) e período-excentricidade (painel inferior). As cores identificam diferentes técnicas de detecção (fonte: <http://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/>).

deste grupo. Aqueles que têm raios $2 R_{\oplus} < R < 4 R_{\oplus}$ são chamados de planetas sub-Netunos, entanto que os outros com raios maiores, $4 R_{\oplus} < R < 6 R_{\oplus}$, são conhecidos como planetas super-Netunos.

- **Planetas tipo Terra.** Finalmente, existe um grupo de planetas chamados de *super-Terras*, classificados como aqueles planetas com massas $2 M_{\oplus} < m < 10 M_{\oplus}$ e raios $1,25 R_{\oplus} < R < 2 R_{\oplus}$. Aqueles com períodos menores que 10 dias são chamados de *super-Terras quentes*. Valores inferiores a esses limites mínimos categorizam aos planetas tipo Terra ($0,1 M_{\oplus} < m < 2 M_{\oplus}$ e $R < 1,25 R_{\oplus}$).

A multiplicidade planetária, a excentricidade e a inclinação das órbitas são propriedades importantes para entender as semelhanças e diferenças dos exoplanetas com o Sistema Solar. Também, resulta importante conhecer a forma na qual a presença dos planetas pode estar vinculada ao tipo de estrela que orbita. Assim, por exemplo, a metalicidade estelar dá informação relevante a respeito da formação dos planetas.

A seguir, descrevem-se algumas das propriedades dos exoplanetas conhecidos até o momento.

- **Multiplicidade** (baseada em observações).

1. Ao redor de estrelas F,G,K: a distâncias $< 0,06$ au, os planetas encontram-se mais frequentemente isolados ($\sim 68\%$) do que formando sistemas multiplanetários ($\sim 31\%$). Nessas distâncias, os planetas isolados costumam ser de tipo Júpiter, enquanto que os planetas que formam sistemas multiplanetários são do tipo Terra (Lillo-Box et al. (2016); Weiss et al. (2018)). A distâncias maiores, de 0,06 a 0,5 au, encontram-se mais planetas internos de sistemas multiplanetários (64,5%) do que planetas isolados (35,5%) (Lillo-Box et al., 2016; Weiss et al., 2018).
2. Ao redor de estrelas M: nestas estrelas é mais comum encontrar planetas tipo Terra e sub-Netunos. Ou bem eles se encontram mais frequentemente isolados do que em grupo, ou essas Terras e sub-Netunos são os únicos planetas de um sistema planetário que transitam (Muirhead et al., 2015; Ballard & Johnson, 2016).
3. Ao redor de estrelas gigantes: a distâncias entre 0,06 e 0,5 au, a maioria dos planetas são parte de sistemas planetários (70%) (Lillo-Box et al., 2016).

- **Excentricidade.** Pela técnica de velocidade radial tem-se encontrado planetas em órbitas com excentricidades baixas e períodos $P \leq 10$ d. Nessas proximidades com a estrela as órbitas são circularizadas pelo efeito de maré. Mas também, tem se encontrado planetas mais excêntricos a distâncias maiores, como mostrado na Figura 4 (Kipping, 2013). Estes seguem uma distribuição de excentricidades com média $e \approx 0,3$ e dispersão de 0 a 0,93. Pela técnica de TTVs e astrossismologia, tem-se encontrado que os planetas isolados costumam ter excentricidades maiores que os planetas que se encontram em grupo. Enquanto os planetas isolados tem excentricidades de $\sim 0,3$, os planetas de sistemas multiplanetários aparecem em órbitas quase circulares ($e = 0,04 \pm 0,04$) (Xie et al., 2016).

- **Inclinação.** Pela técnica de trânsitos planetários se observa que, em sistemas compactos, os planetas pequenos mantém inclinações mutuas de alguns graus ($< 2^\circ$) (Lissauer et al., 2011; Fang & Margot, 2012; Fabrycky et al., 2014). Naqueles sistemas multiplanetários onde vários planetas transitam, estes aparecem em órbitas quase coplanares ($i \sim 0$), o que é uma consequência direta do fato dos trânsitos serem observados (Lissauer et al., 2011). Por outro lado, simulações numéricas tem sugerido que sistemas planetários com planetas gigantes podem ter inclinações mutuas maiores (Thommes & Lissauer, 2003).

- **Metalicidade estelar.** Pela técnica de velocidade radial tem-se encontrado que os planetas Jupiteres quentes são mais frequentes ao redor de estrelas de alta metalicidade (Fischer & Valenti, 2005). Os dados de trânsito sugerem que não existe nenhuma conexão entre a

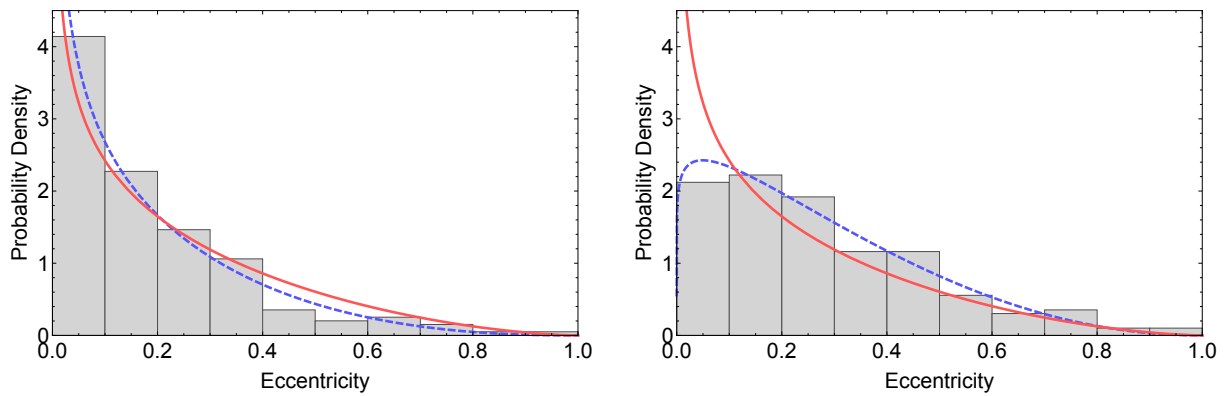


Figura 4 – Função de densidade de probabilidade para planetas com período curto (esquerda) e longo (direita). A linha contínua vermelha é o ajuste considerando uma distribuição Beta, enquanto a linha tracejada azul é o ajuste considerando duas distribuições Beta (imagem de [Kipping, 2013](#))

metallicidade da estrela e a existência de planetas menores que os sub-Netunos ([Buchhave et al., 2012](#)). Um estudo de [Weiss et al. \(2018\)](#) mostra que não existiria diferença significativa entre a metalicidade das estrelas com planetas isolados ou estrelas com sistemas multiplanetários.

1.3.1.1 Probabilidade de ocorrência

Para calcular a probabilidade de ocorrência dos exoplanetas, poderia se pensar que só é necessário calcular a quantidade de planetas de um certo tipo que existem. Contudo, alguns efeitos de completude ou fatores de correção das amostras observadas, também tem que ser considerados para que os cálculos sejam consistentes. O principal fator de correção é a quantidade de planetas que realmente existem e que as técnicas de detecção não conseguem detectar, e como isso varia em função do raio planetário, período, raio estelar, etc. O cálculo de probabilidades deve ser corrigido considerando a probabilidade de observar o planeta a partir da geometria do sistema, bem como a probabilidade de observação considerando o ruído observacional e a sensibilidade da análise dos dados.

De forma generalizada, pode-se dizer que a taxa de ocorrência dos planetas se incrementa com a diminuição do tamanho planetário ² ([Fressin et al., 2013](#)). Isso pode ser observado no histograma da Figura 5. Em alguns casos, calcula-se que a frequência se mantém constante para planetas com $R < 3 R_{\oplus}$ ([Mulders et al., 2015](#)).

Utilizando a amostra de planetas detectados por trânsito, [Fressin et al. \(2013\)](#) calcula que a probabilidade de ocorrência de planetas gigantes, com raios $6 R_{\oplus} < R < 22 R_{\oplus}$ e com períodos de até 418 dias, ao redor de estrelas da sequência principal, é de 5,2%. Eles também encontram uma possível correlação entre a probabilidade de encontrar planetas gigantes e o tipo espectral das estrelas. Existiria um excesso de planetas gigantes ao redor de estrelas tipo G-K (6%), enquanto que teria um deficit deles ao redor de estrelas tipo M (3,6%). Por outro lado, utilizando sistemas detectados por velocidade radial, tem-se reportado um crescimento linear de planetas gigantes com

² Considerar que o não é conhecido o comportamento de planetas tipo Terra ou de tamanho menor ($R_{\oplus} < 1$).

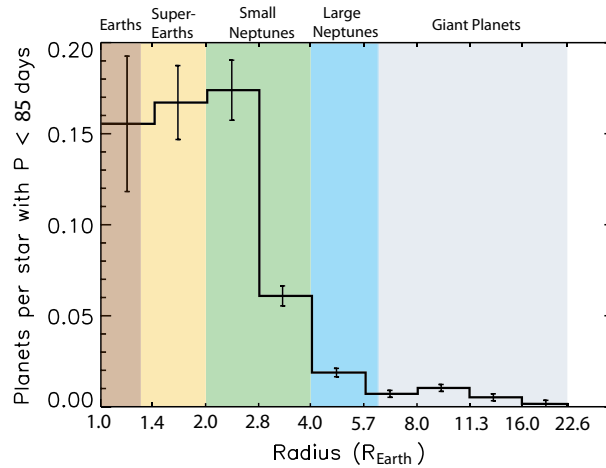


Figura 5 – Número de planetas por bin de tamanho para uma amostra de estrelas corrigida por completudeza. As estrelas são da sequência principal tipo F,G,K,M e foram observadas durante dezesseis meses (Fressin et al., 2013).

a massa estelar, estimando-se cerca de 3% para estrelas tipo M e 14% para estrelas tipo A (Johnson et al., 2010).

Segundo a técnica de trânsitos, a frequência dos super-Netunos, ao redor de estrelas da sequência principal e com períodos de até 418 dias, é de 3,2%, e não existe uma dependência significativa entre a taxa de ocorrência destes planetas e o tipo espectral da estrela hospedeira. Os sub-Netunos com períodos de até 245 dias se apresentam com uma probabilidade de 31% e também não tem preferência pelo tipo espectral da estrela (Fressin et al., 2013). Para Mulders et al. (2015); Mulders (2018) a taxa de ocorrência de planetas sub-Netunos e Terras se incrementa a medida que a temperatura efetiva das estrelas diminui. A taxa de ocorrência ao redor de estrelas M mais frias é maior que nas estrelas F, G, K num fator de $\sim 2-4$.

As super-Terras, com período de até 145 dias, acontecem ao redor de estrelas da sequência principal na ordem de 30%, e não apresentam correlação com o tipo espectral (Fressin et al., 2013). Nesse grupo foi encontrado um decaimento da quantidade de objetos ao redor de $1,7 R_{\oplus}$ (Fulton & Petigura, 2018), como pode ser observado na Figura 6. Essa lacuna na frequência tem sido interpretada por modelos teóricos como resultado do processo de evaporação de atmosferas para planetas bem próximos à estrela (Owen & Wu, 2013; Lopez & Fortney, 2013).

Uma tendência similar pode ser encontrada entre a metalicidade da estrela e a massa do planeta. A metalicidade média da estrela hospedeira aumenta com a massa do planeta. Mas esse aumento cessa a partir de massas $> 4.0 M_J$ onde a metalicidade estelar cai enquanto a massa planetária aumenta. Em contrapartida, a relação entre metalicidade estelar e período orbital mostra um comportamento bimodal. Para planetas com órbitas $P < 10$ d a metalicidade média é maior que para planetas com períodos maiores a 10 dias (Narang et al., 2018).

1.3.1.2 Teorias de formação

Anteriormente à descoberta de exoplanetas, o modelo de formação planetária era baseado no Sistema Solar. Assim, previa-se a existência de planetas rochosos nas órbitas mais internas e

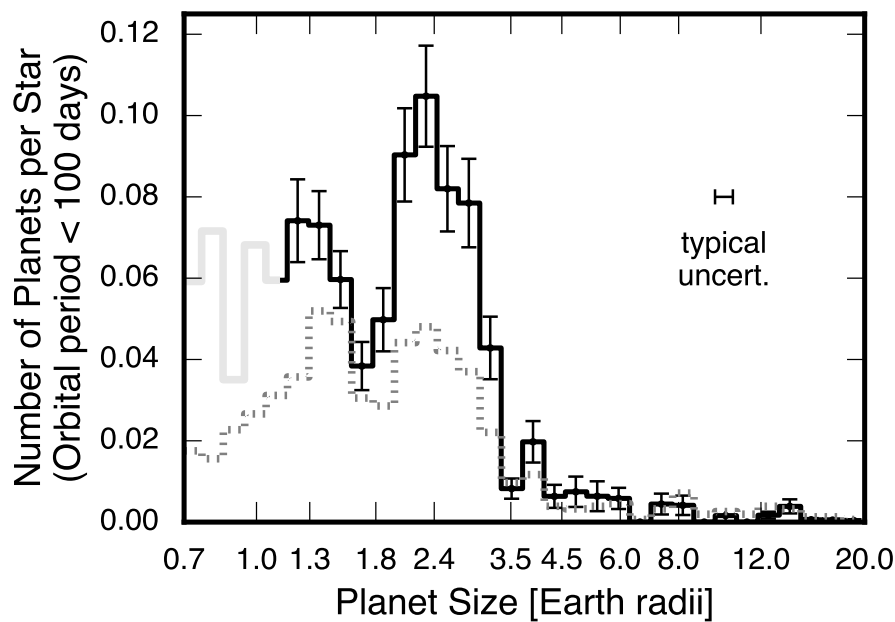


Figura 6 – Distribuição de planetas próximos à estrela. A linha sólida mostra a quantidade de planetas por estrela com período orbital < 100 d em função do tamanho planetário. A linha pontilhada mostra a distribuição de planetas detectados antes de fazer as correções por completude (Fulton & Petigura, 2018).

gigantes gasosos nas órbitas mais distantes da estrela. Com a descoberta de planetas extrassolares bem próximos das estrelas (com período orbital menor que Mercúrio) precisou-se rever os modelos.

As estrelas se formam a partir do colapso de grandes nuvens moleculares formadas por gás e poeira a baixas temperaturas (10 K). O gás, estruturado em filamentos, é composto na sua grande maioria por moléculas de hidrogênio. A atração gravitacional é contrabalançada pela, energia térmica, rotação, turbulência e campo magnético, mantendo a estrutura da nuvem. Quando a massa da nuvem atinge uma massa mínima, chamada massa de Jeans, a energia térmica não consegue resistir à auto-gravidade e a nuvem começa a se contrair. Essa contração origina perturbações que fragmentam a nuvem formando regiões mais densas (McKee & Ostriker, 2007, e referências aí apresentadas). Estes núcleos densos são instáveis e começam a colapsar mais rápido do que a nuvem como um todo, o que eleva a temperatura e deixa uma região central cada vez mais densa. Esse colapso rápido aumenta a rotação do núcleo. O resultado é um objeto formado por um núcleo denso, chamado de protoestrela, circundado por um disco com rotação, que possui grande parte do momento angular da nuvem inicial. Esse disco recebe o nome de disco protoplanetário. O disco fornece material para a protoestrela ao longo das linhas do campo magnético. Ao mesmo tempo, ocorrem fluxos de matéria no interior do disco. A taxa de acreção começa a diminuir devido ao aumento da luminosidade da estrela. Os materiais do disco também são processados com o resfriamento do disco, levando à formação de grãos. Nesse estágio, a estrela é classificada como uma T-Tauri. O ferro se condensa na parte mais interna do disco, os silicatos um pouco mais para fora. Já nas regiões externas do disco a temperatura é baixa o suficiente para permitir a condensação de gelos e outros materiais voláteis.

Nas partes mais internas do disco esse material começa crescer devido a colisões, e se formam partículas de alguns centímetros de diâmetro, que ainda se encontram acopladas ao gás, estas

partículas são chamadas de *pebbles*. Conforme elas se formam, tendem a sedimentar-se no plano do disco protoplanetário devido à gravidade do objeto central³. Existem alguns fenômenos que ainda não são bem entendidos nesse processo, mas parte do material do disco protoplanetário se aglomera crescendo em tamanho até chegar a objetos de alguns quilômetros de diâmetro, chamados de *planetesimais*. Estes planetesimais já não possuem seu movimento fortemente acoplado ao gás, mas a fonte de perturbação neles são as interações gravitacionais e colisões mútuas, causando tanto acreção quanto fragmentação dos *planetesimais*. Os pequenos corpos, com velocidades relativas menores do que a velocidade de escape dos corpos maiores, são acretados por corpos de maior tamanho. Esse processo de crescimento, chamado de *crescimento descontrolado*, ocorre de forma rápida e cessa quando esses corpos maiores começam a perturbar a sua vizinhança de planetesimais. Aqui, esses planetesimais são chamados de *embriões* planetários. Nesse momento tem início a fase de *crescimento oligárquico*, onde os corpos maiores crescem mais lentamente do que na fase de crescimento descontrolado, mas ainda assim mais rapidamente que os corpos menores. Isto é devido ao aumento nas velocidades relativas entre os corpos mais massivos e os planetesimais provocado pela intensidade das perturbações gravitacionais dos primeiros sobre os segundos. Após o crescimento oligárquico, a evolução acontece como resultado de colisões entre os poucos embriões planetários restantes com o *protoplaneta* formado. A formação final destes planetas rochosos se dá em aproximadamente 100 milhões de anos, dependendo da presença de planetas gigantes (exemplo [Goldreich & Ward, 1973](#); [Lissauer, 1993](#), e referências ai apresentadas).

Outra forma de gerar planetas rochosos é considerar que os *pebbles* se acumulam em regiões devido à natureza turbulenta do disco de gás, desencadeando a formação de planetesimais através do colapso gravitacional. Neste cenário, as partículas dão origem a essas concentrações o tempo todo, acumulando-se em filamentos que aceleram localmente o gás até a velocidade kepleriana, evitando a migração radial ([Bai & Stone, 2010](#)). Esses colapsos gravitacionais dão origem à formação de objetos de tamanhos na ordem de 100 km a 1000 km diretamente ([Johansen et al., 2012](#); [Kato et al., 2012](#)).

Para a formação de planetas gigantes, quando comparados com os gigantes do Sistema Solar, é necessário contar com H₂ e He. Portanto, a sua formação deve acontecer entre os primeiros 3 a 10 milhões de anos antes que o gás do disco protoplanetário seja dissipado. Existem dois modelos de formação para planetas gasosos.

O modelo de colapso ou instabilidade gravitacional se baseia na formação de um disco protoplanetário massivo ($\sim 1M_{\odot}$) onde nas regiões externas acontecem instabilidades, formando aglomerados de matéria onde os planetas gasosos seriam formados. Neste modelo, a formação de gigantes acontece diretamente do material do disco protoplanetário sem a necessidade de um núcleo rochoso. Este processo de formação se espera que aconteça ainda na fase de acreção da nuvem protoestelar e dura da ordem de 10^2 anos. Os materiais mais pesados surgiriam posteriormente da acreção dos planetesimais (exemplo [Hubickyj, 2010](#), e referências ali apresentadas). Aparentemente,

³ Como as nuvens moleculares e suas regiões mais densas têm um momento angular intrínseco diferente de zero, além da força e pressão gravitacionais há uma força centrífuga que atua durante o colapso do material. Enquanto a gravidade e a pressão atuam de maneira isotrópica, a força centrífuga tem uma direção preferencial e atua perpendicularmente ao eixo de rotação. Devido à conservação do momento angular, à medida que o material colapsa a velocidade de rotação aumenta. Em algum ponto do colapso a força centrífuga torna-se tão grande que faz com que o material caia paralelamente ao eixo de rotação. Desta forma, um disco começa a se formar no plano equatorial da protoestrela.

esse modelo leva à formação de planetas com massa muito maior do que a de Júpiter, mas não parece claro se permite a formação de planetas menos massivos (Ollivier et al., 2009). Além disso, as condições para a fragmentação do disco ocorrer são muito difíceis de serem satisfeitas uma vez que o disco não resfria rápido o suficiente (ver por exemplo Forgan et al., 2009).

Por outro lado, no modelo de acreção ao núcleo, os gigantes se formam como um núcleo rochoso além da linha do gelo⁴. O embrião planetário acreta gás sempre que a energia térmica do gás for menor que a energia gravitacional que liga o gás ao embrião. Durante a acreção, o núcleo e o envelope estão em equilíbrio quase-estático e térmico. Quando o envelope atinge a massa do núcleo, inicia-se um novo processo de acreção do gás do disco conhecido como *crescimento runaway*. Finalmente, o acúmulo de gás termina, seja pela abertura de uma lacuna no disco (*gap*) como consequência dos efeitos de maré causados pelo planeta, seja pela dissipação da própria nebulosa. Uma vez completada a acreção, o planeta evolui isolado contraindo-se e esfriando-se para uma massa constante. A formação do planeta deve ocorrer durante o tempo de vida do disco protoplanetário, portanto, a acreção de gelos no núcleo deve ser bastante rápida. O resultado é a formação de um planeta gasoso de grande massa e com um núcleo sólido (exemplo Mayer, 2010, e referências aí apresentadas). Estimativas indicam que, o tempo de acreção de Júpiter e Saturno é coerente com o tempo de vida médio do disco de gás, tipicamente da ordem de poucos milhões de anos. Mas para Urano e Netuno as estimativas de acreção para suas localizações atuais (20-30 au) levam mais tempo, pelo qual dificilmente Urano e Netuno poderiam ter-se formado tão rapidamente na posição onde se encontram. No entanto, a rápida acreção de *pebbles*) pelo crescimento assistido por gás por parte dos planetesimais, pode reduzir o suficiente as escalas de tempo de crescimento para permitir que planetas gigantes se formem a grandes distâncias orbitais (Levison et al., 2015, e referências aí citadas). Todos os modelos de formação planetária resultam na formação de planetas rochosos em

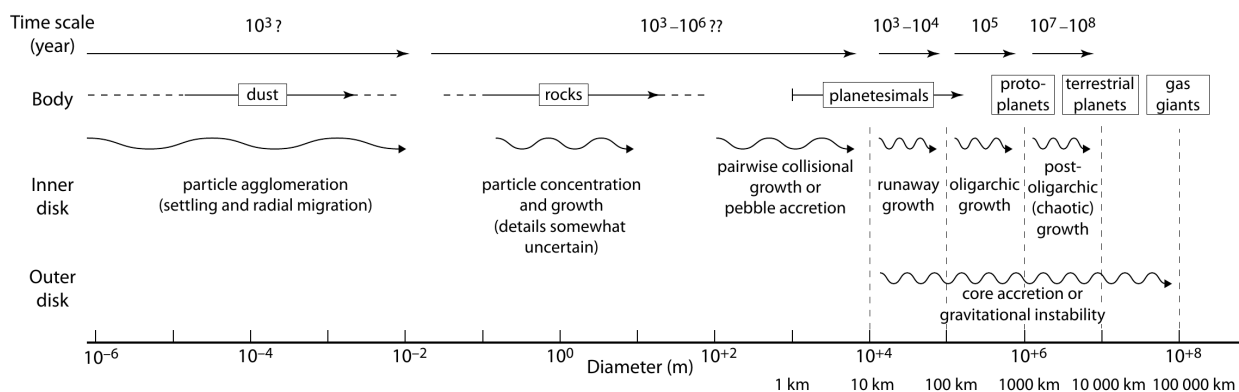


Figura 7 – Mapa esquemático do crescimento de planetas (imagem de Perryman, 2018).

órbitas internas e gasosos em órbitas externas (ver Figura 7). Entretanto, como falado anteriormente, tem-se verificado a existência de planetas tipo Júpiter bem próximos da estrela. A teoria mais aceita atualmente, para conseguir explicá-los, é a migração planetária. Neste cenário os planetas podem se formar em um determinado local e migrar para órbitas mais internas ou mais externas. O modelo atual considera que a principal fonte de migração é a interação entre os protoplanetas e o disco

⁴ Se define linha de gelo como o limite da região no disco protoplanetário além do qual o gelo de água pode estar presente.

gasoso protoplanetário através da troca de momento angular entre eles (Baruteau & Masset, 2013, e referências ali mencionadas). Em menor escala, a migração também pode ocorrer pela troca de momento angular entre planetas e discos de planetesimais, como no caso do modelo de Nice para o Sistema Solar.

1.3.2 Métodos de detecção

Por uma questão de relevância para este trabalho, somente serão descritas nesta seção as técnicas de velocidade radial e de trânsitos planetários. Para mais informações a respeito das outras técnicas de detecção como lentes gravitacionais, astrometria, imageamento direto e *pulsar timing* recomenda-se a leitura dos seguintes artigos: Bennett (2008); Sozzetti (2005); Lagrange (2014); Kramer (2017).

1.3.2.1 Velocidade Radial

Nos sistemas planetários, tanto a estrela quanto o planeta se movimentam ao redor do baricentro do sistema. A velocidade da estrela na direção da linha do observador é conhecida como velocidade radial (VR). Ela pode ser deduzida a partir do deslocamento da posição das linhas espectrais da estrela a partir do efeito Doppler. De acordo com o efeito, a luz emitida por uma fonte que se aproxima ao (se afasta do) observador sofre um deslocamento para comprimentos de onda mais curtos (longos). O deslocamento pode ser expresso como (Eggenberger & Udry, 2010)

$$z = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{1 + v/c}{\sqrt{1 - v_t^2/c^2}} - 1, \quad (1.15)$$

onde z é o *redshift*, l e l_0 são os comprimentos de onda observado e em repouso da linha, respetivamente, v é a velocidade radial, c é a velocidade da luz e v_t é a velocidade total com respeito ao observador. Devido a que podemos considerar $v_t \ll c$ é possível fazer um desenvolvimento em série de Taylor ao redor de $v_t = 0$ na equação 1.15, resultando em

$$v = \frac{l - l_0}{l_0} c. \quad (1.16)$$

Na prática, as linhas espectrais da estrela são medidas junto com uma lâmpada de comparação que fornece as linhas espectrais em repouso. As observações são feitas ao longo de vários anos obtendo-se variação da velocidade radial observada com o tempo, que é conhecida como curva de velocidade radial.

1.3.2.2 Modelo kepleriano em VR

A variação da velocidade radial estelar v_* , produzida por um planeta ao redor de uma estrela, fica definida por um conjunto de 6 parâmetros $\theta \equiv (P, K, e, \omega, M_0, C)$: o período orbital do planeta P , a semi-amplitude da velocidade radial K , a excentricidade e , o argumento do pericentro ω , a anomalia media à época correspondente M_0 e uma constante C . A equação do modelo em questão é

$$\Delta v_*(t) = K \left(\cos(\omega + f) + e \cos \omega \right) + C, \quad (1.17)$$

onde f é a anomalia verdadeira da órbita do planeta. Se $f \equiv f(t)$ é substituída considerando-se as equações 1.12, 1.11 e 1.10, a semi-amplitude K [em m s^{-1}] fica definida como:

$$K = \frac{2\pi}{P} \frac{a m_p}{m_\star + m_p} \frac{\sin i}{\sqrt{1 - e^2}}, \quad (1.18)$$

onde P é expresso em dias, a é o semieixo maior da órbita em au, e i é a inclinação da órbita com respeito ao plano do céu (Taff, 1985). A constante C é um deslocamento sistemático na velocidade radial, aplicada a todos os dados observados, e está relacionada com a calibração de cada espectrógrafo/observatório e principalmente com a velocidade sistêmica da estrela em relação ao Sol.

Para uma estrela com N planetas não existe uma forma funcional exata da variação de v_\star , mas esta pode ser aproximada pela sobreposição de N órbitas Keplerianas (sem considerar as interações gravitacionais entre os planetas),

$$v_{\star, \text{modelo}}(t) = \sum_{i=1}^N \Delta v_{\star, i}(t) + C, \quad (1.19)$$

onde os $\Delta v_{\star, i}(t)$ são dados pela equação 1.17 utilizando-se os parâmetros orbitais do i -ésimo planeta, e a constante C é o deslocamento da origem para cada planeta. Finalmente, quando o modelo Kepleriano é resolvido e a massa da estrela m_\star é determinada por algum outro método, a informação final que se obtém do(s) planeta(s) é: período P , semi eixo maior a , excentricidade e , anomalia média M , e um valor de massa mínima para a massa do planeta $m_P \sin i$ (os valores da inclinação i e da longitude do nodo Ω ficam indeterminados por este modelo).

Pela forma da equação do modelo, fica claro que a probabilidade de fazer a detecção de um planeta depende da semi-amplitude da velocidade radial K . Se na equação 1.18 se considera um planeta em órbita circular ao redor de uma estrela de masa solar ($m_\star = M_\odot$), ela se simplifica da forma

$$K [\text{m s}^{-1}] = 28.57 \frac{m_P \sin i}{P^{1/3}} [M_J \text{ yr}]. \quad (1.20)$$

Por exemplo, no Sistema Solar a perturbação que Júpiter provoca na velocidade radial do Sol tem uma semi amplitude de $\sim 12.5 \text{ m s}^{-1}$, enquanto que a Terra produz uma semi amplitude de $\sim 0.1 \text{ m s}^{-1}$ (Lovis & Fischer, 2010). Atualmente os espectrógrafos conseguem sinais de $1\text{-}3 \text{ m s}^{-1}$ no infravermelho próximo, e de até 1 m s^{-1} no ótico. Desta forma, a técnica de detecção de exoplanetas via VR favorece a descoberta de planetas de grande massa e próximos à estrela.

O modelo Kepleriano é um modelo adequado para descrever uma grande quantidade de sistemas planetários onde as perturbações mútuas entre os planetas são desprezíveis em escalas de tempo comparadas à duração das observações. Contudo, as interações entre os planetas podem adicionar um sinal nas observações e, se as interações entre os planetas são fortes, o modelo se torna sensível às massas dos planetas quebrando dessa forma a principal degenerescência entre inclinação e massa. Neste caso se deve resolver as equações dinâmicas do sistema de N -corpos (ver equação 1.13). O ajuste de órbitas considerando interações mutuas é chamado de *ajuste newtoniano*.

Uma vez encontrada a melhor solução é necessário estudar a dinâmica e a estabilidade do sistema que a solução fornece. Para isso, se integram, mais uma vez, as equações de N -corpos mas desta vez considerando-se como condições iniciais os parâmetros da solução encontrada. Se o sistema não for estável, o processo de ajuste do modelo começa novamente. Se a solução mostrar um sistema estável então, a principio, a solução estaria correta (Ford, 2006).

1.4 Trânsitos planetários

1.4.1 A curva de luz

Considere-se um sistema formado por uma estrela e um planeta. Quando o plano orbital do planeta encontra-se alinhado com a linha de visada, ele periodicamente atravessa o disco projetado da estrela bloqueando parte da luz emitida pelo astro (trânsito). Quando o planeta fica ocultado pelo disco estelar, o brilho observado será o brilho da estrela sozinha (ocultação ou trânsito secundário). Essa variação do fluxo da estrela no tempo fica representado na *curva de luz*. Para obter informação a respeito da estrela hospedeira e do planeta, é essencial ajustar a curva de luz observada com um modelo analítico.

O modelo mais utilizado, que descreve as equações do brilho estelar em função da geometria do problema é o modelo de [Mandel & Agol \(2002\)](#)⁵. Nas seguintes subseções serão mostrados os casos que o modelo pode tratar.

1.4.1.1 Estrela com brilho uniforme.

O fluxo total de um sistema estrela + planeta no tempo (considerados como corpos completamente esféricos) é:

$$F(t) = F_{\star} + F_P - \alpha(t) F_{\star}, \quad (1.21)$$

onde F_{\star} e F_P são os fluxos da estrela e do planeta respectivamente, e $\alpha(t)$ é uma função temporal adimensional que descreve a sobreposição entre as áreas dos corpos durante o trânsito (ver Figura 8). Antes e depois do trânsito o fluxo total é o fluxo da estrela mais o fluxo da face escura do planeta. No momento do trânsito, a curva de luz é o fluxo da estrela menos a porção da face escura do planeta. Antes da ocultação, o fluxo total é o fluxo da estrela mais o fluxo da face iluminada do planeta. Por último, na ocultação o fluxo é o fluxo da estrela sozinha. Geralmente, F_{\star} pode flutuar devido a fulgurações, manchas estelares, efeito de maré com o planeta, entre outros, assim como acontece com F_P . O fluxo do planeta pode flutuar por mudanças na iluminação de suas faces e por mudanças na atmosfera do mesmo. Mas, por simplicidade, esses efeitos se consideram desprezíveis ([Giménez, 2006](#)).

Se o máximo valor de fluxo corresponde ao fluxo da estrela mais o fluxo da parte visível do planeta, então pode-se escrever $F_{\star} + F_P = 1$ e assim, na ocultação, o fluxo é $1 - F_P = F_{\star}$ ([Winn, 2010](#)). Como na ocultação a curva de luz mostra uma pequena diminuição, considera-se que o fluxo do planeta é desprezível em relação ao fluxo estelar ([Giménez, 2006](#)). A equação 1.21 transforma-se em:

$$F(t) = 1 - \alpha(t). \quad (1.22)$$

Considerando-se a sobreposição dos discos estelar e planetário, em função da geometria indicada na Figura 9, é possível escrever $\alpha(t)$ como função da área dos discos sobrepostos, δA , e da

⁵ O modelo de [Mandel & Agol](#) está escrito em FORTRAN e é de livre acesso: <http://www.astro.washington.edu/users/agol/transit.html>.

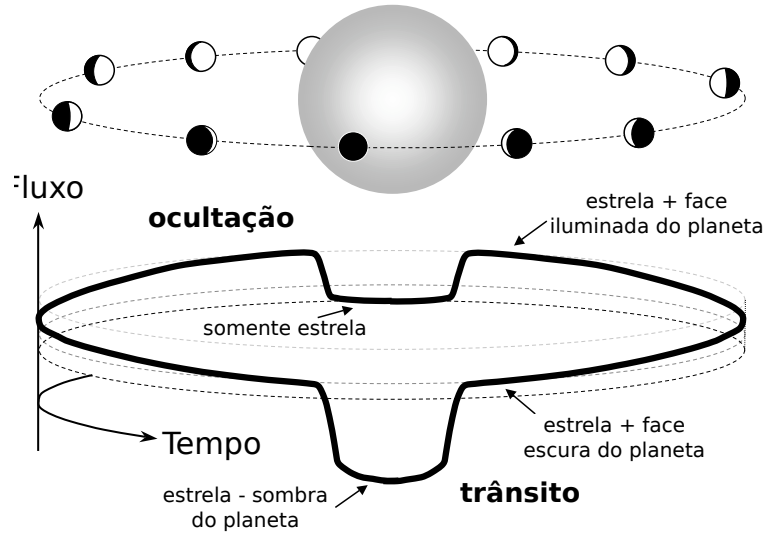


Figura 8 – Curva e geometria de um trânsito planetário (adaptado de [Winn, 2010](#)).

area, A , da estrela:

$$\alpha(t) \equiv \frac{\delta A}{A} = \frac{\Delta A_P + \Delta A_\star}{\pi R_\star^2} = \frac{2}{\pi} \left(\theta_1 + p^2 \theta_2 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4z^2 - (1 - p^2 + z^2)^2}{4}} \right). \quad (1.23)$$

onde $\theta_1 = \cos^{-1}[(z^2 + p^2 - 1)/2zp]$, $\theta_2 = \cos^{-1}[(z^2 - p^2 + 1)/2d]$, $p = R_P/R_\star$ e $z = d/R_\star$, sendo d a distância entre os centros dos discos projetados da estrela e do planeta e R_\star, R_P os raios da estrela e do planeta, respectivamente. Portanto, o fluxo da estrela de brilho uniforme, é

$$F = 1 - \alpha(p, z) = \begin{cases} 1 & 1 + p < z \\ 1 - \frac{2}{\pi} \left[\theta_1 + p^2 \theta_2 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4z^2 - (1 + z^2 - p^2)^2}{4}} \right] & |1 - p| < z \leq 1 + p \\ 1 - p^2 & z \leq 1 - p \\ 0 & z \leq p - 1. \end{cases} \quad (1.24)$$

No primeiro caso, o fluxo é total fora do trânsito. O terceiro caso, corresponde ao fluxo durante o eclipse total. O último caso, acontece quando o planeta tem um raio suficientemente grande como para ocultar por completo a estrela. O segundo caso, corresponde ao intervalo de tempo enquanto o disco planetário toca por primeira vez o disco estelar projetado, até o último contato entre eles.

A dependência temporal aparece com o movimento do planeta na órbita. Portanto, fica implícito na distância d e assim em $z \equiv z(t)$ como segue

$$z(t) = \frac{d}{R_\star}. \quad (1.25)$$

A relação entre a geometria da curva de luz, considerando-se um planeta em órbita circular, e os observáveis que ela fornece (ver Figura 10), é representada através de cinco equações analíticas ([Seager & Mallén-Ornelas, 2003](#)). Elas são:

- A 3ª lei de Kepler:

$$P^2 = 4\pi^2 \frac{a^3}{G(m_\star + m_P)}. \quad (1.26)$$

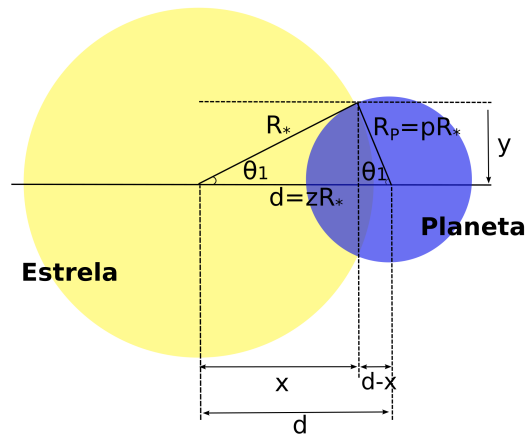


Figura 9 – Geometria do trânsito projetado (adaptado de Mandel & Agol, 2002).

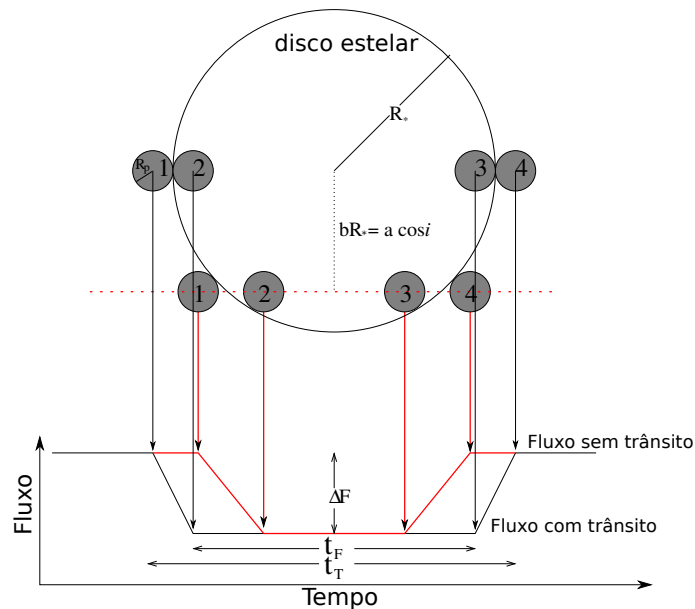


Figura 10 – Geometria de dois trânsitos de um exoplaneta e as respectivas curvas de luz. Em preto para um trânsito central (com inclinação $i_P = 90^\circ$ ou parâmetro de impacto $b = 0$), em vermelho para um trânsito com menor inclinação e maior valor do parâmetro de impacto (adaptado de Seager & Mallén-Ornelas, 2003)

- A relação raio-massa estelar:

$$R_\star = k m_\star, \quad (1.27)$$

onde k uma constante de proporcionalidade.

- A relação entre a profundidade do trânsito, ΔF , e os raios planetário e estelar:

$$\Delta F = \left(\frac{R_P}{R_\star} \right)^2. \quad (1.28)$$

- A relação entre o tempo durante o qual o disco do planeta encontra-se completamente dentro

do disco projetado da estrela, t_F , e a órbita circular:

$$t_F = \frac{P}{\pi} \arcsin \left(\frac{R_\star}{a} \left[\frac{(1 + \sqrt{\Delta F})^2 - b^2}{\sin i_P^2} \right]^{1/2} \right). \quad (1.29)$$

- A relação entre o tempo total do trânsito (duração desde o momento no qual o disco planetário começa a ter contato com o disco projetado da estrela, até o momento em que o planeta deixa de tê-lo ao sair do trânsito), t_T , e a órbita circular:

$$t_T = \frac{P}{\pi} \arcsin \left(\frac{R_\star}{a} \left[\frac{(1 - \sqrt{\Delta F})^2 - b^2}{\sin i_P^2} \right]^{1/2} \right). \quad (1.30)$$

Nas últimas duas equações b é o *parâmetro de impacto* que geometricamente representa a distância projetada entre os centros do planeta e da estrela na metade do trânsito, e é definido como

$$b = \frac{a}{R_\star} \cos i_P, \quad (1.31)$$

Quando o eclipse é central, então $b = 0$ e portanto $i_P = 90^\circ$. O valor máximo que pode adotar o parâmetro de impacto durante um trânsito é $b = 1$, que acontece quando o trânsito é rasante. Nestes eclipses apenas uma porção do planeta e da estrela ficam em contato.

Da combinação entre as cinco equações (1.26, 1.27, 1.28, 1.29 e 1.30) derivam-se as seguintes propriedades físicas do sistema:

- o quociente entre raio planetário y raio estelar,

$$\Delta F = \left(\frac{R_P}{R_\star} \right)^2, \quad (1.32)$$

- o parâmetro de impacto,

$$b \equiv \frac{a}{R_\star} \cos i = \left[\frac{(1 - \sqrt{\Delta F})^2 - \frac{S_F}{S_T} (1 + \sqrt{\Delta F})^2}{1 - \frac{S_F}{S_T}} \right]^{1/2}, \quad (1.33)$$

onde $S_F = \sin^2(t_F \pi / P)$ e $S_T = \sin^2(t_T \pi / P)$,

- o quociente entre o semi-eixo maior e o raio estelar,

$$\frac{a}{R_\star} = \left[\frac{(1 + \sqrt{\Delta F})^2 - b^2}{\sin i \sin^2(t_T \pi / P)} \right]^{1/2}, \quad (1.34)$$

- a densidade estelar em unidades de densidade solar

$$\frac{\rho_\star}{\rho_\odot} \equiv \frac{M_\star / M_\odot}{(R_\star / R_\odot)^3} = \frac{4\pi^2}{G P^2} \left[\frac{(1 + \sqrt{\Delta F})^2 - b^2}{\sin i \sin^2(t_T \pi / P)} \right]^{3/2}. \quad (1.35)$$

1.4.1.2 Estrela com brilho não uniforme.

O efeito ótico chamado de *escurecimento do limbo* é o responsável por fazer que a borda da estrela, na imagem projetada, apareça mais escura que o centro. A explicação advém dos gases na fotosfera estelar. A luz que se observa no centro do disco estelar vem das camadas mais interiores da fotosfera, portanto mais quentes e conseqüentemente mais luminosas. Na borda, os fótons viajam desde camadas mais superficiais, que se encontram a temperaturas mais baixas, e assim emitem com menor intensidade. A base da curva de luz durante o trânsito é sensível ao escurecimento do limbo. O efeito produz uma diferença na inclinação da curva de luz nos momentos de entrada e saída do trânsito, deixando a base da curva de luz mais suave.

Neste caso, o fluxo do disco estelar é calculado a partir da integral da intensidade $I(r)$ através da superfície dA :

$$F = \int_{\text{disco}} I(r) dA = \int_0^1 I(r) 2\pi r dr. \quad (1.36)$$

Conseqüentemente, o fluxo estelar no momento do trânsito é calculado segundo a seguinte equação,

$$F_e = \int_0^1 I(r) dA = \int_0^1 I(r) \frac{d}{dr} [F^s(p/r, z/r) r^2] dr. \quad (1.37)$$

Desta maneira, o fluxo total para um sistema com uma estrela de brilho não uniforme encontra-se dado por:

$$F = \frac{F_e}{F} = \frac{\int_0^1 I(r) \frac{d}{dr} [F^s(p/r, z/r) r^2] dr}{\int_0^1 I(r) 2\pi r dr}, \quad (1.38)$$

onde se considerou que

$$dA = \frac{d}{dr} [\alpha(p/r, z/r) r^2] dr. \quad (1.39)$$

Na literatura encontram-se diferentes tipos de funções para parametrizar a luminosidade $I(r)$: linear (Milne, 1921), logarítmica (Klinglesmith & Sobieski, 1970) e, a comumente usada, lei quadrática (Manduca et al., 1977). Em todos os casos, a função inclui parâmetros relacionados ao escurecimento do limbo. Esses parâmetros podem ser adotados de diferentes tabelas de acordo com o tipo espectral da estrela (Claret, 2000, 2004).

1.4.2 Missões de observação

Considere-se um sistema situado a 10 pc do Sol. Se no sistema há um planeta tipo Júpiter quente, com $R_P \sim R_J$, orbitando ao redor de uma estrela de tipo solar, com período igual a 3 dias e órbita circular, o trânsito do planeta acontecerá durante 2,5 h, gerando uma queda no brilho estelar de $\Delta F = 0,01$ mag (1%). Entretanto, se ao redor da mesma estrela há um planeta tipo Terra, com $R_P \sim R_{\oplus}$, em uma órbita com período de 1 dia, então o eclipse mostrará uma queda da luminosidade de $\Delta F = 0,0001$ mag (0,01%) durante 13 h.

Se os trânsitos são procurados com observações de solo, é necessário levar em consideração que as observações são afetadas pela turbulência atmosférica que produz flutuações fotométricas num nível de aproximadamente 0,2 a 0,5%. Assim, a detecção de planetas gigantes em torno de estrelas brilhantes (10 mag) pode ser feita com pequenos telescópios de 10 cm, e ao redor de estrelas mais fracas (20 mag) com telescópios de pelo menos 8 m. Mas, desde Terra, a precisão fotométrica

não é suficiente para detectar planetas tipo Terra, pelo que o desenvolvimento de missões espaciais é fundamental para estender as observações a planetas menores.

O telescópio espacial Kepler, foi uma missão da NASA, com o objetivo específico de procurar exoplanetas. Especialmente aqueles planetas que possuíssem o tamanho da Terra, e ao redor de ~ 150.000 estrelas de sequência principal com magnitude maior a 16 mag. O telescópio é de 0,9 m de diâmetro e abrangeu um campo de visão de aproximadamente $10 \times 10^\circ$ na região de Cygnus. Ele se encontrava em órbita ao redor de um dos pontos Lagrangianos do sistema Sol-Terra, de tal forma que, a Terra nunca cobrisse o campo de visão do telescópio, e para mantê-lo afastado da contaminação luminosa. O Kepler foi lançado em 2009 e começou o monitoramento em maio desse mesmo ano (Borucki et al., 2010). Lamentavelmente, em maio de 2013 o satélite perdeu duas das quatro rodas de controle utilizadas para manter a orientação e, como plano alternativo, decidiu-se usar a pressão solar como um substituto para uma de suas rodas de reação. Para atingir o nível de estabilidade, mudou-se a orientação do Kepler para ser quase paralela à eclíptica. A nova fase de observação é chamada de K2 e o satélite está atualmente em sua 18ª campanha de observação. Ele funcionará até o combustível acabar.

Para o entendimento da base de dados utilizada neste trabalho é necessária a introdução de algumas definições técnicas:

- Um conjunto de pixels carregados e armazenados, obtidos num horário específico, é chamado de cadência. O tempo total durante o qual os dados em uma cadência são carregados é o período de cadência. Os dois períodos de cadência que Kepler utiliza são Cadência Longa (LC) e Cadência Curta (SC). Cada tempo de quadro envolve um tempo de exposição de 6,02 s e um tempo de leitura de 0,52 s. Para a LC, são combinados 270 quadros totalizando $1,766 \text{ s} = 0,49 \text{ h}$. Para a SC combinam-se 9 quadros, totalizando 58,85 s.
- Um conjunto de dados refere-se ao tipo de dados, e ao intervalo de observação durante o qual os dados foram coletados. O intervalo de observação para dados de LC é geralmente um trimestre, indicado por Q[n], embora Q0 e Q1 sejam de 10 dias e um mês de duração, respectivamente, ao invés de 3 meses. Alvos de SC podem ser alterados a cada mês, portanto os intervalos de observação SC são indicados por Q[n]M[m], onde $m = 1, 2, 3$ é o mês dentro do respectivo trimestre.

Desde os começos da missão foram liberados dados de trânsitos de exoplanetas. Em 2018 foi liberado o último catálogo da missão chamado de DR25, do inglês *Data Release 25* (Thompson et al., 2018)⁶. O catálogo analisa os 4 anos de observação (Q1 a Q17) de 206.150 estrelas, confirmando um total de 2.342 planetas e 2.421 objetos com possibilidades de serem planetas, como se pode observar na Figura 11. Estes últimos são designados como KOIs, do inglês *Kepler Objects of Interest*. Muitos destes KOIs apresentam variações nos tempos centrais de trânsito, t_C , das curvas de luz (TTVs). A última análise das curvas de luz com LC de todas as observações de Kepler (Q1-Q17) foi feita por Holczer et al. (2016a)⁷. Nesse catálogo, são listados 2.599 objetos candidatos a planetas com variações no t_C , dos quais 260 apresentam períodos no sinal de TTVs de mais de 100 dias. Os

⁶ Disponível em https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/docs/Kepler_KOI_docs.html

⁷ O catálogo encontra-se disponível em <http://vizier.cfa.harvard.edu/viz-bin/VizieR?-source=J/ApJS/225/9>

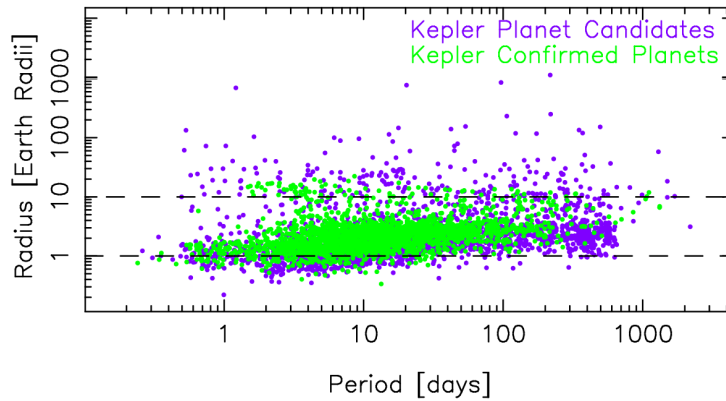


Figura 11 – Planetas confirmados e candidatos a planetas derivados da missão Kepler (adaptada de <http://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/>).

períodos e amplitudes dos sinais formados pelas variações de t_C (ver Capítulo 2) e os seus erros foram ajustadas com uma função cosseno periódica.

É importante salientar que, até a atualidade, não existe nenhum catálogo disponível de TTVs com observações de SC. A importância de contar com um catálogo destas características, é o fato de que, a informação do trânsito obtida em aproximadamente 1 minuto, mostraria mais detalhes do trânsito. Talvez desta forma os dados teriam uma melhor S/N, ou seja menor quantidade de erro nos parâmetros derivados deles.

2 Variações nos Tempos de Trânsito

2.1 Introdução

Quando apenas um planeta orbita e ainda transita uma estrela, os intervalos entre trânsitos consecutivos (medições entre o tempo central t_C de cada trânsito) e a duração do trânsito (t_T) são constantes, com um valor exatamente igual ao período do planeta. Porém, sob a presença de mais de um planeta, aquele que transita exibe um pequeno desvio do seu movimento kepleriano devido à interação gravitacional mútua entre os planetas. Como consequência disto, o tempo t_C entre os trânsitos é alterado, variando o valor do período de trânsito em trânsito. Esse efeito também pode originar diferenças no tempo t_T entre os trânsitos. As variações em t_C são chamadas de variações no tempo do trânsito ou TTVs, enquanto que as variações em t_T são conhecidas como variações na duração do trânsito ou TDVs. Apesar da presente tese estar focada no estudo das variações de t_C , cabe mencionar que as variações de t_T , além de serem geradas pela presença de outros planetas (Nesvorný et al., 2013), são ainda mais sensíveis aos efeitos dinâmicos na própria órbita do planeta que transita (Damiani & Lanza, 2011), bem como à perturbação de exoluas (Kipping, 2009). Por outro lado, o método de TTVs é sensível às perturbações exercidas por planetas de diferentes massas em órbitas próximas à ressonâncias de movimentos médios. Nesses casos, a técnica permite caracterizar desde planetas tipo Jupiter até planetas com massa e tamanho da Terra.

O primeiro uso do método de TTVs serviu para confirmar e determinar as massas dos planetas Kepler-9 b e c (Holman et al., 2010). Um ano depois, a técnica forneceu a confirmação e determinação das massas dos 6 planetas no sistema planetário Kepler 11 (Lissauer et al., 2011). Mais recentemente, a técnica também conseguiu caracterizar planetas que não transitam, através da perturbação que provocam em outro(s) planeta(s) que transita(m). Alguns exemplos disto são Kepler-46c (Nesvorný et al., 2012), Kepler-419c (Dawson et al., 2014), Kepler-539c (Mancini et al., 2016).

2.1.1 Modelos analíticos da sinal de TTVs

Antes da primeira confirmação de exoplanetas pela análise de TTVs, já tinham sido publicados modelos analíticos que propunham a existência de planetas a partir da observação de um companheiro (Miralda-Escudé, 2002; Holman & Murray, 2005; Agol et al., 2005) e descreviam como obter informação sobre os mesmos (Nesvorný & Morbidelli, 2008; Nesvorný, 2009). Depois das primeiras descobertas, continuaram a ser construídos modelos tentando explicar mais efeitos observacionais associados aos TTVs (Lithwick et al., 2012; Nesvorný & Vokrouhlický, 2016; Deck & Agol, 2016).

Apesar da implementação de modelos analíticos não ser o objetivo deste trabalho, serão apresentados a seguir alguns dos resultados obtidos pelos diferentes trabalhos antes mencionados, a fim de mostrar a dependência dos TTVs com os parâmetros físicos dos planetas. Por limitação de escopo, vamos omitir o detalhamento matemático dos modelos.

Considere-se um sistema com dois planetas em órbitas coplanares em relação a linha de visada: o interno, com massa m_1 , semi-eixo a_1 e excentricidade e_1 , e o externo, com massa m_2 ,

semi-eixo a_2 e excentricidade e_2 , ambos ao redor de uma estrela de massa m_0 . Considere-se um sistema de coordenadas de Jacobi, onde a posição de m_1 é dada com respeito a m_0 , e a posição de m_2 é dada com respeito ao centro de massa do sistema m_0 e m_1 . Segundo o estudo de [Agol et al. \(2005\)](#), os tipos de configurações que podem gerar a presença de TTVs são:

1. Planeta interno sem interação gravitacional com o planeta externo que transita.

Apesar dos TTVs serem provocados essencialmente pela interação planeta-planeta, a introdução de um segundo corpo no sistema irá influenciar o movimento astrométrico da estrela. Para não haver interação gravitacional entre os planetas deve-se considerar que o pericentro do planeta externo é maior que o apocentro do planeta interno.

- a) Órbitas circulares. Considere-se o planeta externo em trânsito e em órbita circular ao redor do baricentro do sistema estrela-planeta interno. Aqui os TTVs do planeta externo são gerados pelo movimento da estrela devido ao movimento em órbita circular do planeta interno. Por isto, o desvio na posição da estrela é:

$$x_0 = -\mu_1 x_1, \quad (2.1)$$

onde $x_1 = a_1 \sin[2\pi(t - t_0)/P_1]$. Deste modo, a amplitude do m -ésimo TTV do planeta externo é:

$$\delta t_2 = \frac{x_0}{v_2 - v_0}, \quad (2.2)$$

$$= -\frac{P_2 \mu_1}{2\pi} \frac{a_1}{a_2} \sin \left[2\pi \frac{mP_2 - t_0}{P_1} \right], \quad (2.3)$$

onde é considerado que $v_0 \ll v_2$ e a expressão de v_2 , segundo equação 1.6, é $v_2 = 2\pi a_2/P_2$.

- b) Órbitas excêntricas. Considere-se o planeta externo em trânsito e em órbita excêntrica ao redor do baricentro do sistema estrela-planeta. O planeta interno também se encontra em órbita excêntrica. Assumindo que $a_2 \gg a_1$ então m_2 sempre se encontra aproximadamente na mesma posição depois do momento do trânsito. Portanto a velocidade tangencial é:

$$v_2 = \frac{2\pi a_2}{P_2} \frac{1 + e \cos \varpi}{\sqrt{1 - e_2^2}}. \quad (2.4)$$

Assim, a amplitude do TTV do planeta externo é:

$$\delta t_2 = -\frac{P_2 \mu_1}{2\pi} \frac{\sin(f_1 + \varpi_1) \sqrt{1 - e_2^2}}{a_2 (1 + e_2 \cos \varpi_2)}. \quad (2.5)$$

2. Planeta externo interagindo com o planeta interno que transita.

- a) Pressupõe-se que o planeta externo tem órbita excêntrica ao redor do baricentro do sistema estrela-planeta. O planeta interno transita e a excentricidade da órbita é considerada desprezível. Com essa configuração, o movimento do planeta externo provoca uma força de maré que gera uma mudança periódica na frequência do planeta interno. Portanto a amplitude do TTV do planeta interno é ¹:

$$\delta t_1 \sim P_2 e_2 \mu_2 \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^3 \quad (2.6)$$

¹ Ver [Agol et al. \(2005\)](#) para dedução das contas

3. **Órbitas não ressonantes.** Considere-se que ambos planetas transitam a estrela. As amplitudes dos TTVs estão estritamente vinculadas com as forças geradas pelas RMMs, ainda no caso de sistemas próximos às RMMs. Os planetas interagem mais fortemente em conjunção (isto é $\lambda_1 = \lambda_2$). Nesses momentos, o perturbador gera uma força radial no outro planeta induzindo uma mudança na excentricidades da órbita. Isto provoca uma mudança no semi-eixo maior da órbita e portanto no periodo, gerando assim TTVs no planeta. Assumindo-se uma ressonância de primeira ordem, na equação 1.14 temos $q = 1$. Portanto, se o sistema encontra-se a uma distância s de uma ressonância de primeira ordem onde

$$s = 1 - \frac{P_1 p + 1}{P_2 p}, \quad (2.7)$$

a amplitude do TTV é

$$\delta t \sim \mu_{\text{pert}} s^{-1} P, \quad (2.8)$$

onde $P = 2\pi/[p(n_1 - n_2)]$, ou seja, a amplitude do TTV se escala com m_{pert}/m_0 . Na Figura 12 se mostra a comparação esquemática da sensibilidade na detecção de planetas tipo Terra, neste caso para o sistema HD 209458, pelos métodos de VR, astrometria e TTVs. O sistema foi simulado com um planeta que transita de massa $m_{\text{tran}} = 6.7 \times 10^{-4} M_{\odot}$ e um perturbador com massa de $m_{\text{pert}} = 10^{-7} M_{\odot}$, ambos em órbitas circulares. A técnica de TTVs (linha contínua) tem melhor sensibilidade que astrometria (linha tracejada) para razões de semieixos menores que 2, aproximadamente. Fora da ressonância (razões de semi-eixo ~ 1), a técnica de VR (linha pontilhada) caracteriza melhor a massa do planeta perturbador, enquanto que próximo da ressonância a técnica de TTV é sensível a valores de massa bem pequenos.

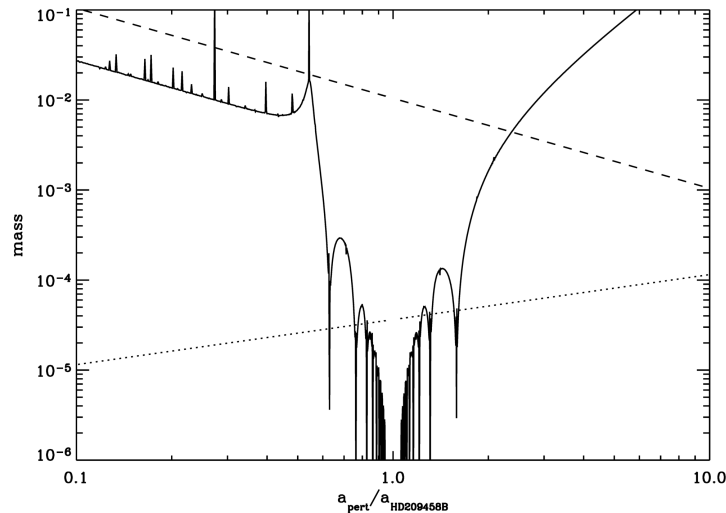


Figura 12 – Sensibilidade na detecção da massa do planeta transitante da estrela HD 209458 ao redor da ressonância 1:1. O eixo vertical é a massa do planeta perturbador em unidades de M_{\odot} . O eixo horizontal é o quociente entre os períodos planetários. A linha contínua é referente à detecção por TTV, a linha tracejada por Astrometria, e a linha pontilhada por VR (Agol et al., 2005).

Por outro lado, usando teoria de perturbação Lithwick et al. (2012) derivaram equações analíticas válidas sob certas condições. No seu modelo, eles escrevem as excentricidades planetárias de

forma complexa

$$z = e \exp i\varpi = z_{\text{free}} + z_{\text{forz}}, \quad (2.9)$$

onde z_{free} é a excentricidade livre e z_{forz} é a excentricidade forçada. Esta última é gerada pela proximidade a uma ressonância de primeira ordem $k:k-1$ (ou seja $p = k-1$ e $q = 1$). Assim, as amplitudes e fases dos TTVs vêm dadas por

$$\delta t_1 = \frac{V_1}{2i} \exp i\lambda^k + \text{c.c.} \quad (2.10)$$

$$\delta t_2 = \frac{V_2}{2i} \exp i\lambda^k + \text{c.c.}, \quad (2.11)$$

onde $\lambda^k \equiv k\lambda_2 - (k-1)\lambda_1$ é a longitude de conjunção em função das longitudes médias de ambos planetas e marca o periodo do sinal de TTV, chamado de super-periodo, dado por

$$P^k \equiv \frac{1}{|k/P_2 - (k-1)/P_1|}. \quad (2.12)$$

As variáveis V_1 e V_2 são os TTVs em forma complexa de cada planeta e se escrevem como

$$V_1 = P_1 \frac{\mu_1}{\pi k^{2/3} (k-1)^{1/3} \Delta} \left(-f - \frac{3}{2} \frac{Z_{\text{free}}^*}{2\Delta} \right) \quad (2.13)$$

$$V_2 = P_2 \frac{\mu}{\pi k \Delta} \left(-g + \frac{3}{2} \frac{Z_{\text{free}}^*}{\Delta} \right), \quad (2.14)$$

onde f e g são somatórios de coeficientes de Laplace ($f < 0$, $g > 0$), o $*$ denota o complexo conjugado, e a distância à ressonância é $\Delta = (P_1/P_2)[(k-1)/k] - 1$.

Este modelo mostra que a amplitude do TTV depende da massa do planeta perturbador e da excentricidade livre. Segundo os autores, só quando essa excentricidade livre é pequena se consegue determinar univocamente o valor da massa do planeta.

4. **Órbitas ressonantes.** Nos casos de RMM de primeira ordem, $s = 0$ (eq. 2.7), e a amplitude de TTV é máxima, isto é:

$$\delta_{t,\text{max}} \sim \frac{P}{4.5j} \frac{m_{\text{pert}}}{m_{\text{pert}} + m_{\text{tran}}}. \quad (2.15)$$

Se o planeta que transita é mais leve que o perturbador, então δt é da ordem do periodo P e não depende da massa do perturbador. Para aqueles planetas massivos que transitam, δt fica da ordem do quociente entre as massas dos planetas.

Nesta seção mostramos como as amplitudes dos TTVs, aproximadas de forma analítica, dependem da massa do planeta perturbador e não do planeta que apresenta o TTV. Por isso, quando ambos planetas transitam e apresentam suficientes trânsitos é possível obter a massa de ambos planetas. Por outro lado, quando um planeta não apresenta TTVs, a caracterização da massa do perturbador simplesmente não pode ser feita.

O trabalho desta tese não utiliza uma aproximação analítica mas mostra que, com uma suficiente quantidade de dados observacionais (mais do que 15 ciclos de observação) e com a utilização de um método adequado, é possível determinar completamente os parâmetros orbitais dos planetas assim como as suas massas, mesmo quando um dos planetas não possui dados de TTVs (seja porque não transita, seja porque os TTVs possuem amplitudes menores que o ruído observacional). A seguir são explicadas as ferramentas utilizadas e a metodologia aplicada na análise dos dados.

2.2 Método de Inversão

O método de análise de TTVs conhecido como método de inversão consta, na prática, de duas partes. Para efeitos deste trabalho, chamaremos à primeira parte de *análise fotométrica* e à segunda parte de *análise dinâmica*. Na análise fotométrica, confirma-se primeiro se nos dados de trânsitos observados, $t_{C,o}$, existem variações dos tempos centrais de trânsito e se elas são provocadas pela perturbação gravitacional de outro(s) planeta(s). Na análise dinâmica, se constroem modelos de sistemas planetários com ao menos um planeta transitando e um planeta perturbador e a seguir se calculam os tempos, $t_{C,c}$, dos trânsitos gerados por cada modelo. Os tempos observados (calculados) estão vinculados com o tempo de efemérides t_0 , que é fornecido a partir do ajuste linear dos tempos $t_{C,o}$ ($t_{C,c}$) por uma relação do tipo

$$t_C = t_0 + PY + \delta t \quad (2.16)$$

onde P é o período orbital do planeta que transita e Y é o ciclo do trânsito, sendo este último um número inteiro. Em seguida, o sinal de TTV, δt_o (δt_c), é obtido subtraindo-se de todas as medições $t_{C,o}$ ($t_{C,c}$) o tempo esperado $t_E = t_0 + PY$.

Muitas vezes os sinais não são suaves nem periódicos, com comportamentos irregulares, etc. como se pode ver na Figura 13. Esta figura apresenta uma variedade de tipos de sinais de TTVs com diferentes amplitudes e períodos. Em todos os casos, os sinais de TTVs foram simulados utilizando-se a perturbação de um planeta de massa $m_2 = 1 M_{\oplus}$ sobre um planeta de massa $m_1 = 1 M_J$ que transita. Ambos os planetas encontram-se ao redor de uma estrela tipo solar. O perturbado encontra-se inicialmente a $a_1 = 0,05$ au e em órbita circular ($e_1 = 0$), sendo $a_1 \leq a_2$. No painel superior, o sinal ($a_2/a_1 = 3,6593$, $e_2 = 0,596$, $M_2 = 70^\circ$, $M_1 = 0^\circ$, $\varpi_2 = 180^\circ$) é ajustado com uma função senoidal com período de $\sim 0,5$ anos. No segundo painel a curva ($a_2/a_1 = 2,3313$, $e_2 = 0,395$, $M_2 = M_1 = 0^\circ$, $\varpi_2 = 0^\circ$) mostra um sinal senoidal com período $\geq 3,5$ anos, modulada entre 0 e ~ 1 ano e entre $\sim 2,5$ e $\sim 3,5$ anos. A amplitude do sinal modulado é de ~ 5 segundos, enquanto que entre $\sim 1,5$ e $\sim 2,5$ anos a amplitude atinge ~ 20 segundos. No terceiro painel, o sinal ($a_2/a_1 = 1,5812$, $e_2 = 0,204$, $M_2 = M_1 = 0^\circ$, $\varpi_2 = 0^\circ$) parece mostrar um comportamento periódico de período longo ($\geq 3,5$ anos) e uma modulação com amplitude ≤ 100 segundos. O último painel exhibe um sinal de TTV ($a_2/a_1 = 1,5812$, $e_2 = 0,219$, $M_2 = M_1 = 0^\circ$, $\varpi_2 = 0^\circ$) que até ~ 2 anos varia em milhares de segundos e depois se mantém com um comportamento senoidal com uma amplitude de ~ 1000 segundos. Em conclusão, existe uma grande diversidade de tipos de sinais de TTVs e só um estudo específico e detalhado de cada sistema pode revelar a respectiva configuração planetária subjacente.

No proceso de escolher o melhor ajuste para um sinal de TTV podem-se introduzir erros nas quantidades e, portanto, o resultado final encontrar-se-á viesado. O que este trabalho propõe é comparar diretamente os valores de $t_{C,o}$ com os valores $t_{C,c}$ a fim de evitar a incorporação de erros espúrios.

Na análise dinâmica, o número de parâmetros a serem ajustados depende da quantidade de planetas que tem, ou que se acredita que tenha, o sistema planetário. Portanto, a dimensão do espaço paramétrico é sempre um número considerável (pelo menos 12 parâmetros), e isto demandará um grande tempo computacional para o espaço ser analisado de forma completa. Além disto, é importante contar com uma estatística considerável de dados a partir da análise fotométrica. Estudos

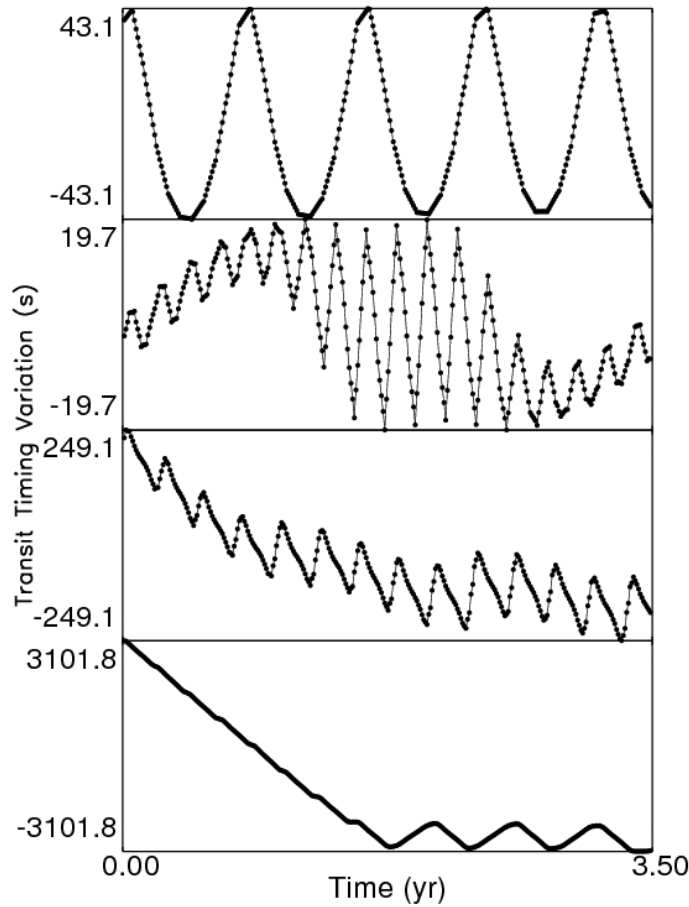


Figura 13 – Sinais de TTV de um planeta Júpiter quente em órbita circular, provocado por um planeta tipo Terra em órbita exterior. No painel superior a configuração é $a_2/a_1 = 3.6593$ au, $e_2 = 0.596$. No segundo painel, $a_2/a_1 = 2.3313$ au, $e_2 = 0.395$. No terceiro painel, $a_2/a_1 = 1.5812$ au, $e_2 = 0.204$. No painel inferior, $a_2/a_1 = 1.5812$ au, $e_2 = 0.219$ (Veras et al., 2011).

mostram que são necessárias observações de > 20 trânsitos para ter certeza da unicidade do resultado da análise dinâmica (Nesvorný & Morbidelli, 2008; Veras et al., 2010).

Para o desenvolvimento da parte dinâmica do método são necessárias três ferramentas:

- 1) um algoritmo que percorra o espaço paramétrico,
- 2) um algoritmo que resolva a dinâmica do sistema planetário e calcule os $t_{C,c}$ dos trânsitos planetários,
- 3) um algoritmo capaz de comparar e escolher entre diferentes soluções, quando houver mais de uma.

Nesvorný et al. (2012) têm conseguido discriminar entre diferentes tipos de modelos para o ajuste fotométrico (modelos com t_C variável ou tempo de efemérides periódico, ver Nesvorný et al., 2012) utilizando o algoritmo MultiNest (Feroz & Hobson, 2008; Feroz et al., 2009, 2013).

Tal ferramenta de inferência Bayesiana permite calcular a distribuição a posteriori dos parâmetros e escolher entre modelos, ou seja, corresponde às ferramentas (i) e (iii) que este trabalho precisa. Mais recentemente, o Dr Nesvorný junto com o Dr. Kipping têm conseguido vincular o algoritmo de N-corpos `Swift MVS` com o algoritmo de geração de TTVs, ou seja, a ferramenta (ii) necessária para este estudo. Para isto, eles modificaram o algoritmo `Swift MVS` de forma que calcule os tempos em que acontecem os trânsitos de forma eficiente para um grande número de modelos. O código que reúne as três ferramentas mencionadas acima é denominado de `TDModel` e foi utilizado para desenvolver este trabalho. O código encontra-se escrito em linguagens `Fortran 90` e `Fortran 77`, e permite a sua paralelização em `Open MPI`. O `TDModel` foi utilizado previamente na análise de exoplanetas por [Nesvorný et al. \(2014\)](#) e [Kipping et al. \(2014\)](#).

2.2.1 Simulações de N-corpos

O pacote `Swift` ([Levison & Duncan, 1994](#)) é um conjunto de algoritmos que resolvem o problema de N-corpos considerando diferentes configurações. Em particular, `Swift` permite simular a dinâmica de sistemas planetários de N-corpos em que há um objeto central de massa dominante (estrela) e corpos de massa muito menor orbitando ao seu redor (planetas), bem como também partículas de teste (asteroides, cometas). O código utilizado neste trabalho está baseado no algoritmo denominado `MVS` (do inglês *Mixed Variable Symplectic*). Neste algoritmo, as trajetórias dos planetas e das partículas de teste são aproximadas ao longo de um passo de integração por órbitas keplerianas ao redor do corpo central. Estas órbitas keplerianas são perturbadas no início e no final do passo de integração através da aplicação de um impulso nas velocidades orbitais proporcional à força de perturbação. Os planetas se perturbam entre si e perturbam as partículas de teste, enquanto que as partículas de teste, obviamente, não têm influência sobre planetas nem entre elas. O algoritmo `MVS` recebe como condição inicial as posições x, y, z e velocidades v_x, v_y, v_z cartesianas astrocêntricas dos planetas e partículas de teste e, através de uma sub-rotina incorporada nele, fornece como dados de saída os elementos orbitais osculadores dos corpos ao longo do tempo.

O algoritmo `MVS` pertence à classe de algoritmos denominados simpléticos, desenvolvidos especificamente para a resolução de sistemas Hamiltonianos. Na implementação incorporada no `TDModel`, a solução é aprimorada através da aplicação de um método corretor, conhecido como corretor simplético, que possibilita reproduzir as órbitas dos planetas com uma alta acurácia, necessária para o cálculo preciso dos tempos de trânsito.

Nos casos analisados nesta tese, os sistemas planetários estão formados apenas pela estrela central e por dois planetas. O passo de integração em todos os casos foi da ordem de 0.01 d e o tempo total de integração foi escolhido de acordo com o intervalo de tempo das observações de trânsitos disponíveis para cada sistema.

Internamente, o algoritmo `MVS` está modificado para gerar os valores de tempos de trânsito uma vez por cada período orbital do planeta que transita. Dado o estado dinâmico do sistema (posições e velocidades) em algum tempo de referência, juntamente com as massas planetárias, o código resolve as órbitas dos planetas como explicado acima, ignorando efeitos relativísticos e de maré. Ao longo da solução, o código registra cada tempo central de trânsito do planeta, definido como o momento em que a distância entre a estrela e o planeta, projetada no plano do céu quando o

planeta está posicionado à frente da estrela, é mínima (isto é, quando a distância d na equação 1.25 é mínima). Cabe destacar que, para efeitos do algoritmo MVS, os corpos são tratados como massas puntiformes, sendo irrelevantes os raios de cada um. Desta forma, determinam-se não só o tempo central do trânsito como também o estado orbital (posições e velocidades astrocêntricas projetadas no céu) naquele momento.

2.2.2 Inferência Bayesiana

A ideia de utilizar inferência Bayesiana é baseada nas limitações da estatística frequentista, que não permite incorporar de maneira coerente na análise estatística a informação além da amostra disponível, isto é, baseia-se apenas na amostra de dados observados. No caso de haverem poucos dados, a estatística frequentista apresenta sérios problemas pois vários dos seus métodos e resultados se apoiam em comportamentos assintóticos, no teorema do limite central, etc., e portanto requer grandes quantidades de dados para ter confiança nos resultados. Em contraposição, a vantagem da estatística Bayesiana é que ela aproveita tanto a informação que a amostra de dados observados contém como a informação que pode existir além da amostra disponível, sendo esta última toda a informação relevante que ajude a diminuir a incerteza ou ignorância em torno de algum fenômeno aleatório de interesse. Assim, a estatística Bayesiana é capaz de fazer inferências com poucos dados desde que haja suficiente informação além da amostra disponível. Além disso, no que se refere ao contraste de hipóteses, a metodologia da estatística frequentista encontra-se limitada ao contraste de apenas duas hipóteses, enquanto que a metodologia Bayesiana permite contrastar n hipóteses ao mesmo tempo.

Neste contexto, considere-se uma quantidade de interesse desconhecida, θ , correspondente a um dado modelo M (tipicamente não observável). A informação que se dispõe sobre θ , resumida probabilisticamente através de $P(\theta | M)$, pode ser aumentada observando-se uma quantidade aleatória X relacionada com θ . A distribuição amostral $P(d | \theta, M)$ define esta relação, onde d seriam os dados associados à variável X . Parece intuitivo achar que, após observar as d realizações da variável X , a quantidade de informação sobre θ aumente, mas a lógica real do problema se encontra descrita pela regra de Bayes que é a regra utilizada para quantificar esse aumento de informação:

$$P(\theta | d, M) = \frac{P(d | \theta, M) P(\theta | M)}{P(d | M)} \quad (2.17)$$

Aqui, $P(\theta | d, M)$ é a distribuição a posteriori dos parâmetros θ , que definem o modelo M , fornecidos os dados d . Essa distribuição está dada em termos de: (i) a função de verossimilhança (do inglês *Likelihood*), $P(d | \theta, M) \equiv \mathcal{L}(d | \theta, M)$, que fornece a plausibilidade de gerar os dados d com os parâmetros θ do modelo M , (ii) a distribuição a priori dos parâmetros θ , $P(\theta | M) \equiv \Pi(\theta | M)$, usualmente denominados de *priors*, e (iii) a evidência Bayesiana, $P(d | M) \equiv \mathcal{Z}(d | M)$, que entra como um fator de normalização. A distribuição de priors é a probabilidade dos parâmetros θ que se conhece antes de fazer qualquer observação. Em outras palavras, é o conhecimento que se tem de θ antes de considerar algum dado observacional d . Por outro lado, a evidência está relacionada com a distribuição esperada para observação de d , dado o modelo M , integrada em todo o espaço dos parâmetros θ definido pelos limites da distribuição dos priors. A evidência também é chamada de

Likelihood marginal e se encontra dada por:

$$\mathcal{Z}(d | M) = \int \mathcal{L}(d | \theta, M) \Pi(\theta | M) d\theta. \quad (2.18)$$

Quando a regra é utilizada para fazer estimação de parâmetros, a evidência Bayesiana é tomada como uma constante de normalização que é desprezível, pois o que se procura é do valor máximo na distribuição a posteriori. Porém, quando existem vários modelos que ajustam bem as observações, a regra de Bayes penaliza eles através da seleção de modelos, e neste caso o cálculo da evidência Bayesiana é fundamental. Assim, a questão de seleção de modelos entre dois modelos, M_1 e M_2 , aparece ao se comparar as probabilidades a posteriori, fornecido o conjunto de dados d , como segue:

$$\frac{P'(M_1 | d)}{P'(M_2 | d)} = \frac{\mathcal{Z}(d | M_1) \Pi(\theta | M_1)}{\mathcal{Z}(d | M_2) \Pi(\theta | M_2)}. \quad (2.19)$$

O quociente $P'(M_1 | d)/P'(M_2 | d)$ é conhecido como “odds a posteriori”, o quociente $\mathcal{Z}(d | M_1)/\mathcal{Z}(d | M_2)$ entre as respectivas evidências é conhecido como “fator de Bayes”, e o quociente $\Pi(\theta | M_1)/\Pi(\theta | M_2)$ dos priors correspondentes a ambos modelos é conhecido como “odds a priori”.

Como apresentado anteriormente, do ponto de vista Bayesiano os parâmetros são tomados como parâmetros livres a serem ajustados dependendo dos dados observacionais. Por isso, a eleição da função *Likelihood* e dos priors é fundamental para fazer a estimação dos parâmetros. Na Figura 14 se podem observar dois casos extremos na escolha de priors e *Likelihood*, onde o resultado da distribuição a posteriori é a mesma. No painel esquerdo, a distribuição de priors é menos informativa que a função *Likelihood*. Quando os priors são pouco informativos, em geral, se escolhem distribuições de probabilidade normal. Neste caso, a distribuição a posteriori fica determinada pela função *Likelihood*. No painel à direita, os priors são bem mais informativos que a função *Likelihood*, e portanto a distribuição a posteriori se assemelha aos priors.

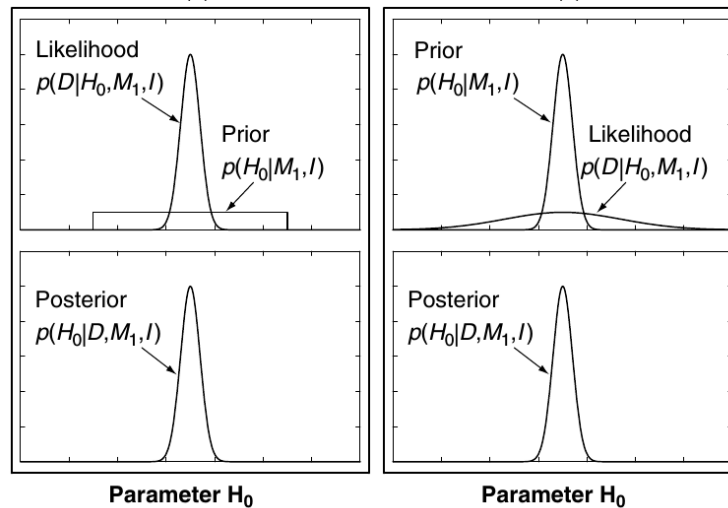


Figura 14 – As distribuições a posteriori (painéis inferiores) são iguais ao produto entre as distribuições a priori e as funções *Likelihood* (painéis superiores). Nos painéis à esquerda, o prior é mais largo que o *Likelihood*. Nos painéis à direita, o *Likelihood* é mais largo que o prior (Gregory, 2005).

Neste trabalho, os dados d são os dados dos tempos $t_{C,o}$ do(s) planeta(s) em cada sistema.

Em todos os casos desta tese, a função *Likelihood* escolhida é gaussiana:

$$\mathcal{L}_P(d | \theta, M_P) = \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{(t_{C,o,i} - t_{C,c,i})^2}{2\sigma_i^2}\right) \quad (2.20)$$

onde n é o número de trânsitos observados, $t_{C,o,i}$ e $t_{C,c,i}$ são os t_C observados e calculados, respectivamente, e σ_i é a incerteza das quantidades $t_{C,c,i}$.

Os parâmetros a serem ajustados são os parâmetros físicos dos planetas e da estrela. Dependendo do sistema, o conjunto de parâmetros será

$$\left(\frac{M_i}{M_\star}, P_i, e_i, \varpi_i, \lambda_{\text{pert}}, b_{\text{pert}}, \Omega_{\text{pert}} - \Omega_{\text{tran}}, \delta t_{\text{pert}}\right) \quad (2.21)$$

$$\left(\frac{M_i}{M_\star}, P_i, e_i, \varpi_i, \lambda_{\text{pert}}, b_i, \Omega_{\text{pert}} - \Omega_{\text{tran}}, \delta t_{\text{pert}}\right) \quad (2.22)$$

onde $i \equiv \text{tran}$ ou pert , M_i/M_\star é o quociente entre a massa planetária e a massa estelar, e δt_{pert} é o valor de t_C do trânsito mais próximo à época inicial das observações. Este parâmetro fornece informação da longitude média do corpo que transita, com respeito a uma data de referência. O sistema usado, onde estes parâmetros são medidos, é o sistema da Figura 15, onde $\Omega_{\text{tran}} = 270^\circ$ é medido desde a linha de visada, e a inclinação da órbita com respeito ao plano de referência é i , enquanto que a inclinação do planeta no momento do trânsito é i_p .

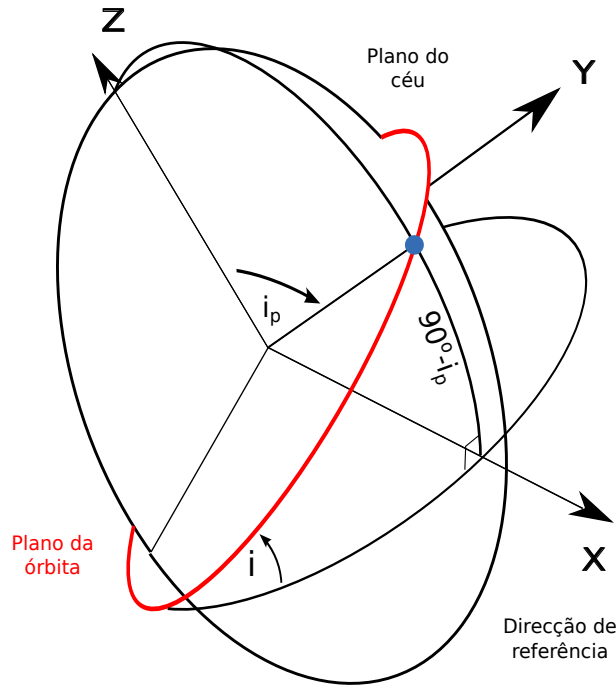


Figura 15 – Sistema de coordenadas utilizado no trabalho.

Em nossa análise, as distribuições de priors dos diferentes parâmetros foram escolhidas como não informativas. Isto é, priors que tenham um efeito mínimo, relativamente aos dados, na inferência final. A melhor forma de se fazer isto é utilizar distribuições uniformes, que consideram todos os possíveis valores de θ como igualmente prováveis. Para cada parâmetro, os limites das respectivas distribuições uniformes dependeram do conhecimento prévio de cada sistema.

2.2.2.1 MultiNest

Usando métodos Bayesianos é possível criar um algoritmo que encontre o melhor conjunto de parâmetros para que a probabilidade de que o modelo definido por esses parâmetros se ajuste adequadamente aos dados seja maximizada. A técnica utilizada para o estudo de tais espaços de parâmetros consiste em criar amostras (modelos diferentes, cada um com um conjunto específico de parâmetros) e selecionar aquele que melhor se ajusta aos dados. Por outro lado, se existem por exemplo dois modelos que são altamente prováveis, precisa-se do cálculo da evidência para escolher o mais provável.

Um algoritmo que faz isto possível é o *Nested Sampling* (NS). Uma vez que os sistemas planetários são gerados aleatoriamente (pontos “vivos”) a partir da informação dos priors, NS consegue calcular o *Likelihood* de cada sistema relativo aos dos outros sistemas, e descarta o sistema com menor *Likelihood* L_k (ponto “morto”). A partir daí, NS substitui esse sistema com um novo sistema (escolhe novos pontos “vivos”) sorteado aleatoriamente e sujeito a ter um valor de probabilidade maior do que L_k , e seguidamente desconsidera o sistema com pior *Likelihood* (novo L_k). Este processo é iterado e, no final, o algoritmo soma a contribuição de cada L_k descartado (“pontos mortos”), estimando o valor da evidência. O algoritmo NS pára quando a evidência altera o seu valor por algum limite definido pelo usuário. O problema é como escolher a cada iteração uma nova amostra de pontos vivos que tenham $L > L_k$. Isto é resolvido pelo algoritmo *MultiNest*, que utiliza um algoritmo de clustering. A idéia é decompor o conjunto de pontos “vivos” numa sequência de elipsóides sobrepostos e depois amostrar dentro de um desses elipsóides, escolhido aleatoriamente a partir do conjunto atual, e aplicar NS nessa região para procurar a melhor solução, cobrindo essencialmente mais espaço em menos tempo. Mais espaço significa que, na prática, ele encontrará mais soluções prováveis por iteração, permitindo mapear a topografia do espaço de parâmetros de forma mais rápida e eficiente em direção à melhor solução.

2.2.2.2 Estabilidade dinâmica

Quando uma determinada técnica de detecção permite a obtenção de parâmetros planetários, é necessário estudar a estabilidade dinâmica do sistema representado por esses parâmetros. Desta forma, sistemas não estáveis sobre períodos de tempo longos não podem ser considerados como soluções corretas (Ford, 2006). Nos trabalhos desenvolvidos nesta tese, uma vez encontrada qualquer solução, os parâmetros orbitais são utilizados como entrada para um simulador de N-corpos que propaga as condições iniciais por milhões de anos. Para esta análise tem sido aplicado o algoritmo simplético *Swift HELIO*, parte do pacote *Swift*, que trabalha de forma semelhante ao algoritmo *MVS*, mas utilizando coordenadas astrocêntricas canônicas ao invés de coordenadas de Jacobi. A estabilidade dos sistemas é analisada, principalmente, através da evolução dos elementos orbitais $a(t)$, $e(t)$, $i(t)$.

2.3 Amostra

Os dados de tempos centrais de trânsito foram calculados a partir de Holczer et al. (2016a). Nesse catálogo, apresentam-se os valores dos tempos esperados (t_E) correspondentes a uma órbita Kepleriana, e os valores de variações de tempo de trânsito (δt), assim como os erros associados aos

mesmos ($\sigma_{\Delta t}$). Ou seja, para o cálculo de t_C que este trabalho precisa utilizar, identificou-se na equação 2.16 que $t_E = t_0 + PY$, e os valores de tempos centrais por ciclo foram calculados como:

$$t_C^Y = t_E^Y + \delta t^Y, \quad (2.23)$$

sendo Y cada ciclo de observação. Os erros associados aos tempos centrais não são fornecidos no catálogo, mas como primeira aproximação considerou-se que os erros de t_C podem ser aproximados pelas incertezas dos TTVs, isto é, $\sigma_{t_C} \simeq \sigma_{\Delta t}$. A equação é válida devido a que as principais fontes de erro no cálculo dos TTVs são precisamente as incertezas associadas às observações de tempos centrais.

Para a amostra deste trabalho, foi escolhido o subgrupo de KOIs com variações de TTVs de longo prazo (> 100 dias) que totalizam uma quantidade de 260 objetos. A partir daí, o subgrupo foi separado em diferentes sistemas segundo a quantidade de planetas em cada um. A classificação foi a seguinte:

- Grupo I. Sistemas com um KOI com observações de trânsito.
- Grupo II. Sistemas com um KOI que transita e um KOI não transitante, mas já detectado anteriormente.
- Grupo III. Sistemas com dois KOIs que transitam.
- Grupo IV. Sistemas com três KOIs que transitam.
- Grupo V. Sistemas com quatro KOIs que transitam.
- Grupo VI. Sistemas com cinco KOIs que transitam.
- Grupo VII. Sistemas com seis KOIs que transitam.

É importante salientar que só nos sistemas do Grupo I, os KOIs são planetas ainda sem confirmação; no resto dos grupos todos os objetos são confirmados como planetas. Devido à inexperiência no uso do código, o estudo foi iniciado com os planetas do Grupo II e III para verificar a funcionalidade do algoritmo e a possibilidade de reproduzir resultados obtidos previamente por outros autores. Além disso, esta escolha também se relaciona com a quantidade de parâmetros a serem determinados: quanto maior a quantidade de planetas no sistema, maior o conjunto de parâmetros e, portanto, maior o tempo computacional necessário.

Destes sistemas do Grupo II e III, escolheram-se os planetas com mais de 20 trânsitos para garantir a existência de uma solução única. Seguidamente, dividiram-se os sistemas em dois subgrupos: aqueles sistemas caracterizados completamente (por exemplo, Kepler-88, Kepler-36), e aqueles sistemas sem conhecimento completo das duas massas planetárias. Escolhendo apenas aqueles sistemas com algum planeta com massa determinada, ou com ambos planetas com massas limitadas por valores máximos (normalmente com base em análise de estabilidade), é possível escolher de forma mais restrita os intervalos para os priors. Assim, um total de 9 planetas, formando 6 sistemas planetários, foram os escolhidos como a amostra para este trabalho (ver Tabela 1).

Tabela 1 – Amostra de planetas Kepler considerada neste trabalho

	Nome KOI / Kepler	Nº de TTVs*
1	872.01 / Kepler-46b	
2	1474.01 / Kepler-419b	20 (20)
3	262.01 / Kepler-50b	167 (153)
4	262.02 / Kepler-50c	145 (137)
5	1529.01 / Kepler-59c	72 (70)
6	370.02 / Kepler-145b	60 (57)
7	370.01 / Kepler-145c	30 (29)
8	676.02 / Kepler-210b	200 (181)
9	676.01 / Kepler-210c	168 (140)

* Número total de TTVs obtidos a partir dos dados públicos do catálogo de (Holczer et al., 2016b). O valor entre parêntesis é a quantidade de TTVs retirando os outliers identificados por Holczer et al. (2016a)

2.3.1 Grupo A

São os sistemas com um planeta transitante e um planeta que não transita (este último já conhecido anteriormente).

2.3.1.1 Sistema Kepler-46

O sistema Kepler-46 foi analisado por primeira vez por Nesvorný et al. (2012), através da análise das variações presentes nos 12 trânsitos planetários de Kepler-46b. Os autores conseguiram determinar, pelo método de inversão de TTVs, a massa do planeta que não transita, mas não a massa do planeta que transita. Na Tabela 2 encontra-se a informação conhecida deste sistema. Os valores dos parâmetros estelares são obtidos a partir de síntese espectral. O valor do parâmetros de impacto é obtido diretamente da curva de luz. Os valores de massa, excentricidade e período são obtidos da análise dos TTVs. Mais informação a respeito deste sistema será fornecida no capítulo 3.

Na Figura 16 se mostram os 38 dados de TTVs correspondentes aos trânsitos de Kepler-46b reduzidos por Holczer et al. (2016a) (pontos em preto). Por outro lado o Dr David Kipping, colaborador deste trabalho, se dispôs a reduzir os dados extraídos diretamente da base de dados do Kepler. Na Figura 16 se apresentam os 35 dados de TTVs que se obtém a partir da sua análise (pontos em azul).

A principal diferença entre os TTVs de Holczer et al. (2016a) e de Kipping é a quantidade de trânsitos, 38 e 35 respectivamente. Essa diferença se encontra vinculada ao método de redução dos dados usado. Enquanto Holczer et al. (2016a) publica os dados de Kepler-46b como parte de um catalogo analisado com um processo sistemático, Kipping aplica a metodologia de redução unicamente para o planeta, e além realiza inspeção visual em cada passo. Portanto, os 3 ciclos de observação adicionais em Holczer não apresentam para Kipping dados robustos para ser considerados.

Tabela 2 – Dados do sistema Kepler-46

Kepler-46		
$m_{\star} (M_{\odot})$	$0,902^{+0,040}_{-0,038}$	
$R_{\star} (R_{\odot})$	$0,938^{+0,038}_{-0,039}$	
Kepler-46b		Kepler-46c
$m_p (M_J)$	< 6	$0,376^{+0,021}_{-0,019}$
$P (d)$	$33,60134^{+0,00021}_{-0,00020}$	$57,011^{+0,051}_{-0,061}$
e	$0,01^{0,01}_{-0,01}$	$0,0146^{+0,0034}_{-0,0036}$
b	$0,757^{+0,022}_{-0,027}$	—

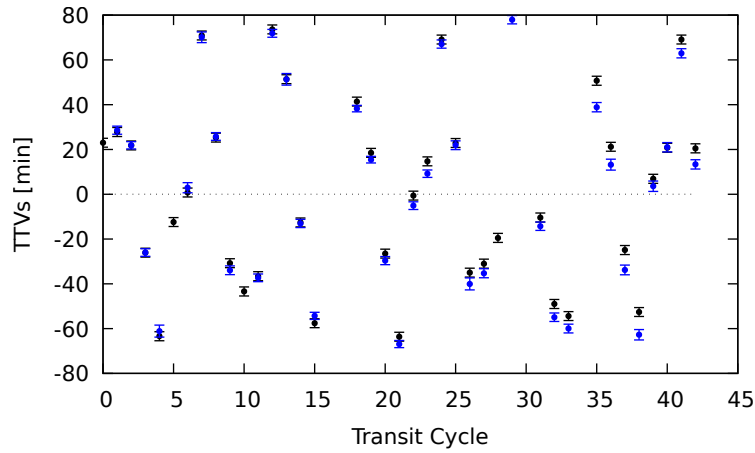


Figura 16 – TTVs do planeta Kepler-46b. No eixo horizontal são indicados os ciclos de observação e no eixo vertical o valor de TTV em minutos. Os pontos pretos representam os 38 TTVs obtidos por [Holczer et al. \(2016a\)](#). Os pontos azuis são os 35 TTVs calculados a partir da redução fotométrica realizada pelo Dr. David Kipping.

2.3.1.2 Sistema Kepler-419

O sistema planetário associado à estrela Kepler-419 foi estudado anteriormente em três ocasiões: utilizando-se observações de trânsitos planetários por [Dawson et al. \(2012\)](#), e utilizando-se observações de trânsitos e VR por [Dawson et al. \(2014\)](#) e [Almenara et al. \(2018\)](#). [Dawson et al. \(2012\)](#) emprega o método de inversão para os TTVs presentes nos trânsitos do planeta Kepler-419b e, posteriormente [Dawson et al. \(2014\)](#) complementa o método de inversão de TTVs com observações de VR de Kepler-419. Por outro lado, [Almenara et al. \(2018\)](#) utiliza o método foto-dinâmico para uma análise conjunta de TTVs e VRs. Na Tabela 3 encontram-se os valores dos parâmetros obtidos para este sistema segundo cada trabalho. Os dados estelares foram obtidos utilizando-se modelos de evolução estelar ([Dawson et al., 2012, 2014](#)), e também ajustados diretamente a partir do modelo foto-dinâmico ([Almenara et al., 2018](#)). Em [Dawson et al. \(2014\)](#), o valor de parâmetro de impacto é obtido diretamente da curva de luz, a massa do planeta que transita é obtida por observações de VR, enquanto que a massa do planeta que não transita é conhecida pelo método de inversão de TTVs. Com o método foto-dinâmico, [Almenara et al. \(2018\)](#) determina os valores de todos os parâmetros em forma simultânea. Na Figura 17 apresenta-se o sinal dos dados públicos de TTVs fornecidos por [Holczer et al. \(2016a\)](#).

Tabela 3 – Dados do sistema Kepler-419

Kepler-419			
<i>Dawson et al. 2012</i>			
$m_{\star} (M_{\odot})$	$1,22^{+0,12}_{-0,08}$		
$R_{\star} (R_{\odot})$	$1,40^{+0,37}_{-0,21}$		
<i>Dawson et al. 2014</i>			
$m_{\star} (M_{\odot})$	$1,42^{+0,12}_{-0,08}$		
$R_{\star} (R_{\odot})$	$1,64^{+0,35}_{-0,24}$		
<i>Almenara et al. 2018</i>			
$m_{\star} (M_{\odot})$	1.39 ± 0.48		
$R_{\star} (R_{\odot})$	1.8 ± 0.22		
		Kepler-419b	Kepler-419c
<i>Dawson et al. 2014</i>			
$m_p (M_J)$	$2,5 \pm 0,3^{***}$	$7,4 \pm 0,4^{**}$	
P (d)	$69,7546^{+0,0007}_{-0,009}$	$675,47 \pm 0,11$	
e	$0,833 \pm 0,013$	$0,184 \pm 0,002$	
b	0,26		
<i>Almenara et al. 2018*</i>			
m_p/m_{\star}	$0,0018 \pm 0,00025$	$0,005092 \pm 0,000065$	
$m_p (M_J)$	$2,71 \pm 0,66$	$7,4 \pm 2,6$	
a (au)	$0,371 \pm 0,040$	$1,68 \pm 0,18$	
e	$0,817 \pm 0,016$	$0,1793 \pm 0,0017$	

* por modelo foto-dinámico com 21 trânsitos.

** por método de inversão de TTVs com 21 trânsitos.

*** por método de VR.

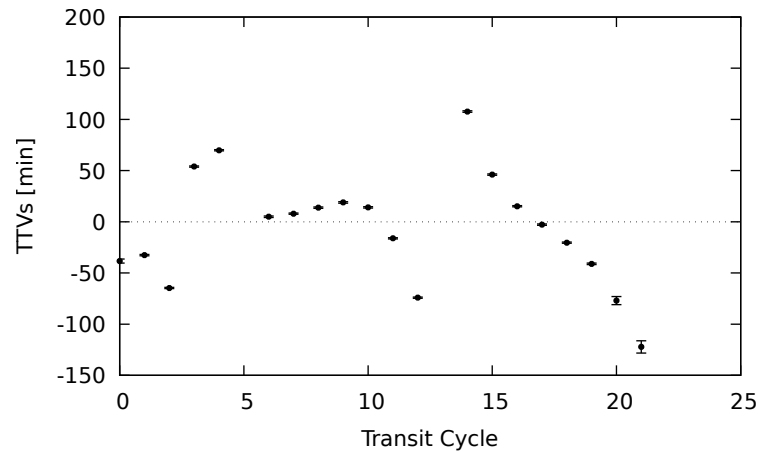


Figura 17 – TTVs do planeta Kepler-419b. No eixo horizontal se indicam os ciclos de trânsito e no eixo vertical os valores de TTVs, para cada ciclo, em minutos. Os pontos pretos representam os 38 TTVs obtidos por [Holczer et al. \(2016a\)](#).

2.3.2 Grupo B

Está constituído por sistemas com os dois planetas que transitam.

2.3.2.1 Sistema Kepler-50

O sistema planetário ao redor da estrela Kepler-50 foi estudado primeiramente por [Steffen et al. \(2012\)](#). Os autores utilizaram observações dos trânsitos planetários de ambos os planetas e analisaram os TTVs presentes aplicando o método de inversão. Na Tabela 4 apresenta-se a informação existente na literatura a respeito dos parâmetros relevantes deste sistema. A massa e raio estelares foram determinadas por [Chaplin et al. \(2013\)](#) e utilizados por [Steffen et al. \(2012\)](#) na análise de TTVs. Neste caso, os TTVs não forneceram valores das massas dos planetas e os autores recorreram à análise da estabilidade do sistema para colocar limites superiores nas massas. Na Figura 18 são

Tabela 4 – Dados do sistema Kepler-50

Kepler-50		
$m_{\star} (M_{\odot})$	1,23	
$R_{\star} (R_{\odot})$	1,88	
Kepler-50b		
$m_p (M_J)$	< 0,10	
$P (d)$	$7,812512 \pm 0.000052$	
Kepler-50c		
$m_p (M_J)$	< 0,11	
$P (d)$	$9,376137 \pm 0.000056$	

mostrados os 167 TTVs correspondentes aos trânsitos de Kepler-50b e os 145 TTVs de Kepler-50c. Neste caso, são graficados os TTVs em minutos para cada data de observação para Kepler-50b (painel superior) e Kepler-50c (painel inferior). Desta forma, é possível distinguir uma anticorrelação entre os sinais que está vinculada à conservação de momento angular do sistema.

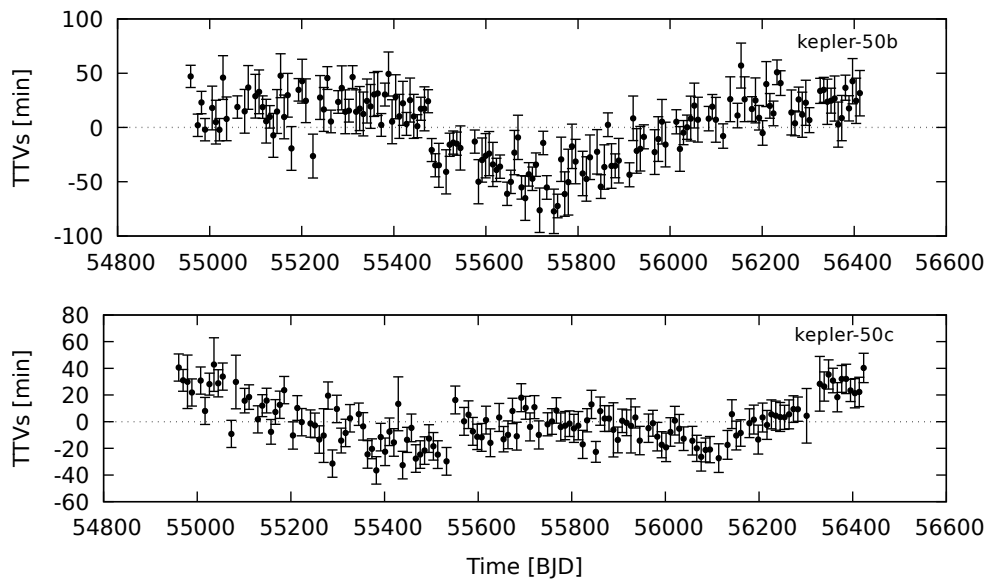


Figura 18 – TTVs dos planetas Kepler-50b e Kepler-50c. No eixo horizontal está indicada a data de observação do trânsito e no eixo vertical, o valor de TTV para cada data em minutos.

2.3.2.2 Sistema Kepler-59

O sistema planetário ao redor da estrela Kepler-59 foi estudado pela primeira vez por [Steffen et al. \(2012\)](#). Os autores estudaram os trânsitos planetários dos planetas Kepler-59b e Kepler-59c

e inferiram TTVs. Na Tabela 5 apresentam-se alguns dos parâmetros planetários determinados pelo método de inversão de TTVs (Steffen et al., 2012). As massas dos planetas não podem ser precisamente caracterizadas pelos TTVs e só se encontram limites máximos através do estudo da estabilidade do sistema. Na Figura 20 se mostram os 61 dados de TTVs do planeta Kepler-

Tabela 5 – Dados do sistema Kepler-59

Kepler-59		
m_* (M_\odot)	1.04	
R_* (R_\odot)	0.94	
	Kepler-59b	Kepler-59c
m_p (M_J)	< 2.05	< 1.37
P (d)	$11.86817 \pm 0,00036$	$17.98012 \pm 0,00030$

59c tomados do catálogo de Holczer et al. (2016a). Neste catálogo não são fornecidos os dados observacionais do planeta Kepler-59b, portanto se fez uma inspeção na literatura para conseguir dados do planeta b. Rowe et al. (2015) apresenta TTVs de ambos planetas, como se mostra no

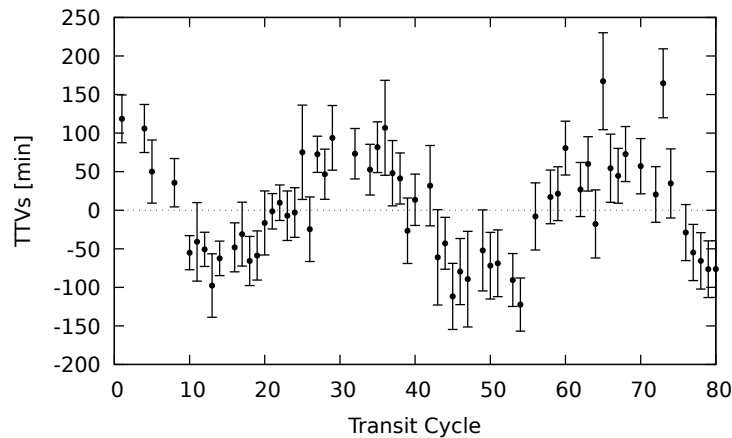


Figura 19 – TTVs do planeta Kepler-59c obtidos por Holczer et al. (2016a). No eixo horizontal são indicados os ciclos dos trânsitos e no eixo vertical os valores de TTVs para cada ciclo em minutos

segundo painel da Figura 20. Nesta figura é apresentado, no eixo horizontal, a data da observação do trânsito de Kepler-59b (painel superior) e de Kepler-59c (painel inferior), e no eixo vertical o valor de TTV em minutos. Em comparação ao gráfico do sistema Kepler-50, o S/N dos sinais dos TTVs não são visivelmente anti-correlacionados.

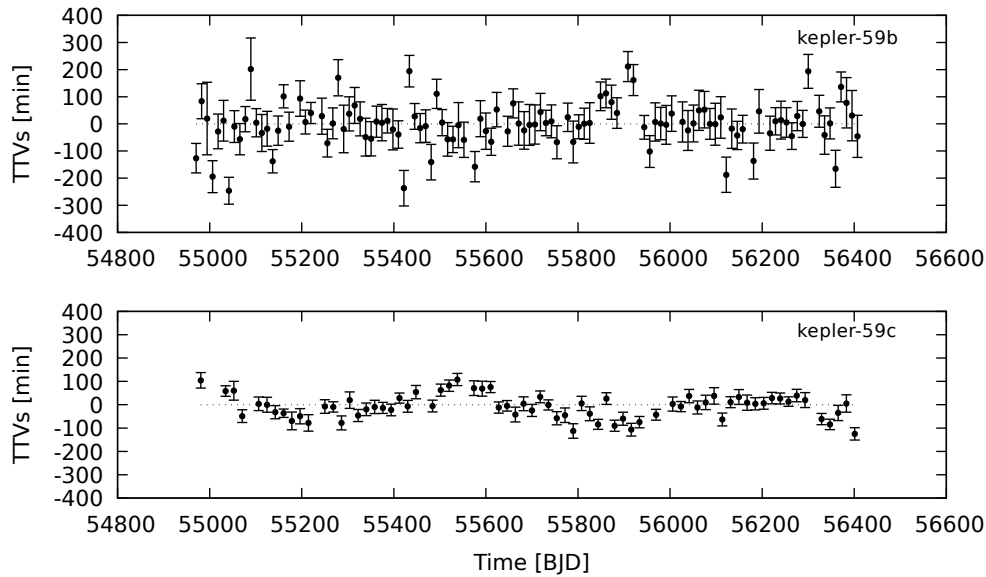


Figura 20 – TTVs dos planetas Kepler-59b e Kepler-59c obtidos por [Rowe et al. \(2015\)](#).

2.3.2.3 Sistema Kepler-145

O sistema foi estudado por [Xie \(2014\)](#) usando observações de trânsitos dos planetas Kepler-145b e Kepler-145c. Através da análise de TTVs pelo método de inversão, os autores determinaram alguns parâmetros do sistema. Em particular, os TTVs derivados pelos autores não são sensíveis para determinar os valores das massas planetárias, e estas são então estimadas a partir do modelo analítico de [Lithwick et al. \(2012\)](#).

Os valores dos parâmetros estelares considerados nesse trabalho foram tomados de um outro trabalho que determinou eles mediante o uso de modelos de evolução estelar. Na Tabela 6 se apresentam os parâmetros estelares junto aos parâmetros mais relevantes obtidos por [Xie \(2014\)](#). Na

Tabela 6 – Dados do sistema Kepler-145

Kepler-145		
m_* (M_\odot)	$1,32 \pm 0,1$	
R_* (R_\odot)	$1,887 \pm 0,05$	
Kepler-145b		
Kepler-145c		
m_p (M_J)	$0,1157 \pm 0,0364$	$0,2478 \pm 0,0516$
P (d)	22.951	42.882

Figura 21 se mostram os dados de TTVs de Kepler-145b e Kepler-145c obtidos por [Holczer et al. \(2016a\)](#). Os gráficos dos TTVs são apresentados em função do dia de observação do trânsito. Devido ao S/N das observações, não existe uma clara anti-correlação entre os sinais.

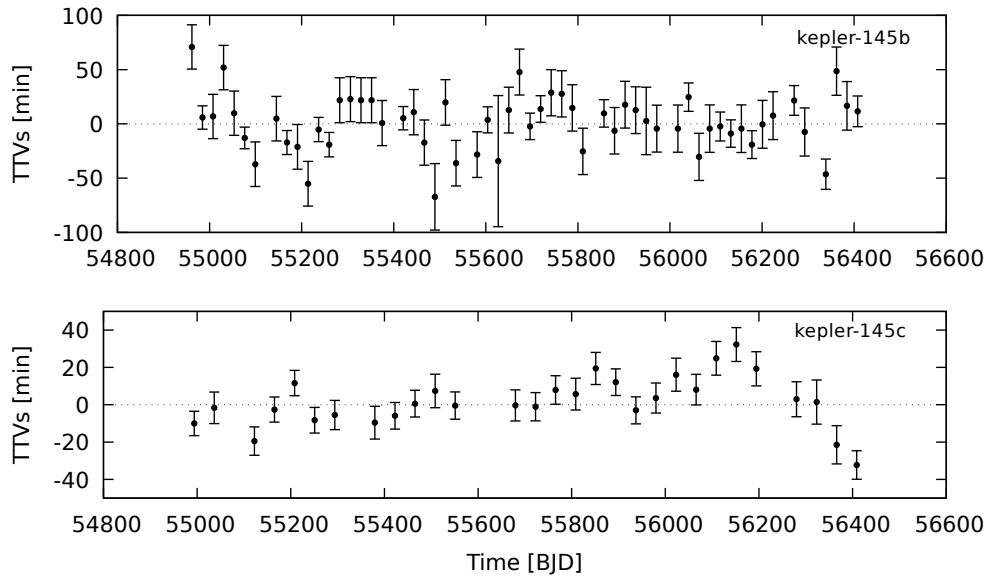


Figura 21 – TTVs dos planetas Kepler-145b e Kepler-145c. No eixo horizontal é indicada a data dos trânsitos e no eixo vertical o valor de TTV para cada trânsito, em minutos.

2.3.2.4 Sistema Kepler-210

O primeiro estudo feito sobre os planetas do sistema Kepler-210 é de [Ioannidis et al. \(2014\)](#). Na Tabela 7 os períodos e parâmetros de impacto foram obtidos pelas curvas de trânsitos planetários e as excentricidades foram obtidas pelo método foto-excêntrico ² ([Ioannidis et al., 2014](#)). Os valores de parâmetros estelares usados pelos autores foram tomados de um outro trabalho que determinou eles mediante modelos de evolução estelar. No trabalho é mostrado que o cenário de dois planetas com órbitas excêntricas permite determinar a densidade estelar de Kepler-210. No entanto, a configuração encontrada é instável em uma escala de tempo de ~ 1 milhão de anos. Para deixar o sistema estável, os autores introduzem um hipotético terceiro planeta, KOI-676.03, com massa de $\sim 0,3 - 0,6 M_J$, em órbita excêntrica ($e \simeq 0,2$) e com um período de ~ 63 dias. As massas dos planetas não são determinadas, mas se esperam valores menores que $0,5 M_J$ para garantir a estabilidade dinâmica do sistema. Já [Rowe et al. \(2014\)](#), analisando apenas as curvas de luz dos planetas, obteve valores para os parâmetros de impacto b . Na Figura 22 são mostradas as datas de observação dos trânsitos e os TTVs, em minutos, para cada observação de Kepler-210b e Kepler-210c obtidos por [Holczer et al. \(2016a\)](#). Devido à pouca quantidade de observações de Kepler-210b e à baixa S/N das mesmas, as sinais de TTVs não mostram uma clara anticorrelação.

² O método foto-excêntrico está baseado na comparação das densidades estelares obtidas a partir da análise das curvas de luz (ver equação 1.35) e a obtida através do estudo fotométrico ou espectroscópico da estrela

Tabela 7 – Dados do sistema Kepler-210

	Kepler-210	
m_{\star} (M_{\odot})	0.63	
R_{\star} (R_{\odot})	0.69	
	Kepler-210b	Kepler-210c
<i>Ioannidis et al. (2014)</i>		
m_p (M_J)	< 0,5	< 0,5
P (d)	$2.4532 \pm 0,0007$	$7.9725 \pm 0,0014$
e	0.4	0.5
b	$0.931 \pm 0,038$	$0.861 \pm 0,065$
<i>Rowe et al. (2014)</i>		
b	0.40	0.73

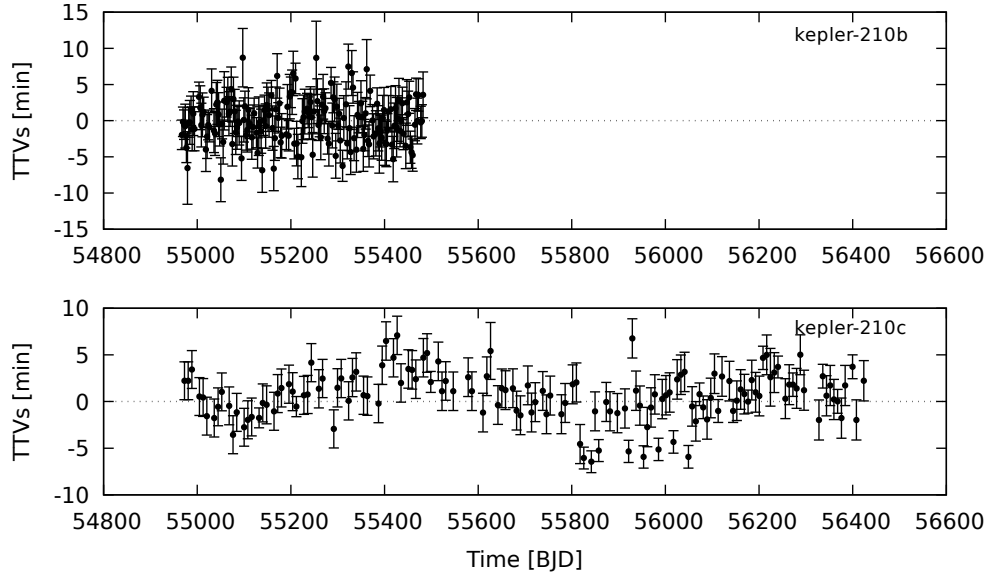


Figura 22 – TTVs dos planetas Kepler-210b e Kepler-210c.

2.4 Etapas do trabalho

A primeira etapa do trabalho consistiu em se familiarizar com o funcionamento do algoritmo `TDMoDel`, em particular o código fonte e os arquivos de entrada e saída. Em seguida, o mesmo foi testado para se aprender sobre suas vantagens e limitações. Para isto, começamos trabalhando com o sistema de planetas associado à estrela Kepler-46. Este sistema possui o primeiro planeta que não transita detectado pela análise de TTVs do planeta que transita.

No trabalho desenvolvido inicialmente por [Nesvorný et al. \(2012\)](#) sobre este sistema, a caracterização do mesmo pelo método de inversão de TTVs não possibilitou determinar a massa do planeta que transita. Nós consideramos a possibilidade desta falta de caracterização da massa ser devida a um número insuficiente de observações. Além disto, no artigo original foi mostrado que o método de inversão utilizado detecta duas soluções prováveis, e os autores tiveram que recorrer à análise de TDVs para concluir que uma destas soluções seria incompatível com as observações. Em nosso caso, e de acordo com a teoria da inferência Bayesiana, verificamos que o código `TDMoDel` foi

capaz de escolher de forma natural entre as duas soluções.

Como explicado anteriormente, acreditamos que a redução dos dados fotométricos, de forma quase artesanal, feita pelo Dr. Kipping fornece um conjunto de dados de maior qualidade que os tomados do catálogo de [Holczer et al. \(2016a\)](#). Ainda assim, se realizaram as análises em ambos conjuntos de dados. Os resultados obtidos a partir dos dados de Kipping foram publicados em [Saad-Olivera et al. \(2017\)](#) (ver Capítulo 3). As soluções obtidas a partir dos dados de [Holczer et al. \(2016a\)](#) apresentam incertezas $2 - \sigma$ maiores, e portanto não foram mostradas.

A segunda etapa foi trabalhar com o código `TDModel` sobre um sistema onde fosse possível a comparação dos resultados com aqueles obtidos por VR. Para isto, analisamos o sistema Kepler-419. Nesse sistema também há um planeta que não transita e que se detecta apenas pelas perturbações sobre o planeta que transita. A análise e os resultados foram publicados em [Saad-Olivera et al. \(2019a\)](#) (ver Capítulo 4).

A partir daí, a escolha natural foi continuar analisando sistemas que visualmente tivessem um sinal de TTV com grande S/N. Assim, trabalhamos com o sistema Kepler-59, que conta com dois planetas que transitam. Para contemplar este caso foi necessário modificar o código `TDModel`. Para este sistema conseguimos determinar, pela primeira vez, as massas dos dois planetas sem a necessidade de utilizar a análise dinâmica de estabilidade para limitar os resultados. O trabalho rendeu o último artigo desta tese, recentemente submetido para publicação e apresentado no Capítulo 5.

Os sistemas Kepler-50, Kepler-145 e Kepler-210 não foram analisados nesta tese e serão considerados para estudos futuros.

3 Caracterização dos parâmetros planetários no sistema Kepler-49 com a análise de TTVs de Kepler-46b

3.1 Sinopse

A estrela do sistema Kepler-49, antes conhecida como KOI-872, é uma estrela de tipo espectral G com aproximadamente 90% da massa do Sol. Nos primeiros anos de observação do telescópio Kepler, a estrela apresentou um decaimento na curva de luz, devido ao candidato a planeta KOI-872.01. Nesvorný et al. (2012) encontraram variações nos tempos dos trânsitos nas 15 curvas de luz que o candidato apresentava. O sistema formava parte da amostra dos autores como parte de um trabalho para detectar luas ao redor de planetas. Os autores encontraram que os TTVs originados no objeto que transita podem ser explicados por um segundo planeta, que não transita a estrela, em uma órbita mais externa. Desta forma forneceram a confirmação de que os objetos ao redor de KOI-872 tem natureza planetária. O planeta que transita é chamado de Kepler-46b e o responsável pelas alterações na fotometria deste é o planeta Kepler-46c. Com o método de inversão de TTVs, e utilizando um algoritmo de cadeias de Markov Monte Carlo, mais explicitamente o algoritmo Metropolis-Hastings, encontram duas configurações orbitais que ajustam os dados. Uma delas foi descartada devido ao fato do sinal de TDVs não ser consistente com o observado. Neste caso, o tempo de computação para a análise foi de semanas. A solução preferida indica que o sistema é quase coplanar ($I_{mutua} \simeq 1^\circ$) e quase circular ($e \simeq 0.01$). A massa do planeta perturbador é de $M_c = 0.376_{-0.019}^{+0.021} M_J$ enquanto que a massa de Kepler-46b não foi determinada. Para avaliar se a solução encontrada implica em um sistema estável, os autores aplicaram um integrador de N-corpos. A solução é estável sempre que $M_b < 6 M_J$, o que, em outras palavras, significa que o planeta que transita poderia ser desde uma Terra até um planeta tipo Júpiter. Além destes dois planetas, o sistema poderia contar com a presença de mais um planeta, com órbita interna em relação ao que transita. Esse possível planeta se desprende de um sinal, com probabilidade de detecção de 9σ , na curva de luz de Kepler-46b. O sinal acusaria a presença de um planeta tipo Terra ($\sim 1.7 R_\oplus$) com período de 6,8 dias. A natureza do planeta não afeta a configuração dos outros planetas, ou seja não produz sinais de TTVs observáveis nos outros planetas, por isso não é considerado nem no momento de inversão de TTVs nem na hora de estudar a estabilidade do sistema.

Como primeira etapa desta tese, foi escolhido este sistema tanto para conseguir determinar e/ou melhor caracterizar seus parâmetros, quanto para testar o funcionamento do código `TDMoDel`. Neste caso foi aplicado `TDMoDel` sob 35 trânsitos de Kepler-46b, uma quantidade de dados maior comparado com o trabalho anterior, e se considerou a presença de um segundo planeta como sendo o responsável pelo sinal de TTV em Kepler-46b. Aqui, novamente não se considerou a presença do terceiro planeta, devido a sua contribuição na sinal de TTV, de Kepler-46b, ser estimada na ordem de segundos. A análise fotométrica das curvas de luz foi feita pelo Dr D. Kipping, fornecendo os

valores dos t_C dos trânsitos, a partir dos quais foi feita a aplicação da metodologia proposta.

Neste caso foram considerados como dados de entrada: (i) a massa e raio estelar (M_\odot, R_\odot) cujos valores são tomados de Nesvorný et al. (2012), (ii) o parâmetro de impacto e a longitude do nodo do planeta que transita (b_b, Ω_b), onde o valor de b_b é tomado da análise de curva de luz feita em Nesvorný et al. (2012), enquanto que o valor de Ω_b é definido segundo o sistema de coordenadas escolhido neste trabalho (ver figura 15), e (iii) os dados dos tempos centrais de trânsito $t_{C,o}$. Os priors escolhidos para as massas dos planetas foram tais que permitissem abranger desde planetas tipo Terra até planetas tipo Júpiter. Para o período do planeta que transita, P_b , os limites de prior tomam valores ao redor do valor definido a partir das observações de trânsito, a saber (33,5-33,7) dias. O período do planeta que não transita não é tão bem conhecido, portanto permitiram-se valores que abrangessem os valores obtidos previamente no trabalho de Nesvorný et al. (2012), isto é (40-84) dias. Os limites de valores das excentricidades planetárias são de 0 até 0.4 (ainda sabendo que no trabalho anterior as excentricidades são ~ 0 , escolheu-se um limite superior de 0,4 para, se existirem, permitir mais soluções). Os ângulos ($\varpi_b, \varpi_c, \lambda_c, \Omega_b - \Omega_c$) podem tomar valores entre 0° e 360° . Os valores para o parâmetro δ_t ficam ao redor do tempo t_C do segundo trânsito observado. Em todos os casos os limites dos priors são valores máximos e mínimos de distribuições uniformes. A função *Likelihood* escolhida é uma função gaussiana. Para levar a cabo o processo de inversão de tempos centrais de trânsito, foram empregados 24 processadores do cluster da Coordenação de Pesquisas em Astronomia e Astrofísica do Observatório Nacional, no Rio de Janeiro, que forneceram os resultados em 2h30m.

Os resultados novamente mostram que as observações são ajustadas por duas configurações orbitais diferentes para o planeta perturbador. Mas, TDMoDel consegue descartar a configuração que situa ao planeta Kepler-46c em órbita mais afastada ($P \sim 81$ dias), pela baixa evidência que fornece quando comparada com a solução que situa ao planeta em órbita de $P \sim 57$ dias. Assim, a primeira conclusão do trabalho é que a implementação de TDMoDel usando inferência Bayesiana é suficiente para encontrar uma solução única, desde que a quantidade de observações seja suficiente.

A solução final fornece, pela primeira vez na literatura, a massa do planeta que transita, além da massa do planeta que não transita. Pelas suas características, o sistema está formado por um Júpiter morno perturbado por um planeta tipo Saturno. Assim, se demonstra também que uma maior quantidade de observações de trânsitos é necessária para determinar as massas de ambos planetas. Enquanto as propriedades orbitais dos planetas, pode-se concluir que a configuração em excentricidade e inclinação encontradas são similares às obtidas previamente, garantindo órbitas quase circulares e coplanares. Devido a suas órbitas se encontrarem próximas de uma RMM, especificamente a ressonância 5:3, a amplitude dos TTVs de Kepler-46b é de ~ 70 minutos.

O aumento de observações também permitiu simular o futuro do sistema Kepler-46, encontrando-se que aproximadamente daqui a ~ 20 anos o planeta que agora não transita terá um posicionamento da sua órbita que tornará ele um alvo importante para futuras missões de observação de trânsitos. Desta maneira, conseguir-se-á determinar o seu raio planetário, completando a caracterização do sistema. A seguir é anexado o artigo que inclui todas as informações explicadas acima.

Com relação ao terceiro planeta do sistema, aplicou-se um algoritmo de N-corpos para criar uma série de mapas dinâmicos, dependendo dos valores iniciais de período e excentricidade, para

diferentes valores de massa, e se demarcaram as regiões no espaço de excentricidade e período onde o planeta sobreviveria dinamicamente pela perturbação do par externo de planetas (Costa de Souza et al., em preparação). Para esse trabalho, a autora da presente tese colaborou gerando a grade de condições iniciais que são a entrada do algoritmo de N-corpos. Os resultados favorecem a localização do terceiro planeta sugerida pelas observações. No entanto, existem diversas outras regiões do espaço onde o planeta poderia ser encontrado sem afetar a configuração do par externo.



Masses of Kepler-46b, c from Transit Timing Variations

Ximena Saad-Olivera¹, David Nesvorný^{1,2}, David M. Kipping³, and Fernando Roig¹

¹Observatório Nacional, Rua Gral. Jose Cristino 77, Rio de Janeiro, RJ 20921-400, Brazil; ximena@on.br

²Department of Space Studies, Southwest Research Institute, 1050 Walnut Street, Suite 300, Boulder, CO 80302, USA

³Department of Astronomy, Columbia University, 550 W 120th Street, New York, NY 10027, USA

Received 2017 January 25; revised 2017 March 2; accepted 2017 March 3; published 2017 April 4

Abstract

We use 16 quarters of the *Kepler* mission data to analyze the transit timing variations (TTVs) of the extrasolar planet Kepler-46b (KOI-872). Our dynamical fits confirm that the TTVs of this planet (period $P = 33.648_{-0.005}^{+0.004}$ days) are produced by a non-transiting planet Kepler-46c ($P = 57.325_{-0.098}^{+0.116}$ days). The Bayesian inference tool `MultiNest` is used to infer the dynamical parameters of Kepler-46b and Kepler-46c. We find that the two planets have nearly coplanar and circular orbits, with eccentricities $\simeq 0.03$ somewhat higher than previously estimated. The masses of the two planets are found to be $M_b = 0.885_{-0.343}^{+0.374}$ and $M_c = 0.362_{-0.016}^{+0.016}$ Jupiter masses, with M_b being determined here from TTVs for the first time. Due to the precession of its orbital plane, Kepler-46c should start transiting its host star a few decades from now.

Key words: planetary systems

1. Introduction

More than 3300 exoplanets have been discovered with the *Kepler* and *K2* missions, and almost 16% of these are in multi-transiting planetary systems with at least two confirmed planets (exoplanetarchive.ipac.caltech.edu). The detection of these exoplanets was possible because they have nearly edge-on orbits and pass in front of the star, thus producing a dip in the photometric light curve. The analysis of the transit light curve allows scientists to determine the planetary to stellar radius ratio (R_p/R_*), the inclination of the planetary orbit (i_p), the transit duration (t_D), and the time of mid-transit (t_C) (e.g., Seager & Mallén-Ornelas 2003; Carter et al. 2008).

In multi-planetary systems, the mutual gravitational perturbation between planets can be detectable under certain conditions. For example, the mid-transit time t_C of consecutive transits of the same planet may not occur exactly on constant ephemeris. Instead, due to the gravitational perturbations from planetary companions, t_C values can display nonlinear trends called transit timing variations (TTVs). In some cases, it is also possible to measure variations of t_D , known as the transit duration variations (TDVs), which can also be attributed to the gravitational perturbations.

The dynamical analysis of TTVs can yield a comprehensive characterization of orbits and also the planetary masses, or at least provide certain limits (Miralda-Escudé 2002; Agol et al. 2005; Holman & Murray 2005). The TTVs have been primarily used to confirm and characterize the systems of multi-transiting planets (Holman et al. 2010; Lissauer et al. 2011; Steffen et al. 2012; Xie 2014), but they can also be used to detect and characterize non-transiting planets (Ballard et al. 2011; Nesvorný et al. 2012, 2013, 2014; Dawson et al. 2014; Mancini et al. 2016). In fact, if the radial velocity measurements are not available, the observation and analysis of TTVs provide the only way currently available to determine masses. When the mass determination is combined with the planetary radius estimate from the transit light curve, this results in a planetary density estimate, and hence allows scientists to develop internal structure models (e.g., Guillot & Gautier 2015).

In this work, we focus on the Kepler-46 system (KOI-872). The first analysis of the light curve of Kepler-46 showed the presence of a candidate planet, currently known as Kepler-46b, with a 33.6 day period and radius consistent with a Saturn-class planet (Borucki et al. 2011). Nesvorný et al. (2012) measured and analyzed the TTVs and TDVs of 15 transits from *Kepler* quarters 1–6. They found that the TTVs can be best explained if Kepler-46b is a member of a two-planet system with the planetary companion, Kepler-46c, having a non-transiting orbit outside of Kepler-46b. The TTVs analysis provided two possible solutions for the orbital parameters of the two planets, but one of these solutions was discarded by Nesvorný et al. because it produced significant TDVs, which were not observed. The preferred solution indicates nearly coplanar ($i_{\text{mut}} \simeq 1^\circ$) and nearly circular ($e \simeq 0.01$) orbits, and $M_c = 0.376_{-0.019}^{+0.021} M_J$. The mass of Kepler-46b was not constrained from TTVs/TDVs, but an upper limit of $M_b < 6 M_J$ was determined from the stability analysis.

Here, we reanalyzed the Kepler-46 system using 35 transits from *Kepler* quarters. The transit analysis and dynamical fits were executed using `MultiNest` (Feroz et al. 2009, 2013), which is an efficient tool based on the Bayesian inference method. We were able to better determine the orbital parameters and masses of the two planets. The mass of Kepler-46b was determined here from TTVs for the first time. The paper is organized as follows: in Section 2, we describe the light curve analysis to obtain the mid-transit times and transit parameters of Kepler-46b. In Section 3, we discuss the dynamical analysis. The results are reported in Section 4. The last section is devoted to the conclusions.

2. Light Curve Analysis and Transit Times

Before a dynamical analysis can be conducted, the transit times and durations of each event need to be inferred. This, in turn, requires us to first detrend the *Kepler* photometry and then fit the transits with an appropriate model. For this task, we use a similar approach to that described in Teachey et al. (2017), which is essentially a modified version of the approach described in Kipping et al. (2013).

The broad overview is that we remove long-term trends from the *Kepler* simple aperture photometry with the `CoFiAM` algorithm described in Kipping et al. (2013). Essentially, `CoFiAM` is a cosine filter designed to not disturb the transit of interest but remove all present longer-period trends. A prerequisite for using `CoFiAM` is that the time and duration of each transit are already approximately known. Since this system is known to exhibit strong variations in both, this poses a catch-22 problem for us.

Following Teachey et al. (2017), we remedy the problem by conducting an initial detrending using approximate estimates for the times and a fixed duration taken from Nesvorný et al. (2014). This data are then fitted (as we will describe later) to provide revised estimates for the times and durations. These revised times and durations are then used as inputs for a second attempt at detrending the original *Kepler* data using `CoFiAM` again. This iteration process allows for self-consistent inference of the basic transit parameters.

Initially, we take into account the 40 transit events available for Kepler-46b (e.g., Holczer et al. 2016). However, one such transit (corresponding to cycle 5) is found to have inadequately detrended data, which is identified by visual inspection of the light curve. Four other events (corresponding to cycles 0, 10, 16, and 28) are found to have insufficient temporal coverage.⁴ There are several reasons that this might happen. At first, safe modes and data downlinks cause genuine gaps in the time series. At the next level, any *Kepler* time stamp with an error flag not set to 0 is removed by `CoFiAM`. Then, `CoFiAM` puts a smoothed moving median through the data and looks for 3σ outliers caused by sharp flux changes or some other weird behavior. Stitching problems among the quarters can also cause apparent sharp flux changes, and if we do not have enough usable data around the transit, then the event will also have data chopped this way. At last, the detrending of an event can fail giving a poor detrending, so we perform a second round of outlier cleaning that may eventually lead to most of the data for that event being removed. In the end, we keep only 35 transits for which visual inspection of the light curve indicates that we would be able to get reliable time estimates (Table 1).

The actual fitting process, which is ultimately repeated twice, is conducted using `MultiNest` coupled to a Mandel & Agol (2002) light curve model. We assume freely fitted quadratic limb-darkening coefficients, using the prescription of Kipping (2013), and allow each transit to have a unique mid-transit time but a common set of basic shape parameters (i.e., a common duration). While 20 of the transits were short cadence, 15 were long cadence requiring re-sampling using the technique of Kipping (2010), for which we used $N_{\text{resam}} = 30$.

Since each transit requires a unique free parameter, this leads to a very large number of free parameters in the final fit (35 just for the times alone). For computational expedience, we split the light curve into 4 segments of 10 transits each, with 5 for the last segment. Each segment is independent of the others, but assumes internally consistent shape parameters. Rather than freely fitting each event, this allows for the transit template to be well constrained such that the mid-transit time precision is improved. We refer to the above model of segments of transits as model \mathcal{M}_S .

As we did in Nesvorný et al. (2014), we also try fitting each transit completely independently, but fixing the limb-darkening

⁴ In particular, the transit of cycle 16 is marked with an outlier code >32 in Holczer et al. (2016).

Table 1
The Mid-transit Times t_C Obtained for Kepler-46b from the Analysis of *Kepler* Quarters 1–16 (Model \mathcal{M}_I)

Cycle	t_C (BJD)
1	55019.6993 \pm 0.0012
2	55053.2959 \pm 0.0010
3	55086.8640 \pm 0.0011
4	55120.4409 \pm 0.0018
6	55187.6880 \pm 0.0015
7	55221.3360 \pm 0.0016
8	55254.9066 \pm 0.0011
9	55288.4664 \pm 0.0012
11	55355.6667 \pm 0.0010
12	55389.3438 \pm 0.0011
13	55422.9309 \pm 0.0017
14	55456.4875 \pm 0.0011
15	55490.0601 \pm 0.0009
18	55590.9283 \pm 0.0008
19	55624.5138 \pm 0.0008
20	55658.0838 \pm 0.0011
21	55691.6593 \pm 0.0008
22	55725.3035 \pm 0.0009
23	55758.9147 \pm 0.0009
24	55792.5562 \pm 0.0010
25	55826.1262 \pm 0.0011
26	55859.6845 \pm 0.0017
27	55893.2891 \pm 0.0011
29	55960.5704 \pm 0.0010
31	56027.7090 \pm 0.0010
32	56061.2821 \pm 0.0010
33	56094.8799 \pm 0.0010
35	56162.1511 \pm 0.0011
36	56195.7346 \pm 0.0014
37	56229.3033 \pm 0.0012
38	56262.8845 \pm 0.0013
39	56296.5319 \pm 0.0012
40	56330.1453 \pm 0.0010
41	56363.7757 \pm 0.0010
42	56397.3426 \pm 0.0010

coefficients to the same as those used in Nesvorný et al. (2014). This allows for TDVs to be inferred as well as TTVs, but generally increases the credible interval of the TTV posteriors due to the much weaker information about the transit shape available. In what follows, we refer to this model as \mathcal{M}_I .

3. Dynamical Analysis of Transit Times

Following Nesvorný et al. (2012), we proceed by searching for a dynamical model that can explain the measured transit times. At variance with Nesvorný et al., we do not fit the TTVs but we directly fit the mid-transit times, which is expected to be a more accurate procedure. The results presented in the following are based on the mid-transit times from model \mathcal{M}_I (Table 1). We have performed similar computations using model \mathcal{M}_S and verified that the results are indistinguishable within their 1σ uncertainties.

To perform the dynamical fit, we assume a model of two planets, and we use a modified version of the efficient symplectic integrator `SWIFT` (Levison & Duncan 1994), adapted to record the mid-transit times of any transiting planet (Nesvorný et al. 2013; Deck et al. 2014). `MultiNest` is then used to perform the model selection and to estimate the best-fit values of the dynamical parameters with their errors.

Table 2
Prior Distributions of 12 Model Parameters that
We Used to Obtain the Dynamical Fit

Parameter	Prior Values
M_p/M_*	U[0, 0.005]
P_b (days)	U[33.5, 33.7]
P_c (days)	U[40, 84]
e_p	U[0, 0.4]
b_c	U[1, 20]
ϖ_p (°)	U[0, 360]
λ_c (°)	U[0, 360]
$\Omega_c - \Omega_b$ (°)	U[0, 360]
δt (days)	U[-0.1, 0.1]

Note. U[x, y] means a uniform distribution between x and y . The subindex p refers to any of the two planets.

MultiNest applies the Bayes rule (Appendix) to determine the values of the 12 parameters of the model that are necessary to reproduce the observed mid-transit times. The method provides the posterior distributions of these 12 parameters, namely, the planet-over-star mass ratios (M_b/M_* , M_c/M_*), the orbital periods (P_b , P_c), the eccentricities (e_b , e_c), the longitudes of periastron (ϖ_b , ϖ_c), the mean longitude and impact parameter of the non-transiting planet (λ_c , b_c), the difference of the nodal longitudes of the two planets ($\Omega_c - \Omega_b$), and the difference between the mid-transit time reference epoch ($\tau = 55053.2826$ BJD) and the mid-transit time of the nearest transit (δt). This latter parameter gives us the information about the mean longitude of the transiting body at the reference epoch ($\lambda_b = \lambda_{b,0} - 2\pi \delta t/P_b$, where $\lambda_{b,0}$ is the mean longitude at mid-transit time). The initial value of the impact parameter of Kepler-46b (b_b) is fixed at the value determined from the transit fit. We use the transit reference system from Nesvorný et al. (2012), where the reference plane is the plane defined by $b = 0$, the origin of longitudes is at the line of sight, and the nodal longitude of Kepler-46b (Ω_b) is set to 270° . The stellar parameters are also adopted from Nesvorný et al. (2012).

The priors distributions of the 12 model parameters are given in Table 2. The distributions were chosen as uninformative with uniform priors. The interval limits of these priors are based on results from Nesvorný et al. (2012) that guarantee that the system is constituted of a transiting and a non-transiting planet and is dynamically stable. The orbital period of the transiting body is well known from the transit fit, so we only consider a very small range of priors around the known value. For the period of the non-transiting planet, we consider an interval of priors that includes the two solutions found by Nesvorný et al. (2012). The upper limit in eccentricities is set to only 0.4, since higher values cause the code to become too slow and do not provide additional solutions. The upper limit of the impact parameter of the non-transiting planet corresponds to an inclination $i_p \sim 70^\circ$.

The calculation of the integrals involved in Equation (3) requires the use of a numerical method. MultiNest uses a multi-modal nested sampling technique to efficiently compute the evidence integral and also provides the posterior distributions of the parameters. In our case, the likelihood function (see

the Appendix) is defined as

$$L(d|\theta, M) = \prod_{j=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} \exp\left(-\sum_{i=1}^N \frac{(t_{C,i}^{\text{obs}} - t_{C,i}^{\text{cal}})^2}{2\sigma_i^2}\right), \quad (1)$$

where $N = 35$ is the number of transits; $t_{C,i}^{\text{obs}}$ and $t_{C,i}^{\text{cal}}$ are the observed (Table 1) and calculated mid-transit times, respectively; and σ_i is the uncertainty of $t_{C,i}^{\text{obs}}$. According to Equation (2), the best-fit parameters are obtained by maximizing this likelihood function.

4. Results

Our analysis provides two best-fit solutions that correspond to the two solutions reported in Nesvorný et al. (2012). The first solution (S1) was obtained for a uniform distribution of the period prior in the interval $P_c = [40, 70]$ days. This solution has a maximum likelihood of $\ln L_{S1} = 183.42$, a reduced $\chi_{S1}^2 = 1.96$ (for $35 - 12 = 23$ degrees of freedom), and a global evidence of $\ln Z_{S1} = 125.23$. The reduced χ^2 indicates that in principle this is a good fit, but the transit time errors may be underestimated by a factor of ~ 0.8 .

Table 3 reports the parameter values corresponding to S1. They were determined from the weighted posteriors calculated by MultiNest. The associated uncertainties are defined by the standard error at the 68.2% confidence level. The orbital elements provided by this solution are astrometric osculating elements at epoch BJD 55053.2826. The corresponding fit to the TTV signal is shown in Figure 1.

The posterior distributions of parameters, and the correlations between pairs of parameters, are shown in Figure 2. According to solution S1, Kepler-46b is a Jupiter-class planet ($M_b \simeq 0.9 M_J$), with a density similar or slightly higher than that of Jupiter. The companion is a Saturn-class planet ($M_c \simeq 0.36 M_J$)⁵ moving on an outer orbit with $P_c = 57.325$ days.

The period ratio $P_c/P_b = 1.703$ indicates that the two planets are close to the 5:3 mean motion resonance, but their orbits are not resonant. This configuration may be part of the trend identified previously where compact planetary systems appear to avoid exact resonances (e.g., Veras & Ford 2012). At least in some cases, this can be explained by tidal dissipation acting in the innermost planet (Lithwick & Wu 2012; Batygin & Morbidelli 2013). Kepler-46b, however, is probably too far from its host star for the tidal effects to be important. The orbital eccentricities of the two planets are similar, $e_b, e_c \simeq 0.03$, and the mutual inclination of the orbits is $I_{\text{mut}} = 0.43^\circ$, confirming the nearly circular and nearly coplanar nature of the planetary system. The small mutual inclination indicates that Kepler-46c may become a transiting planet in the near future (see Section 4.1).

The second solution (S2) is obtained for the period prior $P_c = [80, 84]$ days. This solution has a global evidence of $\ln Z_{S2} = 105.97$ and reveals the existence of two modes differing mainly in the mutual inclination between orbits. Specifically, Mode 1 of S2 corresponds to an impact parameter for Kepler-46c of $b_c \simeq 5$ with $0^\circ \leq \Omega_c \leq 180^\circ$, while Mode 2 corresponds to $b_c \simeq 7$ with $180^\circ \leq \Omega_c \leq 360^\circ$. Mode 1 gives a mutual inclination of $I_{\text{mut}} \simeq 170^\circ$ implying that the orbit of Kepler-46c is retrograde, while Mode 2 gives $I_{\text{mut}} \simeq 10^\circ$

⁵ This mass value is the same as determined by Nesvorný et al. (2012), and it is in good agreement with the analytic estimate of Deck & Agol (2015).

Table 3
The Best-fit Parameters and Their Errors for Solution S1

	<i>Kepler-46b</i>	<i>Kepler-46c</i>
Transit Fit		
R_p/R_*	$0.0887^{+0.0010}_{-0.0012}$...
b_p	$0.757^{+0.022}_{-0.027}$...
Dynamical Fit		
M_p/M_* ($\times 10^{-4}$)	$9.372^{+3.941}_{-3.618}$	$3.835^{+0.057}_{-0.035}$
P_p (days)	$33.648^{+0.004}_{-0.005}$	$57.325^{+0.116}_{-0.098}$
e_p	$0.0321^{+0.0069}_{-0.0078}$	$0.0354^{+0.0057}_{-0.0059}$
b_p	$0.757^{+0.022}_{-0.027}$	$1.483^{+0.418}_{-0.322}$
ϖ_p ($^\circ$)	$264.2^{+8.2}_{-8.9}$	$294.16^{+8.70}_{-6.42}$
λ_p ($^\circ$)	...	$338.0^{+0.3}_{-0.3}$
Ω_p ($^\circ$)	270	$261.4^{+22.7}_{-24.3}$
δt (days)	$0.0130^{+0.0006}_{-0.0006}$...
Secondary Parameters		
M_p (M_J)	$0.885^{+0.374}_{-0.343}$	$0.362^{+0.016}_{-0.016}$
a_p (au)	$0.1971^{+0.0001}_{-0.0001}$	$0.2811^{+0.0003}_{-0.0003}$
i_p ($^\circ$)	$89.04^{+0.14}_{-0.14}$	$88.66^{+0.26}_{-0.27}$
I_p ($^\circ$)	$0.957^{+0.028}_{-0.034}$	$1.35^{+0.38}_{-0.29}$
I_{mut} ($^\circ$)	...	$0.43^{+0.40}_{-0.26}$
R_p (R_J)	$0.810^{+0.035}_{-0.036}$...
ρ (g cm^{-3})	$2.069^{+0.913}_{-1.136}$...
<i>Kepler-46</i>		
Stellar Parameters		
M_* (M_\odot)	$0.902^{+0.040}_{-0.038}$	
R_* (R_\odot)	$0.938^{+0.038}_{-0.039}$	
ρ_* (g cm^{-3})	$1.54^{+0.22}_{-0.17}$	
$\log g_*$ ^a	$4.447^{+0.040}_{-0.035}$	
T_{eff} (K)	5155^{+150}_{-150}	
L_* (L_\odot)	$0.556^{+0.078}_{-0.070}$	
M_V	$5.60^{+0.17}_{-0.17}$	
Age (Gyr)	$9.7^{+3.7}_{-3.5}$	
Distance (pc)	855^{+68}_{-65}	
$[M/H]$	$0.41^{+0.10}_{-0.10}$	

Notes. The first block reports the transit parameters of Kepler-46b obtained from the light curve analysis. The second block reports the orbital parameters and masses obtained from the dynamical fit. Orbital elements are astrometric at osculating epoch BJD 55053.2826, the reference plane is the plane at which the impact parameter is 0, and the origin of longitudes is at the line of sight. The third block reports the secondary parameters. i_p is the inclination of the planet with respect to the sky plane during transit ($\cos i_p \simeq b_p R_*/a_p$); I_p is the inclination of the planetary orbit with respect to the reference plane; I_{mut} is the mutual inclination relative to the orbital plane of Kepler-46b. The last block lists the stellar parameters compiled from Nesvorný et al. (2012).

^a g_* is given in c.g.s units.

meaning that both planets are in prograde orbits. The maximum likelihood and reduced χ^2 values of the two modes are: $\ln L_{S2} = 157.16$, $\chi^2_{S2} = 4.25$ and $\ln L_{S1} = 157.56$, $\chi^2_{S1} = 4.21$, respectively. Table 4 summarizes some characteristics of solution S2.

For both modes, the mass of Kepler-46c would be larger ($M_c \simeq 1.9 M_J$) than that obtained for solution S1. The orbital eccentricities of both modes are smaller than for the S1 solution. The orbital period ratio suggested by both modes is $P_c/P_b \simeq 2.42$, which places the two planets very close to (but not inside of) the 5:2 mean motion resonance.

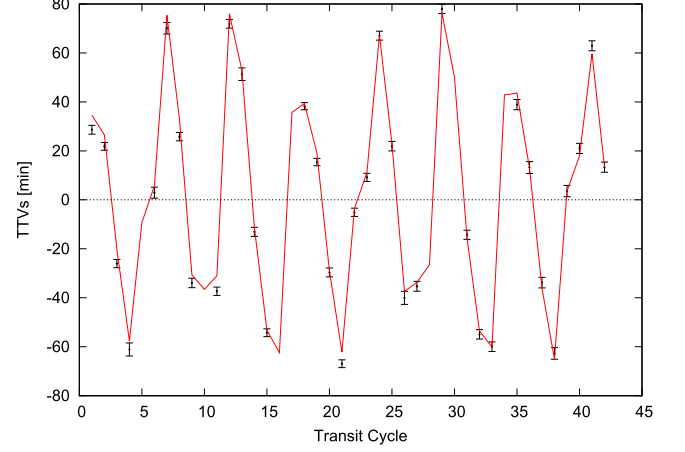


Figure 1. Transit timing variations (black dots) computed as the difference between the observed mid-transit times and the linear ephemeris (obtained by fitting a straight line to the mid-transit times series). The red line corresponds to the best dynamical fit corresponding to solution S1.

Since a $\Delta\chi^2 \sim 2.25$ between solutions S1 and S2 is not statistically significant enough to penalize any of the solutions, we apply Equation (4) to compare the global evidences of S1 and S2. The Bayes factor becomes $\Delta \ln Z = 19.26$, suggesting that solution S1 is preferred over S2 with a confidence level of 5.7σ . This argument can be used to rule out solution S2. It is worth stressing that this conclusion is based on the analysis of the TTVs only, while Nesvorný et al. (2012) had to resort to using the TDV constraints to arrive at the same conclusion.

In order to test how sensitive the Bayes factor is to the choice of prior distributions, we redo the dynamical fits restricting the intervals of the e_b , e_c priors to $U[0, 0.2]$ and the interval of the P_c priors to $U[55, 84]$. The resulting values of the evidence $\ln Z$ of each solution are higher in this case, as expected from Equation (3), but the Bayes factor is almost the same: $\Delta \ln Z = 20.81$. This indicates that S1 is still preferred over S2 with a confidence level of 6σ . Then, we can claim that model selection relying on the Bayes factor is not sensitive to the choice of the priors distributions.

Finally, it is worth noting that if we perform the dynamical fits using more than 35 transits, the solutions do not change significantly. At least three of the five discarded transits (corresponding to cycles 0, 5, and 10; see Section 2) allow us to estimate mid-transit times, even with large errors. The dynamical fits using these 35 + 3 transits provide again the two solutions S1 and S2, with S2 showing two modes, and the Bayes factor favoring S1. All the parameters of these fits are indistinguishable within 1σ errors with respect to the parameters reported in Tables 3 and 4. We conclude that our two-planet model solution S1 is quite robust.

4.1. Long-term Stability

Nesvorný et al. (2012) demonstrated that their S1 solution is dynamically stable over 1 Gyr. Since here we obtained slightly larger values of the orbital eccentricities, slightly smaller values of the mutual inclination, and were able to constrain the mass for Kepler-46b, we find it useful to reanalyze the long-term stability of the system.

We used the orbits and masses corresponding to solution S1 (see Table 3) and numerically integrated the orbits over 100 Myr using the SWIFT code and a one-day time step. The orbital evolution of the planets in the first 1500 days of this integration

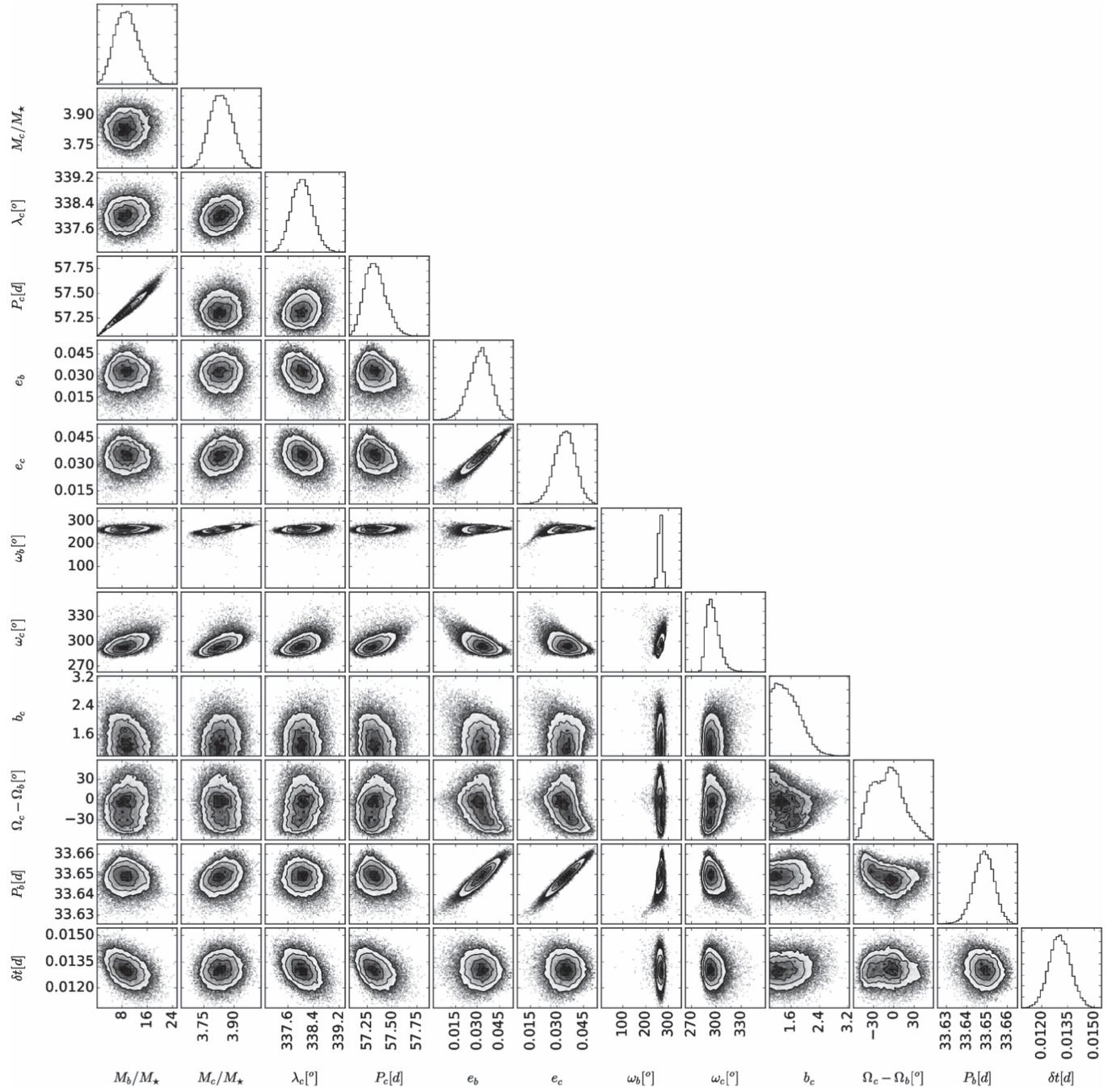


Figure 2. Equally weighted posterior distributions of our 12 model parameters (diagonal), and the corresponding correlations between parameters. The mass ratios are given in units of 10^{-4} .

is shown in Figures 3 and 4. The semimajor axes show short-term oscillations with amplitudes never larger than 0.7%. Due to the conservation of the total angular momentum, the eccentricities show anti-correlated oscillations with a period of $\simeq 110$ years. We note that, for both planets, these oscillations show amplitudes that are of the same order of the eccentricity uncertainties reported in Table 3. This implies that the eccentricities will be indistinguishable at any epoch, within their 1σ uncertainties. The inclinations I_P relative to the transit reference plane (see Table 3) also show anti-correlated oscillations with a period of $\simeq 83$ years resulting from the

precession of the nodal longitudes. In this case, the oscillation amplitude of Kepler-46c is also of the same order of the uncertainty in inclination, but for Kepler-46b the amplitude is about five times larger than the uncertainty. The integration results indicate that the orbits show no signs of chaos, and the planetary system is stable at least over 100 Myr.

Our analysis also shows that Kepler-46b should always transit the star, as can be seen from the right panel of Figure 4. Kepler-46c, on the other hand, is not currently transiting, but it may start to display transits in a few decades. Once it does, Kepler-46 will be a good target for light curve observations that

Table 4
Similar to Table 3 but for the Two Modes of Solution S2

	Mode 1		Mode 2	
	<i>Kepler-46b</i>	<i>Kepler-46c</i>	<i>Kepler-46b</i>	<i>Kepler-46c</i>
Dynamical Fit				
M_P/M_* ($\times 10^{-4}$)	$8.223^{+20.522}_{-6.530}$	$20.151^{+0.930}_{-0.930}$	$7.499^{+19.497}_{-5.875}$	$20.148^{+0.890}_{-0.957}$
P_P (days)	$33.609^{+0.002}_{-0.003}$	$81.504^{+0.165}_{-0.501}$	$33.610^{+0.002}_{-0.003}$	$81.520^{+0.152}_{-0.479}$
e_P	$0.0063^{+0.0047}_{-0.0040}$	$0.0239^{+0.0031}_{-0.0033}$	$0.0067^{+0.0051}_{-0.0042}$	$0.0240^{+0.0032}_{-0.0034}$
b_P	0.757	$4.962^{+1.983}_{-1.153}$	0.757	$7.453^{+1.854}_{-1.175}$
ϖ_P ($^\circ$)	$225.9^{+42.3}_{-108.2}$	$124.1^{+7.8}_{-12.8}$	$229.3^{+38.6}_{-102.3}$	$124.0^{+7.9}_{-13.2}$
λ_P ($^\circ$)	...	$197.2^{+2.6}_{-2.5}$...	$196.7^{+2.7}_{-2.6}$
Ω_P ($^\circ$)	270	$19.4^{+8.7}_{-4.5}$	270	$207.7^{+7.5}_{-4.1}$
Secondary Parameters				
M_P (M_J)	$0.777^{+1.939}_{-0.617}$	$1.904^{+0.121}_{-0.119}$	$0.708^{+1.842}_{-0.562}$	1.886
a_P (au)	$0.1969^{+0.0001}_{-0.0001}$	$0.3556^{+0.0006}_{-0.0006}$	$0.1969^{+0.0001}_{-0.0001}$	$0.3557^{+0.0006}_{-0.0006}$
i_P ($^\circ$)	$89.04^{+0.14}_{-0.14}$	$86.51^{+1.85}_{-1.90}$	$89.04^{+0.14}_{-0.14}$	$84.75^{+4.31}_{-4.20}$
ρ (g cm^{-3})	$1.815^{+4.537}_{-2.042}$...	$1.655^{+4.310}_{-1.858}$...

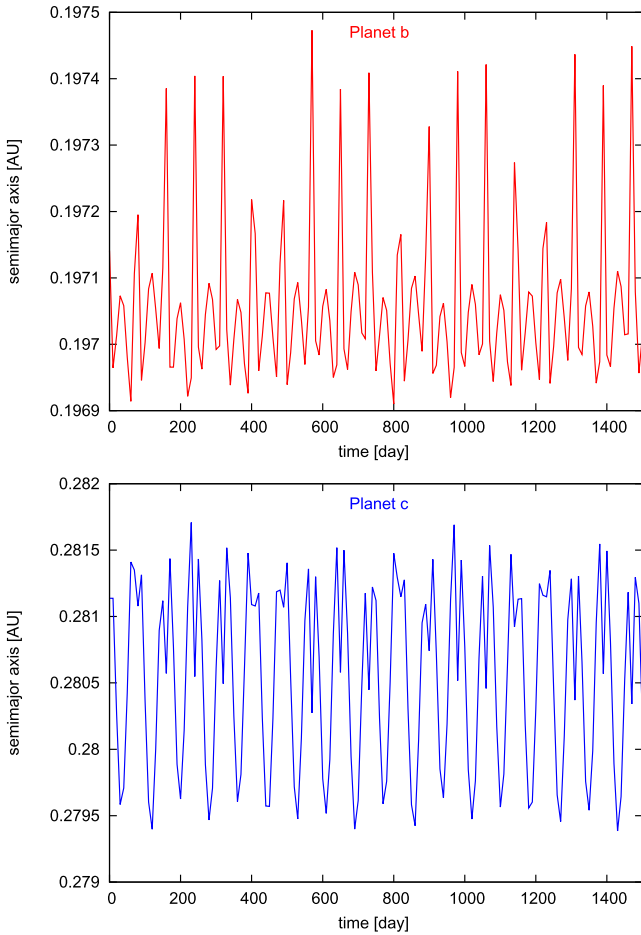


Figure 3. Evolution of the semimajor axes of Kepler-46b (top panel) and Kepler-46c (bottom panel).

may lead to the confirmation of Kepler-46c and the determination of its radius and density.

5. Conclusion

We reanalyzed the Kepler-46 planetary system using a larger number of transits (35) than in Nesvorný et al. (2012) and

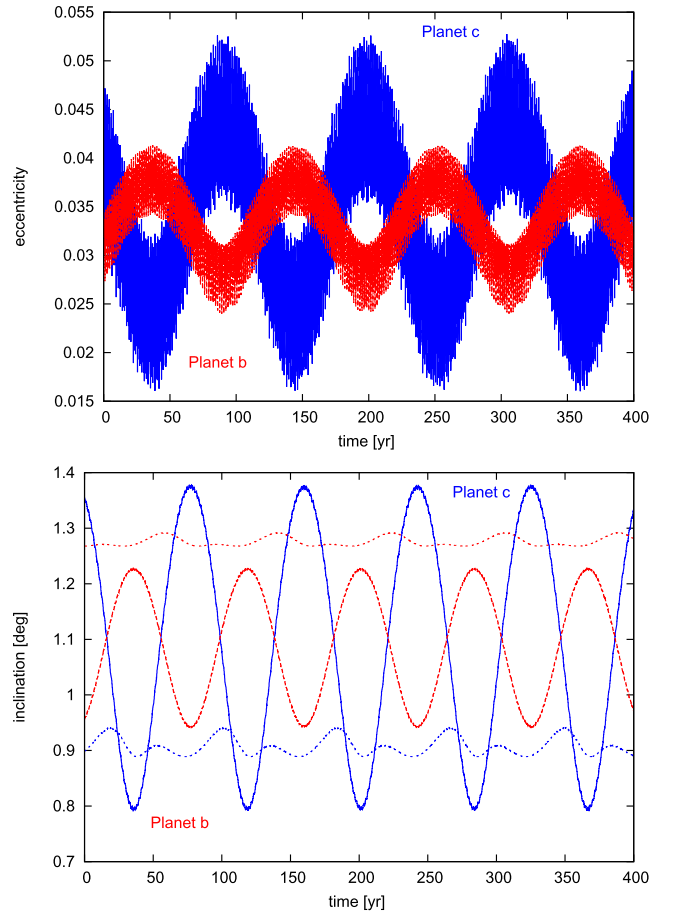


Figure 4. Evolution of the eccentricities (top panel) and inclinations (bottom panel) of Kepler-46b (red full lines) and Kepler-46c (blue full lines). The inclinations are relative to the transit reference plane. The dotted lines in the bottom panel represent the inclination limits below which the planets are expected to show transits (i.e., $b_P < 1$).

applying the Bayesian inference to perform a dynamical fit to the measured TTVs. We obtained two possible solutions, but the Bayesian evidence allows us to rule out one of them without the use of TDVs as in Nesvorný et al. (2012). The

availability of a larger number of transits allows us to determine the mass Kepler-46b and constrain its density.

We confirm that the TTVs signal is well reproduced by a system of two planets on nearly circular and coplanar orbits, with periods of $P_b \simeq 33.6$ days and $P_c \simeq 57.3$ days, respectively. This means that the two planets are close to, but not inside of, the 5:3 mean motion resonance. With the radius of Kepler-46b determined from the photometric light curve, $R_b \simeq 0.85 R_J$, and the new mass determination $M_b \simeq 0.9 M_J$, we can constrain its density to be $\sim 2 \text{ g cm}^{-3}$. This indicates, consistently with its Jupiter-like mass, that Kepler-46b has a significant gas component. No density estimate can be inferred for the non-transiting companion Kepler-46c, but the estimated mass $M_c \simeq 0.36 M_J$ indicates a Saturn-class planet. Interestingly, our new fit indicates that Kepler-46c should start transiting the host star in a few decades.

This work has been supported by the Coordination for the Improvement of Higher Education Personnel (CAPES), the Brazilian Council of Research (CNPq), NASA's Emerging Worlds program, and Brazil's Science without Borders program.

Appendix Bayesian Inference

In order to find the best-fit parameters to the observed mid-transit times, we apply a powerful statistics tool that relies on the Bayes rule:

$$P(\theta|d, M) = \frac{L(d|\theta, M)\pi(\theta, M)}{Z(d|M)}. \quad (2)$$

This rule gives the posterior distribution $P(\theta|d, M)$ of the parameters θ , for the model M , and gives the data d , in terms of the likelihood distribution function $L(d|\theta, M)$ within a given set of prior distribution $\pi(\theta, M)$. The expression is normalized by the so-called Bayesian evidence $Z(d|M)$. We recall that in this formula, the prior and the evidence represent probability distributions, while the likelihood is a function that generates the data d given the parameter θ . The prior is the probability of the parameter θ that is available before making any observation, in other words, it is our state of knowledge of the parameters of the model before considering any new observational data d . The evidence is the probability of the data d given the model M , integrated over the whole space of parameter θ as defined by the prior distribution. This is also referred to as the

marginal likelihood, and it is given by

$$Z(d|M) = \int L(d|\theta, M)\pi(\theta, M)d\theta. \quad (3)$$

For parameter estimation, the Bayesian evidence simply enters as a normalization constant that can be neglected, as in most cases it seeks to maximum posterior values. However, in the case of having competing models, Bayes rule penalizes them via model selection, and in this case, the Bayesian evidence is relevant. For example, consider two models, M_1 and M_2 ; then, the ratio of the posterior probabilities, also known as *posterior odds*, is given by

$$\frac{P(M_1|d)}{P(M_2|d)} = \frac{Z(d|M_1)\pi(M_1)}{Z(d|M_2)\pi(M_2)}. \quad (4)$$

Therefore, the posterior odds of the two models is proportional to the ratio of their respective evidences, which is called the *Bayes factor*. The proportionality becomes an equality when the ratio of the prior probabilities (or *prior odds*) of the two models is 1.

References

- Agol, E., Steffen, J., Sari, R., & Clarkson, W. 2005, *MNRAS*, **359**, 567
 Ballard, S., Fabricky, D., Fressin, F., et al. 2011, *ApJ*, **743**, 200
 Batygin, K., & Morbidelli, A. 2013, *AJ*, **145**, 1
 Borucki, W. J., Koch, D. G., Basri, G., et al. 2011, *ApJ*, **736**, 19
 Carter, J. A., Yee, J. C., Eastman, J., Gaudi, B. S., & Winn, J. N. 2008, *ApJ*, **689**, 499
 Dawson, R. I., Johnson, J. A., Fabrycky, D. C., et al. 2014, *ApJ*, **791**, 89
 Deck, K. M., Agol, E., Holman, M. J., & Nesvorný, D. 2014, *ApJ*, **787**, 132
 Deck, K. M., & Agol, E. 2015, *ApJ*, **802**, 116
 Feroz, F., Hobson, M. P., Cameron, E., & Pettitt, A. N. 2013, arXiv:1306.2144
 Feroz, F., Hobson, M. P., & Bridges, M. 2009, *MNRAS*, **398**, 1601
 Guillot, T., & Gautier, D. 2015, in *Treatise on Geophysics*, ed. G. Schubert (2nd ed.; Amsterdam: Elsevier), 529
 Holczer, T., Mazeh, T., Nachmani, G., et al. 2016, *ApJS*, **225**, 9
 Holman, M. J., Fabrycky, D. C., Ragozzine, D., et al. 2010, *Sci*, **330**, 51
 Holman, M. J., & Murray, N. W. 2005, *Sci*, **307**, 1288
 Kipping, D. M. 2010, *MNRAS*, **408**, 1758
 Kipping, D. M. 2013, *MNRAS*, **435**, 2152
 Kipping, D. M., Hartman, J., Buchhave, L. A., et al. 2013, *ApJ*, **770**, 101
 Levison, H. F., & Duncan, M. J. 1994, *Icar*, **108**, 18
 Lissauer, J. J., Fabrycky, D. C., Ford, E. B., et al. 2011, *Natur*, **470**, 53
 Lithwick, Y., & Wu, Y. 2012, *ApJL*, **756**, L11
 Mancini, L., Lillo-Box, J., Southworth, J., et al. 2016, *A&A*, **590**, A112
 Mandel, K., & Algol, E. 2002, *ApJL*, **580**, L171
 Miralda-Escudé, J. 2002, *ApJ*, **564**, 1019
 Nesvorný, D., Kipping, D. M., Buchhave, L. A., et al. 2012, *Sci*, **336**, 1133
 Nesvorný, D., Kipping, D. M., Terrell, D., et al. 2013, *ApJ*, **777**, 3
 Nesvorný, D., Kipping, D. M., Terrell, D., & Feroz, F. 2014, *ApJ*, **790**, 31
 Seager, S., & Mallén-Ornelas, G. 2003, *ApJ*, **585**, 1038
 Steffen, J. H., Fabrycky, D. C., Ford, E. B., et al. 2012, *MNRAS*, **421**, 2342
 Teachey, A., Kipping, D. M., Schmitt, A., et al. 2017, *ApJ*, submitted
 Veras, D., & Ford, E. B. 2012, *MNRAS*, **420**, L23
 Xie, J.-W. 2014, *ApJS*, **210**, 25

4 Um Júpiter quente em órbita excêntrica no sistema Kepler-419

4.1 Sinopse

O sistema planetário da estrela Kepler-419 possui um histórico similar ao sistema Kepler-46. Os trânsitos de Kepler-419b ao redor da estrela Kepler-419, de tipo espectral F e com aproximadamente 139% da massa do Sol e 175% do raio do Sol, foram analisados pela primeira vez por [Dawson et al. \(2012\)](#). Eles ajustaram as curvas de luz considerando $e = 0$, mas a densidade estelar que obtiveram, ρ_* , foi maior do que aquela calculada a partir da espectroscopia da estrela (ver Equação 1.35). Portanto, a suposição de que o planeta se encontra em uma órbita circular estava errada. Os autores então utilizaram as diferenças estimadas de densidade estelar, juntamente com alguns parâmetros dos trânsitos, para calcular a excentricidade do planeta. O método baseou-se no que os autores definiram como efeito foto-excêntrico. Seguidamente, eles analisaram os 8 trânsitos de Kepler-419b e observaram TTVs como sendo provocados por um segundo planeta não visível na fotometria. Quando aplicaram o método de inversão de TTVs, não conseguiram determinar com precisão nenhum parâmetro do sistema. Adicionando medições de VR de Kepler-419 calcularam a excentricidade do planeta, verificando o valor obtido pelo efeito foto-excêntrico. Trabalhando em conjunto com as observações de VR e as de TTVs, conseguiram determinar a excentricidade, massa, período e inclinação (e, m, P, i) do planeta perturbador ([Dawson et al., 2014](#)). Com uma maior quantidade de observações de VR e trânsitos planetários, [Almenara et al. \(2018\)](#) determinaram os raios e massas estelares e planetários.

Este sistema foi o segundo escolhido para ser analisado nesta tese. Os dados de entrada do sistema foram: (i) a longitude do nodo do planeta que transita (Ω_b), cujo valor é definido segundo o sistema de coordenadas escolhido neste trabalho (ver figura 15), (ii) os dados dos tempos centrais de trânsito $t_{C,o}$, obtidos a partir dos TTVs calculados por [Holczer et al. \(2016a\)](#), e (iii) a massa e o raio estelar (M_*, R_*). Neste último caso, a literatura fornece dois conjuntos diferentes de valores, um dado por [Dawson et al. \(2012\)](#) e outro dado por [Almenara et al. \(2018\)](#). Na nossa análise dos tempos centrais de trânsito, nós consideramos os diferentes pares de valores para a massa e o raio da estrela. Para os parâmetros do ajuste, mais uma vez escolhemos valores de priors com distribuições uniformes. Em particular, para as massas dos planetas os limites foram escolhidos de forma a abranger massas de planetas tipo Terra até Júpiter. Os limites no período do planeta que transita foram definidos de tal forma que abrangessem o valor definido pela fotometria (50,5-70 dias). Como o período do planeta que não transita é desconhecido, tomaram-se valores ao redor dos encontrados no trabalho de [Almenara et al. \(2018\)](#) (60-80 dias). O trabalho de Almenara também foi utilizado para escolher os valores dos priors de excentricidade do planeta que transita (0,8-0,95) e do que não transita (0-0,3). O valor do parâmetro de impacto do planeta que transita (b_b) não foi encontrado na literatura, pelo que também foi incluído no ajuste. Os limites do seu prior foram de 0 até 1, permitindo tanto trânsitos centrais como trânsitos rasantes. Para o parâmetro de impacto do planeta que não transita,

b_c , os valores máximos e mínimos do prior foram 1-20. Novamente, os ângulos ($\varpi_b, \varpi_c, \lambda_c, \Omega_b - \Omega_c$) tomaram valores de 0° até 360° . Finalmente, os valores de priors para o parâmetro δ_t ficaram ao redor do tempo t_C do segundo trânsito observado.

No nosso trabalho a solução obtida é única. Ela mostra que, no sistema Kepler-419, existem dois planetas. Um deles é tipo Júpiter e não apresenta trânsitos, mas afeta os trânsitos do seu companheiro. Ele tem um período orbital de ~ 700 dias e se encontra em órbita excêntrica ($e \sim 0,16$). Por outro lado, o planeta que transita é também de tipo Júpiter e se encontra também em órbita excêntrica ($e \sim 0,8$) mais interna ($P \sim 70$ dias). Uma vez mais, a nossa análise demonstra que apenas a partir de observações de TTVs é possível determinar com precisão as massas dos planetas no sistema. O par apresenta uma inclinação mútua que o define como um sistema quase coplanar. Os planetas se encontram próximas da RMM 10:1, que gera uma amplitude de TTV de ~ 120 minutos no planeta Kepler-419b. A determinação destes parâmetros foi feita através de simulações em 48 processadores do Supercomputador Santos-Dumont, localizado em Petrópolis, RJ, que demandaram ~ 4 horas.

As soluções utilizando qualquer um dos dois conjuntos de parâmetros estelares não mostram diferenças apreciáveis entre si. Logo, a determinação dos valores de massa e raio estelar através de diferentes técnicas não influencia significativamente a caracterização dos parâmetros planetários. Verificamos ainda que os valores dos parâmetros planetários encontrados por nós são próximos aos obtidos pela técnica de VR por outros autores. O sistema com as soluções encontradas é estável sobre milhões de anos de evolução, e a configuração do planeta mais externo é tal que ele nunca apresentará trânsitos. O artigo anexado a seguir apresenta a análise completa do sistema Kepler-419.

Na literatura podem ser encontrados sistemas com diferentes combinações de excentricidade e inclinação. Por exemplo, sistemas com excentricidades e inclinações baixas, e sistemas com excentricidades e inclinações altas. Mas este é o primeiro sistema que apresenta órbitas coplanares e excentricidades elevadas. Ainda que neste trabalho não apresentemos um debate a respeito disto, na literatura podem ser encontrados trabalhos que tentam explicar esta configuração. A ideia de [Almenara et al. \(2018\)](#) para acabar com um sistema destas características é incluir um efeito de maré entre os planetas ¹. Com Kepler-46b inicialmente numa órbita muito excêntrica (~ 0.9) e com semi-eixo maior ~ 0.4 au, o planeta diminuiria lentamente o seu período e sua excentricidade até ficar capturado na excentricidade atual e numa órbita coplanar com Kepler-419c. Porém, no trabalho de Almenara não fica bem explicado como seria possível gerar uma variação na excentricidade e não na inclinação das orbitas. Além disso, também não é explicado como a excentricidade do planeta mais interno começaria num valor tão alto.

Por outro lado, [Petrovich et al. \(2019\)](#) propõe a interação do planeta exterior com um disco protoplanetário assimétrico e massivo, externo à sua órbita. O disco entregaria momento angular ao planeta c e, se o planeta interno começa com uma pequena excentricidade e o externo com um valor moderado, a remoção adiabática do potencial do disco irá transferir a excentricidade do planeta

¹ Esses valores altos de excentricidade poderiam ser atingidos por excitação devido a dispersão planeta-planeta ([Jurić & Tremaine, 2008](#)) mas isto deixaria os planetas em órbitas inclinadas, o que não é observado. Por outro lado, o mecanismo de Kozai ([Fabrycky & Tremaine, 2007](#)) poderia explicar o elevado valor de excentricidade no planeta b, mas isso implicaria que planeta c se encontraria numa órbita significativamente inclinada, e novamente essa não é a configuração observada.

externo para o interno. Para isto acontecer, o modelo precisa que o planeta interno comece com $e_b < 0.1$ e que entre ambos planetas a inclinação mutua seja de $\sim 0.7^\circ$, com o planeta interno satisfazendo $i_b > i_c$. A obtenção de inclinações altas e a excentricidade inicial no planeta c poderiam ser explicadas por efeito de espalhamento entre os planetas, produto de uma desestabilização das suas órbitas pela interação primordial com um disco de gás.

Masses of the Kepler-419 planets from transit timing variations analysis

X. Saad-Oliveira ¹★, A. Costa de Souza,¹ F. Roig¹ and D. Nesvorný^{1,2}

¹Observatório Nacional, Rua Gal. Jose Cristino 77, Rio de Janeiro RJ 20921-400, Brazil

²Department of Space Studies, Southwest Research Institute, 1050 Walnut Street, Suite 300, Boulder, CO 80302, USA

Accepted 2018 October 30. Received 2018 October 5; in original form 2018 September 14

ABSTRACT

We perform dynamical fits to the transit timing variations (TTVs) of Kepler-419b. The TTVs from 17 Kepler quarters are obtained from Holczer et al. The dynamical fits are performed using the `MultiNest` Bayesian inference tool, coupled to an efficient symplectic N -body integrator. We find that the existing TTV data alone are able to uniquely constrain the planetary masses of Kepler-419b and c. Our estimates are in a good agreement with previous mass determinations that combined different techniques and observations, such as TTVs, radial velocity measurements, and the photoeccentric effect. As expected, however, our mass estimates have larger uncertainty. We study the global stability of the system within the parameters uncertainties to discard possible unstable solutions. We conclude that our method applied to the Holczer et al. data can provide reliable determinations of the planetary parameters. In the forthcoming work, we will use Holczer et al. data to determine planetary parameters for a large set of Kepler systems.

Key words: methods: data analysis – methods: statistical – planets and satellites: detection – planets and satellites: dynamical evolution and stability – planets and satellites: fundamental parameters.

1 INTRODUCTION

One of the most important goals in exoplanetary science is to characterize the masses and radii of the planets. In general, these parameters are difficult to obtain at once using a single observational method. For example, transit light curves allow us to directly determine the planetary radii, but not the masses. On the other hand, radial velocity (RV) measurements allow us to constrain the planetary masses, but not the radii. Therefore, it is often necessary to combine different observational methods to get a more complete characterization of planet properties. However, while transit light curves are available for a large set of stars observed by the Kepler mission, RV measurements are only available for a small sample of Kepler stars. This highlights the importance of the transit timing variation (TTV) method.

TTVs are deviations of the individual transit times of a planet from a linear ephemeris. They are often caused by planetary companions that gravitationally interact with the transiting planet (e.g. Agol et al. 2005; Holman & Murray 2005). The TTV method explores the dynamics of the planetary system letting us constrain the masses and orbits of the transiting planets (e.g. Holman et al. 2010). It may also lead to detect and characterize non-transiting planets in a system where at least one planet is transiting (e.g. Ballard et al.

2011; Nesvorný et al. 2012, 2013). This is also the case of the Kepler-419 system.

Borucki et al. (2011) determined that Kepler-419 is a K star with a mass of $\simeq 1.23 M_{\odot}$, and identified transits of a planet candidate that received the provisional designation KOI-1474.01. Later analysis by Dawson et al. (2012) showed a low false-positive rate expectations and led to estimate a planetary radius of $10.8 R_{\oplus}$, and an orbital period of $P = 69.7$ d. The planetary eccentricity was also constrained to be very large from the photoeccentric effect.¹ Dawson et al. (2012) also pointed out that the light curves of KOI-1474.01 display large TTVs, probably due to the presence of another non-transiting planet, but they did not have enough TTVs observations to properly characterize it.

Later on, Dawson et al. (2014) extended the study of Kepler-419 by including new RV measurements, which confirmed the planetary nature of KOI-1474.01, then renamed as Kepler-419b. With these new observations, the authors improved the estimates of the stellar parameters, finding a stellar mass of $1.22^{+0.12}_{-0.08} M_{\odot}$, and a stellar radius of $1.4^{+0.37}_{-0.21} R_{\odot}$. In order to obtain the planetary parameters, Dawson et al. (2014) first analysed the TTVs and the RV data

¹The photoeccentric effect derives the orbital eccentricity of individual transiting planets based on the shape of the light curve and the transit duration. It takes advantage of the difference between the stellar density derived from spectroscopic observations and the stellar density inferred assuming a light curve produced by a planet in a circular orbit (Dawson & Johnson 2012).

* E-mail: ximena@on.br

Table 1. Prior distributions of 12 parameters of our model. $[x, y]$ is a uniform distribution between x and y . Indices b and c refer to each of the two planets, index p refers to any of the planets.

Parameter	Prior values
M_b/M_*	[0.001, 0.004]
M_c/M_*	[0.003, 0.009]
P_b (d)	[69.5, 70.0]
P_c (d)	[600, 800]
e_b	[0.8, 0.95]
e_c	[0, 0.3]
b_c	[1, 20]
ϖ_p ($^\circ$)	[0, 360]
λ_c ($^\circ$)	[0, 360]
$\Omega_c - \Omega_b$ ($^\circ$)	[0, 360]
δt (d)	[0, 0.06]

separately, and concluded that RVs can be used to constrain the mass of the transiting planet, Kepler-419b, while TTVs can be used to determine the mass of the non-transiting planet, Kepler-419c. Then, combining the available data, they fully characterized the system, confirming the very eccentric nature of Kepler-419b's orbit ($e_b \simeq 0.81$), its mass ($M_b \simeq 2.5 M_{\text{Jup}}$), and the mass of Kepler-419c ($M_c \simeq 7.3 M_{\text{Jup}}$).

Recently, Almenara et al. (2018) extended the study of Dawson et al. (2012, 2014) by considering all available Kepler observations, as well as new RV measurements. They applied a photodynamical model to fit the transit light curves simultaneously with the RV curves, and obtained a full set of parameters for the two planets and the star. In particular, they estimated larger values of the stellar mass and radius ($1.39 \pm 0.48 M_\odot$ and $1.80 \pm 0.22 R_\odot$), but similar values of the planetary masses ($M_b = 2.71 \pm 0.66 M_{\text{Jup}}$, $M_c = 7.4 \pm 2.6 M_{\text{Jup}}$). Almenara et al. (2018) also showed that TTVs alone could better constrain the mass of Kepler-419b, provided that additional transits were measured.

In this work, we use Kepler-419 mid-transit times reported by Holczer et al. (2016). We apply a Bayesian inference method to fit this data to a two-planet dynamical model. Our main goal is to use the Kepler-419 system as a test case to show that very good estimates of the planetary masses can be obtained by combining the Holczer's observed mid-transit times data set with the right statistical tool. This is of major relevance since Holczer et al. (2016) catalogue provides TTVs measurements for hundreds of Kepler systems for which RV observations are still not expected to be available in the near future. We also address the dynamics of the Kepler-419 system by analysing the orbital behaviour of the best-fitting solutions, and discuss how this poses constraints on the estimated parameters.

This paper is organized as follows: in Section 2 we describe our methodology. The results are presented in Section 3. Section 4 is devoted to the dynamical analysis. Finally, in Section 5, we discuss our results in the light of those of Almenara et al. (2018), and present our conclusions.

2 METHODOLOGY

Our method is based on fitting the mid-transit times observed to a two-planet dynamical model with 12 free parameters. The dynamics of the system is simulated with the SWIFT N -body code (Levison & Duncan 1994), which has been modified to determine

Table 2. Parameters estimated from the best fit to the mid-transit times observed of Holczer et al. (2016), and their uncertainties, assuming the stellar parameters provided by Dawson et al. (2012). The orbital parameters are the osculating astrometric elements at epoch BJD 2 454 959.3. The error bars reported for the dynamical fit parameters are in the standard 68.3 per cent confidence uncertainties. The second block reports the derived parameters; i_p is the orbital inclination with respect to the sky plane at transit ($\cos i_p = b_p R_*/r_p$); I_p is the inclination of the orbit with respect to the transit plane (i.e. the plane where $b = 0$); I_{mut} is the mutual orbital inclination of the orbits.

Kepler-419 (Dawson et al. 2012)		
M_* (M_\odot)	$1.22^{+0.12}_{-0.08}$	
R_* (R_\odot)	$1.4^{+0.37}_{-0.21}$	
	Kepler-419b	Kepler-419c
Dynamical fit		
M_p/M_* ($\times 10^{-3}$)	$2.54^{+0.95}_{-1.01}$	$5.06^{+0.08}_{-0.15}$
P_p (d)	$69.732^{+0.001}_{-0.001}$	$694.3^{+10.1}_{-8.6}$
e_p	$0.82^{+0.03}_{-0.01}$	$0.162^{+0.009}_{-0.008}$
b_p	$0.2^{+0.1}_{-0.2}$	$10.0^{+6.3}_{-5.9}$
ϖ_p ($^\circ$)	348^{+21}_{-14}	165^{+19}_{-13}
λ_p ($^\circ$)	–	59^{+20}_{-13}
Ω_p ($^\circ$)	270	268^{+142}_{-137}
δt (d)	$0.028^{+0.002}_{-0.001}$	–
Derived parameters		
M_p (M_{Jup})	$3.3^{+1.3}_{-1.2}$	$6.5^{+0.6}_{-0.5}$
a_p (au)	$0.3545^{+0.0014}_{-0.0009}$	$1.64^{+0.14}_{-0.09}$
i_p ($^\circ$)	$89.7^{+0.6}_{-0.8}$	$87.71^{+1.3}_{-1.2}$
I_p ($^\circ$)	$1.5^{+0.7}_{-0.9}$	$1.9^{+1.3}_{-1.2}$
I_{mut} ($^\circ$)	–	$0.5^{+1.5}_{-0.5}$
R_p (R_{Jup})	$0.8^{+0.2}_{-0.1}$	–
ρ_p (g cm^{-3})	$6.8^{+6.0}_{-3.8}$	–

the mid-transit times (Nesvorný et al. 2013; Deck et al. 2014). The parameter estimation is done with the Bayesian inference tool MultiNest (Feroz, Hobson & Bridges 2009; Feroz et al. 2013), adopting a Gaussian likelihood function. The code also provides the so-called Bayesian evidence of the fit, Z , which allows us to perform model/solution selection. A detailed description of the method is presented in Saad-Olivera et al. (2017). It is worth mentioning that it is better to fit mid-transit times than TTVs, because the former are directly measured from the light curve (or calculated from the dynamical model), while the latter have to be inferred through an intermediate fit to a linear ephemeris, which may constitute an additional source of error.

The 12 free parameters of the fit are the: planet-to-star mass ratios (M_b/M_* , M_c/M_*), the orbital periods (P_b , P_c), the eccentricities (e_b , e_c), the longitudes of periastron (ϖ_b , ϖ_c), the mean longitude (λ_c) and impact parameter (b_c) of the non-transiting planet, the difference in nodal longitudes ($\Omega_c - \Omega_b$), and time lapse (δt) between the reference epoch ($\tau = 2\,454\,959.3$ BJD) and the closest transit of Kepler-419b. This latter parameter is related to the mean longitude of Kepler-419b, λ_b , at the reference epoch.

The impact parameter of the transiting planet (b_b) is initially set to $b_b = 0.26$ determined from the transit light curve fit (Dawson et al. 2012). We use a transit reference system where the x -axis is oriented towards the observer and the nodal longitude of the transiting planet is fixed to $\Omega_b = 270^\circ$ (e.g. Nesvorný et al. 2012). The radius and mass of the star are also fixed, assuming two possible values: the

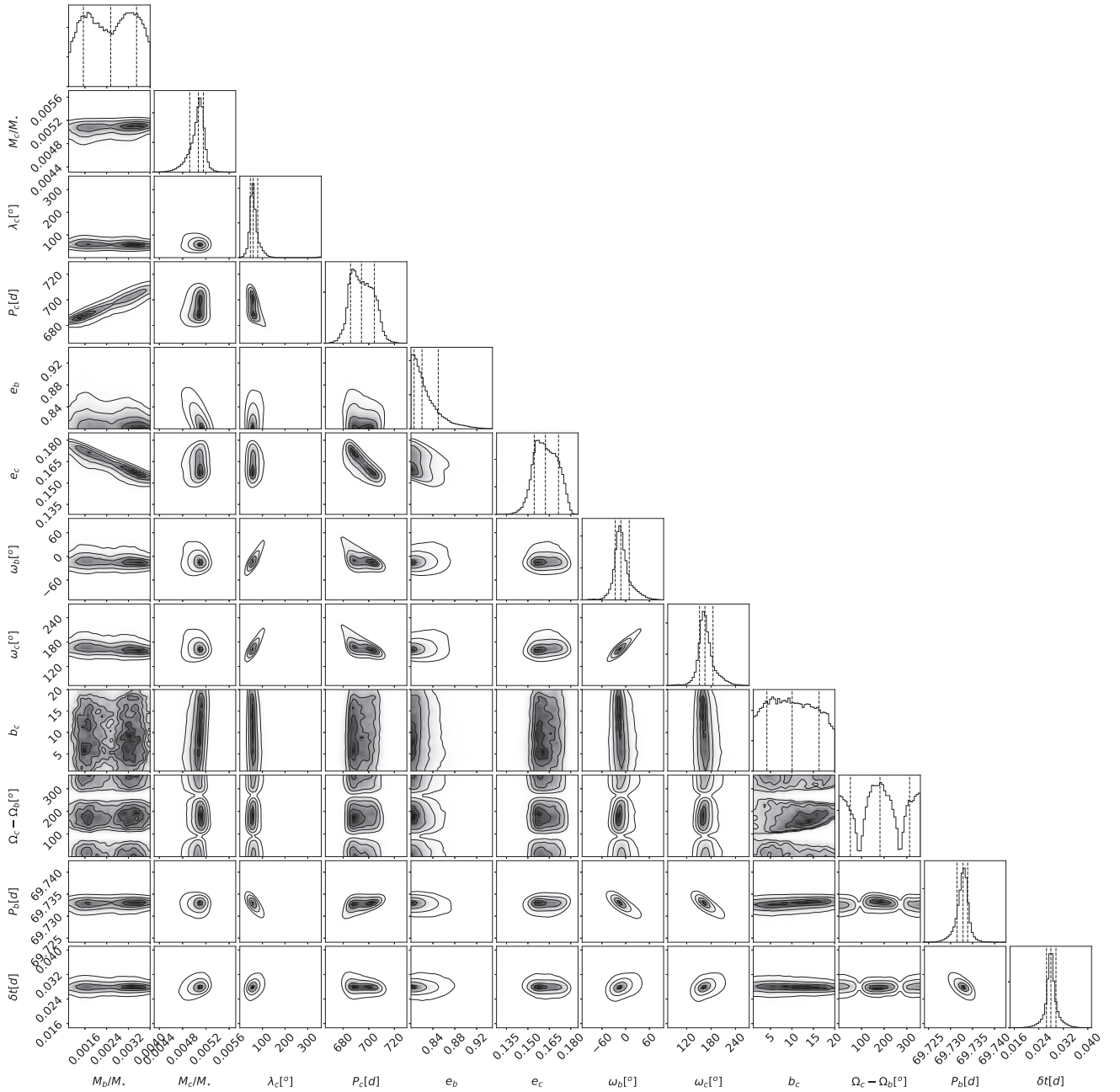


Figure 1. Equally weighted posterior distributions of the 12 parameters of our model (diagonal), and the corresponding correlations between the parameters, for the fit presented in Table 2.

Dawson et al. (2012) values ($R_* = 1.4 R_\odot$, $M_* = 1.22 M_\odot$), and the Almenara et al. (2018) values ($R_* = 1.8 R_\odot$, $M_* = 1.39 M_\odot$). For all the 12 model parameters, we consider uniform priors within the ranges listed in Table 1. These priors have been informed from the previously known information of the system (Dawson et al. 2012, 2014; Almenara et al. 2018).

Orbital configurations with transits of Kepler-419c are excluded (i.e. $b > 1$), since no such transits have been identified in the Kepler data.

3 RESULTS

Holczer et al. (2016) provide information about 20 transits for Kepler-419b, between BJD 2454959 and 2456424. It is worth

noting that Holczer’s catalogue lists the TTVs, their associated errors, and the expected mid-transit times from the linear ephemeris. These latter correspond to an average period of $P_b = 69.72787813$ d. So in order to work with the observed mid-transit times we must consider the sum between the expected mid-transit times and the TTVs listed in table 3 of the referred catalogue.

Assuming a star with $1.4 R_\odot$ and $1.22 M_\odot$ from Dawson et al. (2012), and applying MultiNest to the observed mid-transit times, we obtain three possible fits for the model parameters. However, only one of them has a positive value of the logarithm of the Bayesian evidence, $\ln(Z) = 75.7$, implying that MultiNest converged to a unique solution. Table 2 reports the values of this solution, estimated from the weighted posteriors provided by MultiNest. The distributions of the solution posteriors, and their correla-

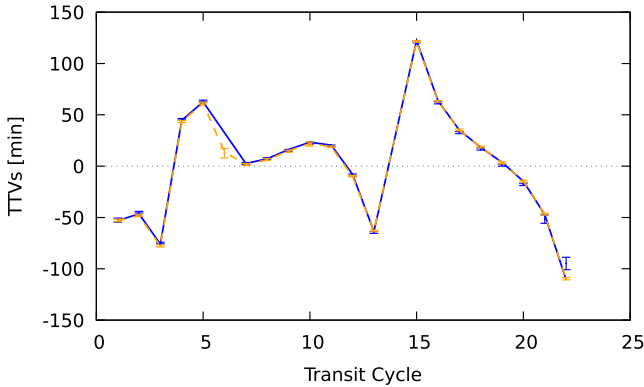


Figure 2. TTVs reported by Holczer et al. (2016) (blue dots with error bars), and the corresponding best fit presented in Table 2 (blue line). For comparison, we show the TTVs reported by Dawson et al. (2014) using the EMCEE package (orange dots with error bars), together with the corresponding best fit obtained in this work (orange dashed line).

Table 3. Parameters estimated from the best fit to the mid-transit times observed of Holczer et al. (2016), and their uncertainties, assuming the stellar parameters provided by Almenara et al. (2018). See Table 2 for explanation.

Kepler-419 (Almenara et al. 2018)		
M_* (M_\odot)	$1.39^{+0.48}_{-0.48}$	
R_* (R_\odot)	$1.8^{+0.2}_{-0.2}$	
	Kepler-419b	Kepler-419c
Dynamical fit		
M_p/M_* ($\times 10^{-3}$)	$2.60^{+0.89}_{-1.00}$	$5.07^{+0.08}_{-0.14}$
P_p (d)	$69.7332^{+0.001}_{-0.001}$	$694.7^{+10.1}_{-8.6}$
e_p	$0.82^{+0.02}_{-0.01}$	$0.162^{+0.009}_{-0.007}$
b_p	$0.26^{+0.11}_{-0.15}$	$8.9^{+6.3}_{-5.1}$
ϖ_p ($^\circ$)	346^{+24}_{-12}	163^{+22}_{-12}
λ_p ($^\circ$)	–	58^{+22}_{-11}
Ω_p ($^\circ$)	270	264^{+143}_{-135}
δt (d)	$0.028^{+0.001}_{-0.001}$	–
Derived parameters		
M_p (M_{Jup})	$3.8^{+1.8}_{-1.9}$	$7.4^{+2.5}_{-2.6}$
a_p (au)	$0.370^{+0.005}_{-0.005}$	$1.71^{+0.58}_{-0.58}$
i_p ($^\circ$)	$88.1^{+0.8}_{-1.0}$	$87.8^{+2.1}_{-2.0}$
I_p ($^\circ$)	$1.8^{+0.8}_{-1.1}$	$2.1^{+1.7}_{-1.4}$
I_{mut} ($^\circ$)	–	$0.4^{+3.3}_{-0.4}$
R_p (R_{Jup})	$1.1^{+0.1}_{-0.1}$	–
ρ_p (g cm^{-3})	$3.7^{+2.3}_{-2.7}$	–

tions, are shown in Fig. 1. The TTVs from Holczer’s catalogue (blue dots), and the corresponding best fit (solid blue line), are shown in Fig. 2.

The dynamical fit allows us to derive other important physical and orbital planetary parameters (see third part of Table 2). The uncertainties given there are realistic uncertainties obtained by combining those of the stellar parameters and dynamical fit. For example if we do not consider the uncertainties in the stellar parameters the semi-major axis error bars are of order of $\times 10^{-4}$ and $\times 10^{-5}$ for each planet.

The non-transiting planet is found to have a mass of $M_c \simeq 6.5 M_{\text{Jup}}$, a semimajor axis $a_c \simeq 1.64$ au, and a moderate eccentricity $e_c \simeq 0.16$. The transiting planet has $M_b \simeq 3.3 M_{\text{Jup}}$, $a_b \simeq 0.35$ au, and a very high orbital eccentricity, $e_b \simeq 0.82$, as expected. The two planets are close to the 10:1 mean motion resonance, with a period ratio $P_c/P_b \simeq 9.95$, and according to the period uncertainties, they might actually be trapped in this resonance. The orbits are very nearly coplanar, with a mutual inclination of $\simeq 0.5^\circ$.

Next, assuming a star with $1.8 R_\odot$ and $1.39 M_\odot$ from Almenara et al. (2018), and applying again `MultiNest` to the observed mid-transit times calculated from Holczer et al. (2016), we obtain two possible fits for the model parameters, but only one has a positive value of the logarithm of the evidence, $\ln(Z) = 75.6$. Table 3 reports the values of this solution, estimated from the weighted posteriors provided by `MultiNest`.

This solution provides similar values of the fit parameters to the previous ones. Small differences arise in the masses and semimajor axes: $M_c \simeq 7.4 M_{\text{Jup}}$, $a_c \simeq 1.71$ au, and $M_b \simeq 3.8 M_{\text{Jup}}$, $a_b \simeq 0.37$ au.

The nodal longitude determination of Ω_c mainly influences the constraint of the planetary orbital mutual inclination (I_{mut}). As we can see in Tables 2 and 3, we characterize the nodal longitude with larger uncertainties and this reflects on the bigger mutual inclination uncertainties. We find that I_{mut} is smaller than 3.7° (1σ uncertainty).

Comparing the 1σ error bars of the parameters presented in the both cases analysed here we can see how the uncertainties of stellar parameters affect the uncertainties of the derived parameters. Almenara’s larger stellar parameters uncertainties results in larger uncertainties of the planetary masses. Beyond this we conclude that both solutions are indistinguishable to within the error bars. Moreover, both solutions have similar values of the Bayesian evidence, implying that `MultiNest` does not allow us to prefer any solution over the other.

We then conclude that, independently of the stellar parameters, we can robustly estimate the mass ratio M_p/M_* . On the other hand, the stellar mass value is relevant in the planetary mass determination and might be also relevant to assess the long term stability of the system. We will discuss this possibility in the following section.

In order to verify to what extent the mid-transit times data set may introduce any significant bias in the dynamical fit we consider Dawson et al. (2014) data. The authors analysed the light curve of the Kepler-419 system and determined the mid-transit times of Kepler-419b using two different tools: the TAP software (Transit Analysis Package; Gazak et al. 2012), and the EMCEE package (Foreman-Mackey et al. 2013). Here we apply to the EMCEE data the same methodology described in Section 2. We find best-fitting parameters that are indistinguishable of those presented in Tables 2 and 3 within their 1σ errors, but interestingly, they show larger values of the evidence: $\ln(Z) = 92.17$ assuming Dawson’s stellar parameters, and $\ln(Z) = 92.01$ assuming Almenara’s stellar parameters. This may be due to a more careful treatment of the light curve fit by Dawson et al. (2014) compared to that of Holczer et al. (2016). However, we find that the TTVs from both Holczer and Dawson agree to within their 1σ confidence levels (blue and orange dots in Fig. 2), and the only difference between the two data sets is that Dawson et al. (2014) reported the transit time of one extra cycle.

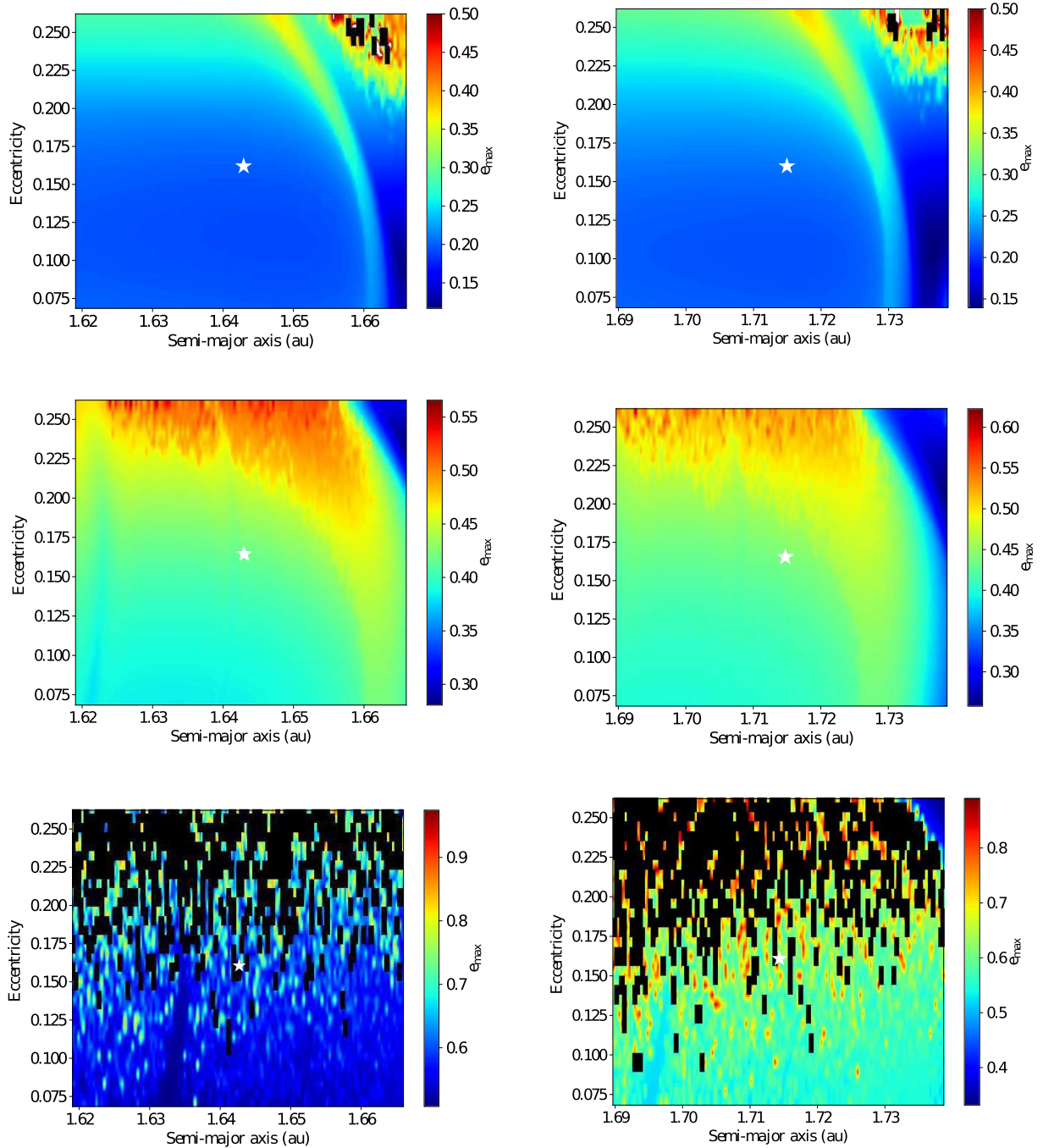


Figure 3. Dynamical maps of the MEI, computed for Kepler-419c. Left column panels correspond to the parameters of Table 2, right column panels correspond to the parameters of Table 3. Each row corresponds to different values of the mass M_b , from the smallest (top) to the largest (bottom) value within the 1σ uncertainties. The best-fitting parameters of Kepler-419c are indicated by the black dot at the centre of the grid. Blue/cyan regions indicate stable motion. Black cells denote unstable initial conditions that either led to a close encounter between the bodies (planet–planet or planet–star), or to the ejection of a planet (see text).

4 DYNAMICS OF THE KEPLER-419 SYSTEM

The very high eccentricity of Kepler-419b, the wide range of possible mass values estimated for this planet, and the proximity of the planets pair to a mean motion resonance, raises the question about the long term stability of this planetary system. Almenara et al. (2018) showed that, for the nominal orbits estimated with their photodynamical model, the Kepler-419 system is close to a high eccentricity stable equilibrium point in the $(e_b, \varpi_b - \varpi_c)$ plane. Here,

we explore the dynamics of the system using dynamical maps that span the main uncertainty intervals in the parameters M_b and a_c . We choose these parameters because they are not as tightly constrained as the other parameters.

The maps have been constructed by computing several stability/chaos indicators over a grid of 128×32 initial conditions. The grids span the interval ± 15 d and ± 0.1 around the best-fitting values of P_c and e_c . The other orbital elements of the planets are

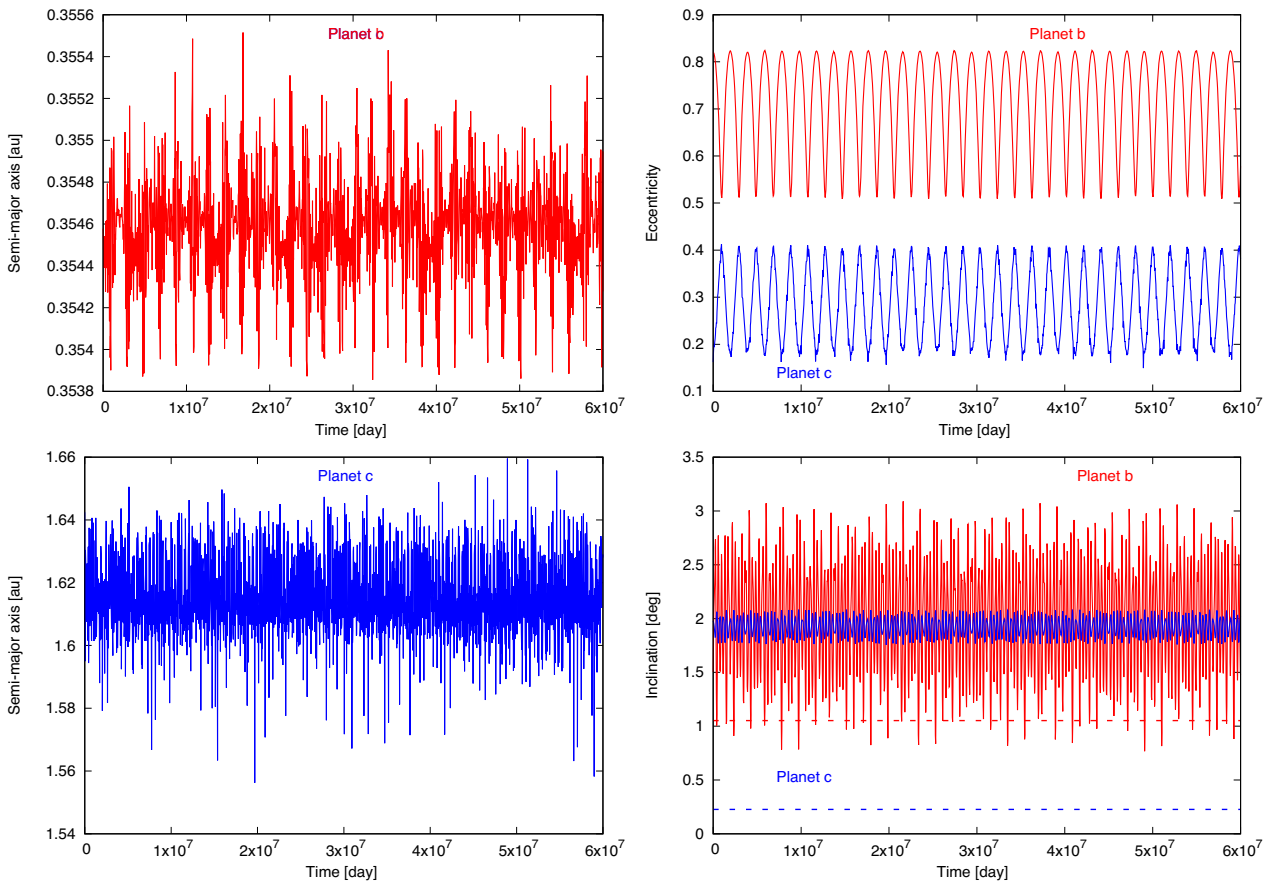


Figure 4. Dynamical evolution of the Kepler-419 planets, taking the parameters given in Table 2 as initial conditions. Left-hand panels show the evolution of the semimajor axis of planet b (top) and planet c (bottom). The right-hand panels show the evolution of eccentricity (top) and inclination (bottom) of the orbits of planet b (in red) and planet c (in blue). The dotted horizontal lines in the inclination panel correspond to the critical inclination below which it is possible to observe transits.

fixed to their best-fitting values. For each of the solutions presented in Tables 2 and 3, we compute three different grids, assuming three different values of the mass M_b : one corresponding to the best-fitting value, and two corresponding to the $\pm 1\sigma$ error. It is worth noting that, since M_b and P_c are strongly correlated (see Fig. 1), some combinations of M_b and a_c are outside the 1σ region of their joint distribution, and therefore they are missing in our dynamical analysis. The mass of M_c is always fixed to its best-fitting value. Each initial condition has been simulated over a time span of 5×10^6 d, with a time-step of 0.2 d, using a version of the `Swifter_helio` module, that is part of the `Swifter N-body` software package (Kaufmann and Levison, www.boulder.swri.edu/swifter/). This module has been translated into CUDA-C to run on a GPU architecture, which allows us to obtain the maps in only a couple of hours of the computational time (Costa de Souza et al., in preparation).

Fig. 3 shows the grids corresponding to the maximum eccentricity index (MEI), which is simply the maximum value of the eccentricity that Kepler-419c attains during the simulation time span. This index is straightforward to compute and provides valuable information about the structure of the phase space, easily identifying regions of stability and chaos.

Comparing the panels on the left of Fig. 3 to those on the right, we conclude that the global dynamical behaviour of the system is independent of the assumed stellar parameters. On the other hand, the behaviour is strongly dependent on the mass of Kepler-419b.

Indeed, the larger the mass M_b (top-to-bottom panels), the more unstable the system becomes. Black cells in Fig. 3 indicate initial conditions that led to encounters between the planets within a mutual distance $r < R_b^{\text{Hill}} + R_c^{\text{Hill}}$, or to an astrometric distance $r_p < 2R_*$, or $r_p > 10$ au, or to a pericenter distance $q_p < 2R_*$. The corresponding orbits are unstable.

In Fig. 4, we show the orbital evolution of the planets over 6×10^7 d, corresponding to the best-fitting values from Table 2. We have verified that the behaviour is the same over a longer time span of 1 Myr. This evolution has been simulated using the `Symba N-body` integrator, and considering a 0.2 d time-step. We can see that the eccentricities oscillate in opposed phases with very large amplitudes. The same behaviour is observed in the inclinations, although these display smaller amplitudes. In both cases, the opposed phases are related to the conservation of angular momentum of the system. The horizontal dotted lines in the inclinations panel correspond to the inclination value below which the planet will transit the star. Kepler-419b will always display transits, while Kepler-419c will not (at least for the nominal solution).

5 DISCUSSION AND CONCLUSIONS

We compare our best-fitting parameters of the system to those reported by Almenara et al. (2018), to find that they are indistinguishable within their 1σ uncertainties. The exception are the angles λ_p ,

ϖ_p , and Ω_p that are not directly comparable due to the use of different reference systems. The major difference between Almenara's fit and our fit (Table 3) is in the estimated mass of Kepler-419b. The value of Almenara et al. (2018) is $M_b/M_\star = (1.86 \pm 0.25) \times 10^{-3}$, which is close to the lower boundary of the value determined in this work: $M_b/M_\star = (2.60_{-1.00}^{+0.89}) \times 10^{-3}$. The value of Almenara is also much better constrained, which is expected from the combined use of TTVs and RVs. Almenara's solution would produce a dynamical map that resembles the upper right-hand panel of Fig. 3. Also, the best-fitting solution of Almenara et al. (2018) displays a similar behaviour as the one shown in Fig. 4, but the planet eccentricities have more bounded amplitudes. This is related to the smaller mass ratio of Kepler-419b estimated by those authors.

Our main conclusion is that, although the use of TTVs together with RVs certainly helps to improve and constrain the parameters of a multiplanetary system, the use alone of a large number of TTVs, with a high signal-to-noise ratio, is still capable to provide quite confident and robust estimates of the parameters, as we can see in this work. This implies that we can exploit the availability of the large database of TTVs of Holczer et al. (2016) to characterize many planetary systems around faint Kepler stars, for which the RVs measurements are not available.

ACKNOWLEDGEMENTS

The authors thanks the anonymous referee for the constructive comments. Computations have been performed at the SDumont cluster of the Brazilian System of High Performance Computing (SINA-PAD). This work has been supported by the Brazilian National Council of Research (CNPq), by the Brazilian Federal Agency for

Support and Assessment of Postgraduate Education from the Ministry of Education (CAPES) and by NASA's XRP program.

REFERENCES

- Agol E., Steffen J., Sari R., Clarkson W., 2005, *MNRAS*, 359, 567
 Almenara J. M. et al., 2018, *A&A*, 615, A90
 Ballard S. et al., 2011, *ApJ*, 743, 200
 Borucki W. J. et al., 2011, *ApJ*, 736, 19
 Dawson R. I., Johnson J. A., 2012, *ApJ*, 756, 122
 Dawson R. I., Johnson J. A., Morton T. D., Crepp J. R., Fabrycky D. C., Murray-Clay R. A., Howard A. W., 2012, *ApJ*, 761, 163
 Dawson R. I. et al., 2014, *ApJ*, 791, 89
 Deck K. M., Agol E., Holman M. J., Nesvorný D., 2014, *ApJ*, 787, 132
 Feroz F., Hobson M. P., Bridges M., 2009, *MNRAS*, 398, 1601
 Feroz F., Hobson M. P., Cameron E., Pettitt A. N., 2013, preprint ([arXiv:1306.2144](https://arxiv.org/abs/1306.2144))
 Foreman-Mackey D., Hogg D. W., Lang D., Goodman J., 2013, *PASP*, 125, 306
 Gazak J. Z., Johnson J. A., Tonry J., Dragomir D., Eastman J., Mann A. W., Agol E., 2012, *Adv. Astron.*, 2012, 697967
 Holczer T. et al., 2016, *ApJS*, 225, 9
 Holman M. J., Murray N. W., 2005, *Science*, 307, 1288
 Holman M. J. et al., 2010, *Science*, 330, 51
 Levison H. F., Duncan M. J., 1994, *Icarus*, 108, 18
 Nesvorný D., Kipping D. M., Buchhave L. A., Bakos G. Á., Hartman J., Schmitt A. R., 2012, *Science*, 336, 1133
 Nesvorný D., Kipping D., Terrell D., Hartman J., Bakos G. Á., Buchhave L. A., 2013, *ApJ*, 777, 3
 Saad-Olivera X., Nesvorný D., Kipping D. M., Roig F., 2017, *AJ*, 153, 198

This paper has been typeset from a $\text{\TeX}/\text{\LaTeX}$ file prepared by the author.

5 Análise dos TTVs no sistema Kepler-59

5.1 Sinopse

O sistema Kepler-59 consiste de dois planetas que apresentam trânsitos, Kepler-59b e Kepler-59c. As observações de trânsito obtidas por Kepler permitiram que [Steffen et al. \(2012\)](#) determinassem os períodos e raios planetários. Os seus TTVs não foram suficientes para fornecer valores das massas, mas os autores determinaram limites máximos nas massas estudando a estabilidade do sistema através de simulações de N-corpos.

Nesta parte da tese, usando os dados de TTVs de [Holczer et al. \(2016a\)](#), nós refinamos a determinação dos parâmetros dos planetas do sistema. Para isto, e diferentemente ao realizado nos dois trabalhos anteriores (Capítulos 3 e 5), escolhemos determinar os valores de massa e raio estelar usando observações espectroscópicas de catálogos de livre acesso. A análise foi feita pela nossa colaboradora, a Mag. Cintia Martinez, e esta parte do trabalho foi importante principalmente para obtermos um resultado auto-consistente, onde todos os passos envolvidos estivessem sob o controle dos autores do estudo ([Saad-Olivera et al., 2019b](#)).

Para a inversão dos tempos centrais de trânsito utilizamos dois conjuntos diferentes de observações. Isto foi devido ao fato de que a primeira base de dados utilizada só fornece informação de um planeta, enquanto que a segunda base de dados observacional apresenta dados dos dois planetas.

O primeiro conjunto de dados foi extraído do catálogo de [Holczer et al. \(2016a\)](#), que forneceu as observações de TTVs de Kepler-59c apenas. O método de inversão foi aplicado da mesma forma que nos trabalhos anteriores (Capítulos 3 e 4). Os priors aqui utilizados foram novamente distribuições uniformes, onde os limites de cada parâmetro foram, em alguns casos, dependentes dos resultados publicados por [Steffen et al. \(2012\)](#). Para as massas, o limite máximo possibilita a presença de um planeta tipo Júpiter. O período do planeta b tem limites entre 11,7-11,9 dias, enquanto que o período do planeta c se encontra entre 17,7-18,0 dias. As excentricidades foram escolhidas entre 0 e 0,5 em ambos casos. Os parâmetros de impacto de ambos planetas ficaram entre 0 e 1, pois ambos transitam. Os ângulos que identificam a posição dos planetas no espaço variaram entre 0° e 360° . Em particular, o valor de λ_b foi varrido entre 0° e 360° , enquanto que para o planeta c o valor foi determinado a partir do parâmetro δt_c , cujos limites variaram entre 0 e 0,05. A aplicação do método de inversão dos tempos centrais dos trânsitos de Kepler-59c forneceu duas soluções. A existência de mais de uma solução é possivelmente devido à alta razão S/N dos dados observacionais. A primeira solução (S_1^H), com um valor de logaritmo da evidência de 128,10, indica um planeta interno com órbita de $11,879_{-0,007}^{+0,009}$ dias e uma massa de $7,11_{-2,1}^{+3,0} M_\oplus$. Já, o planeta externo encontra-se em uma órbita de $17,970_{-0,002}^{+0,001}$ dias e com uma massa de $20,9_{-12,5}^{+13,6} M_\oplus$. Com excentricidades planetárias de $e_b = 0,03_{-0,03}^{+0,02}$ e $e_c = 0,02_{-0,02}^{+0,01}$, e inclinação mútua de $0,12^\circ$, os planetas encontram-se em órbitas quase circulares e quase coplanares. A segunda solução (S_2^H) possui $\ln(Z)_{S_2^H} = 128,56$, e indica um planeta interno com órbita de $11,869_{-0,002}^{+0,003}$ dias e massa de $3,5_{-0,7}^{+0,6} M_\oplus$, enquanto que o externo

encontra-se numa órbita de $17,969_{-0,002}^{+0,002}$ dias, com uma massa de $2,1_{-1,2}^{+1,4} M_{\oplus}$. Comparando as soluções, conclui-se que os parâmetros que apresentam as maiores diferenças são as massas dos planetas. Enquanto que na solução S_1^H a massa do planeta interno é menor que a massa do planeta externo, na solução S_2^H o comportamento é o oposto, sendo a massa do interno maior do que a massa do externo. A partir dos valores de logaritmo da evidência, não resulta possível dar preferência a qualquer uma das soluções.

O segundo conjunto de dados foi obtido do catálogo de trânsitos de [Rowe et al. \(2015\)](#), que fornece TTVs de ambos planetas, Kepler-59 b e c. Neste caso, os valores dos priors de λ_b e λ_c foram determinados a partir de escolher δt_b entre 1,0-1,2 dias e λ_c entre 0-0,05°. Para o resto dos parâmetros os valores são similares que no caso anterior. Estes dados também produzem duas soluções. A primeira solução, (S_1^R), com um valor de logaritmo de evidência de $335,44 \pm 0,07$, consiste de um planeta interno de $5_{-2}^{+4} M_{\oplus}$ numa órbita de $11,8715_{-0,0005}^{+0,0005}$ dias, e um planeta externo de $4,6_{-2,0}^{+3,6} M_{\oplus}$ numa órbita de $17,9742_{-0,0009}^{+0,0013}$ dias. Os valores de excentricidades e inclinação mútua revelam novamente órbitas quase circulares e quase coplanares ($e_b = 0,05_{-0,03}^{+0,09}$, $e_c = 0,05_{-0,03}^{+0,08}$, $I_{\text{mut}} = 0,102_{-0,0}^{+0,0} \circ$).

Com os valores de raios planetários calculados através do quociente R_p/R_{\star} obtido na literatura e os valores de R_{\star} gerado neste trabalho, as densidades planetárias dos planetas são estimadas como sendo $\rho_b = 8_{-4}^{+6} \text{ g cm}^{-3}$ e $\rho_c = 2,4_{-1,5}^{+2} \text{ g cm}^{-3}$, mostrando um planeta interno tipo super-Terra e um planeta externo tipo mini-Netuno. Na segunda solução, (S_2^R), com um valor de logaritmo de evidência de $337,80 \pm 0,07$, o planeta interno tem um período de $11,8714_{-0,0004}^{+0,0004}$ dias e uma massa de $3,0_{-0,8}^{+0,8} M_{\oplus}$, enquanto que o externo tem período de $17,9737_{-0,0008}^{+0,0008}$ dias e uma massa de $2,6_{-0,8}^{+0,9} M_{\oplus}$. A solução indica de novo um sistema coplanar e com órbitas quase-circulares ($I_{\text{mut}} = 0.04_{-0,05}^{+0,09} \circ$, $e_b = 0.09_{-0,05}^{+0,09}$, $e_c = 0.09_{-0,05}^{+0,08}$). Os cálculos das densidades mostram valores de $\rho_b = 4,9_{-1,9}^{+1,3} \text{ g cm}^{-3}$ e $\rho_c = 1,4_{-0,6}^{+0,5} \text{ g cm}^{-3}$, indicando mais uma vez a presença de um planeta super-Terra e um planeta sub-Netuno. Comparando ambas soluções através dos seus valores de logaritmo da evidência, novamente não é possível dar preferência a qualquer uma delas.

Para eventualmente conseguir dar preferência a alguma das duas soluções, determinamos o super-período das mesmas (ver Capítulo [Lithwick et al. \(2012\)](#)), através de modelos de densidade planetária e de estabilidade do sistema, porém estas tentativas não foram exitosas. Ainda assim, o nosso estudo deixa claro que o planeta interno é um planeta tipo super-Terra, portanto rochoso, enquanto que o mais afastado da estrela é um sub-Netuno (apenas numa das soluções este planeta mais externo também seria rochoso). Nossa análise mostra que o planeta interno poderia ter tido uma atmosfera que foi varrida pela interação com a estrela central via foto-evaporação, enquanto que o planeta externo teria uma natureza gasosa e, devido a sua distância da estrela, estaria coberto de vapor de água ([Owen & Wu, 2017](#)).

A seguir se anexa o artigo deste estudo, que descreve com mais detalhe a análise realizada, e que foi recentemente submetido para publicação.

A super-Earth and a mini-Neptune around Kepler-59

Journal:	<i>Monthly Notices of the Royal Astronomical Society</i>
Manuscript ID	MN-19-1918-MJ
Manuscript type:	Main Journal
Date Submitted by the Author:	29-May-2019
Complete List of Authors:	Saad-Olivera, Ximena; Observatorio Nacional, Martinez, Cintia; Observatorio Nacional Costa de Souza, Alan; Observatorio Nacional Roig, Fernando; Observatorio Nacional, Astronomy; Nesvorny, David; Southwest Research Institute, Department of Space Studies
Keywords:	planets and satellites: fundamental parameters < Planetary Systems, techniques: photometric < Astronomical instrumentation, methods, and techniques, planets and satellites: dynamical evolution and stability < Planetary Systems

A super-Earth and a mini-Neptune around Kepler-59

X. Saad-Oliveira,^{1*} C. F. Martinez,¹ A. Costa de Souza,¹ F. Roig¹ and D. Nesvorný^{2,1}

¹Observatório Nacional, Rua Gal. Jose Cristino 77, Rio de Janeiro, RJ 20921-400, Brazil

²Department of Space Studies, Southwest Research Institute, 1050 Walnut Street, Suite 300, Boulder, CO 80302, USA

Accepted XXX. Received YYY; in original form ZZZ

ABSTRACT

We characterize the masses and radii of the star and planets in the Kepler-59 system, as well as their orbital parameters, by relying only on the inversion of Transit Timing Variations (TTV) signals. The star parameters are determined through a standard spectroscopic analysis, resulting in a mass of $1.359 \pm 0.155 M_{\odot}$ and a radius of $1.367 \pm 0.078 R_{\odot}$. For the TTV inversion method, we consider two different sets of data: one set provided by [Holczer et al. \(2016\)](#), with TTVs signal only for the planet Kepler-59c, and the other set provided by [Rowe et al. \(2015\)](#), with TTVs signals for both planets in the system. The inversion is carried out applying an algorithm of Bayesian inference (MultiNest) combined with an efficient N-body integrator (Swift). For each of the data sets, two possible solutions are found, both having the same probability according to their corresponding Bayesian evidences. All the four solutions appear to be indistinguishable within their $2\text{-}\sigma$ uncertainties, and point to a system with a super-Earth ($1.5 \pm 0.1 R_{\oplus}$) in an inner orbit and a mini-Neptune ($2.2 \pm 0.1 R_{\oplus}$) in an outer orbit. The planets lie in almost co-planar orbits with small eccentricities ($e < 0.1$), close to but not in the 3:2 mean motion resonance. Stability analysis indicate that this configuration is stable over million years of evolution and over the possible values of the parameters provided by the solutions.

Key words: Transit Timing Variations – Bayesian inference – Kepler-59

1 INTRODUCTION

In a single planet system, a transiting planet orbits the star following a Keplerian orbit, periodically blocking the brightness of the star. The presence of more planets in the system turns the orbit to be non Keplerian, thus the mid-transit times deviate from a linear ephemeris: these deviations are known as Transit Timing Variations (TTVs), and they are particularly sensitive to small perturbations allowing to estimate the planetary masses M_p . Moreover, Mean Motion Resonances (MMR) can lead significant perturbations which will turn easier to detect these TTVs ([Agol et al. 2005](#); [Holman & Murray 2005](#)). Knowing the planetary masses and radii from transit observations is fundamental to constraint the planetary densities, which in turn is useful to better understand the planetary formation models. Here, we present a TTV analysis of planet Kepler-59c that, for the first time, completely characterize the planetary orbits of the two planets in the Kepler-59 system, improving the estimates of their masses.

The planet Kepler-59c, first identified as KOI-1529.01, was announced from the earliest analyses of the Kepler data (quarters Q1-Q2; [Borucki et al. 2011](#)). Analyzing the data in quarters Q1-Q6 of Kepler, the second planet Kepler-59b, initially identified as KOI-1529.02, was suspicious to orbit the same star ([Batalha et al. 2013](#)). Finally, using Kepler data from quarters Q1-Q8, [Steffen et al. \(2013\)](#)

showed that both planets present anti-correlated TTVs. Dynamical studies of the system exhibit mutual gravitational perturbations between the planets, assuring both planets being in the same system.

Using the stellar parameters of Kepler-59 ($M_{\star} = 1.04 M_{\odot}$ and $R_{\star} = 0.94 R_{\odot}$) and the ratios of planet-to-stellar radius for the two planets ($R_b/R_{\star} = 0.01065 \pm 5.3 \times 10^{-4}$ and $R_c/R_{\star} = 0.01923 \pm 7.6 \times 10^{-4}$) given in [Batalha et al. \(2013\)](#), [Steffen et al. \(2013\)](#) computes the radius of planet b as $R_b = 1.09 \pm 0.05 R_{\oplus}$ and of planet c as $R_c = 1.97 \pm 0.08 R_{\oplus}$. Taking into account the uncertainties of this parameter, it is possible to classify Kepler-59b as an Earth planet, and Kepler-59c as either a Super-Earth or a Mini-Neptune planet. The classification into Earth, Super-Earth and Mini-Neptune planets was introduced to determine the rate of occurrence of different planets. Earth planets are defined as those with radii $0.8 R_{\oplus} < R_p < 1.25 R_{\oplus}$, Super-Earths are those with radii between $1.25 R_{\oplus} < R_p < 2.0 R_{\oplus}$, and Mini-Neptunes have radii around $2.0 R_{\oplus} < R_p < 4.0 R_{\oplus}$ ([Fressin et al. 2013](#)). The last two kind of objects were found to be galore in the Kepler observations, and demonstrate to be common in our Galaxy ([Batalha et al. 2013](#)), occurring with orbital periods between 5 and 50 days ([Petigura et al. 2013](#); [Silburt et al. 2015](#)). It is worth mentioning that the planetary radius depends on the stellar radius. Hence, different values for the stellar radius can give larger or smaller planetary radii.

The TTVs analysis together with the dynamical study of the Kepler-59 system enable [Steffen et al.](#) to set upper limits to the planetary masses as to guarantee the stability of the system. Indeed,

* E-mail: ximena@on.br

2 Saad-Olivera et al.

for the system to be stable the mass of Kepler-59b has to be $M_b < 2.05 M_{Jup}$, and the mass of Kepler-59c has to be $M_c < 1.37 M_{Jup}$.

Our goal in this paper is to improve the values of the masses of both planets in the Kepler-59 system, not by defining upper limits but by accurately constraining them. This is done first using the TTV data of Kepler-59c calculated by Holczer et al. (2016) from Kepler quarters Q1-Q17, and then using the TTV data of Kepler-59b and c calculated by Rowe et al. (2015) from quarters Q1-Q12.

In Section 2, we estimate the stellar parameters and subtract the planetary radius from the light curve analysis. In Section 3, we explain the methodology used to fit the mid-transit times of the planets. The results are shown in Section 4, together with a dynamical study of the obtained solution. Discussions and conclusion are given in Section 5.

2 STELLAR AND LIGHT CURVE PARAMETERS

2.1 Spectroscopic Stellar Parameters

The high-resolution spectrum of Kepler-59 analyzed in this work was obtained with the High Resolution Echelle Spectrometer (HIRES, Vogt et al. 1994) at the Keck telescope as part of the large observational campaign named California-Kepler Survey (CKS-Petigura et al. 2017; Johnson et al. 2017), which is focused on target stars identified as Kepler Objects of Interest (KOIs). The reduced spectrum is publicly available and was obtained from the Keck Observatory Archive <https://california-planet-search.github.io/cks-website/>. We estimated the spectral signal-to-noise ratio (S/N) by measuring the rms-flux fluctuation in selected continuum windows with typical values of S/N between ~ 35 -40. We conducted a classical spectroscopic analysis, based on equivalent widths (EW) measurements of a selected set of Fe I and Fe II lines to derive the stellar parameters: effective temperature, T_{eff} , surface gravity, $\log g$, and micro-turbulent velocity, ξ , as well as the metallicity [Fe/H] of the Kepler-59 star. The parameter calculations were done under the assumption of local thermodynamic equilibrium (LTE) using 1D model atmospheres from the Kurucz ATLAS9 ODFNEW grid (Castelli & Kurucz 2004) and the revised version (2002) of the abundance analysis code MOOG (Snedden 1973) to compute the iron abundances. The stellar parameters were obtained by using the LTE approach and iterating until: (i) the Fe I abundance, A(Fe I), shows no correlation with the excitation potential, EP, of the Fe I line transitions (excitation equilibrium), (ii) the value of A(Fe I) exhibits no dependence with the reduced equivalent widths $\log(\text{EW}/\lambda)$, and (iii) the mean abundances obtained by Fe I and Fe II lines reach similar values (ionization equilibrium). These three conditions define the stellar T_{eff} , $\log g$, ξ and [Fe/H]. We adopted the line list consisting of 158 Fe I and 18 Fe II isolated and unblended lines presented in Ghezzi et al. (2018). The $\log gf$ values for the Fe I and II lines were obtained by these authors performing an inverted solar analysis using a Kurucz ATLAS9 ODFNEW model atmosphere for the Sun ($T_{\text{eff}} = 5777$ K, $\log g = 4.44$, [Fe/H] = 0.00 and $\xi = 1.00$ km s $^{-1}$), and adopting a solar iron abundance of 7.50 (Asplund et al. 2009). The line EWs of Kepler-59 were measured using the IRAF¹ *splot* task.

¹ IRAF is distributed by the National Optical Astronomy Observatory, which is operated by the Association of Universities for Research in Astronomy, Inc., under cooperative agreement with the National Science Foundation.

2.2 Stellar Radius and Mass

The stellar radius was obtained by using the Stefan-Boltzmann Law depending on the effective temperature (already spectroscopically derived) and the stellar luminosity. To calculate the latter, we first obtained the absolute magnitude by considering: (i) the 2MASS K-band, (ii) the A_K extinction, after transforming the reddening $E(B - V)$ derived from the 3D dust map of Green et al. (2018) using the relations from Bilir et al. (2008), and (iii) the distance modulus, with the distance being estimated by Bailer-Jones et al. (2018) after performing a Bayesian approach assuming geometric priors with the Gaia DR2 parallaxes, and taking into account the systematic parallax offsets determined from Gaia's observations of quasars (Lindgren et al. 2018; Zinn et al. 2017). The bolometric magnitude was then obtained by adding the bolometric correction to the absolute magnitude, derived by using the *isoclassify* package (Huber et al. 2017), which interpolates over the MIST tables (Choi et al. 2016). Once we had the stellar luminosity, L_\star , we combined it with our measured T_{eff} to finally derive the stellar radius, R_\star . We also estimated the stellar mass (M_\star) using our spectroscopically well-constrained $\log g$ obtained via an equivalent width spectroscopic technique, and our derived R_\star leveraging the precision achieved by using the Gaia parallax. The error in the derived effective temperature was calculated by changing this parameter until the coefficient correlation between the A(Fe I) and EP achieves the value of the slope uncertainty from the converged solution. The error for ξ was calculated in a similar way, but using the coefficient correlation between the A(Fe I) and $\log(\text{EW}/\lambda)$ instead. To estimate the uncertainties in $\log g$, we varied this parameter until the Fe I and Fe II mean abundances differed exactly by one standard deviation of the mean of A(Fe I). Finally, the [Fe/H] error was obtained by adding in quadrature the standard deviation of the mean A(Fe I) and the variations caused by the uncertainties in T_{eff} and $\log g$.

To compute the stellar radius and mass uncertainties, we performed an error propagation taking into account the error contributions of all the parameters involved. See Table 1 for the derived parameters of Kepler-59 and their corresponding uncertainties.

2.3 Planetary Radius

The planetary radius is not directly observed; rather, the transit depth, ΔF_p , is the observable from the light curve which is then related to the planet size. The last Data Release (DR15) from Kepler data showed transit depth values for Kepler-59 b and c of $\Delta F_b = 101.9^{+8.4}_{-8.4}$ ppm and $\Delta F_c = 213^{+12.2}_{-12.2}$ ppm (Thompson et al. 2018). Hence, we calculate the planetary radius R_p as those values obtained from considering that $\Delta F_p = (R_p/R_\star)^2$, obtaining $R_b = 1.5^{+0.1}_{-0.1} R_\oplus$ and $R_c = 2.2^{+0.1}_{-0.1} R_\oplus$. The uncertainties of the planetary radii were calculated from error propagation.

3 INVERSION METHOD

The inversion method applied to the Kepler-59 system uses the algorithm known as MultiNest (Feroz et al. 2009, 2013), which relies on the Bayes rule to infer the parameters of the planetary system that better fit the observations. This algorithm also calculates the evidence term of the Bayes rule, through a Nested Sampling routine, allowing us to select between different model parameters that fit the data. The planetary systems are simulated using the N-body dynamical integrator *Swift* (Levison & Duncan 1994), that accounts for the gravitational interactions between all the bodies in

Table 1. Stellar properties derived from spectroscopic analysis.

Parameter	Value	Reference
m_{K_s}	12.928	SO18
	12.928	T18
A_{K_s}	0.00794	SO18
BC	1.282	
$T_{eff}(K)$	6050^{+100}_{-100}	SO18
	6296^{+169}_{-207}	T18
	5884^{+118}_{-118}	Be18
	6074	M16
	6074	S13
$\log(g)$	6074	Ba13
	$4.3^{+0.02}_{-0.02}$	SO18
	$4.46^{+0.052}_{-0.221}$	T18
r [pc]	$4.350^{+0.091}_{-0.190}$	M16
	$1163.221^{+22.136}_{-21.339}$	SO18
	$1162.742^{+21.664}_{-20.943}$	B18
	$1203.573^{+23.094}_{-23.094}$	G18
	$1021.000^{+308.374}_{-127.418}$	M16
	$1021.000^{+308.374}_{-127.418}$	SO18
$[Fe/H]$ [dex]	$-0.13^{+0.1}_{-0.1}$	SO18
	$-0.26^{+0.25}_{-0.35}$	T18
	$0.0200^{+0.1410}_{-0.1690}$	M16
	$1.367^{+0.078}_{-0.078}$	SO18
	$1.006^{+0.312}_{-0.111}$	T18
$R_{\star}(R_{\odot})$	$1.373^{+0.064}_{-0.061}$	Be18
	$1.170^{+0.352}_{-0.139}$	M16
	0.94	S13
	0.94	Ba13
	$1.359^{+0.155}_{-0.155}$	SO18
$M_{\star}(M_{\odot})$	$1.066^{+0.143}_{-0.143}$	T18
	$1.120^{+0.106}_{-0.077}$	M16
	1.04	S13
	1.04	Ba13

The reference are: Ba13 for (Batalha et al. 2013), S13 for (Steffen et al. 2013), M16 for (Morton et al. 2016), Be18 for (Berger et al. 2018), G18 for (Gaia Collaboration et al. 2018), T28 for (Thompson et al. 2018) and SO18 for this work.

the system. The code is adapted to provide the mid-transit times of the planets (Nesvorný et al. 2013), and it generates transits for each system using the model from Mandel & Agol (2002). We choose to apply the inversion method to the mid-transit times, instead of the TTVs, because the Transit Timing Variations are nothing more than the mid-transit times minus a linear ephemerids that fit the mid-transit times. In this way the step to calculate the TTVs is left aside in the inversion method in order to not carry its associated uncertainties. Our combined code MultiNest+Swift is written in Fortran 90 and can be parallelized with Open MPI. For the two data sets analyzed in this work, i.e. mid-transit times of only Kepler-59c (Holczer et al. 2016), and mid-transit times of both Kepler-59b and c (Rowe et al. 2015), we assume planetary systems where the host star and only two planets are present. Table 2 shows the priors chosen for the 13 parameters use to perform the inversion analysis. The parameters are M_b/M_{\star} , M_c/M_{\star} , P_b , P_c , e_b , e_c , b_b , b_c , ϖ_b , ϖ_c , λ_b or δt_b , δt_c , and $\Omega_b - \Omega_c$. The use of λ_b or δt_b depends on whether the mid-transits times of planet b are available or not. The stellar parameters are input parameters of the algorithm, and are kept fixed during the inversion. The priors of the

Table 2. Prior distributions of our model, for the two data sets analyzed here. The intervals represent the minimum and maximum values of the uniform distributions for each planet (the sub-index p refers to any of the planets).

	Kepler-59c TTVs	Kepler-59b and c TTVs
M_p/M_{\star}	[0.0, 0.005]	[0.0, 0.005]
P_b (d)	[11.7, 11.9]	[11.7, 11.9]
P_c (d)	[17.7, 18.0]	[17.7, 18.0]
e_p	[0, 0.5]	[0, 0.5]
b_p	[0, 1]	[0, 1]
ϖ_p (°)	[0, 360]	[0, 360]
λ_b (°) - δt_b (d)	[0, 360]	[1, 1.2]
δt_c (d)	[0, 0.05]	[0, 0.02]
$\Omega_b - \Omega_c$ (°)	[0, 360]	[0, 360]

planetary periods are taken from the work of Steffen et al. (2013), which constraints period values of $P_b = 11.86$ days and $P_c = 17.9$ days. The impact parameters, b , of both transiting planets are obtained from the inversion method, and their priors range between 0 (central transit) and 1 (graze transit). The ration of planetary-to-stellar masses, M/M_{\star} , can take prior values ranging from 0 to $7.28 M_J$. The angular position of the orbits determined by ϖ , λ and Ω are describe in the referential where $\Omega_c = 270^\circ$, as in Nesvorný et al. (2012), and their priors range between 0 and 360° . We choose all priors to follow uniform distributions.

4 RESULTS

4.1 Kepler-59c TTVs

We apply our inversion method to the Kepler-59c TTV data from (Holczer et al. 2016). Holczer present the full list of 70 transits of this planet, and point out 9 transits as being outliers. Using the full data set, we found two possible solutions. The first one, hereafter S_1^H , was obtained with an evidence $\ln(Z)_{S_1^H} = 128.10$. The parameters provided by MultiNest are showed in the top of Table 3, and are referred as the dynamical fit parameters corresponding to the 13 parameters in Table 2. At the bottom of Table 3, we present the derived parameters for both planets: the planetary mass M_p in Earth mass units; the semi-major axis a_p in au; the orbital inclination with respect to the sky plane at transit, i_p ; the inclination of the orbit with respect to the transit plane, I_p (i.e. the plane where $b = 0$), and the mutual orbital inclination of the orbits, I_{mut} . The fit points to an inner planet in an orbit with a period of $P_b = 11.879^{+0.009}_{-0.007}$ days and a mass of $M_b = 7.11^{+3.0}_{-2.1} M_{\oplus}$, while the outer planet has an orbit with $P_c = 17.970^{+0.001}_{-0.002}$ days and a mass of $M_c = 20.9^{+13.6}_{-12.5} M_{\oplus}$. The eccentricities and mutual inclination of the planets indicate that they are in nearly circular, nearly coplanar orbits. The corresponding fit of this solution to Holczer's TTVs is shown in Figure 1. The second solution, hereafter S_2^H , has a value of evidence of $\ln(Z)_{S_2^H} = 128.56$. By comparing the values of $\ln(Z)$ between the two solutions, we are not able to prefer one solution over the other. Therefore, it is important to fully describe the solution S_2^H . The dynamical fit and derived parameters of this solution are shown in Table 4. We can see that the planetary periods are indistinguishable from those of solution S_1^H when considering their $1-\sigma$ confidence levels. This second solution shows again that the planets are close to a MMR, but the behavior of the planetary masses is opposite to that of solution S_1^H . The estimated masses

4 *Saad-Olivera et al.*

Table 3. Parameters estimated by solution 1 (S_1^H) from [Holczer et al. \(2016\)](#). The orbital parameters are the osculating astrometric elements at epoch BJD 2 455 052. The upper block are the mean values and the error bars reported from the dynamical fit parameters, at the standard 68.34% confidence level. The lower block reports the derived parameters.

	Kepler-59b	Kepler-59c
Dynamical fit		
$M_P/M_\star (\times 10^{-3})$	$0.15^{+0.06}_{-0.04}$	$0.4^{+0.3}_{-0.2}$
P_P (d)	$11.879^{+0.009}_{-0.007}$	$17.970^{+0.001}_{-0.002}$
e_P	$0.03^{+0.03}_{-0.02}$	$0.02^{+0.02}_{-0.01}$
b_P	$0.4^{+0.3}_{-0.2}$	$0.5^{+0.3}_{-0.3}$
ϖ_P ($^\circ$)	209^{+109}_{-172}	74^{+65}_{-150}
λ_P ($^\circ$)	113^{+177}_{-47}	–
Ω_P ($^\circ$)	272^{+117}_{-121}	270
δt_c (d)	–	$0.0206^{+0.007}_{-0.007}$
Derived parameters		
$M_P (M_\oplus)$	7^{+3}_{-2}	20^{+13}_{-12}
a_P (au)	$0.112^{+0.002}_{-0.002}$	$0.148^{+0.002}_{-0.002}$
i_P ($^\circ$)	$88.6^{+1.0}_{-0.8}$	$88.7^{+0.7}_{-0.7}$
I_P ($^\circ$)	$1.3^{+1.0}_{-0.8}$	$1.2^{+0.7}_{-0.7}$
I_{mut} ($^\circ$)	–	$0.12^{+0.0}_{-0.0}$
$R_P (R_\oplus)$	$1.5^{+0.1}_{-0.1}$	$2.2^{+0.1}_{-0.1}$
ρ_P (g cm^{-3})	11^{+4}_{-5}	11^{+7}_{-9}

Table 4. Parameters estimated by solution 2 (S_2^H) from [Holczer et al. \(2016\)](#). See Table 3 for explanation.

	Kepler-59b	Kepler-59c
Dynamical fit		
$M_P/M_\star (\times 10^{-3})$	$0.07^{+0.01}_{-0.01}$	$0.05^{+0.03}_{-0.02}$
P_P (d)	$11.869^{+0.003}_{-0.002}$	$17.969^{+0.002}_{-0.002}$
e_P	$0.07^{+0.02}_{-0.02}$	$0.04^{+0.02}_{-0.02}$
b_P	$0.4^{+0.3}_{-0.2}$	$0.5^{+0.3}_{-0.3}$
ϖ_P ($^\circ$)	296^{+115}_{-73}	65^{+70}_{-124}
λ_P ($^\circ$)	155^{+163}_{-76}	–
Ω_P ($^\circ$)	271^{+117}_{-115}	270
δt (d)	–	$0.027^{+0.007}_{-0.007}$
Derived parameters		
$M_P (M_\oplus)$	$3.5^{+0.6}_{-0.7}$	2^{+1}_{-1}
a_P (au)	$0.112^{+0.002}_{-0.002}$	$0.148^{+0.002}_{-0.002}$
i_P ($^\circ$)	$88.9^{+0.0}_{-0.0}$	$89.1^{+0.0}_{-0.0}$
I_P ($^\circ$)	$1.01^{+0.0}_{-0.0}$	$0.85^{+0.0}_{-0.0}$
I_{mut} ($^\circ$)	–	$0.153^{+0.0}_{-0.0}$
$R_P (R_\oplus)$	$1.5^{+0.1}_{-0.1}$	$2.2^{+0.1}_{-0.1}$
ρ_P (g cm^{-3})	$5.6^{+1.0}_{-1.7}$	$1.1^{+0.7}_{-0.9}$

are $M_b = 3.5^{+0.6}_{-0.7} M_\oplus$ and $M_c = 2.1^{+1.4}_{-1.2} M_\oplus$, hence Kepler-59b appears to be more massive than Kepler-59c. The eccentricities do not show significant differences with respect to the first solution. The same happens to the inclinations of the system. The fit of this second solution to the Holczer’s TTVs is shown in Figure 1.

Regarding the periods of both solutions, we can see that the

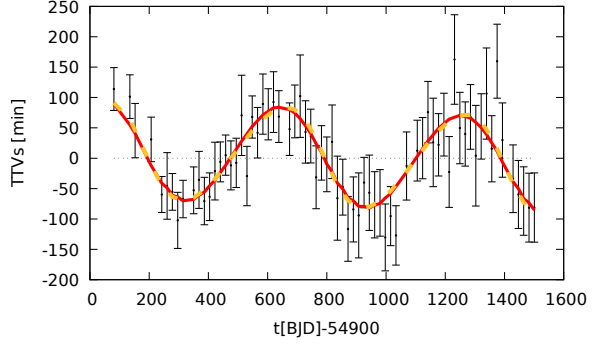


Figure 1. TTVs reported by [Holczer et al. \(2016\)](#) (black dots with error bars). The best fit of solution S_1^H (see Table 3) is shown in red, and the best-fit of S_2^H (see Table 4) is shown in orange.

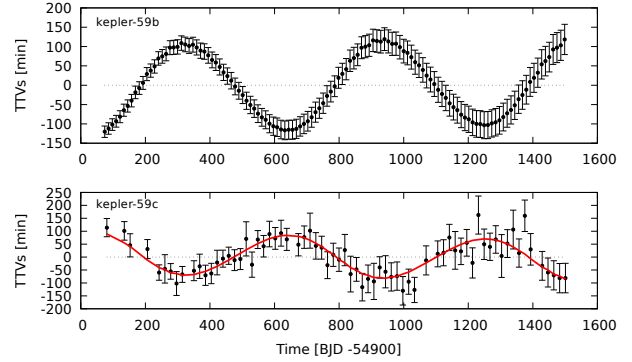


Figure 2. TTVs of planets Kepler-59b and c. The top panel shows the TTVs of planet b generated by the solution S_1^H . The bottom panel shows the TTVs from Holczer’s data, together with the best fit solution S_1^H (red line).

perturbation over planet c is produced by a planet in an $11.879^{+0.009}_{-0.007}$ days orbit, or in an $11.869^{+0.003}_{-0.002}$. If we compare these values to the period of planet b obtained from its transits ([Steffen et al. 2013](#)), we get $P_b = 11.8681^{0.0003}_{0.0003}$ days, and we verify that the values are indistinguishable within the $1-\sigma$ uncertainties. This would mean that the inner perturber corresponds to an actual planet in that position.

From the two solutions, we can generate the mid-transit times of planet b and thus the TTVs that such planet would be displaying. At the top panel of Figure 2, we show the TTVs of planet b that are expected from S_1^H . The TTVs of planet c, and the corresponding S_1^H best-fit, are shown in the bottom panel. This first solution implies an inner planet that displays a large TTV amplitude. At the top panel of Figure 3, we show the TTVs of planet b that are expected from solution S_2^H (the TTVs and the S_2^H best-fit of planet c are shown in the bottom panel). This second solution implies that the perturbation that planet c produces over planet b generates a TTV signal with lower amplitude when compared to that of the first solution. This is reflected in the masses of both planets. When close to a mean motion resonance (as we discuss below), the lower the mass of the planet, the lower the perturbation over the companion, and vice-versa.

Finally, we also apply the inversion method to the data, but this

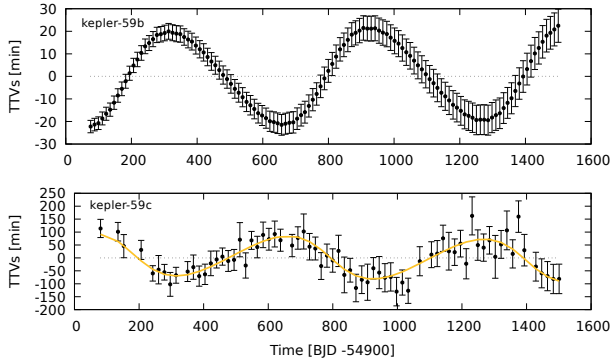


Figure 3. TTVs of planets Kepler-59 b and c. The top panel shows the TTVs of planet b generated by the solution S_2^H . The bottom panel shows the TTVs from Holczer's data, together with the best fit solution S_2^H (orange line).

time taking out the 9 outliers pointed out by Holczer. Once again, we find two solutions. We do not show them because they are comparable to the solutions S_1^H and S_2^H within the $1-\sigma$ uncertainties.

4.1.1 TTVs periodicity

Defining the planetary period ratio of both solutions to be P_c/P_b , we obtain values of ~ 1.51 , which point to orbits barely outside of the 3:2 mean motion resonance (MMR). Lithwick et al. (2012) showed that systems close to first order MMR ($\equiv j : j-1$) exhibit sinusoidal TTVs signals, and that the libration period of the signal, referred to as “super-period”, is inversely proportional to the distance to the resonance. This is expressed as

$$P^j \equiv \left| \frac{j}{P_c} - \frac{j-1}{P_b} \right|^{-1} \quad (1)$$

The super-periods of both solutions found here are

$$P_{S_1^H} = 704.5 \text{ d} \quad \text{and} \quad P_{S_2^H} = 644.3 \text{ d} \quad (2)$$

To recognize the super-period in the data, we use the Lomb-Scargle periodogram (VanderPlas & Ivezić 2015). The maximum power identified for planet c from Holczer data is around 600 days. In Figure 4, we show the periodogram applied to the Kepler-59c data from Holczer's catalogue, and applied to the same planet from the solutions S_1^H and S_2^H . Superimposed in the plot are the analytic super-periods calculated before.

4.2 Kepler-59b and Kepler-59c TTVs

Rowe et al. (2015) present TTVs for both planets, Kepler-59 b and c, obtained from quarters Q1 to Q12 of the Kepler mission. The data of planet c analyzed by Rowe and by Holczer are the same, and they have more or less the same amount of transits. In the case of planet b, Holczer does not provide any data.

We apply the inversion method as explained above to the Rowe data, simultaneously fitting the TTV signals of both planets. As expected, `MultiNest` converge giving higher values of the evidence $\ln(Z)$ in comparison to the solutions fitting only one planet. Again, our results give two possible solutions for the planetary system.

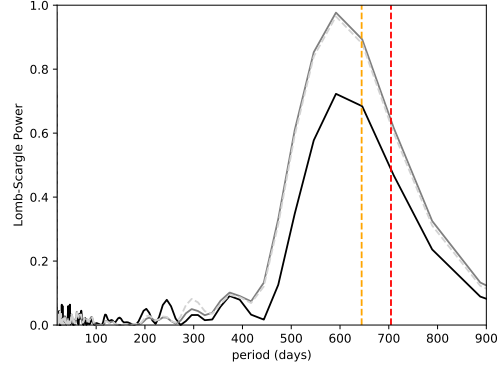


Figure 4. Power spectrum period of Holczer's data for Kepler-59c (black full line), for the solution S_1^H (grey full line), and for the solution S_2^H (light grey dashed line). The vertical dashed lines are the analytic super-period estimates for both solutions (red line for S_1^H and orange line for S_2^H).

Table 5. Parameters estimated by solution 1 (S_1^R) from Rowe et al. (2015). The orbital parameters are the osculating astrometric elements at epoch BJD 2 455 052. The upper block are the mean values and the error bars reported from the dynamical fit parameters, at the standard 68.34% confidence level. The lower block reports the derived parameters.

	Kepler-59b	Kepler-59c
Dynamical fit		
$M_p/M_\star (\times 10^{-3})$	$0.11^{+0.08}_{-0.04}$	$0.10^{+0.08}_{-0.04}$
P_p (d)	$11.8715^{+0.0005}_{-0.0005}$	$17.9742^{+0.0013}_{-0.0009}$
e_p	$0.05^{+0.09}_{-0.03}$	$0.05^{+0.08}_{-0.03}$
b_p	$0.5^{+0.3}_{-0.3}$	$0.5^{+0.3}_{-0.3}$
ϖ_p ($^\circ$)	309^{+148}_{-86}	21^{+57}_{-62}
Ω_p ($^\circ$)	273^{+109}_{-106}	270
δt (d)	$1.079^{+0.008}_{-0.008}$	$0.004^{+0.004}_{-0.002}$
Derived parameters		
M_p (M_\oplus)	5^{+4}_{-2}	$4.6^{+3.6}_{-2.0}$
a_p (au)	$0.112^{+0.002}_{-0.002}$	$0.148^{+0.002}_{-0.002}$
i_p ($^\circ$)	$88.4^{+0.0}_{-0.0}$	$88.3^{+0.0}_{-0.0}$
I_p ($^\circ$)	$1.6^{+0.0}_{-0.0}$	$1.6^{+0.0}_{-0.0}$
I_{mut} ($^\circ$)	–	$0.102^{+0.0}_{-0.0}$
R_p (R_\oplus)	$1.5^{+0.1}_{-0.1}$	$2.2^{+0.1}_{-0.1}$
ρ_p (g cm^{-3})	8^{+6}_{-4}	$2.4^{+2}_{-1.5}$

4.2.1 TTVs periodicity

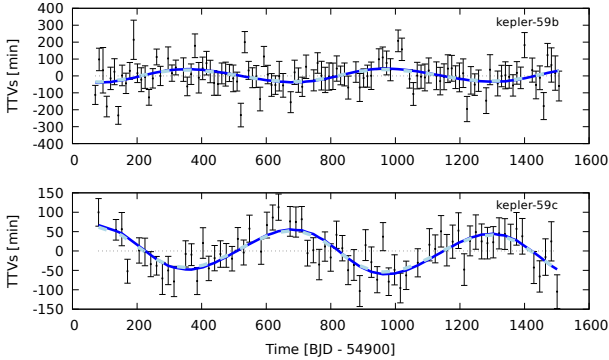
We calculate the super-periods for the Rowe's data solutions, S_1^R and S_2^R , following Eq. (1):

$$P_{S_1^R} = 639.0 \text{ d} \quad \text{and} \quad P_{S_2^R} = 640.3 \text{ d} \quad (3)$$

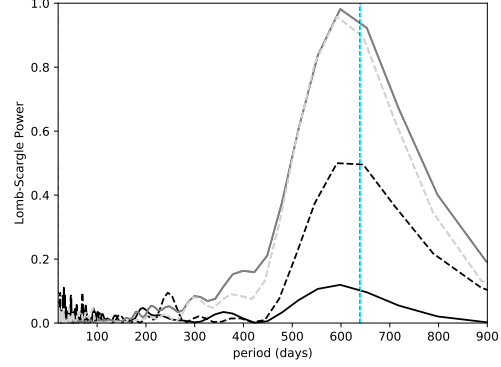
Then, we apply the Lomb-Scargle periodogram (VanderPlas & Ivezić 2015) to the signals produced by the two solutions and to the data. The maximum power identified on Rowe's data is around 590 days for planet b and 610 days for planet c. In Figure 6, we show the periodogram applied to Rowe's data as black lines, and that applied to S_1^H and S_2^H as grey lines. Superimposed are the super-periods calculated analytically.

6 *Saad-Olivera et al.***Table 6.** Parameters estimated by solution 2 (S_2^R) from Rowe et al. (2015). See Table 3 for explanation.

	Kepler-59b	Kepler-59c
Dynamical fit		
M_p/M_\star ($\times 10^{-3}$)	$0.07^{+0.01}_{-0.01}$	$0.06^{+0.02}_{-0.02}$
P_p (d)	$11.8714^{+0.0004}_{-0.0004}$	$17.9737^{+0.0008}_{-0.0008}$
e_p	$0.09^{+0.09}_{-0.05}$	$0.09^{+0.08}_{-0.05}$
b_p	$0.5^{+0.3}_{-0.3}$	$0.5^{+0.3}_{-0.3}$
ϖ_p ($^\circ$)	301^{+150}_{-69}	29^{+51}_{-89}
Ω_p ($^\circ$)	271^{+110}_{-112}	270
δt (d)	$1.079^{+0.008}_{-0.008}$	$0.004^{+0.005}_{-0.003}$
Derived parameters		
M_p (M_\oplus)	$3.0^{+0.8}_{-0.8}$	$2.6^{+0.9}_{-0.8}$
a_p (au)	$0.112^{+0.002}_{-0.002}$	$0.148^{+0.002}_{-0.002}$
i_p ($^\circ$)	$88.4^{+0.}_{-0.}$	$88.8^{+0.}_{-0.}$
I_p ($^\circ$)	$1.63^{+0.}_{-0.}$	$1.66^{+0.}_{-0.}$
I_{mut} ($^\circ$)	–	0.04^{+}_{-}
R_p (R_\oplus)	$1.5^{+0.1}_{-0.1}$	$2.2^{+0.1}_{-0.1}$
ρ_p (g cm^{-3})	$4.9^{+1.3}_{-1.9}$	$1.4^{+0.5}_{-0.6}$

**Figure 5.** TTVs reported by Rowe et al. (2015) (black dots with error bars). The best fit of solution S_1^R is shown in blue, and the best-fit of S_2^R is shown in cyan.**4.3 Planetary densities**

The densities of the Kepler-59 planets are calculated considering the masses obtained from solutions S_1^H , S_2^H , S_1^R and S_2^R , together with the planetary radii calculated in Section 2. We present the inferred planetary radii and densities in Tables 3, 4, 5 and 6. The two solutions for each data set are represented in a diagram of planetary mass vs. planetary radius, shown in Figure 7. The diagram includes single composition lines taken from a two-layer mass-radius planetary model by Zeng et al. (2016). The solutions from Holczer's data, S_1^H , are displayed as triangles, and those from Rowe's data, S_1^R , are displayed as squares. The inner planet (red triangle for S_1^H and orange square for S_2^H) is located in the region where planetary composition is purely rocky. This fact is consistent with previous results that showed that the densities of planets with radii smaller than $\sim 1.6 R_\oplus$ are generally consistent with a purely rocky composition. On the other hand, most planets larger than $1.6 R_\oplus$ have low weighted mean densities that are inconsistent with

**Figure 6.** Power spectrum period of Kepler-59b (black full line), Kepler-59c (black dashed line), solution S_1^R (grey full line for planet b and grey dashed line for planet c), and solution S_2^R (light grey full line for planet b and light grey dashed line for planet c). Both solutions have similar periodograms for each planet. The dashed vertical lines are the analytic super-period estimates of both solutions (blue line for S_1^R and cyan line for S_2^R).

a rocky composition, and the decrease in density must be due to an increasing fraction of volatiles, with the secure presence of gaseous H/He envelopes (Seager et al. 2007; Rogers 2015). The solutions S_2^H , S_1^R and S_2^R are in agreement with these studies. The mechanism that is proposed to explain why planets in the same system and close to the host star may have so different compositions is the photo-evaporation due to X-ray and ultraviolet radiation. These processes are more common during the early stages of the star formation, and may remove the light molecular weight envelopes of planets. The relationship between planetary mass, surface gravity, irradiation by the host star, and orbital period/semi-major axis can produce distinct populations of rocky planets as well as more massive planets that retain their envelopes (Owen & Wu 2017; Jin & Mordasini 2018). The solution S_1^H does not show the presence of any envelope around the planet.

Chen & Kipping (2017) developed a new power law model for the mass-radius relation of exoplanets, considering three and four different types of objects: Terran, Neptunian, Jovian and Stellar worlds². Their model uses the hierarchical Bayes theory to obtain the radius giving the mass, or vice-versa, using hyper-priors. We apply the open code `forecaster` that follows that model, and obtained that the planetary masses provided by solution S_1^H produce the following radii: $R_b = 2.77^{+0.98}_{-1.13} R_\oplus$ and $R_c = 4.37^{+2.13}_{-2.38} R_\oplus$. For the masses provided by solution S_2^H , the planetary radii are: $R_b = 1.70^{+0.44}_{-0.73} R_\oplus$ and $R_c = 1.21^{+0.30}_{-0.69} R_\oplus$. We can see that, for each solution, the value of R_b is fully compatible to the value inferred in our work, within the $1-\sigma$ errors. For solution S_1^H , the value of R_c is also compatible to our value within $1-\sigma$, but for solution S_2^H the values are only comparable within $2-\sigma$ errors. Applying the same procedure to the masses provided by solutions S_1^R and S_2^R ,

² Terran worlds may have oceans, ices, and/or atmospheres, but don't have a H/He envelope around them. These recall the inner planets in our Solar System. Neptunian worlds are dominated by a large atmosphere of hydrogen, helium, and other atoms/molecules that are easily boiled-off. They may have rocky interiors, but they obey a different mass/radius relationship than the Terran worlds. These planets recall Saturn, Uranus and Neptune.

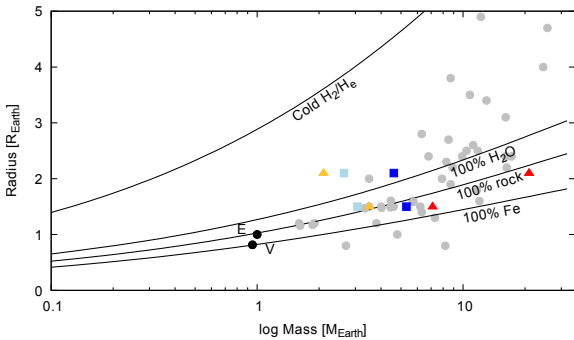


Figure 7. Mass-radius relationship for the two pairs of solutions found in this work. Solutions from Holczer’s data are shown as triangles, $R_p \sim 2.2 R_\oplus$ for planet c, and $R_p \sim 1.5 R_\oplus$ for planet b: S_1^H is shown in red and S_2^H in orange. Solutions from Rowe’s data are shown as squares, $R_p \sim 2.2 R_\oplus$ for planet c, and $R_p \sim 1.5 R_\oplus$ for planet b: S_1^R is shown in blue and S_2^R in cyan. Solid lines represent the theoretical two-layer mass-radius models from Zeng et al. (2016), assuming single composition. For comparison, planets with well known masses and radii are shown as grey dots (Hadden & Lithwick 2017), and Venus and the Earth are shown as black dots.

the code gives radii of $R_b = 2.22^{+1.30}_{-1.11} R_\oplus$, $R_c = 1.79^{+1.46}_{-0.61} R_\oplus$, $R_b = 1.51^{+0.70}_{-0.30} R_\oplus$ and $R_c = 1.45^{+0.55}_{-0.37} R_\oplus$, respectively. In this case, for each solution R_b is compatible to our value within $1-\sigma$, while R_c is compatible within $2-\sigma$. Unfortunately, this analysis does not give any information on whether any solution S_1^H , S_2^H , S_1^R or S_2^R should be preferred over the others.

4.4 Dynamical stability

We performed an analysis of the stability of the Kepler-59 system by means of long term N-body simulations and the construction of stability maps. The simulations have been carried out using the module *Helio*, available as part of the *Swifter* integration package (Levison & Duncan 1994; Kaufmann & Levison, <http://www.boulder.swri.edu/swifter/>). The simulations involve a system of two planets around the star, and use the nominal values of the orbital elements and masses of the four solutions found here as initial conditions. The total time span was 10^8 yr, with a time step of 0.1 days. The evolution of the orbital elements of the planets indicate that the system is stable over the whole time span, no matters which solution is chosen.

We have also constructed dynamical maps to assess the stability of the system in the m_b , m_c parameters space. We followed the evolution of a uniform grid of 64×64 initial conditions, covering the mass ranges provided by the errors of solution S_1^H , which shows the largest range of masses among the four solutions. For these simulations, we apply a modified version of the *Swifter Helio* module, translated into CUDA-C to run on a GPU architecture (Costa de Souza et al., in preparation). This code computes several stability/chaos indicators along the simulations, which are then translated into a color scale to construct the maps. We found, once more, that the system is stable along the whole range of tested masses.

5 CONCLUSIONS

In this work, we have characterized the masses and radii of the star and planets in the Kepler-59 system, as well as their orbital parameters. Our methodology was based on the inversion of TTVs signals applying a Bayesian inference tool to determine model parameters.

We have considered two different sets of TTV data: one set provided by Holczer et al. (2016), with TTVs only for Kepler-59c, and the other set provided by Rowe et al. (2015), with TTVs for both Kepler-59b and c. For each of the data sets, we found two possible solutions having the same probability according to their Bayesian evidences. All the four solutions appear to be indistinguishable within their $2-\sigma$ uncertainties, but the solutions from Rowe’s data display larger values of the evidences, due to the use of transit information from the two planets.

Our results point to a system with a super-Earth in an inner orbit and a mini-Neptune in an outer orbit. The planets lie in almost co-planar, almost circular orbits ($e < 0.1$). Their periods ratio put them close to the outer border of the mutual 3:2 mean motion resonance, but not inside this resonance. Stability analysis indicate that this configuration is stable over the long term.

The derived densities of the planets imply that the innermost one is a rocky core that would have lost its envelope of H/He due to photo-evaporation caused by the proximity to the star. The outer planet, on the other hand, may still retain an envelope of light elements and volatiles.

ACKNOWLEDGEMENTS

The simulations have been performed at the SDumont cluster of the Brazilian System of High Performance Computing (SINAPAD). This work has been supported by the Brazilian National Council of Research (CNPq), by the Brazilian Federal Agency for Support and Assessment of Postgraduate Education (CAPES), and by NASA’s XRP Program.

REFERENCES

- Agol E., Steffen J., Sari R., Clarkson W., 2005, *MNRAS*, **359**, 567
 Asplund M., Grevesse N., Sauval A. J., Scott P., 2009, *ARA&A*, **47**, 481
 Bailer-Jones C. A. L., Rybizki J., Foesneau M., Mantelet G., Andrae R., 2018, preprint, ([arXiv:1804.10121](https://arxiv.org/abs/1804.10121))
 Batalha N. M., et al., 2013, *ApJS*, **204**, 24
 Berger T. A., Huber D., Gaidos E., van Saders J. L., 2018, preprint, ([arXiv:1805.00231](https://arxiv.org/abs/1805.00231))
 Bilir S., Ak S., Karaali S., Cabrera-Lavers A., Chonis T. S., Gaskell C. M., 2008, *MNRAS*, **384**, 1178
 Borucki W. J., et al., 2011, *ApJ*, **736**, 19
 Castelli F., Kurucz R. L., 2004, *A&A*, **419**, 725
 Chen J., Kipping D., 2017, *The Astrophysical Journal*, **834**, 17
 Choi J., Dotter A., Conroy C., Cantiello M., Paxton B., Johnson B. D., 2016, *ApJ*, **823**, 102
 Feroz F., Hobson M. P., Bridges M., 2009, *MNRAS*, **398**, 1601
 Feroz F., Hobson M. P., Cameron E., Pettitt A. N., 2013, preprint, ([arXiv:1306.2144](https://arxiv.org/abs/1306.2144))
 Fressin F., et al., 2013, *The Astrophysical Journal*, **766**, 81
 Gaia Collaboration et al., 2018, *A&A*, **616**, A1
 Ghezzi L., Montet B. T., Johnson J. A., 2018, *ApJ*, **860**, 109
 Green G. M., et al., 2018, *MNRAS*, **478**, 651
 Hadden S., Lithwick Y., 2017, *The Astronomical Journal*, **154**, 5
 Holczer T., et al., 2016, *ApJS*, **225**, 9
 Holman M. J., Murray N. W., 2005, *Science*, **307**, 1288
 Huber D., et al., 2017, *ApJ*, **844**, 102

8 *Saad-Olivera et al.*

- Jin S., Mordasini C., 2018, *The Astrophysical Journal*, 853, 163
- Johnson J. A., et al., 2017, *AJ*, 154, 108
- Levison H. F., Duncan M. J., 1994, *Icarus*, 108, 18
- Lindegren L., et al., 2018, preprint, ([arXiv:1804.09366](https://arxiv.org/abs/1804.09366))
- Lithwick Y., Xie J., Wu Y., 2012, *ApJ*, 761, 122
- Mandel K., Agol E., 2002, *ApJ*, 580, L171
- Morton T. D., Bryson S. T., Coughlin J. L., Rowe J. F., Ravichandran G., Petigura E. A., Haas M. R., Batalha N. M., 2016, *ApJ*, 822, 86
- Nesvorný D., Kipping D. M., Buchhave L. A., Bakos G. Á., Hartman J., Schmitt A. R., 2012, *Science*, 336, 1133
- Nesvorný D., Kipping D., Terrell D., Hartman J., Bakos G. Á., Buchhave L. A., 2013, *ApJ*, 777, 3
- Owen J. E., Wu Y., 2017, *The Astrophysical Journal*, 847, 29
- Petigura E. A., Howard A. W., Marcy G. W., 2013, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 110, 19273
- Petigura E. A., et al., 2017, *AJ*, 154, 107
- Rogers L. A., 2015, *The Astrophysical Journal*, 801, 41
- Rowe J. F., et al., 2015, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 217, 16
- Seager S., Kuchner M., Hier-Majumder C. A., Militzer B., 2007, *The Astrophysical Journal*, 669, 1279
- Silburt A., Gaidos E., Wu Y., 2015, *The Astrophysical Journal*, 799, 180
- Snedden C. A., 1973, PhD thesis, The University of Texas at Austin
- Steffen J. H., et al., 2013, *MNRAS*, 428, 1077
- Thompson S. E., et al., 2018, *ApJS*, 235, 38
- VanderPlas J. T., Ivezić Ž., 2015, *ApJ*, 812, 18
- Vogt S. S., et al., 1994, in Crawford D. L., Craine E. R., eds, *Proc. SPIE Vol. 2198, Instrumentation in Astronomy VIII*. p. 362, [doi:10.1117/12.176725](https://doi.org/10.1117/12.176725)
- Zeng L., Sasselov D. D., Jacobsen S. B., 2016, *The Astrophysical Journal*, 819, 127
- Zinn J. C., Huber D., Pinsonneault M. H., Stello D., 2017, *The Astrophysical Journal*, 844, 166

This paper has been typeset from a $\text{\TeX}/\text{\LaTeX}$ file prepared by the author.

6 Conclusões

O objetivo desta tese foi trabalhar com ferramentas para a análise de TTVs e aplicá-las a sistemas Kepler a fim de aprimorar a caracterização dos parâmetros planetários de tais sistemas. A amostra estudada nesta tese contém três sistemas planetários, detectados pelo telescópio espacial Kepler, constituídos por dois planetas com períodos no sinal de TTVs maior que 100 dias. Em dois dos sistemas um planeta transita e outro não, enquanto que no terceiro sistema estudado ambos planetas transitam a estrela.

A metodologia adotada consistiu na utilização do código `TModel`, programado pelos Dr. D. Nesvorný e Dr. D. Kipping, modificado quando necessário para a incorporação de diferentes conjuntos de parâmetros a serem caracterizados.

A metodologia aplicada no sistema Kepler-46 forneceu uma solução única, onde se encontram pelo menos dois planetas gigantes em órbitas de ~ 33 dias e ~ 57 dias, caracterizando-os como Júpiteres mornos. Ambos os planetas se encontram em órbitas quase coplanares ($I_{\text{mut}} \sim 0,4$) e quase circulares ($e \sim 0,03$). A relação dos seus períodos mostra que a configuração encontra-se próxima da RMM 5:3.

No caso do sistema Kepler-419, a análise dos tempos centrais de trânsito do planeta que transita forneceu uma solução única, identificando um sistema de dois planetas gigantes em órbitas de ~ 69 dias e ~ 694 dias, caracterizando-os como um Júpiter morno e um frio. Os planetas se encontram em órbitas quase coplanares ($I_{\text{mut}} \sim 0,4$), mas o mais interno apresenta uma órbita com muito alta excentricidade ($e_b \sim 0,8$), enquanto que o mais externo apresenta uma órbita moderadamente excêntrica ($e_c \sim 0,1$). A relação de seus períodos mostra que a configuração encontra-se próxima da RMM 10:1.

O último sistema estudado, Kepler-59, com dois planetas que transitam, não apresentou uma solução única, devido à pequena razão S/N de um dos planetas. No entanto, as duas soluções obtidas colocam no sistema uma super-Terra e um sub-Netuno, em órbitas de $\sim 11,8$ dias e $\sim 17,9$ dias, respectivamente. Ambos planetas possuem órbitas quase coplanares ($I_{\text{mut}} \sim 0,1$) e quase circulares ($e < 0,09$). A relação de seus períodos mostra que a configuração encontra-se perto da RMM 3:2. Os resultados também indicam que a super-Terra tem uma superfície rochosa enquanto que para o sub-Netuno, se tiver uma superfície rochosa, a mesma se encontraria coberta por uma camada de gelo e vapor de água. Isto está em concordância com resultados recentes que mostram que a foto-evaporação, provocada pela estrela, em um planeta muito próximo, neste caso a super-Terra, seria a responsável por deixar um núcleo rochoso sem atmosfera. Por outro lado, o corpo mais afastado não se veria afetado por este processo, mantendo assim a sua atmosfera.

Dos três artigos desenvolvidos, conclui-se que a técnica de análise de tempos centrais de trânsito aqui utilizada consegue caracterizar completamente e, em geral, univocamente os parâmetros orbitais ($a, e, i, \varpi, \lambda, \Omega$) e físicos (M_p/M_\star) dos planetas do sistema, sempre que as observações dos TTVs tenham uma relação S/N suficientemente alta. O algoritmo `TModel` identifica que, nos casos de sistemas com dois planetas em que estão disponíveis observações de trânsitos de ambos planetas,

as soluções encontradas são probabilisticamente mais certas do que nos casos em que apenas os trânsitos de um planeta estão disponíveis. Porém, as soluções encontradas em ambos os casos diferem dentro de um intervalo de apenas 2σ .

Adicionalmente, estes sistemas encontram-se próximos de alguma RMM, o que contribui a confirmar os modelos de formação planetária e a posterior migração dos planetas.

Cabe destacar que este foi o primeiro estudo na literatura a analisar sistemas de dois planetas e obter as massas de ambos planetas utilizando somente o método de inversão dos tempos centrais de trânsito. A partir da metodologia utilizada nos trabalhos que constituem esta tese de doutorado, inúmeros trabalhos futuros podem ser desenvolvidos. Algumas propostas já se encontram em desenvolvimento, como por exemplo:

- A inclusão do método Downhill-Simplex (programado em MPI) para a busca de parâmetros que minimizam o χ^2 dos tempos centrais de trânsito, visando reduzir o tempo de busca do MultiNest no espaço paramétrico.
- A aplicação do TModel em sistemas TESS. Estes são sistemas planetários monitorados com o telescópio TESS (do inglês, *Transiting Exoplanet Survey Satellite*, [Ricker et al., 2016](#)), posicionado em uma órbita ao redor da Terra e em funcionamento desde Agosto de 2018. A missão tem como objetivo a descoberta de planetas tipo Terra e super-Terras ao redor de ~ 500.000 estrelas. Até o momento, TESS tem conseguido confirmar 25 novos planetas, alguns deles apresentando sinais de TTVs (e.g. [Kipping et al. \(2019\)](#))
- A aplicação do TModel em planetas com dados de TTVs de KOIs ainda não confirmados. Estes sistemas contam com TTVs de somente um planeta e não é conhecida a origem das variações.
- A modificação o método de inversão de tempos centrais de trânsito para criar um método foto-dinâmico capaz de resolver ambas partes do método simultaneamente. Desta forma, se reduz a quantidade de parâmetros a serem ajustados, enquanto que, ao mesmo tempo, a determinação dos parâmetros deve obedecer à dinâmica do sistema planetário, além de satisfazer as observações de trânsitos.

Referências

- Agol, E., Steffen, J., Sari, R., & Clarkson, W. 2005, *MNRAS*, 359, 567, doi: [10.1111/j.1365-2966.2005.08922.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2005.08922.x)
- Almenara, J. M., Díaz, R. F., Hébrard, G., et al. 2018, ArXiv e-prints. <https://arxiv.org/abs/1804.01869>
- Bai, X.-N., & Stone, J. M. 2010, *ApJS*, 190, 297, doi: [10.1088/0067-0049/190/2/297](https://doi.org/10.1088/0067-0049/190/2/297)
- Ballard, S., & Johnson, J. A. 2016, *ApJ*, 816, 66, doi: [10.3847/0004-637X/816/2/66](https://doi.org/10.3847/0004-637X/816/2/66)
- Baruteau, C., & Masset, F. 2013, in *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, Vol. 861, *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, ed. J. Souchay, S. Mathis, & T. Tokieda, 201
- Batalha, N. M., Borucki, W. J., Koch, D. G., et al. 2010, *ApJ*, 713, L109, doi: [10.1088/2041-8205/713/2/L109](https://doi.org/10.1088/2041-8205/713/2/L109)
- Bennett, D. P. 2008, *Detection of Extrasolar Planets by Gravitational Microlensing*, ed. J. W. Mason, 47
- Borucki, W. J., Koch, D., Basri, G., et al. 2010, *Science*, 327, 977, doi: [10.1126/science.1185402](https://doi.org/10.1126/science.1185402)
- Borucki, W. J., Koch, D. G., Basri, G., et al. 2011, *ApJ*, 736, 19, doi: [10.1088/0004-637X/736/1/19](https://doi.org/10.1088/0004-637X/736/1/19)
- Buchhave, L. A., Latham, D. W., Johansen, A., et al. 2012, *Nature*, 486, 375, doi: [10.1038/nature11121](https://doi.org/10.1038/nature11121)
- Butler, R. P., Marcy, G. W., Vogt, S. S., et al. 2003, *ApJ*, 582, 455, doi: [10.1086/344570](https://doi.org/10.1086/344570)
- Campbell, B., Walker, G. A. H., & Yang, S. 1988, *ApJ*, 331, 902, doi: [10.1086/166608](https://doi.org/10.1086/166608)
- Chaplin, W. J., Sanchis-Ojeda, R., Campante, T. L., et al. 2013, *ApJ*, 766, 101, doi: [10.1088/0004-637X/766/2/101](https://doi.org/10.1088/0004-637X/766/2/101)
- Claret, A. 2000, *A&A*, 363, 1081
- Claret, A. 2004, *A&A*, 428, 1001, doi: [10.1051/0004-6361:20041673](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20041673)
- Damiani, C., & Lanza, A. F. 2011, *A&A*, 535, A116, doi: [10.1051/0004-6361/201117207](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201117207)
- Dawson, R. I., Johnson, J. A., Morton, T. D., et al. 2012, *ApJ*, 761, 163, doi: [10.1088/0004-637X/761/2/163](https://doi.org/10.1088/0004-637X/761/2/163)
- Dawson, R. I., Johnson, J. A., Fabrycky, D. C., et al. 2014, *ApJ*, 791, 89, doi: [10.1088/0004-637X/791/2/89](https://doi.org/10.1088/0004-637X/791/2/89)
- Deck, K. M., & Agol, E. 2016, *ApJ*, 821, 96, doi: [10.3847/0004-637X/821/2/96](https://doi.org/10.3847/0004-637X/821/2/96)
- Eggenberger, A., & Udry, S. 2010, in *EAS Publications Series*, Vol. 41, *EAS Publications Series*, ed. T. Montmerle, D. Ehrenreich, & A.-M. Lagrange, 27–75
- Fabrycky, D., & Tremaine, S. 2007, *ApJ*, 669, 1298, doi: [10.1086/521702](https://doi.org/10.1086/521702)
- Fabrycky, D. C., Lissauer, J. J., Ragozzine, D., et al. 2014, *ApJ*, 790, 146, doi: [10.1088/0004-637X/790/2/146](https://doi.org/10.1088/0004-637X/790/2/146)
- Fang, J., & Margot, J.-L. 2012, *ApJ*, 761, 92, doi: [10.1088/0004-637X/761/2/92](https://doi.org/10.1088/0004-637X/761/2/92)
- Feroz, F., & Hobson, M. P. 2008, *MNRAS*, 384, 449, doi: [10.1111/j.1365-2966.2007.12353.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2007.12353.x)
- Feroz, F., Hobson, M. P., & Bridges, M. 2009, *MNRAS*, 398, 1601, doi: [10.1111/j.1365-2966.2009.14548.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2009.14548.x)
- Feroz, F., Hobson, M. P., Cameron, E., & Pettitt, A. N. 2013, ArXiv e-prints. <https://arxiv.org/abs/1306.2144>
- Fischer, D. A., & Valenti, J. 2005, *ApJ*, 622, 1102, doi: [10.1086/428383](https://doi.org/10.1086/428383)
- Ford, E. B. 2006, *ApJ*, 642, 505, doi: [10.1086/500802](https://doi.org/10.1086/500802)
- Forgan, D., Rice, K., Stamatellos, D., & Whitworth, A. 2009, *MNRAS*, 394, 882, doi: [10.1111/j.1365-2966.2008.14373.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2008.14373.x)
- Fressin, F., Torres, G., Charbonneau, D., et al. 2013, *ApJ*, 766, 81, doi: [10.1088/0004-637X/766/2/81](https://doi.org/10.1088/0004-637X/766/2/81)
- Fulton, B. J., & Petigura, E. A. 2018, *AJ*, 156, 264, doi: [10.3847/1538-3881/aae828](https://doi.org/10.3847/1538-3881/aae828)
- Gaudi, B. S., Seager, S., & Mallen-Ornelas, G. 2005, *ApJ*, 623, 472, doi: [10.1086/428478](https://doi.org/10.1086/428478)
- Giménez, A. 2006, *A&A*, 450, 1231, doi: [10.1051/0004-6361:20054445](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20054445)
- Goldreich, P., & Ward, W. R. 1973, *ApJ*, 183, 1051, doi: [10.1086/152291](https://doi.org/10.1086/152291)

- Gregory, P. C. 2005, *Bayesian Logical Data Analysis for the Physical Sciences: A Comparative Approach with ‘Mathematica’ Support*, ISBN 0 521 84150 X (Cambridge University Press)
- Hatzes, A. P., Cochran, W. D., Endl, M., et al. 2003, *ApJ*, 599, 1383, doi: [10.1086/379281](https://doi.org/10.1086/379281)
- Holzer, T., Mazeh, T., Nachmani, G., et al. 2016a, *ApJS*, 225, 9, doi: [10.3847/0067-0049/225/1/9](https://doi.org/10.3847/0067-0049/225/1/9)
- Holzer, T., Mazeh, T., Nachmani, G., et al. 2016b, *VizieR Online Data Catalog*, 222
- Holman, M. J., & Murray, N. W. 2005, *Science*, 307, 1288, doi: [10.1126/science.1107822](https://doi.org/10.1126/science.1107822)
- Holman, M. J., Fabrycky, D. C., Ragozzine, D., et al. 2010, *Science*, 330, 51, doi: [10.1126/science.1195778](https://doi.org/10.1126/science.1195778)
- Howard, A. W., Marcy, G. W., Bryson, S. T., et al. 2012, *ApJS*, 201, 15, doi: [10.1088/0067-0049/201/2/15](https://doi.org/10.1088/0067-0049/201/2/15)
- Huang, C., Wu, Y., & TriAUD, A. H. M. J. 2016, *ApJ*, 825, 98, doi: [10.3847/0004-637X/825/2/98](https://doi.org/10.3847/0004-637X/825/2/98)
- Hubickyj, O. 2010, *Core-accretion Model*, ed. R. Barnes, 101
- Ioannidis, P., Schmitt, J. H. M. M., Avdellidou, C., von Essen, C., & Agol, E. 2014, *A&A*, 564, A33, doi: [10.1051/0004-6361/201322622](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201322622)
- Johansen, A., Youdin, A. N., & Lithwick, Y. 2012, *A&A*, 537, A125, doi: [10.1051/0004-6361/201117701](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201117701)
- Johnson, J. A., Aller, K. M., Howard, A. W., & Crepp, J. R. 2010, *PASP*, 122, 905, doi: [10.1086/655775](https://doi.org/10.1086/655775)
- Jurić, M., & Tremaine, S. 2008, *ApJ*, 686, 603, doi: [10.1086/590047](https://doi.org/10.1086/590047)
- Kato, M. T., Fujimoto, M., & Ida, S. 2012, *ApJ*, 747, 11, doi: [10.1088/0004-637X/747/1/11](https://doi.org/10.1088/0004-637X/747/1/11)
- Kipping, D., Nesvorný, D., & Hartman, J., e. a. 2019, *arXiv e-prints*, arXiv:1902.03900
- Kipping, D. M. 2009, *MNRAS*, 392, 181, doi: [10.1111/j.1365-2966.2008.13999.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2008.13999.x)
- Kipping, D. M. 2013, *MNRAS*, 434, L51, doi: [10.1093/mnrasl/slt075](https://doi.org/10.1093/mnrasl/slt075)
- Kipping, D. M., Nesvorný, D., Buchhave, L. A., et al. 2014, *The Astrophysical Journal*, 784, 28, doi: [10.1088/0004-637x/784/1/28](https://doi.org/10.1088/0004-637x/784/1/28)
- Klinglesmith, D. A., & Sobieski, S. 1970, *AJ*, 75, 175, doi: [10.1086/110960](https://doi.org/10.1086/110960)
- Kramer, M. 2017, *Pulsar Timing as an Exoplanet Discovery Method*, ed. H. J. Deeg & J. A. Belmonte (Cham: Springer International Publishing), 1–20. https://doi.org/10.1007/978-3-319-30648-3_5-1
- Lagrange, A.-M. 2014, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, 372, 20130090, doi: [10.1098/rsta.2013.0090](https://doi.org/10.1098/rsta.2013.0090)
- Latham, D. W., Stefanik, R. P., Mazeh, T., Mayor, M., & Burki, G. 1989, *Nature*, 339, 38, doi: [10.1038/339038a0](https://doi.org/10.1038/339038a0)
- Lawton, A. T., & Wright, P. 1989, *Journal of the British Interplanetary Society*, 42, 335
- Levison, H. F., & Duncan, M. J. 1994, *Icarus*, 108, 18, doi: [10.1006/icar.1994.1039](https://doi.org/10.1006/icar.1994.1039)
- Levison, H. F., Kretke, K. A., & Duncan, M. J. 2015, *Nature*, 524, 322, doi: [10.1038/nature14675](https://doi.org/10.1038/nature14675)
- Lillo-Box, J., Barrado, D., & Correia, A. C. M. 2016, *A&A*, 589, A124, doi: [10.1051/0004-6361/201527683](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201527683)
- Lissauer, J. J. 1993, *ARA&A*, 31, 129, doi: [10.1146/annurev.aa.31.090193.001021](https://doi.org/10.1146/annurev.aa.31.090193.001021)
- Lissauer, J. J., Fabrycky, D. C., Ford, E. B., et al. 2011, *Nature*, 470, 53, doi: [10.1038/nature09760](https://doi.org/10.1038/nature09760)
- Lithwick, Y., Xie, J., & Wu, Y. 2012, *ApJ*, 761, 122, doi: [10.1088/0004-637X/761/2/122](https://doi.org/10.1088/0004-637X/761/2/122)
- Lopez, E. D., & Fortney, J. J. 2013, *ApJ*, 776, 2, doi: [10.1088/0004-637X/776/1/2](https://doi.org/10.1088/0004-637X/776/1/2)
- Lovis, C., & Fischer, D. 2010, *Radial Velocity Techniques for Exoplanets*, ed. S. Seager, 27–53
- Mancini, L., Lillo-Box, J., Southworth, J., et al. 2016, *A&A*, 590, A112, doi: [10.1051/0004-6361/201526357](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201526357)
- Mandel, K., & Agol, E. 2002, *ApJ*, 580, L171, doi: [10.1086/345520](https://doi.org/10.1086/345520)
- Manduca, A., Bell, R. A., & Gustafsson, B. 1977, *A&A*, 61, 809
- Mayer, L. 2010, *Formation via Disk Instability*, ed. R. Barnes, 71
- Mayor, M., & Queloz, D. 1995, *Nature*, 378, 355, doi: [10.1038/378355a0](https://doi.org/10.1038/378355a0)
- McKee, C. F., & Ostriker, E. C. 2007, *ARA&A*, 45, 565, doi: [10.1146/annurev.astro.45.051806.110602](https://doi.org/10.1146/annurev.astro.45.051806.110602)

- Milne, E. A. 1921, MNRAS, 81, 361
- Miralda-Escudé, J. 2002, ApJ, 564, 1019, doi: [10.1086/324279](https://doi.org/10.1086/324279)
- Morton, T. D., Bryson, S. T., Coughlin, J. L., et al. 2016, ApJ, 822, 86, doi: [10.3847/0004-637X/822/2/86](https://doi.org/10.3847/0004-637X/822/2/86)
- Muirhead, P. S., Mann, A. W., Vanderburg, A., et al. 2015, ApJ, 801, 18, doi: [10.1088/0004-637X/801/1/18](https://doi.org/10.1088/0004-637X/801/1/18)
- Mulders, G. D. 2018, Planet Populations as a Function of Stellar Properties, 153
- Mulders, G. D., Pascucci, I., & Apai, D. 2015, ApJ, 814, 130, doi: [10.1088/0004-637X/814/2/130](https://doi.org/10.1088/0004-637X/814/2/130)
- Murray, C., & Dermott, S. 1999, Solar System Dynamics. (Cambridge University Press). <http://books.google.com.ar/books?id=TfgLF4-BsqEC>
- Narang, M., Manoj, P., Furlan, E., et al. 2018, AJ, 156, 221, doi: [10.3847/1538-3881/aae391](https://doi.org/10.3847/1538-3881/aae391)
- Nesvorný, D. 2009, ApJ, 701, 1116, doi: [10.1088/0004-637X/701/2/1116](https://doi.org/10.1088/0004-637X/701/2/1116)
- Nesvorný, D., Kipping, D., Terrell, D., & Feroz, F. 2014, ApJ, 790, 31, doi: [10.1088/0004-637X/790/1/31](https://doi.org/10.1088/0004-637X/790/1/31)
- Nesvorný, D., Kipping, D., Terrell, D., et al. 2013, ApJ, 777, 3, doi: [10.1088/0004-637X/777/1/3](https://doi.org/10.1088/0004-637X/777/1/3)
- Nesvorný, D., Kipping, D. M., Buchhave, L. A., et al. 2012, Science, 336, 1133, doi: [10.1126/science.1221141](https://doi.org/10.1126/science.1221141)
- Nesvorný, D., & Morbidelli, A. 2008, ApJ, 688, 636, doi: [10.1086/592230](https://doi.org/10.1086/592230)
- Nesvorný, D., & Vokrouhlický, D. 2016, ApJ, 823, 72, doi: [10.3847/0004-637X/823/2/72](https://doi.org/10.3847/0004-637X/823/2/72)
- Ollivier, M., Roques, F., Casoli, F., Encrenaz, T., & Selsis, F. 2009, Planetary Systems, doi: [10.1007/978-3-540-75748-1](https://doi.org/10.1007/978-3-540-75748-1)
- Owen, J. E., & Wu, Y. 2013, ApJ, 775, 105, doi: [10.1088/0004-637X/775/2/105](https://doi.org/10.1088/0004-637X/775/2/105)
- Owen, J. E., & Wu, Y. 2017, ApJ, 847, 29, doi: [10.3847/1538-4357/aa890a](https://doi.org/10.3847/1538-4357/aa890a)
- Perryman, M. 2018, The exoplanet Handbook. Second Edition (Cambridge University Press). <http://books.google.com.ar/books?id=TfgLF4-BsqEC>
- Petrovich, C., Wu, Y., & Ali-Dib, M. 2019, AJ, 157, 5, doi: [10.3847/1538-3881/aaeed9](https://doi.org/10.3847/1538-3881/aaeed9)
- Ricker, G. R., Vanderspek, R., Winn, J., et al. 2016, in Proc. SPIE, Vol. 9904, Space Telescopes and Instrumentation 2016: Optical, Infrared, and Millimeter Wave, 99042B
- Rowe, J. F., Bryson, S. T., Marcy, G. W., et al. 2014, ApJ, 784, 45, doi: [10.1088/0004-637X/784/1/45](https://doi.org/10.1088/0004-637X/784/1/45)
- Rowe, J. F., Coughlin, J. L., Antoci, V., et al. 2015, ApJS, 217, 16, doi: [10.1088/0067-0049/217/1/16](https://doi.org/10.1088/0067-0049/217/1/16)
- Saad-Olivera, X., Costa de Souza, A., Roig, F., & Nesvorný, D. 2019a, MNRAS, 482, 4965, doi: [10.1093/mnras/sty2990](https://doi.org/10.1093/mnras/sty2990)
- Saad-Olivera, X., Martinez, C. F., Costa de Souza, A., Roig, F., & Nesvorný, D. 2019b, Manuscript submitted for publication in MNRAS
- Saad-Olivera, X., Nesvorný, D., Kipping, D. M., & Roig, F. 2017, AJ, 153, 198, doi: [10.3847/1538-3881/aa64e0](https://doi.org/10.3847/1538-3881/aa64e0)
- Sachs, A. 1974, Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A Mathematical and Physical Sciences (1934-1990), 276, 43, doi: [10.2307/74273](https://doi.org/10.2307/74273)
- Schilling, G. 1985, Astronomy, 13, 26
- Seager, S., & Mallén-Ornelas, G. 2003, ApJ, 585, 1038, doi: [10.1086/346105](https://doi.org/10.1086/346105)
- Sozzetti, A. 2005, PASP, 117, 1021, doi: [10.1086/444487](https://doi.org/10.1086/444487)
- Steffen, J. H., Ford, E. B., Rowe, J. F., et al. 2012, ApJ, 756, 186, doi: [10.1088/0004-637X/756/2/186](https://doi.org/10.1088/0004-637X/756/2/186)
- Stevens, D. J., & Gaudi, B. S. 2013, PASP, 125, 933, doi: [10.1086/672572](https://doi.org/10.1086/672572)
- Taff, L. G. 1985, Celestial mechanics: A computational guide for the practitioner (Wiley-Interscience)
- Thommes, E. W., & Lissauer, J. J. 2003, ApJ, 597, 566, doi: [10.1086/378317](https://doi.org/10.1086/378317)
- Thompson, S. E., Coughlin, J. L., Hoffman, K., et al. 2018, ApJS, 235, 38, doi: [10.3847/1538-4365/aab4f9](https://doi.org/10.3847/1538-4365/aab4f9)
- Veras, D., Ford, E. B., & Payne, M. J. 2010, in Bulletin of the American Astronomical Society, Vol. 42, AAS/Division of Dynamical Astronomy Meeting #41, 928
- Veras, D., Ford, E. B., & Payne, M. J. 2011, ApJ, 727, 74, doi: [10.1088/0004-637X/727/2/74](https://doi.org/10.1088/0004-637X/727/2/74)
- Weiss, L. M., Isaacson, H. T., Marcy, G. W., et al. 2018, AJ, 156, 254, doi: [10.3847/1538-3881/aae70a](https://doi.org/10.3847/1538-3881/aae70a)

-
- Winn, J. N. 2010, ArXiv:1001.2010. <https://arxiv.org/abs/1001.2010>
- Wolfgang, A., Rogers, L. A., & Ford, E. B. 2016, ApJ, 825, 19, doi: [10.3847/0004-637X/825/1/19](https://doi.org/10.3847/0004-637X/825/1/19)
- Wolszczan, A., & Frail, D. A. 1992, Nature, 355, 145, doi: [10.1038/355145a0](https://doi.org/10.1038/355145a0)
- Xie, J.-W. 2014, ApJS, 210, 25, doi: [10.1088/0067-0049/210/2/25](https://doi.org/10.1088/0067-0049/210/2/25)
- Xie, J.-W., Dong, S., Zhu, Z., et al. 2016, Proceedings of the National Academy of Science, 113, 11431, doi: [10.1073/pnas.1604692113](https://doi.org/10.1073/pnas.1604692113)