

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA
OBSERVATÓRIO NACIONAL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ASTRONOMIA



DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

OPTIMIZAÇÃO DE VÍNCULOS OBSERVACIONAIS PARA PARAMETRIZAÇÕES DA ENERGIA ESCURA

JAVIER ERNESTO GONZÁLEZ SÁNCHEZ

RIO DE JANEIRO, 19 DE FEVEREIRO DE 2014

Ministério da Ciência e Tecnologia
Observatório Nacional
Programa de Pós-Graduação em Astronomia

Dissertação de Mestrado

Optimização de Vínculos Observacionais para Parametrizações da Energia Escura

Javier Ernesto González Sánchez

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Observatório Nacional do Rio de Janeiro
como parte dos requisitos para a obtenção
do grau de MESTRE em Astronomia.

Orientador: Dr. Jailson Souza de Alcaniz

Rio de Janeiro, 19 de fevereiro de 2014

**Aos meus pais, à minha irmã
e quem mais está por chegar.**

Este trabajo no sólo es el producto de estos dos últimos años, sino también, el producto de todas aquellas acciones que marcaron mi vida y que me convirtieron en la persona que hoy en día soy, el producto de aquella educación que me condujo irremediabilmente por el camino de la ciencia y la ética. Este trabajo, quizás, lo comenzaron Fernando, Grecia y Natalia hace ya veinticuatro años.

“Alea jacta est!”

- Júlio César

**“Nada existe; mesmo se o ser existisse, então seria incognoscível; e se fosse cognoscível,
então este conhecimento do ser seria incomunicável a outrem.”**

- Górgias

Agradecimentos

Agradeço a todas as pessoas que contribuíram de alguma forma para a realização desta dissertação, em especial:

- Ao meu orientador, Jailson Alcaniz, por todo o tempo dedicado na minha formação ao longo desses dois anos, e pelo árduo trabalho e paciência no momento de corrigir esta dissertação;
- Aos meus pais, Fernando e Grecia, por esperar cada noite algum momento para poder falar comigo, pelo grande amor, carinho e apoio incondicional;
- À minha irmã, Natalia, pelo imenso amor, pelos grandes conselhos, por sempre estar quando precisei e sempre querer o melhor para mim;
- À minha namorada, Ana Maria, pela companhia incansável durante todos os dias desses dois anos, pelas longas conversas e os grandes momentos, pelo amor, apoio e compreensão;
- Ao Edésio Barboza pelo, mais do que agradável, trabalho em colaboração e as frutíferas discussões;
- Aos meus companheiros e amigos do GCON, Rodrigo, Che Chandrachani, Carlos, Gabriela M., Marcela, Beethoven, Gabriela C., Armando e Aldinês pelo que tenho aprendido de cada um deles, pelas discussões, piadas e bons momentos;
- Às pessoas que corrigiram a gramática, ortografia e semântica dessa dissertação, Jailson, Rodrigo, Gabriela, Celino e Carlos;
- A todos os meus amigos do ON pelas vivências compartilhadas;
- Ao Observatório Nacional;
- Ao Brasil;

- À Capes e à Faperj pelo financiamento;
- A Deus, porque embora eu me afastei dele, sei que ele não se afastou de mim.

Optimização de Vínculos Observacionais para Parametrizações da Energia Escura

Javier Ernesto González Sánchez

Submetida ao Observatório Nacional do Rio de Janeiro em
19 de fevereiro de 2014, como requisito parcial para a obtenção
do título de Mestre em Astronomia.

Resumo

Determinar o mecanismo por trás da aceleração cósmica constitui um dos maiores desafios para a cosmologia. Várias propostas tem sido discutidas, que vão desde a inclusão de uma componente exótica no conteúdo material do Universo com pressão negativa, a qual é chamada de energia escura, até modelos de modificação da gravidade e dimensões adicionais, entre outros. Se aceitamos a hipótese da energia escura para explicar a dita aceleração, esse problema pode potencialmente trazer à luz novos conhecimentos, não só na área da cosmologia, mas também nas teorias da física de altas energias. Neste contexto, tem sido propostos modelos a partir de um ponto de vista fundamental, tais como campos de quintessência ou campos fantasma, etc., e outros um pouco mais fenomenológicos, como são os modelos $w(z)CDM$, cujo objetivo principal é determinar a equação de estado (EdE) que descreve a energia escura.

Neste trabalho, nós discutimos uma forma geral não correlacionada para parametrizações da equação de estado da energia escura do tipo $w(z) = w_0 + w_1g(z)$, através da realização de um mapeamento linear dos parâmetros desta equação, $(w_0 - w_1)$, em um novo conjunto $(w_0 - w_c)$. Considerando duas parametrizações da EdE e utilizando dados atuais de Supernovas do tipo Ia (compilação Union2.1), RCF (Planck e WMAP9) e medições de OAB dos *surveys* SDSS, WiggleZ e 6dFGS, nós mostramos que a figura de mérito do plano $w_0 - w_c$ torna-se significativamente maior do que no plano $w_0 - w_1$. Também é derivada uma expressão analítica geral para quantificar o aumento da FoM ao realizar este tipo de transformações entre espaços paramétricos, utilizando a abordagem da Matriz de Informação de Fisher.

Palavras chaves: Cosmologia; energia escura; modelos $w(z)CDM$; espaço paramétrico; figura de mérito.

Optimization of Observational Constraints for Dark Energy Parameterizations

Javier Ernesto González Sánchez

Submitted to the Observatório Nacional of Rio de Janeiro on
February 19th 2014, in partial fulfillment of the requirements
for the Master's degree in Astronomy.

Abstract

Determining the mechanism behind cosmic acceleration constitutes a major challenge for theoretical and observational cosmology. Several proposals have been discussed in the literature, which range from the inclusion of an exotic component with negative pressure in the material content of the universe, so-called dark energy, to modified gravity and extra dimension models, among others. If we accept the hypothesis of dark energy to explain the current acceleration, this problem may potentially bring to light new insights. These will occur not only in the field of cosmology but also in high energy physics theories. In this regard, models have been proposed from a more fundamental point of view, such as quintessence or phantom fields, etc., and others phenomenological, such as $w(z)CDM$, whose main objective is to determine the equation of state (EoS) that describes dark energy.

In this work, we discuss a general uncorrelated equation for the time-dependent parameterizations of the dark energy EoS by performing a linear mapping of the EoS parameters. For EoS of the type $w(z) = w_0 + w_1$, we transform $(w_0 - w_1)$ into a new set $(w_0 - w_c)$. We consider two EoS parameterizations and use current data from type Ia Supernovae (Union2.1 compilation), CMB (Planck and WMAP9 collaborations) and BAO measurements from SDSS, WiggleZ and 6dFGS surveys. We show that the figure of merit of the $w_0 - w_c$ plane becomes significantly larger than that of the $w_0 - w_1$. By using the Fisher Information Matrix approach, we also obtain a general analytical expression to quantify the increase of the FoM for general transformations between parametric spaces.

Keywords: Cosmology; dark energy; $w(z)CDM$ models, parametric space; figure of merit.

Sumário

Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract	ix
Lista de figuras	xiii
Lista de tabelas	xv
Notações e convenções	xvii
Informação eletrônica	xix
1. Introdução	1
2. MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO	5
2.1. Teoria da Relatividade Geral	5
2.1.1. Condições de Energia	7
2.2. Distâncias Cosmológicas	8
2.3. Dinâmica do Universo de FLRW	11
2.4. Expansão do Universo	16
2.4.1. Cinemática da Expansão	16
2.4.2. Expansão Acelerada	18
2.5. Nucleossíntese Primordial	20
2.6. Radiação Cósmica de Fundo	22
3. Energia Escura	27
3.1. Constante Cosmológica	27
3.2. Campo de Quintessência	30
3.3. Campo Fantasma	33
3.4. Gás de Chaplygin	35
3.5. Gravidade Modificada	36

Sumário

3.6. Parametrizações da Equação de Estado	38
3.6.1. Parametrização Chevallier-Polarsky-Linder (CPL)	39
3.6.2. Parametrização Barboza-Alcaniz (BA)	41
4. Vínculos Observacionais	45
4.1. Testes Cosmológicos	45
4.1.1. Supernova do Tipo Ia como Vela Padrão	45
4.1.2. Oscilações Acústicas Bariônicas	48
4.1.3. Radiação Cósmica de Fundo como Teste Cosmológico	50
4.2. Análise Estatística	51
4.3. Matriz de Informação de Fisher	54
4.4. Figura de Mérito	55
4.5. Optimização dos Vínculos Observacionais	56
4.5.1. Transformação Analítica da FoM	59
5. Conclusões	65
A. Redshifts e tempos de transição	67
Referências	69

Lista de figuras

2.1.	Representação das condições de energia para um fluido perfeito no plano $\rho - p$.	9
2.2.	Histórias de expansão do universo para vários valores dos parâmetros de densidade	15
2.3.	Evolução do parâmetro de desaceleração $q(z)$	15
2.4.	Diferentes estimativas da constante de Hubble inferidas utilizando distintos tipos observações	18
2.5.	Magnitude aparente versus <i>redshift</i> para 42 SNIa.	19
2.6.	Diferença entre os valores esperados da distância de luminosidade vezes H_0 .	20
2.7.	Predição da produção de núcleos leves da Nucleossíntese Primordial	22
2.8.	Espectro de corpo negro medido pelo satélite WMAP.	23
2.9.	Mapa da RCF obtido pelo satélite espacial Planck.	24
2.10.	Espectro de potência da temperatura da RCF obtida com os primeiros resultados do Planck.	25
3.1.	Níveis de confiança de 1, 2 e 3σ para o modelo CPL.	40
3.2.	Comportamento da função $g(z) = z(1+z)/1+z^2$ da parametrização BA.	41
3.3.	Divisão do espaço paramétrico e níveis de confiança.	42
4.1.	Curvas de luz no óptico e no infravermelho próximo da supernova SN 2007af	46
4.2.	Evolução da perturbação no perfil de densidade	49
4.3.	Esquema da distribuição de galáxias com uma escala característica	50
4.4.	Contornos de confiança para as parametrizações BA e CPL obtidos com os dados de SN Ia da compilação Union2.1, as determinações do parâmetro \mathcal{A} dos levantamentos SDSS, WiggleZ e 6dFGS, e a determinação do parâmetro \mathcal{R} com os resultados do WMAP9	60
4.5.	Contornos de confiança para as parametrizações BA e CPL obtidos com os dados de SN Ia da compilação Union2.1, as determinações do parâmetro \mathcal{A} dos levantamentos SDSS, WiggleZ e 6dFGS, e a determinação do parâmetro \mathcal{R} com os resultados do Planck	61

Lista de tabelas

3.1. Diferentes tipos de potenciais usados em modelos de quintessência.	33
3.2. Diferentes tipos de parametrizações da EdE da EE.	39
4.1. Determinações do parâmetro \mathcal{A} das OAB em diferentes <i>redshifts</i>	54
4.2. Valores esperados de w_0 e w_1 em 95.4% CL para a parametrização (3.67). As barras de erros correspondem à variância. A correlação entre os dois parâmetros é dada pelo coeficiente de correlação de Pearson, $\rho_{ij} = \sigma_{ij}/\sigma_i\sigma_j$, e a FoM do espaço paramétrico é dada por $\text{FoM}_r(i, j)$	58
4.3. Valores esperados de w_0 e w_c em 95.4% CL para a parametrização (4.51). A correlação entre os dois parâmetros é dada pelo coeficiente de correlação de Pearson e a FoM do espaço paramétrico é dada por $\text{FoM}_r(i, j)$	59
4.4. Valores esperados de w_0 , w_1 e w_c em 95.4% CL, coeficiente de correlação, ρ , e FoM para a parametrização CPL.	59
4.5. Valores obtidos do <i>redshift</i> z_c com os dados observacionais atuais para as parametrizações BA e CPL e os correspondentes fatores de variação da FoM ao reparametrizar cada um dos modelos.	63

Notações e convenções

- Expressões em outros idiomas são apresentadas em *itálico*.
- A assinatura da métrica utilizada como padrão neste texto é $(+ - - -)$.
- A menos que explícito o contrário, utilizamos unidades em que $c = \hbar = 1$.
- Sub-índice 0 à frente de uma grandeza representa o seu valor tomado no tempo presente.
- A unidade de distância utilizada como padrão neste texto é o megaparsec (Mpc):
 $1 \text{ Mpc} = 3.26 \times 10^6 \text{ anos-luz} = 3.09 \times 10^{22} \text{ m}$
- Índices gregos variam de 0 a 3, enquanto os latinos variam de 1 a 3. Índices repetidos obedecem a convenção de soma de Einstein.

Informação eletrônica

A maioria das referências utilizadas nesta dissertação pode ser encontrada na *internet* nos seguintes endereços:

- arXiv: <http://arxiv.org>
- INSPIRE: <http://inspirehep.net>
- SAO/NASA ADS Labs: <http://labs.adsabs.harvard.edu/ui>

1 Introdução

O estudo da origem e evolução do Universo e, de todas as estruturas que hoje observamos tem sido de grande interesse ao longo da história da humanidade. Porém, o que se conhece como cosmologia surgiu na antiga Grécia a partir de um ponto de vista filosófico. Mais tarde, na Idade Média, este conhecimento tornou-se também parte das discussões religiosas. Na Idade Moderna, cabe ressaltar o trabalho feito por Immanuel Kant na sua obra prima “Crítica da Razão Pura” [1], na qual ele definiu, de maneira exaustiva, os conceitos de tempo e espaço, conceitos estes que, obviamente, estavam ligados à forma que era percebida a realidade naquele momento. Todas essas ideias acerca do tempo e do espaço sofreram importantes transformações com o advento da Teoria Especial da Relatividade, onde as duas entidades (até o momento distintas) combinaram-se para fazer parte do *continuum* espaço-tempo. Até este ponto, a cosmologia ainda não encontrava-se no cenário formal da ciência.

Com o desenvolvimento da Teoria da Relatividade Geral (TRG) em 1915 [2], o curso da física tomou outro caminho. O interesse por explicar a partir de um ponto de vista físico o universo como um todo, a sua dinâmica e a formação das estruturas observadas, estabeleceram a cosmologia como uma parte da ciência e, especificamente, da física.

Nos seus primeiros anos, a cosmologia física ficou limitada a especulações teóricas baseadas somente em argumentos filosóficos. No final dos anos 20, obteve-se um resultado observacional que mudou a forma de entender o universo. Lemâitre [3], em 1927, encontrou evidência observacional para a expansão do Universo, a qual foi reforçada por Hubble dois anos mais tarde. A mudança de paradigma não foi imediata e levou alguns anos para a comunidade científica aceitar tal interpretação.

Com a ideia de um universo em expansão, surge outra questão que se converte em parte essencial da teoria cosmológica moderna. Se o universo está em expansão, isto implicaria que, no passado, as galáxias e demais corpos celestes encontravam-se mais próximos, ou seja, no passado o universo estaria em uma fase quente e densa, teoria que hoje está bem estabelecida e chamamos de *Big Bang*. Nas equações da gravidade de Einstein, o *Big Bang* apresenta-se como uma singularidade se chegássemos a extrapolar a previsibilidade da Teoria da Relativi-

dade Geral indefinidamente nesta fase extrema da história do universo. O Universo primordial se comportava como um reator nuclear formando os elementos leves e uma radiação de fundo, cuja temperatura atual foi calculada pela primeira vez por Alpher e Herman [4] e que, a princípio, seria em torno de 5 K. Anos mais tarde, em 1965, a temperatura desta radiação foi medida por Penzias e Wilson [5] com o valor de 3,5 K, sendo galardoados com o Prêmio Nobel de Física por este descobrimento. Surpreendentemente, a ideia estranha que começou como uma aplicação da física atômica à fase primordial do universo, constitui-se como uma das maiores descobertas da ciência, e o segundo grande descobrimento da cosmologia.

Temos descrito até o momento, os fatos mais relevantes que levaram ao desenvolvimento da cosmologia como uma ciência. Até aquele momento, podia-se suspeitar que o destino do universo, seja qual fosse, teria uma expansão desacelerada devido ao comportamento atrator da gravidade. Entretanto, a dinâmica do universo é mais complicada. A complexidade da natureza seria evidenciada quando a finais de 1998, dois grupos descobriram, independentemente, o fato mais surpreendente da cosmologia desde a detecção da radiação cósmica de fundo, a expansão do Universo está acelerando! Este fenômeno é conhecido como a aceleração cósmica e a sua explicação constitui um dos maiores desafios tanto da cosmologia quanto da Física em geral.

Para explicar a aceleração cósmica mantendo a TRG de Einstein, os cosmólogos introduzem uma nova componente ao conteúdo material do universo, a qual comporta-se como um fluido com pressão negativa que preenche todo o espaço. O fato da pressão ser negativa é a causa da repulsão e, consequentemente, da aceleração da expansão. Esta nova hipótese utilizada para explicar a aceleração cósmica é chamada de Energia Escura (EE).

Segundo o modelo cosmológico padrão, o universo é composto por 70% de energia escura; 5% de matéria bariônica não-relativística, a matéria comum que podemos perceber tanto eletromagnética quanto gravitacionalmente, tal como elétrons, nêutrons, prótons, etc.; 25% de um tipo de matéria não bariônica que só interage gravitacionalmente, que é denominada matéria escura; e uma mínima fração de radiação.

O modelo cosmológico padrão faz uso da constante cosmológica, Λ , nas equações da gravidade de Einstein como modelo de energia escura, termo que se comporta como um fluido com pressão $p = -\rho$ (ρ sendo a densidade de energia). Embora este modelo ajuste muito bem os dados observacionais, ele possui problemas de caráter fundamental irreparáveis, como a discrepância entre o valor de Λ predito pela teoria quântica de campos e o valor estimado observacionalmente. Isto tem motivado a aparição de inumeráveis modelos para descrever a energia escura, tais como: modelos com equações de estado variáveis no tempo ou *redshift*, $p = w(z)\rho$, ([6, 7, 8, 9, 10, 11]); modelos de campos com pressão negativa como quintessência e campos fantasmas ([12, 13, 14, 15, 16]), modelos de gravidade modificada, $f(R)$ ([17, 18, 19, 20, 21, 22]) e branas ([23, 24, 25, 26]).

Atualmente, estamos na época que poderia ser considerada a era dourada da cosmologia, onde estão sendo feitas grandes quantidades de observações cosmológicas. Hoje temos acesso a mais e mais dados que vinculam as nossas teorias físicas com as observações. Além disso,

temos um amplo conhecimento da física de partículas, a qual tem uma importância vital no momento de descrever o universo primordial e que segue sendo relevante na época atual.

Com tudo isto, atualmente, temos a capacidade de provar hipóteses fundamentais tais como: o princípio cosmológico, a TRG como teoria de gravitação em escalas cosmológicas, a conservação do número de fótons, etc., cuja confirmação daria uma base observacional firme e a violação abriria as portas a nova física atuando no universo a grande escala.

A história da cosmologia relativística tem aproximadamente cem anos. Todavia, ainda temos muitas peças do quebra-cabeças do universo para encontrar. Uma descrição da natureza como é a cosmologia não é nada simples e nos leva à fronteira do intelecto humano. Com isto, é fácil entender que apesar de ter uma teoria cosmológica bem estabelecida, a pesquisa nesta área da ciência está longe de chegar ao seu fim.

Esse trabalho está focalizado na otimização dos vínculos que podem ser impostos aos parâmetros da equação de estado (EdE) da energia escura (modelos $w(z)CDM$) através dos dados observacionais mais recentes. Utilizando o formalismo da figura de mérito (FoM) para quantificar o poder de vínculo dos dados atuais, nós realizamos uma transformação entre espaços paramétricos ou reparametrização da EdE com o objetivo de obtermos uma EdE reescrita em termos de novos parâmetros que estejam descorrelacionados. Além disso, esta reparametrização permite obter um aumento no valor da FoM. Finalmente, ao utilizarmos o formalismo da matriz de informação de Fisher, podemos encontrar uma expressão analítica que relacione o valor da FoM da EdE original com a FoM da EdE reparametrizada.

A justificativa desse trabalho encontra-se na grande quantidade de dados que estão por vir e ao grande interesse de quantificar a eficiência dos novos experimentos em cosmologia. As contribuições originais do trabalho serão apresentadas no Capítulo 4, podendo também ser encontradas na referência [27].

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: No Capítulo 2, apresentaremos o que constitui o Modelo Cosmológico Padrão. No Capítulo 3, exploraremos diferentes modelos empregados para descrever a energia escura. Discutiremos desde o cenário padrão, onde a constante cosmológica é a fonte da aceleração cósmica, até modelos de quintessência, campo fantasma, parametrizações da equação de estado, entre outros. Já no Capítulo 4, apresentaremos os testes cosmológicos utilizados para vincular os parâmetros cosmológicos e o objetivo principal da dissertação que é a otimização desses vínculos. Por último, no Capítulo 5, exporemos as conclusões deste trabalho.

2 MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO

A descrição do universo como um todo, a partir de um ponto de vista físico, constitui o que hoje é a Cosmologia Moderna, onde as teorias ou modelos físicos são usados para entender a evolução passada, presente e futura do nosso Universo, bem como a formação das estruturas observadas.

O modelo que melhor descreve as observações e que denominamos como modelo cosmológico padrão é o chamado Λ CDM (da sigla em inglês Λ *Cold Dark Matter*). Tal modelo utiliza as hipóteses de homogeneidade e isotropia (Princípio Cosmológico*) para o universo em grande escala. Evidências observacionais para a isotropia espacial estão em concordância com as observações de Radiação Cósmica de Fundo (RCF) †. O modelo cosmológico padrão possui três pilares observacionais:

- A existência de uma Radiação Cósmica de Fundo;
- A Expansão do Universo;
- A Nucleossíntese Primordial dos elementos leves.

Além disso, supõe-se que a dinâmica em grande escala do universo é governada pela interação gravitacional tal como descrita pela Teoria da Relatividade Geral (TRG). A geometria do Universo é assumida espacialmente plana e os componentes materiais e energéticos neste cenário são: radiação, matéria bariônica, matéria escura e energia escura.

2.1. Teoria da Relatividade Geral

Após o estabelecimento da Teoria da Relatividade Especial (TRE), o paradigma da ciência sobre um espaço e um tempo absoluto mudou drasticamente assim como a ideia de matéria e energia como entidades distintas, abrindo as portas ao que hoje se conhece como física moderna.

* O qual postula que o Universo é homogêneo e isotrópico, isto é, não há direções privilegiadas e todos os pontos do espaço são equivalentes.

† Para uma discussão sobre evidências observacionais da homogeneidade espacial, veja [28, 29, 30, 31].

Os pressupostos em que se baseia esta teoria são dois, (1) as leis da física são iguais em todos os sistemas de referência inerciais; (2) a velocidade da luz é a mesma para todos os observadores inerciais. Deste modo, era possível compatibilizar a eletrodinâmica de Maxwell com a mecânica, sem levar em conta o campo gravitacional. Isto devido a que a formulação da gravidade feita por Newton era incompatível com o fato que nada pode viajar mais rápido que a luz.

Portanto, o objetivo de Einstein era formular uma teoria da gravitação que satisfizesse os princípios nos quais se apoiava a sua teoria da Relatividade, considerando que para pequenas energias, esta formulação deve ser reduzida à formulação de Newton [32].

A TRG transformou o modo de entender a gravitação, afastando-se da ideia que se tinha da gravidade ao imaginar o campo gravitacional não da mesma maneira em que se pode interpretar o campo eletromagnético (uma perturbação de algum tipo que permeia o espaço, que pode depender do tempo e agir sobre o que chamamos cargas), senão que a gravidade deixa de ser uma entidade no espaço e no tempo, em que faz com que as massas atraiam-se, para ser a mesma geometria do espaço-tempo. Claramente, a nova formulação deve conter termos geométricos ao ser interpretada desta nova forma, mas também estes devem estar relacionados com a massa e energia (que a partir da TRE são dois aspectos diferentes da mesma entidade) para convergir, até certo ponto, à teoria bem sucedida de Newton.

Os postulados em que baseia-se a Teoria da Relatividade Geral são:

- *A variedade espaço-temporal.* O espaço-tempo é constituído por todos os eventos físicos, sendo descrito por uma variedade, \mathcal{M} , na qual está definida uma métrica g .

Sobre esta variedade, estão definidos todos os campos de matéria-energia, ψ_i (onde i representa distintas classes de campos), os quais obedecem as equações que se expressam como relações entre tensores em \mathcal{M} , onde as derivadas com respeito às coordenadas são derivadas covariantes com respeito à conexão livre de torsão definida por g .

- *Princípio da Equivalência.* Sistemas acelerados e sistemas submetidos a campos gravitacionais são fisicamente equivalentes.
- *Causalidade local.* As equações que satisfazem os campos são tais que, nenhum sinal enviado entre dos pontos excede a velocidade da luz.
- *Conservação local da energia.* Existe um tensor $T_{\mu\nu}$, chamado Tensor Momento-Energia (TME), que é função dos campos de matéria-energia e suas derivadas, tal que, é nulo se somente se todos os campos são nulos e possui divergência nula.
- *Equações de Campo de Einstein.* As equações que descrevem a relação entre a métrica e o conteúdo material

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

são chamadas Equações de Campo de Einstein (ECE), onde $R_{\mu\nu}$ corresponde ao tensor de Ricci, $g_{\mu\nu}$ ao tensor métrico, R ao escalar de curvatura, $T_{\mu\nu}$ ao TME, k uma constante [‡] e $G_{\mu\nu}$ é chamado tensor de Einstein.

Pode ser demonstrado que a derivada covariante do tensor $G_{\mu\nu}$ é nula (identidade de Bianchi),

$$G_{\mu\nu;\nu} = 0, \quad (2.2)$$

e conseqüentemente, também será a derivada covariante do TME.

Dada a simetria e divergência nula do tensor de Einstein, o conjunto de equações diferenciais acopladas não lineares, que constituem as ECE, se reduz a 6 equações independentes [33, 34].

Matematicamente, as equações de campo de Einstein admitem outro termo sem violar os princípios sobre os quais repousa a teoria (como será mostrado na seção 3.1). Este termo adicional é utilizado em modelos cosmológicos, sendo denominado de constante cosmológica [35].

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}. \quad (2.3)$$

2.1.1. Condições de Energia

Na TRG é usual restringir a forma do $T_{\mu\nu}$ sem se referir a uma fonte específica. Para este fim, são utilizadas as chamadas Condições de Energia (CE). Estas condições surgem do estudo das formas conhecidas de energia e garantem a estabilidade da teoria. Por exemplo, é bem conhecido que todas as fontes de energia conhecidas respeitam a chamada Condição de Energia Forte (CEF) [36].

Cada uma das CE está enunciada de forma invariante em termos do tensor $T_{\mu\nu}$ e de algum campo vetorial com carácter definido, ou seja, os vetores que compõem o campo são tipo-tempo ($t^\mu t_\mu > 0$, norma do vetor positiva), tipo-espaço ($s^\mu s_\mu < 0$, norma do vetor negativa) ou tipo-nulo ($l^\mu l_\mu = 0$, norma do vetor nula) ^{§ ¶}. É conveniente escrever as CE em termos da densidade ρ e da pressão p para o caso de um fluido perfeito ,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

onde U^μ é a quadri-velocidade do fluido [14]:

- Condição de Energia Fraca (CEFr) afirma que $T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0$ para todo vetor tipo-tempo t^μ ou, equivalentemente, $\rho \geq 0$ e $\rho + p \geq 0$.

[‡] O valor desta constante define a proporcionalidade entre os termos de curvatura (parte esquerda das equações) e o termo de conteúdo energético (parte direita das equações), sendo calculado seu valor determinando o limite não relativístico para obter a equação de Poisson da gravitação Newtoniana. O valor da constante é $k = 8\pi G/c^4$.

[§] Notando que as definições apresentadas da classificação do tipo de vetor é feita com assinatura (+, -, -, -).

[¶] Lembre-se que a norma de um vetor é um invariante relativístico, ou seja, não depende do sistema de referencia (coordenadas) .

- Condição de Energia Nula (CEN) afirma que $T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu \geq 0$ para todo vetor tipo-nulo l^μ ou, equivalentemente, $\rho + p \geq 0$.
- Condição de Energia Dominante (CED) afirma que $T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0$ para todo vetor tipo-tempo t^μ e que o vetor $T_{\mu\nu}t^\mu$ não é tipo-espaço, isto é, $T_{\mu\nu}T_\lambda^\nu t^\mu t^\lambda \geq 0$. Para o caso de um fluido perfeito, a CED implica que $\rho \geq |p|$. Note-se que a CED inclui a CEF.
- Condição de Energia Dominante Nula (CEDN) é a CED para vetores nulos. Para todo vetor tipo-nulo l^μ , $T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu \geq 0$ e $T_{\mu\nu}l^\mu$ não é tipo-espaço ($T_{\mu\nu}T_\lambda^\nu l^\mu l^\lambda \geq 0$). No caso do fluido perfeito, esta condição pode ser escrita como, $\rho \geq |p|$ ou $\rho = -p$. Note-se que inclui a CED com a modificação que permite também $\rho = -p$.
- Condição de Energia Forte (CEF) afirma que $T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq \frac{1}{2}T_\lambda^\lambda t^\sigma t_\sigma$ para todo vetor tipo-tempo t^μ , ou para um fluido perfeito $\rho + p \geq 0$ e $\rho + 3p \geq 0$.

Na Figura 2.1, são mostradas as restrições que cada uma das CE impõe no plano $\rho - p$, bem como a condição $w \geq -1$, a qual terá muita importância no estudo dos chamados campos fantasmas.

2.2. Distâncias Cosmológicas

Na área da Astronomia, uma das questões fundamentais é a determinação de distâncias. Além das dificuldades observacionais para medi-las, que podemos considerar causadas somente por limitações tecnológicas, existe uma impossibilidade intrínseca na determinação direta de uma distância física. Na teoria da Relatividade, o que se pode interpretar como a distância física real é chamada de distância própria, sendo definida como a distância espaço-temporal entre dois pontos determinada em simultaneidade [37].

Em um universo para o qual é válido o PC, ou seja, o universo é isotrópico e homogêneo globalmente, a métrica associada a este é a chamada métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), com o elemento de linha dado por:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{1}{1 - Kr^2} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \right], \quad (2.5)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala e K a constante de curvatura. O fator $a(t)$ está associado ao tamanho do universo e possui dimensões de comprimento,^{||} enquanto que a constante K determina o tipo de geometria espacial, que poderia ser de três classes distintas:

$$\begin{aligned} K > 0 & \iff \text{Geometria Fechada ou Esférica} \\ K = 0 & \iff \text{Geometria Plana ou Euclidiana} \\ K < 0 & \iff \text{Geometria Aberta ou Hiperbólica.} \end{aligned} \quad (2.6)$$

^{||} Para uma discussão sobre o papel que tem o fator de escala em uma métrica e as dimensões associadas a ele, veja [38].

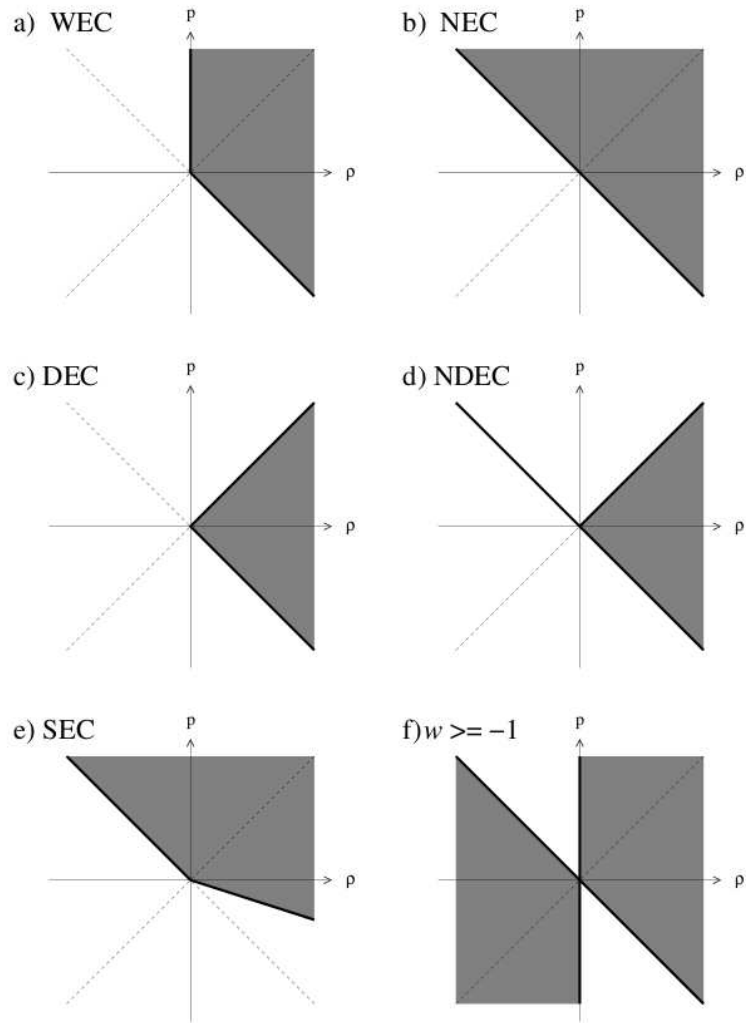


Figura 2.1.: Representação das condições de energia para um fluido perfeito no plano $\rho - p$. As regiões sombreadas obedecem às restrições impostas pelas CE [14].

Esta constante pode ser normalizada, assumindo valores de $K = +1, 0, -1$ **, para uma geometria fechada, plana e aberta, respectivamente.

A primeira distância a ser definida é a Distância Própria ou Física que, como já foi mencionado anteriormente, corresponde à distância entre dois pontos do espaço medida simultaneamente. A distância própria entre um objeto com coordenadas espaciais $x^i = (r, \theta_1, \phi_1)$ e um observador na origem é [39]

$$d_p = a(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = a(t)\chi, \quad (2.7)$$

** Na métrica de FLRW, pode ser normalizada a constante de curvatura ou o fator de escala a ser $a(t_0) = 1$, mas não os dois simultaneamente.

onde χ é denominado distância radial comóvel e definido como,

$$\chi(r) \equiv \begin{cases} \sin^{-1}(\sqrt{K}r)/\sqrt{K}, & \text{se } K > 0 \\ r, & \text{se } K = 0 \\ \sinh^{-1}(\sqrt{|K}|r)/\sqrt{|K|}, & \text{se } K < 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

onde foi usado para uma geodésica radial, a variação dos ângulos ao longo da trajetória é nula ($d\theta_1 = 0, d\phi_1 = 0$). Deve-se ressaltar que a distância própria não é observável e depende do modelo cosmológico adotado.

Devido às diferentes técnicas que se tem em astronomia para determinar distâncias entre objetos, é necessário definir outros conceitos de distância, a saber, a distância de luminosidade e a distância de diâmetro angular.

A distância de luminosidade será definida a partir da relação existente entre fluxo e luminosidade. Observacionalmente, o fluxo é medido em nossos detetores e ao conhecermos a luminosidade intrínseca do objeto astrofísico, é possível determinar a distância em que ele se encontra. O fluxo é descrito como:

$$F = \frac{L}{4\pi d^2}, \quad (2.9)$$

sendo $4\pi d^2$ a área da esfera entre um observador na origem (Terra) e o objeto emissor e L a luminosidade que se percebe na Terra.

Ao contrário do que acontece com a distância própria, a relação entre a área e o raio comóvel permanece invariante independente da geometria do universo e é exatamente igual como seria em uma espaço euclidiano, ou seja,

$$A = 4\pi a(t_0)^2 r^2. \quad (2.10)$$

Como será mostrado na seção (2.4), a luz apresenta um deslocamento para o vermelho, *redshift*, para um universo em expansão, ou um deslocamento para o azul, *blueshift*, em um universo em contração. Tal fato acontece devido à diferença entre os intervalos de tempo medidos por um observador distante no momento da emissão do sinal luminoso, em que o universo tinha um fator de escala $a(t_{em})$, e os intervalos de tempo medidos por um observador na Terra, com um fator de escala $a(t_0)$, isto é

$$1 + z \equiv \frac{\lambda_o}{\lambda_{em}} = \frac{\Delta t_0}{\Delta t_{em}} = \frac{a(t_0)}{a(t_{em})}. \quad (2.11)$$

Esta diferença nos intervalos de tempo no momento da emissão e da recepção produz uma diminuição (aumento) da energia do fóton em um universo em expansão (contração), por causa do alargamento do comprimento de onda e da relação de Einstein $E = h\nu = hc/\lambda$.

Com as equações (2.11) (2.9), a luminosidade intrínseca se relaciona com a luminosidade percebida na Terra

$$L_{Terra} = \frac{L_0}{(1+z)^2}. \quad (2.12)$$

Portanto, o fluxo medido está em relação direta com a luminosidade intrínseca,

$$F = \frac{L}{4\pi(1+z)^2 a(t_0)^2 r^2}. \quad (2.13)$$

Então, define-se a distância luminosidade tal que a Eq. (2.9) siga sendo válida, ou seja,

$$d_L = (1+z)a(t_0)r. \quad (2.14)$$

A segunda distância a ser definida é a chamada distância de diâmetro angular. Esta definição corresponde à ideia de manter a relação entre o comprimento de arco s , que subtende o ângulo $\Delta\theta$, a uma distância r , tal que $s = r\Delta\theta$. Um objeto no céu que se encontra perpendicular à linha de visada e que, dada a isotropia do espaço, pode-se selecionar os dois extremos do corpo como tendo coordenadas $x_1^\mu = (r, \theta_1, \phi)$ e $x_2^\mu = (r, \theta_2, \phi)$. Portanto, o seu comprimento próprio é $s = a(t_{em})r\Delta\theta$. Agora define-se d_A como sendo:

$$d_A = \frac{s}{\Delta\theta} \quad (2.15)$$

e utilizando a expressão (2.11), obtém-se:

$$d_A = \frac{r}{(1+z)}. \quad (2.16)$$

Em um espaço-tempo geral (em expansão e/ou com curvatura), para o qual é válido o princípio cosmológico, as três distâncias apresentadas não coincidem. Entretanto, para pequenas distâncias ou baixos *redshifts* todas são assintoticamente iguais [33].

2.3. Dinâmica do Universo de FLRW

Para deduzir o elemento de linha do universo de FLRW só utilizamos argumentos geométricos, sem levar em conta o conteúdo material. Por isto, para qualquer teoria métrica onde seja válido o princípio cosmológico, o elemento de linha que descreve a geometria do espaço será (2.5). Tomando a TRG como a teoria de gravitação que governa a dinâmica do universo, determina-se univocamente a constante de curvatura e o fator a .

A homogeneidade proíbe uma dependência das coordenadas espaciais do TEM, deixando somente a possibilidade de uma evolução temporal. Por outro lado, a isotropia do espaço restringe o TME a ser diagonal, podendo então ser escrito o tensor como um fluido do tipo perfeito,

$$T_\nu^\mu = \text{diag}[\rho, -p, -p, -p]. \quad (2.17)$$

Com esta notação para as componentes do TME e calculando as ECE para o elemento de

linha FLRW, obtem-se as chamadas Equações de Friedmann (EF),

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{K}{a^2}, \quad (2.18)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = -\left(8\pi Gp + 2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{K}{a^2}\right). \quad (2.19)$$

Nestas equações, ρ representa a densidade de energia total do universo, proveniente de cada um de seus componentes e suas interações e p a pressão total. A primeira EF motiva a definição de uma densidade crítica para a qual o universo é espacialmente plano, dada por:

$$\rho_c(t) = \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (2.20)$$

onde $H(t) = \dot{a}/a$ o chamado parâmetro de Hubble. O valor da densidade crítica depende do valor do parâmetro de Hubble e evolui ao longo da história cósmica. Na época atual, a densidade crítica tem o valor ^{††}

$$\rho_{c,0} = 1,88 \times 10^{-29} h^2 \text{g cm}^{-3}. \quad (2.21)$$

Combinando as equações acima, encontra-se uma expressão para a aceleração que não envolve curvatura, isto é,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad (2.22)$$

a qual implica em uma desaceleração sempre que a condição de energia forte ($\rho + 3p \geq 0$) for válida.

Partindo das EF ou da equação de continuidade do TME, obtem-se a lei de conservação da energia,

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0. \quad (2.23)$$

Note que com as EF e uma equação de estado relacionando a pressão p e a densidade de energia ρ , $p = p(\rho)$, é possível resolver o sistema, obtendo $a(t)$, $\rho(t)$ e $p(t)$.

Agora, supondo que não há interação entre os distintos tipos de matéria-energia que compõem o universo, pode-se escrever a densidade total como a soma das densidades de cada componente e a lei de conservação é válida para cada uma delas, separadamente,

$$\rho = \sum_i \rho_i \quad \rightarrow \quad \dot{\rho}_i + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho_i + p_i) = 0 \quad (2.24)$$

É de grande importância estudar as possíveis soluções da equação de conservação da energia

^{††} O valor da densidade crítica hoje depende da estimativa da constante de Hubble. Aqui não é assumido um valor fixo de H_0 , deixando o valor de ρ_c em termos do parâmetro h .

(2.23). Para o caso em que $p = w\rho$, com w constante, a solução é analítica, dada por

$$\rho = \rho_0(1+z)^{3(1+w)}. \quad (2.25)$$

Esta solução pode ser aplicada a diferentes tipos de fluido e, em especial, aos fluidos que a princípio constituiriam o conteúdo material do nosso universo como radiação, $w = 1/3$, matéria não-relativística, $w = 0$, e para a densidade de energia associada ao termo da constante cosmológica, $w = -1$:

$$\begin{aligned} w = 1/3 &\iff \rho_\gamma = \rho_{0\gamma}(1+z)^4 \\ w = 0 &\iff \rho_m = \rho_{0m}(1+z)^3 \\ w = -1 &\iff \rho = \rho_{0\Lambda}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Para o caso de um universo plano, é fácil de obter a solução para o fator de escala com respeito ao tempo utilizando a EF (2.18),

$$\begin{aligned} w = 1/3 &\iff a(t) \propto t^{1/2} \\ w = 0 &\iff a(t) \propto t^{2/3} \\ w = -1 &\iff a(t) \propto e^{Ht}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde na última expressão H é uma constante.

Esses diferentes modos de decaimento da densidade de energia para as distintas componentes do universo levam a diferentes eras, cada uma dominada por um desses fluidos. Para um universo primordial, teria-se uma fase dominada pela radiação, chamada era da radiação. Depois, a medida que o universo torna-se maior, as densidades da matéria e radiação vão equilibrando-se até chegar ao ponto em que são iguais, equipartição matéria-radiação. A partir desse momento a matéria começa a dominar a evolução até atingir outro momento de equipartição, mas agora é entre a densidade de energia da constante cosmológica e a matéria. Dependendo da época, os comportamentos apresentados em (2.26) são uma boa aproximação para a dinâmica do universo todo.

Os valores do parâmetro w para radiação e matéria são obtidos da seguinte forma:

Considerando uma partícula de massa m e momentum \vec{p} , sua energia está determinada pela relação relativística $E^2 = p^2 + m^2$. O número de ocupação do espaço de fase, em equilíbrio e a uma temperatura T , está dado pela função de distribuição

$$f(p) = \frac{1}{\exp[(E - \mu)/T] \pm 1}, \quad (2.28)$$

onde μ é o potencial químico de cada espécie. Que o sinal seja mais ou menos depende do tipo de partícula, sendo mais para férmions (estatística de Fermi-Dirac) e menos para bósons (estatística e Bose-Einstein). Da mecânica estatística, se conhece a densidade de energia e a pressão para um gás com as propriedades acima descritas (m, μ, T),

$$\rho = g_* \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E(p) f(p) = \frac{g_*}{2\pi^2} \int_m^\infty dE \frac{(E^2 - m^2)^{1/2}}{\exp[(E - \mu)/T] \pm 1} E^2, \quad (2.29)$$

$$p = g_* \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{pv}{3} f(p) = \frac{g_*}{6\pi^2} \int_m^\infty dE \frac{(E^2 - m^2)^{3/2}}{\exp[(E - \mu)/T] \pm 1}. \quad (2.30)$$

A equação de estado para a radiação é obtida calculando o limite relativístico, correspondente a $T \gg m$, isto é, o limite de $m \rightarrow 0$, obtendo

$$\rho = \begin{cases} (\pi^2/30)g_*T^4 & \text{bósons,} \\ (7/8)(\pi^2/30)g_*T^4 & \text{férmions,} \end{cases} \quad (2.31)$$

$$p = \rho/3, \quad (2.32)$$

produzindo assim, uma equação de estado $w = 1/3$.

Para a matéria não relativística tem-se $T \ll m$, obtendo

$$\rho = g_* m \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} \exp[-(m - \mu)/T], \quad (2.33)$$

$$p = g_* T \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} \exp[-(m - \mu)/T] = \frac{T}{m} \rho, \quad (2.34)$$

o qual é válido tanto para bósons quanto para férmions. Para $T \ll m$, obtem-se uma equação de estado para matéria não relativística $w \simeq 0$, como esperado.

Os parâmetros de densidade e os parâmetros de densidade na época atual para cada componente são definidos como:^{‡‡}

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}, \quad \Omega_{i,0} = \frac{\rho_{i,0}}{\rho_{c,0}}, \quad (2.35)$$

enquanto que o parâmetro de densidade de curvatura, é dado por

$$\Omega_k = \frac{-K}{a^2 H^2}, \quad \Omega_{k,0} = \frac{-K}{a_0^2 H_0^2}. \quad (2.36)$$

A Eq. (2.18) pode ser reescrita em termos dos parâmetros de densidade atuais,

$$H = H_0 \sqrt{\Omega_{\gamma,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{k,0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda,0}}, \quad (2.37)$$

onde estes parâmetros são restritos pela condição de normalização,

$$\Omega_\gamma + \Omega_m + \Omega_k + \Omega_\Lambda = 1. \quad (2.38)$$

Diferentes valores dos parâmetros de densidade medidos hoje Ω_{i0} levam a distintas histórias de expansão do universo, como mostrado na Figura 2.2.

^{‡‡} Para a Constante Cosmológica, a densidade da energia escura não evolui com o tempo. O parâmetro de densidade associado a ela, no entanto, evolui devido à dependência com a densidade crítica.

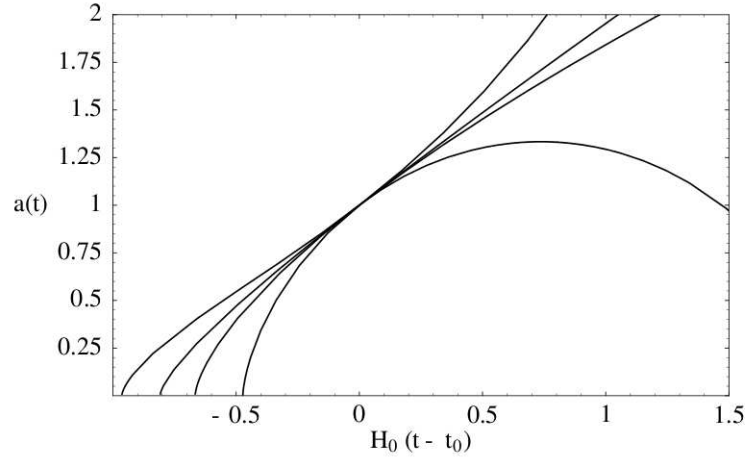


Figura 2.2.: Histórias de expansão do universo para vários valores dos parâmetros de densidade hoje. De cima para baixo as curvas correspondem aos valores $(\Omega_{m0}, \Omega_{\Lambda0}) = (0.3, 0.7), (0.3, 0.0), (1.0, 0.0),$ e $(4.0, 0.0)$ [40].

A última grandeza a ser definida, e que é bastante relevante na análise da evolução dinâmica do universo, é o chamado parâmetro de desaceleração,

$$q \equiv -\frac{\ddot{a}a}{a^2}, \quad (2.39)$$

ou em termos do *redshift*,

$$q(z) = \frac{(1+z)}{H} \frac{\partial H}{\partial z} - 1. \quad (2.40)$$

Este parâmetro define a aceleração ou desaceleração da expansão do universo ao longo da sua história. Um parâmetro de desaceleração negativo na época atual $t = t_0$ ($z = 0$), corresponde a uma fase do universo em expansão acelerada (isto é o que evidenciam as observações atuais, o que será discutido na seção seguinte). Na Figura 2.3, mostra-se a evolução do parâmetro de desaceleração para diferentes valores de $\Omega_{m,0}$ e $\Omega_{k,0}$. Uma discussão sobre a transição entre a fase desacelerada e fase acelerada pode ser vista no Apêndice A

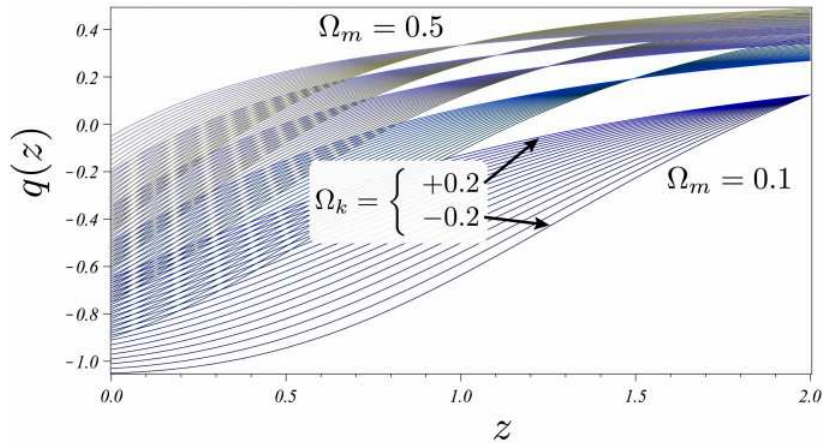


Figura 2.3.: Evolução do parâmetro de desaceleração $q(z)$ para diferentes valores dos parâmetros de densidade em um modelo Λ CDM [41].

2.4. Expansão do Universo

2.4.1. Cinemática da Expansão

§§ Em 1922 o físico russo A. Friedmann [42] demonstrou pela primeira vez que as ECE tinham soluções dinâmicas que podiam corresponder a um universo em expansão. O trabalho do Friedmann foi puramente matemático e só descrevia possíveis soluções de universo para as equações de campo, sem ter relação alguma com observação. Em 1927, o clérigo e astrônomo belga G. Lemaître redescobriu as soluções do Friedmann e as conectou com observações astronômicas do *redshift* galáctico, concluindo que o universo estava em expansão. O trabalho desenvolvido por Edwin Hubble em 1929 [43] mostrou que as galáxias distantes se afastam com uma velocidade proporcional a sua distância [44, 45]. ¶¶

Desses trabalhos, pode ser inferido que se as galáxias afastam-se independente da direção, no passado elas estariam mais próximas umas das outras, implicando em um universo primordial mais denso. Assim, é abolida a ideia de um universo estacionário e, além disso, em concordância com a TRG de Einstein, o espaço-tempo tem um caráter dinâmico. Não é mais plausível pensar em um universo delimitado que está se expandindo com algum ponto central. Na cosmologia moderna, o universo não se expande no espaço, ao invés disso, é o próprio espaço que está em expansão [46]. Nas palavras de deSitter “A Teoria da Relatividade Geral revelou que o espaço e o tempo não são somente o cenário no qual a obra é desenvolvida, eles mesmos são atores e parte essencial da trama” [47].

Os dados do Hubble estavam constituídos por medições de *redshift* e distâncias. Esse conjunto de dados evidenciava uma relação linear entre z e d . A hipótese envolvida para concluir que as galáxias estão se afastando umas das outras ou, especificamente, que o universo está expandindo, é que esse *redshift* é devido à velocidade de expansão. Matematicamente a forma usual de escrever a lei de Hubble é

$$cz = H_0 d , \quad (2.41)$$

onde c é a velocidade da luz e H_0 é a chamada constante de Hubble.

A lei de Hubble é válida somente para baixos *redshifts*, $z \ll 1$, sendo necessárias correções de ordem superior para objetos suficientemente distantes que apresentam altos *redshifts* [46].

Uma outra lei relevante ao tratarmos a expansão do universo é a chamada lei velocidade-distância, sendo escrita da forma:

$$v = H(t)d, \quad (2.42)$$

onde v é a velocidade de recessão, d a distância própria e $H(t)$ o parâmetro de Hubble.

§§ Nesta seção, não normalizaremos a velocidade da luz.

¶¶ As galáxias analisadas deviam estar longe o suficiente para que os movimentos peculiares não fossem relevantes, embora mantendo o regime linear $z \ll 1$.

Esta lei é válida para qualquer distância e qualquer velocidade, implicando que para uma certa distância suficientemente grande a velocidade de recessão ultrapassará a velocidade da luz. Também deve-se notar que, depende do valor do parâmetro de Hubble em um tempo dado, então um objeto a uma mesma distância em diferentes épocas do universo apresentará velocidades de recessão distintas. Esta distância limite, a partir da qual qualquer objeto está recedendo mais rápido que a luz, é conhecida como raio de Hubble [37, 46, 48].

A lei velocidade-distância é exata e pode ser deduzida a partir da métrica, como mostraremos a seguir. Diferenciando com respeito ao tempo a expressão para a distância própria (2.7) e considerando unicamente o movimento devido à expansão (movimento devido ao fluxo do Hubble), faremos a variação da distância comóvel nula:

$$\dot{d}_p = \frac{\dot{a}}{a} a \chi = H(t) d_p, \quad (2.43)$$

dado que $H(t) = \dot{a}/a$. Tem-se então que esta lei é consequência da isotropia e homogeneidade do universo, deduzida a partir de elementos apenas geométricos. Como caso particular, é possível demonstrar que tal lei se reduz à lei linear de Hubble no limite de pequenas distâncias. Porém, antes de fazer isto, mostraremos que uma expansão do universo produz um z , diferente ao efeito Doppler ocasionado por velocidades peculiares.

Analisando a geodésica radial nula na métrica FLRW ($ds = d\Omega = 0$) que seguem dois sinais luminosos, emitidos consecutivamente por uma fonte com coordenada radial comóvel r , nos tempos t_{em} e $t_{em} + \Delta t_{em}$ e recebidos por um observador na origem nos tempos t_0 e $t_0 + \Delta t_0$, respectivamente, temos

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}. \quad (2.44)$$

Como a distância radial comóvel não varia tem-se a seguinte igualdade:

$$\int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{t_e + \Delta t_e}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{cdt}{a(t)}. \quad (2.45)$$

Os intervalos de tempo Δt_0 e Δt_{em} são infinitesimais, então podemos manipular a equação (2.45) e integrá-la, obtendo:

$$\frac{\Delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\Delta t_e}{a(t_e)}. \quad (2.46)$$

Esta é a diferença entre o intervalo de tempo de dois sinais luminosos consecutivos entre os momentos de emissão e recepção. Como apresentado anteriormente, isto produz uma mudança no comprimento de onda emitido e recebido. Sendo o comprimento de onda próprio da fonte $\lambda_{em} = c\Delta t_{em}$ e o recebido $\lambda_0 = c\Delta t_0$, do resultado anterior, temos

$$1 + z \equiv \frac{\Delta t_0}{\Delta t_e} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}. \quad (2.47)$$

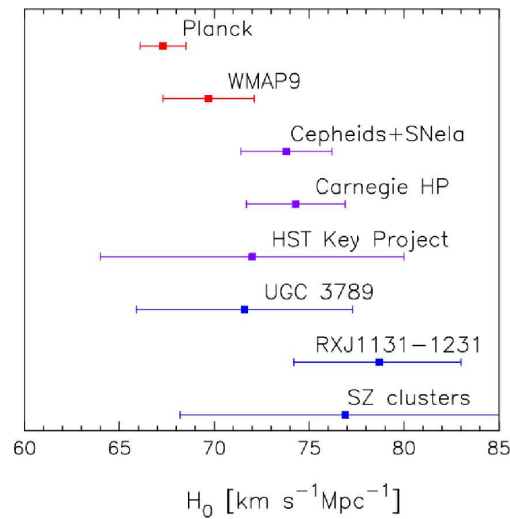


Figura 2.4.: Diferentes estimativas da constante de Hubble inferidas utilizando distintos tipos observações [49].

A partir desse resultado, veremos que a lei de Hubble é o limite de pequenas distâncias e, conseqüentemente, baixas velocidades da lei velocidade-distância. Manteremos só os termos de primeira ordem em todas as expansões em series das quantidades envolvidas. Começando com a geodésica radial nula que descreve um raio de luz,

$$\int_t^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_0^r \frac{dr}{1 - Kr^2} = \chi(r). \quad (2.48)$$

Para uma coordenada radial comóvel $r \ll 1$, $\chi(r) \approx r$. Utilizando a relação entre *redshift* e o fator de escala, e expandindo-o até primeira ordem obtém-se:

$$1 + z \approx 1 - (t - t_0)H_0 \quad \rightarrow \quad z \approx (t_0 - t)H_0. \quad (2.49)$$

Considerando a ordem zero da integral (2.48) e substituindo a equação (2.49),

$$d = a_0 r = c \frac{z}{H_0}, \quad (2.50)$$

obtemos a lei linear de Hubble.

Com esse resultado, conclui-se que a violação da lei de Hubble seria uma prova para testar a homogeneidade e isotropia do universo.

Na Figura 2.4, observa-se diferentes estimativas da constante de Hubble, o que permite perceber a evolução desta medida.

2.4.2. Expansão Acelerada

Em 1998, dois grupos de pesquisa, o Supernova Cosmology Project [50] e High-z Supernova Search Team [51], descobriram que a expansão do Universo está em uma fase acelerada a partir

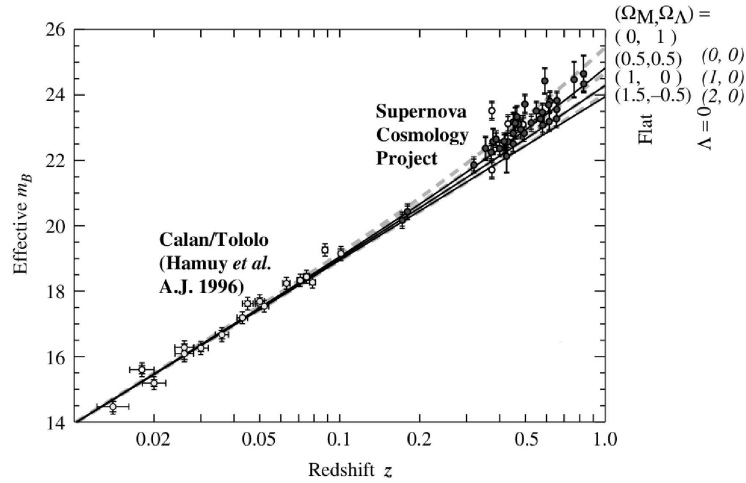


Figura 2.5.: Evidência observacional da EE [50]. Magnitude aparente versus *redshift* para 42 SNIa observadas pelo Supernova Cosmology Project, e 18 SNIa em baixo *redshift* observadas pelo Calán–Tololo Supernovae Survey. Linhas tracejadas e contínuas representam a magnitude aparente para modelos cosmológicos com $\Omega_K = 0$ e $\Omega_\Lambda = 0$, respectivamente, para vários valores de Ω_m .

de observações de Supernovas do tipo Ia (SNIa).

O Supernova Cosmology Project concluiu com 99% de confiança que os dados excluíam um valor de $\Omega_\Lambda \leq 0$. Para um universo plano, ou seja, $\Omega_\Lambda + \Omega_m = 1$, os dados indicaram

$$\Omega_{m0} = 0,28^{+0,09}_{-0,08}(\text{estatístico})^{+0,05}_{-0,04}(\text{sistemáticos}).$$

Com esse resultado, o parâmetro de desaceleração na época atual, Eq.(2.3), possui um valor negativo, $q_0 = -0,58$, o que indica uma expansão acelerada. Os resultados do High-z Supernova Search Team não foram distintos, concluindo que $\Omega_{\Lambda 0} > 0$ com 99,7% de confiança sem assumir algum tipo de curvatura. Neste caso, para um universo plano, encontrou-se com 99,5% de confiança que $q_0 < 0$. No contexto da TRG, para que a expansão do universo seja acelerada é necessário um fluido no conteúdo material que possua uma pressão negativa (ver equação 2.22), atualmente tal fluido é chamado Energia Escura (EE).

O principal indicativo de que $\Omega_{\Lambda 0} > \Omega_{m0}$ é que a luminosidade aparente das SNIa cai mais rapidamente com o *redshift* do que acontece em um universo plano que contem só matéria. Como mostrado na Figura 2.5, o comportamento da distância de luminosidade com o *redshift* em um universo só com constante cosmológica ($\Omega_m = \Omega_K = 0$) é semelhante com o comportamento em um universo vazio e com curvatura ($\Omega_m = \Omega_\Lambda = 0, \Omega_K = 1$), sendo sempre maior no primeiro caso. Para o caso mais realístico, sugerido pelos resultados dos dois grupos, $\Omega_m = 0,3$ e $\Omega_\Lambda = 0,7$, a distância de luminosidade é maior quando comparada com a mesma em um universo vazio até um *redshift* $z = 1,25$. Isto é devido à dominância da matéria para esses valores de *redshift*, o que faz com que o universo expanda-se desaceleradamente nessa época (ver Figura 2.6). Este comportamento é compatível com as observações de SNIa em altos *redshifts* [39].

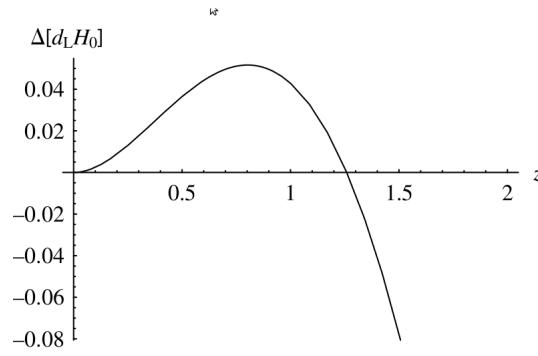


Figura 2.6.: Diferença entre os valores esperados da distância de luminosidade vezes H_0 para o modelo $\Omega_m = 0,3$, $\Omega_\Lambda = 0,7$, $\Omega_K = \Omega_\gamma = 0$ menos o seu valor no modelo vazio $\Omega_m = \Omega_\Lambda = \Omega_\gamma = 0$, $\Omega_K = 1$ [39].

Como mencionado anteriormente, as observações de objetos distantes concluem que o universo está em expansão e, portanto, no passado apresentou uma fase muito quente e muito densa onde a matéria e a radiação encontravam-se em equilíbrio térmico, formando um fluido homogêneo, isto será o nosso objeto de estudo na seção seguinte.

2.5. Nucleossíntese Primordial

Baseado nas observações cosmológicas, o MCP descreve um universo em expansão, com uma fase inicial muito densa e quente. Se utilizarmos as ECE até o instante zero da história cósmica $t = 0$ (com $a(0) = 0$), seria atingida uma singularidade inicial. Nesse momento, as grandezas que descrevem o universo físico como densidades, temperatura, curvatura etc, tomariam valores divergentes. Por isto, o nosso estudo é restrito até a chamada era do Planck ($t = 10^{-43}$ s). Acredita-se que estas inconsistências são produto da extrapolação das ECE e que poderiam ser corrigidas com uma teoria quântica da gravidade.

O universo primordial comporta-se como um meio composto de muitas classes de partículas que, a princípio, poderiam ter diferentes temperaturas. No entanto, como estas estão interagindo intensamente, todas elas apresentam a mesma temperatura, ou seja, encontram-se em equilíbrio térmico. Então, esse plasma primordial pode ser descrito por uma mesma temperatura. Para temperaturas acima de 10^{11} K, a complexidade das interações fortes entre os distintos componentes do plasma primordial dificulta sua descrição.

A partir de 10^{11} K, o equilíbrio entre fótons, elétrons, prótons e nêutrons é mantido pelas interações eletromagnéticas e fraca. As partículas mais abundantes são as que tem uma temperatura limiar inferior à temperatura do plasma (havendo também uma pequena quantidade de bárions), podendo ser tanto criadas quanto aniquiladas em pares, partícula-antipartícula. Para esta temperatura, o processo de criação e aniquilação dominante é,

$$e^- + e^+ \rightleftharpoons \gamma + \gamma. \quad (2.51)$$

A interação fraca permite a conversão próton-nêutron mediante seis processos diferentes,



Calculando a taxa de conversão de um nêutron em um próton, e vice-versa, é possível estimar a razão entre eles, obtendo,

$$\frac{N_n}{N_p} = \exp \frac{-(m_n - m_p)}{kT}, \quad (2.53)$$

o que mostra que, para uma temperatura de 10^{11} K, essa razão é próxima de um.

Quando a temperatura do universo atinge o valor de 10^{10} K, os neutrinos e antineutrinos haviam-se desacoplado do plasma primordial, evoluindo, a partir daí, de maneira independente. No que concerne aos prótons e nêutrons, a razão diminui até o valor 0,16, e depois disto a razão cai lentamente.

Como é observado (vivemos em um universo composto de matéria e não de antimatéria), existiu uma assimetria entre o número de partículas e antipartículas, de modo que, após a aniquilação entre pares, permanece um número certo de bárions. Sua razão com o número de fótons, η , é o único parâmetro do qual dependerá a formação dos elementos leves.

Conforme o universo expande, ele vai esfriando. Para temperaturas abaixo de 5×10^9 K (esta é a temperatura limiar dos elétrons e pósitrons), a taxa de aniquilação elétron-pósitron é superior à produção, obtendo uma liberação de energia que diminuirá o resfriamento do universo e, conseqüentemente, fará com que a temperatura dos fótons seja maior que a temperatura dos neutrinos que já tinham desacoplado do plasma. Com isto, será dito que a temperatura do universo é caracterizada pelos fótons. Até estas temperaturas, a energia dos fótons era alta o suficiente para dissociar o dêuteron. A partir de $0,9 \times 10^9$ K, uma série de reações de captura de nêutrons e prótons é acionada, o que deu origem à formação dos elementos leves: D , ${}^3\text{He}$, ${}^4\text{He}$, ${}^7\text{Li}$. A formação relevante de elementos no universo primordial parou no Li devido à inexistência de elementos estáveis com número de massa igual a 5 e 8.

A observação das quantidades desses elementos formados na NP (ver Figura 2.7) deve ser feita com o cuidado suficiente para que a produção de elementos no interior estelar não leve a uma subestimativa ou superestimativa da NP. Para cada um desses elementos, existem regiões que possibilitam a medição da produção primordial.

- Hélio-4: A abundância primordial do ${}^4\text{He}$ é inferida por medidas da razão ${}^4\text{He}/\text{H}$ em regiões do gás quente ionizado (regiões *HII*) em outras galáxias.
- Deutério: Devido o D ser destruído em todos os processos astrofísicos, a sua abundância primordial é inferida mediante observações da razão D/H em nuvens de hidrogênio em alto *redshift* ($z > 3$).
- Lítio-7: O lítio é criado na evolução de algumas estrelas enquanto é destruído por outras.

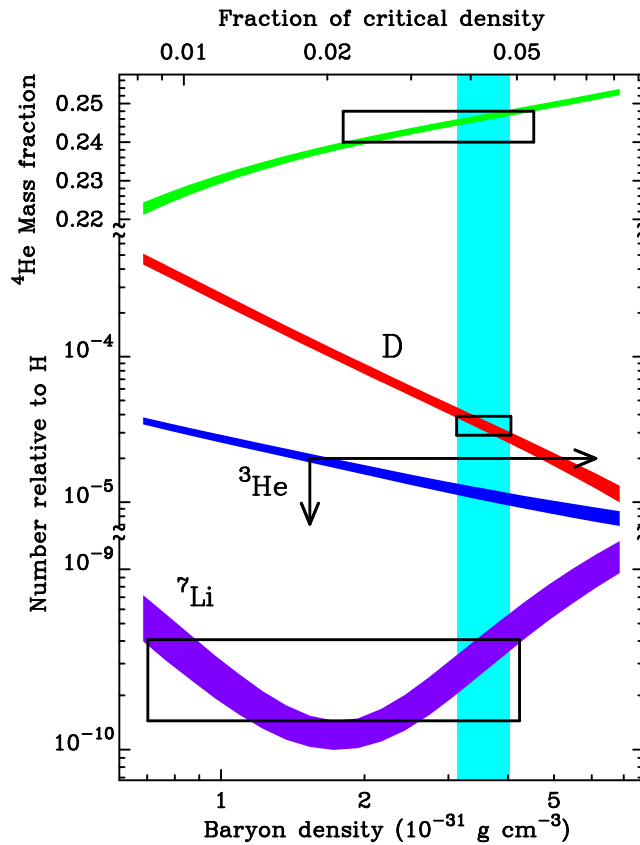


Figura 2.7.: Predição da produção de núcleos leves da Nucleossíntese Primordial do MCP [52].

A sua abundância primordial é inferida por observações das estrelas mais velhas no *halo* da nossa Galáxia.

- Hélio-3: As estrelas queimam deutério em hélio-3 e considera-se que a abundância desses dois elementos permanece constante. Por isto, com medidas da abundância do D em conjunto com a abundância de $D+{}^3\text{He}$ no meio interestelar é inferida a abundância do hélio-3

As previsões do MCP e as observações estão em grande concordância e, faz da NP um dos pilares do modelo.

2.6. Radiação Cósmica de Fundo

Após a NP o universo entrou em uma época em que nada de extraordinário aconteceu além da expansão e o resfriamento. Como estudou-se na seção (1.3), as densidades dos fluidos de matéria e radiação decaem com expoentes diferentes, $\rho_\gamma \propto a^{-4}$ e $\rho_m \propto a^{-3}$, o que leva a um universo primordial dominado pela radiação. No entanto, com a expansão do universo e o fato de que a densidade de matéria decai mais lentamente que a densidade de radiação, chega-se no momento no qual as densidades desses dois componentes são iguais, a chamada *equipartição radiação-matéria*. A partir deste ponto, o fluido que vai dominar a dinâmica é a componente de matéria não-relativística.

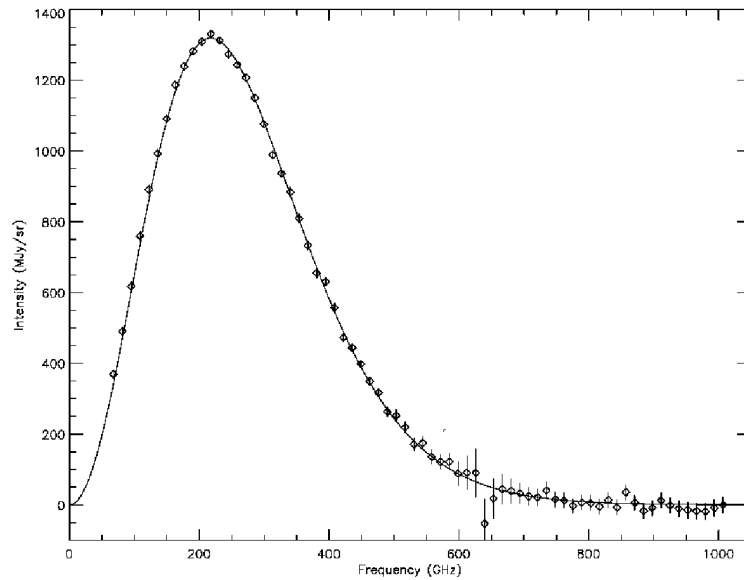


Figura 2.8.: Espectro de corpo negro medido pelo satélite WMAP, onde é possível observar a alta concordância do perfil médio com o esperado [53].

Nesta época, os fótons são muito energéticos e as interações com os elétrons são intensas, o que mantém o universo em equilíbrio com um espectro de corpo negro, dada pela lei de radiação de Planck***,

$$\rho(T, \nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}, \quad (2.54)$$

sendo a densidade de energia total (integrada em todas as frequências) descrita pela lei de Stefan-Boltzmann,

$$\rho(T) = 4\sigma T^4. \quad (2.55)$$

Esta lei e a lei de evolução da densidade de radiação, nos fornecem a evolução da temperatura ao longo da história cósmica,

$$T = T_0 \left(\frac{a_0}{a} \right). \quad (2.56)$$

Quando a temperatura atingiu $T \approx 4000$ K, a energia dos fótons era baixa o suficiente para permitir a neutralização dos átomos de hidrogênio (estado ligado próton-elétron) e, pouco depois, a uma temperatura $T \approx 3000$ K, os fótons deixam de interagir com a matéria, podendo viajar livremente sem serem espalhados, o que constitui a formação da superfície de último espalhamento.

Uma questão interessante para se perguntar é como seria o perfil percebido hoje daquela radiação de corpo negro. Sabemos que tanto a temperatura quanto a frequência escalam com a^{-1} e, como o expoente do denominador é uma função da razão $h\nu/kT$, o denominador não

***Nesta equação, retomamos a constante h .

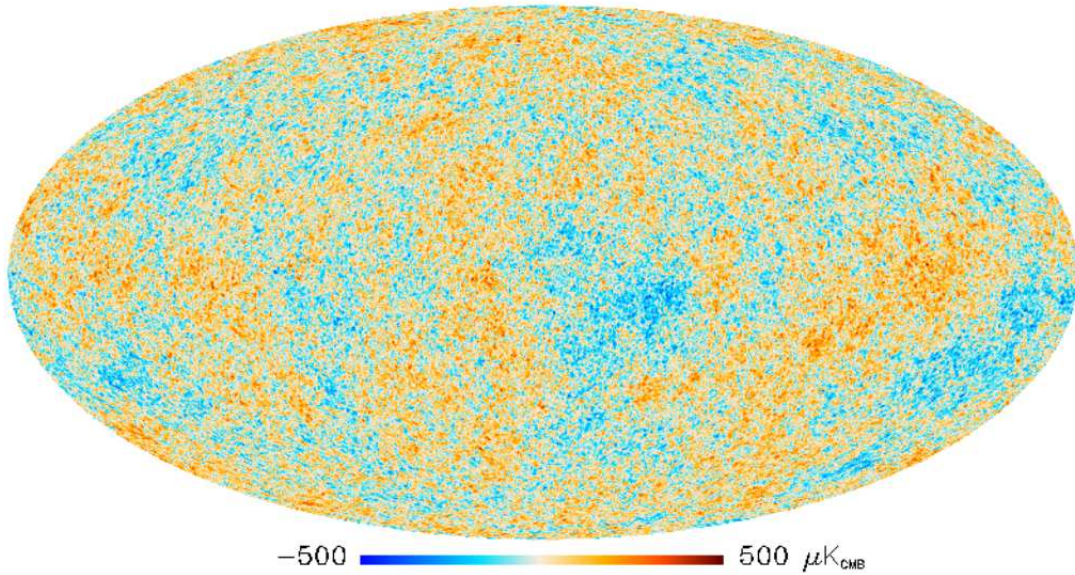


Figura 2.9.: Mapa da RCF em projeção Mollweide obtido pelo satélite espacial Planck [54].

teria efeito sobre o perfil da radiação. Agora, ainda tem-se um fator v^3 do lado direito da equação (2.54) que cai com a^{-3} , embora no lado esquerdo tem-se uma densidade, sabendo que o volume comóvel escala com a^3 , os dois efeitos são cancelados e o perfil de corpo negro é mantido (ver Figura 2.8).

Esta radiação foi medida pela primeira vez por Penzias e Wilson em 1964, e recentemente pelos satélites COBE, WMAP e PLANCK, obtendo uma temperatura atual de 2.72548 ± 0.00057 K [53]. Esta radiação é altamente isotrópica (ver Figura 2.9). O perfil da radiação de corpo negro, mostrado na Figura 2.10 e representado pela equação de Planck (2.54), define uma classe especial de observadores para os quais a radiação possui a mesma temperatura independente da direção. Então, diz-se que um observador está em repouso com respeito ao corpo negro quando a distribuição da radiação aparece ser isotrópica. Aplicando isto ao nosso Universo, um observador possui velocidade peculiar nula quando a RCF é isotrópica para tal observador [55].

É evidente que um observador com uma velocidade peculiar diferente de zero não poderia visualizar um universo isotrópico, pois o vetor velocidade definiria uma direção privilegiada. Pode ser mostrado que, a temperatura de corpo negro transforma-se entre um observador em repouso e um observador em movimento pela relação [56]:

$$T'(\theta') = T \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta'}, \quad (2.57)$$

onde T é a temperatura (isotrópica) medida pelo observador em repouso, T' pelo observador em movimento com velocidade v ($\beta = v/c$), e θ' é o ângulo formado entre a linha de visada e o vetor velocidade medido pelo observador em movimento.

Para velocidades peculiares baixas com respeito à velocidade da luz, expande-se a expressão (2.57) em potências de β

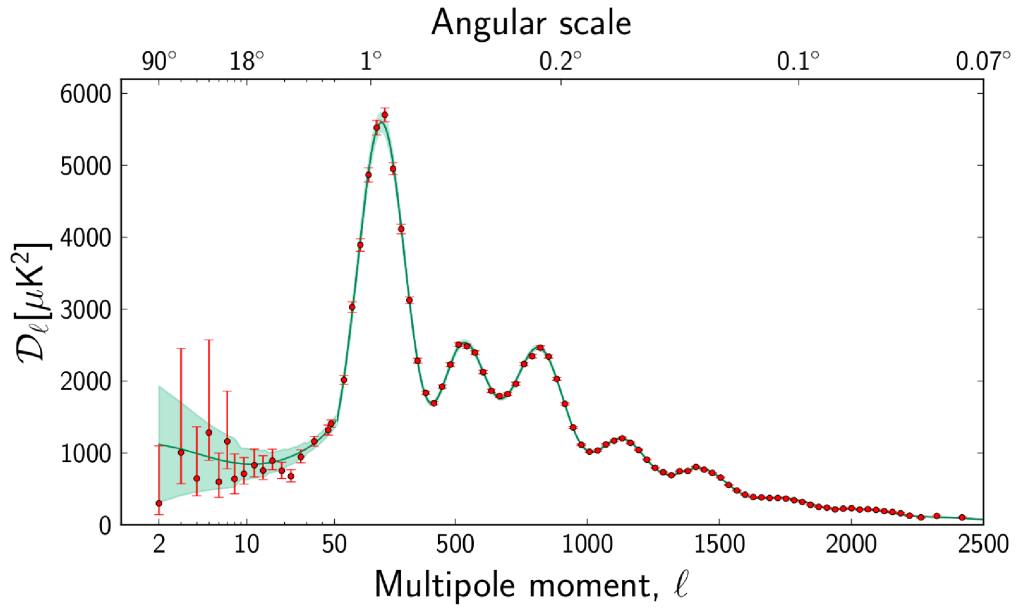


Figura 2.10.: Espectro de potencias da temperatura da RCF obtida com os primeiros resultados do Planck. O eixo horizontal representa a ordem do multipolo, sendo logarítmico até $l = 50$ e linear em diante. O eixo vertical é $l(l + 1)C_l/2\pi$ [54].

$$\Delta T \equiv T' - T = T \left[-\beta P_1(\cos\theta') - \frac{\beta^2}{6} + \frac{2\beta^2}{3} P_2(\cos\theta') + \dots \right] \quad (2.58)$$

onde P_i são os polinômios de Legendre. O termo principal da variação da temperatura é o termo de dipolo (da ordem de $10^{-3}T/\bar{T}$, onde \bar{T} é a velocidade média), embora o termo de quadrupolo não seja desprezível comparado com as flutuações intrínsecas (não produzidas por movimentos peculiares).

É conveniente expandir as variações da temperatura $\Delta T(\hat{n})$ da RCF observada em uma direção dada pelo vetor unitário \hat{n} e o valor médio em harmônico esféricos $Y_l^m(\hat{n})$:

$$\Delta T \equiv T(\hat{n}) - T_0 = \sum_{lm} a_{lm} Y_l^m(\hat{n}), \quad T_0 \equiv \frac{1}{4\pi} \int T(\hat{n}) d\Omega. \quad (2.59)$$

Como a variação na temperatura ΔT é uma quantidade real, os coeficientes devem satisfazer a condição:

$$a_{lm}^* = a_{l-m}. \quad (2.60)$$

O espectro de potência da RCF, mostrado na Figura 2.10, é a soma dos quadrados dos coeficientes

$$C_l = \frac{1}{2l+1} \sum_m |a_{lm}|^2. \quad (2.61)$$

A curvatura e a densidade bariônica são as grandezas mais bem vinculadas pelo espectro de potencias da RCF.

Existem outro tipo de flutuações na RCF que tem origem no universo primordial e que são a causa da formação das estruturas tal como as observamos hoje. As flutuações primárias na RCF foram produzidas por diferentes fontes, a saber [39]:

- Flutuações intrínsecas na temperatura do plasma constituído por elétrons, fótons e núcleons na superfície de último espalhamento.
- Efeito Doppler causado por flutuações de velocidade no plasma na superfície de último espalhamento.
- O *redshift* ou *blueshift* devido a flutuações no potencial gravitacional no último espalhamento, chamado efeito Sachs-Wolfe.

3 Energia Escura

Aceitando a hipótese da Energia Escura como o agente causador da expansão acelerada do Universo, é necessário descrevê-la de forma quantitativa. Para isto, tem sido discutidos vários mecanismos de aceleração. Estes mecanismos devem ser testados com os dados observacionais atuais, de tal modo, que seja possível explicá-los satisfatoriamente ou, pelo menos, obter uma concordância entre o modelo e a observação. Neste capítulo, o nosso objetivo é estudar alguns dos principais modelos, para descrever a energia escura, encontrados na literatura.

3.1. Constante Cosmológica

A constante cosmológica é o principal candidato para descrever a EE, sendo o mecanismo que utiliza o modelo cosmológico padrão para explicar a aceleração. Embora, o modelo padrão se ajusta muito bem aos dados observacionais, este possui uma séria contradição entre teoria e observação, o chamado Problema da Constante Cosmológica, que descreveremos mais adiante.

O termo da constante cosmológica foi introduzido originalmente por Einstein em 1917 [57] para poder obter um universo estático como solução das suas equações de gravitação. Anos depois, com a descoberta da expansão do Universo, o termo foi excluído. Recentemente, com os resultados de Perlmutter et al. [50] e Riess et al. [51], a constante cosmológica tem sido assumida novamente nas ECE como a componente da energia responsável pela aceleração cósmica.

Vejamos as diferentes implicações ao adicionarmos o termo de constante cosmológica de um lado ou de outro nas ECE.

Ao incluir o termo da constante cosmológica no lado esquerdo das ECE,

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

junto com o tensor e escalar de Ricci, a natureza desse novo termo é puramente geométrica. A análise dimensional das ECE implica que $[\Lambda] = L^{-2}$, sugerindo então a interpretação de Λ como a curvatura do espaço vazio.

Entretanto, a maneira de interpretar esse novo termo é diferente quando ele aparece no lado direito das ECE,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} + 8\pi G \rho_{\Lambda} g_{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

com $\rho_{\Lambda} = \Lambda/8\pi G$, uma densidade de energia. Deste lado das ECE, encontra-se o efeito da energia, a pressão e o momentum na gravitação. Ao assumir que o termo $\rho_{\Lambda} \neq 0$, interpreta-se que o espaço vazio produz o mesmo campo gravitacional como se existisse um fluido do tipo perfeito, com $\rho = \rho_{\Lambda}$ e $p = -\rho$. Neste sentido, se pode dizer que o vácuo possui energia e pressão. Para visualizarmos este fato, escreve-se as ECE com uma componente covariante e uma contravariante,

$$G_{\mu}^{\nu} = 8\pi G T_{\mu}^{\nu} + 8\pi G \rho_{\Lambda} \delta_{\mu}^{\nu}, \quad (3.3)$$

com o último termo sendo:

$${}_{\Lambda}T_{\mu}^{\nu} = \begin{bmatrix} \rho_{\Lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{\Lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{\Lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{\Lambda} \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Para um fluido perfeito o TME é escrito da forma

$$f_p T_{\mu}^{\nu} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

ficando evidente a associação de $p_{\Lambda} = -\rho_{\Lambda}$.

Na seção 2.1, foi mencionado que a inclusão de um termo $\Lambda g_{\mu\nu}$ não violava os postulados da teoria. No que segue, analisaremos isto com mais detalhe.

Primeiro, das ECE originais (sem constante cosmológica), tem-se que a derivada covariante do tensor de Einstein, $G_{\mu\nu}$, é nula e, conseqüentemente, também a derivada covariante do TME. Ao adicionar o termo $\Lambda g_{\mu\nu}$, esta propriedade fica invariante pois o tipo de conexão, $\Gamma_{\mu\beta}^{\nu}$, que utiliza a TRG é compatível com a métrica* no sentido que

$$\nabla^{\nu} g_{\nu\mu} = 0. \quad (3.6)$$

Então, a condição de divergência nula ainda é mantida.

A segunda questão importante que deve ser analisada é a covariância do novo termo. O

* A conexão, $\Gamma_{\mu\beta}^{\nu}$, é o objeto matemático que definido em uma variedade permite a derivação covariante, isto é, permite que a derivada de um tensor continue sendo um tensor. Entretanto, ela não é univocamente definida, podendo ser definida mais de um tipo de conexão em uma mesma variedade.

TME de um fluido do tipo perfeito para um observador comóvel, S , em um referencial local de Minkowski, toma a forma

$$T_{00} = \rho, \quad T_{ab} = \delta_{ab}p. \quad (3.7)$$

Realizando uma transformação de Lorentz para um referencial inercial, S' , que possui velocidade $v = v_x^\dagger$ com respeito a S , o TME se transforma do seguinte modo:

$$\rho' = \frac{\rho + \beta^2 p}{1 - \beta^2}, \quad T'_{0x} = \frac{\beta(\rho + p)}{1 - \beta^2}, \quad T'_{xx} = \frac{p + \beta^2 \rho}{1 - \beta^2},$$

$$T'_{yy} = T'_{zz} = p, \quad T'_{oy} = T'_{oz} = T'_{xy} = T'_{yx} = T'_{yz} = 0. \quad (3.8)$$

Substituindo os valores da densidade e pressão para o vácuo, $\rho = \rho_\Lambda$ e $p = p_\Lambda = -\rho_\Lambda$, obtém-se

$$T'_{00} = \rho'_\Lambda = \rho_\Lambda, \quad T'_{ab} = p'_\Lambda \delta_{ab} = p_\Lambda \delta_{ab} \quad (3.9)$$

e o TME é, novamente, diagonal, o que mostra que o termo de constante cosmológica é igual para dois observadores inerciais, isto é, o termo é um invariante de Lorentz [58, 59].

Por outra parte, é importante estudar quais são os efeitos produzidos quando agregamos um novo termo desse tipo no limite newtoniano das ECE. Considere uma métrica $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, onde $h_{\mu\nu}$ é uma perturbação da métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$. Desprezando os efeitos de rotação e variação temporal da métrica perturbada, R_{00} pode ser escrito em termos de um potencial gravitacional Φ , tal que, $R_{00} \simeq \nabla^2 \Phi$. No limite não relativístico, $p \ll \rho$, se reduziria a:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho - \Lambda. \quad (3.10)$$

Para recuperar a equação de Poisson da gravitação Newtoniana, Λ deveria ser nula ou pelo menos suficientemente pequena comparada com $4\pi G\rho$ [60]. Também pode-se mostrar que no limite não relativístico, a equação de movimento de uma partícula de prova em queda livre é modificada, tomando a forma:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{g} + \Omega_\Lambda H_0^2 \vec{r}. \quad (3.11)$$

Para termos uma ideia de quão importante é o segundo termo da equação (3.11), considere o movimento circular do Sistema Solar ao redor do centro da nossa Galáxia. Para uma velocidade de $v_c = 220 \text{ km s}^{-1}$ e um raio $r = 8 \text{ kpc}$, a razão entre a aceleração produzida pela constante cosmológica e a aceleração total $g = v_c^2/r$ é

$$\frac{g_\Lambda}{g} = \frac{\Omega_\Lambda H_0^2 r^2}{v_c^2} \sim 10^{-5}. \quad (3.12)$$

[†] Só é necessário considerar um boost de Lorentz, pois a isotropia implica que nenhuma direção do espaço é privilegiada.

O mesmo cálculo feito para a órbita terrestre produz, $g_\Lambda/g \sim 10^{-22}$ [61].

Dos argumentos anteriormente tratados, conclui-se que a escala de ação a partir da qual os efeitos de Λ são perceptíveis tem que ser maior que a escala na qual a gravidade Newtoniana funciona bem, ou seja, o efeito de Λ deve ser apreciável para distâncias cosmológicas.

Esse valor de Λ inferido desde as observações corresponde a uma densidade de energia

$$\rho_\Lambda \approx 10^{-47} \text{GeV}^4. \quad (3.13)$$

Por outro lado, a densidade de energia do vácuo, calculada como a soma das contribuições da energia de ponto zero de campos quânticos com massa m , é dada por

$$\begin{aligned} \rho_{vac} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{k^2 + m^2} \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \sqrt{k^2 + m^2}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

o que é evidentemente divergente. Porém, é esperado que a teoria quântica de campos seja válida até uma certa escala k_{max} , implicando que a integral na equação (3.14) é finita, ou seja,

$$\rho_{vac} \simeq \frac{k_{max}^4}{16\pi^2}. \quad (3.15)$$

No caso em que é possível aplicar a teoria de campos quânticos até a escala de Planck, ou seja, $k_{max} = m_{planck}$, o valor predito para a densidade de energia de ponto zero é

$$\rho_\Lambda \approx 10^{74} \text{GeV}^4, \quad (3.16)$$

o que constitui uma discrepância de 121 ordens de grandeza entre teoria e observação. Devido principalmente a esta inconsistência, torna-se necessário a busca de outras explicações para a natureza da EE.

Por último, cabe ressaltar que a solução da equação de continuidade (2.23) para um fluido com $p = -\rho$ produz uma densidade de energia constante, $\rho_\Lambda(t) = \rho_\Lambda$. Da análise realizada das CE na seção 2.1.1, observa-se que uma constante cosmológica positiva é compatível com todas as CE, exceto com a condição forte.

3.2. Campo de Quintessência

Um dos possíveis candidatos para a interpretação da energia escura é o chamado campo de quintessência, que é um campo escalar minimamente acoplado, isto é, só interage gravitacionalmente. Além disto, a contribuição da energia cinética à densidade Lagrangiana é canônica, ou seja, só envolve um termo cinético linear. Sob estas condições, a densidade Lagrangiana é [62, 63]

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2} \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi - V(\phi). \quad (3.17)$$

Esta interpretação tem como ente principal a função potencial $V(\phi)$.

A partir da densidade Lagrangiana, pode-se definir o TME do campo [34]

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (3.18)$$

Identificando os termos do Tensor Momento-Energia do campo com os de um fluido perfeito, obtem-se:

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) + \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2, \quad (3.19)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) - \frac{1}{6} (\nabla\phi)^2, \quad (3.20)$$

onde os termos que envolvem o gradiente do potencial são nulos se é aceito o princípio cosmológico [34]. Naturalmente, define-se o parâmetro da equação de estado para o campo como,

$$w_\phi \equiv \frac{p_\phi}{\rho_\phi}. \quad (3.21)$$

As expressões para a pressão e a densidade do campo podem ser escritas, equivalentemente, em termos do potencial, $V(\phi)$, e da energia cinética, K . Somando e subtraindo as expressões (3.19) e (3.20), temos

$$K \equiv \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 = \frac{\rho_\phi + p_\phi}{2} = \frac{\rho_\phi(1 + w_\phi)}{2}, \quad (3.22)$$

$$V = \frac{\rho_\phi - p_\phi}{2} = \frac{\rho_\phi(1 - w_\phi)}{2}, \quad (3.23)$$

de tal maneira que a equação de estado seria expressada como

$$w_\phi = \frac{K - V}{K + V}. \quad (3.24)$$

Por outro lado, utilizando as equações de Euler-Lagrange,

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad (3.25)$$

encontra-se a equação de Klein-Gordon para o campo em um universo FLRW,

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -\frac{dV}{d\phi}. \quad (3.26)$$

O sinal (-) que acompanha a derivada do potencial na equação de Klein-Gordon, faz com que a aceleração do campo seja em direção ao mínimo do potencial.

A equação de Klein-Gordon é equivalente à equação de continuidade. Isto é visto multiplicando a equação anterior por $\dot{\phi}$ e utilizando a expressão para K (3.22) [62]:

$$\dot{\phi}\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi}^2 = -\frac{d\phi dV}{dt d\phi} \quad (3.27)$$

$$\frac{d[\dot{\phi}^2/2]}{dt} + 6H[\dot{\phi}^2/2] = -\dot{V}$$

$$\dot{K} + 6HK = -\dot{V}$$

$$\dot{\rho}_\phi - \dot{V} + 3H(\rho_\phi + p_\phi) = -\dot{V}$$

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + p_\phi) = 0. \quad (3.28)$$

Até o momento, tem sido discutidas a dinâmica do campo de quintessência, a sua densidade Lagrangiana geral e a sua equação de movimento, que se acopla com a dinâmica do universo via o parâmetro de Hubble. Agora, veremos as restrições que comumente são impostas no campo e as consequências que elas tem na dinâmica do universo desde a análise das equações de Friedmann.

A primeira questão que pode ser tratada é o intervalo de variação da equação de estado para o campo de quintessência (3.21). Sob a suposição de que o potencial $V(\phi) \geq 0$, é garantido que a densidade de energia do campo, $\rho = \dot{\phi}^2/2 + V(\phi)$, seja positiva. Consequentemente, a função

$$w_\phi(x) = \frac{x-1}{x+1}; \quad x \equiv \frac{\dot{\phi}^2}{2V(\phi)}, 0 \leq x < \infty \quad (3.29)$$

é monotonicamente crescente a partir do seu mínimo $w_{min} = -1$ em $x = 0$, até o seu valor assintótico $w_{max} \cong +1$, quando $x \rightarrow \infty$. O regime de rolamento lento do campo, apresenta-se quando a energia cinética é desprezível em comparação com a energia potencial, o que implica $x \ll 1$ e $w(x) \simeq -1$. Enquanto a energia cinética vai aumentando, a equação de estado desvia-se de $p = -\rho$, afastando-se do regime de rolamento lento. No momento em que é atingida a equipartição entre a energia cinética e potencial, o campo comporta-se como poeira ($p = 0$). Após esse estado, a pressão torna-se positiva e, finalmente, quando o termo cinético K é completamente dominante, a equação de estado atinge o valor $p = \rho$ ‡. Sumariando, para o campo de quintessência temos o intervalo de variação da EdE,

$$-1 \leq w \leq 1. \quad (3.30)$$

Note, portanto, que valores de $w < -1$ não podem ser explicados por este modelo de campo

‡ Esta descrição é baseada no intervalo de valores da EdE e não na dinâmica do campo.

Potencial	Referencia	
$V_0 \exp -\lambda\phi$	Ratra e Peebles (1988)	[64]
$V_0/\phi^\alpha, \alpha > 0$	Frieman et al (1995)	[65]
$V_0 \exp -\lambda\phi^2/\phi^\alpha, \alpha > 0$	Brax e Martin (2000)	[66]
$V_0(\cosh \lambda\phi - 1)^p$	Sahni e Wang (2000)	[67]
$V_0 \sinh \lambda\phi^{-\alpha}$	Sahni e Starobinsky (2000)	[68]
$V_0(e^{\alpha\kappa\phi} + e^{\beta\kappa\phi})$	Barreiro, Copeland e Nunes (2000)	[69]
$V_0(\exp M_p/\phi - 1)$	Zlatev, Wang e Steinhardt (1999)	[70]
$V_0[(\phi - B)^\alpha + A]e^{-\lambda\phi}$	Albrecht e Skordis (2000)	[71]

Tabela 3.1.: Diferentes tipos de potenciais usados em modelos de quintessência.

escalar canônico, a menos que sejam permitidos valores do potencial $V(\phi) < \dot{\phi}^2/2$, o que produziria uma densidade de energia negativa, implicando na violação da condição de energia fraca. Por essa razão, esse cenário é excluído. Com isto, é visto que o campo de quintessência obedece à condição de energia dominante e, conseqüentemente, obedece também as condições de energia fraca e nula (ver seção 2.1.1).

Para o caso de um universo espacialmente plano, a partir das EF encontra-se uma relação direta entre a energia cinética do campo e a variação temporal do parâmetro de Hubble,

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (3.31)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = -\frac{8\pi G}{6}(\rho + 3P). \quad (3.32)$$

Substituindo a equação (3.31) em (3.32), obtem-se

$$\dot{H} = -8\pi G \frac{(\rho + P)}{2} = -8\pi G \frac{\dot{\phi}^2}{2} = -8\pi G K, \quad (3.33)$$

onde foi utilizada a definição da energia cinética K (3.22). A consequência direta desta expressão é que a variação temporal do parâmetro de Hubble para um universo dominado por um campo de quintessência sempre é negativa ou pelo menos nula. Esta última condição, $\dot{H} = 0$, só acontece para o caso em que a dinâmica está dominada por uma constante cosmológica ou equivalentemente quando o campo é totalmente estático [13].

3.3. Campo Fantasma

O conceito de campo fantasma foi introduzido por Caldwell em 2002 [12] como uma alternativa para explicar a natureza da EE. Os vínculos impostos pelas observações cosmológicas recentes permitem valores de $w < -1$, fato que não poderia ser explicado de maneira fundamental com um modelo de quintessência, dado o intervalo limitado de variação da EdE para este campo

($-1 \leq w \leq 1$). Por isto, foi desenvolvido um novo tipo de campo que permite valores de w menores que -1 .

O modelo proposto por Caldwell consistia de um espaço-tempo FLRW plano, preenchido por uma componente de matéria escura e uma componente de energia fantasma. O campo fantasma tem densidade de energia positiva, $\rho_f > 0$, o que impõe a condição sobre o potencial de ser $V > 0$ (3.37), do mesmo modo que com o campo de quintessência. A diferença surge em que a pressão é negativa o suficiente, tal que, $\rho_f + p_f < 0$, produzindo $w < -1$ [12].

O modo de introduzir o campo fantasma de forma fundamental, ou seja, a partir de uma formulação da densidade lagrangiana do campo, \mathcal{L}_f , é trocando o sinal do termo cinético,

$$\mathcal{L}_f = -\frac{1}{2}\partial_\nu\phi\partial^\nu\phi - V(\phi). \quad (3.34)$$

Esta modificação faz com que a energia cinética do campo seja negativa,

$$K = -\frac{\dot{\phi}^2}{2} \quad (3.35)$$

e a equação de movimento tome a forma

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = +\frac{dV}{d\phi}. \quad (3.36)$$

Com isto a dinâmica do campo muda drasticamente. A evolução de ϕ tende a regiões de maior potencial, mantendo assim a condição $\rho_f > 0$, ou seja,

$$\rho = K + V = -\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) > 0. \quad (3.37)$$

Devido à conexão direta que há entre o parâmetro da EdE, a evolução da densidade de energia escura e a expansão do universo, é de grande importância estudarmos as consequências produzidas por valores negativos de w . Ao analisarmos a equação de conservação da energia para um fluido em um universo FLRW (como visto na seção 2.3),

$$\dot{\rho}_i = -3H(\rho_i + p_i), \quad (3.38)$$

obtem-se a equação diferencial da evolução da densidade de energia com o fator de escala, $a(t)$, em termos do parâmetro w ,

$$\frac{d \ln \rho_i}{d \ln a} = -3(1 + w_i). \quad (3.39)$$

Desta relação, se deduz que para um campo fantasma ($w_f < -1$), a energia permanece constante enquanto a densidade aumenta se o universo expandir [14].

Outro efeito do campo fantasma na dinâmica do universo, é observado na expressão (3.33), onde para a energia fantasma o termo cinético é negativo, atingindo uma aceleração na taxa de

expansão, [13] §.

$$\dot{H} = \frac{\dot{\phi}^2}{2} \rightarrow \dot{H} > 0. \quad (3.40)$$

Cabe ainda ressaltar que o campo fantasma viola todas as condições de energia aqui apresentadas. A violação destas condições, contudo, não é uma razão suficiente para abandonar esta abordagem para o problema da aceleração cósmica.

3.4. Gás de Chaplygin

Nesta seção, discutiremos um modelo que unifica a energia escura e a matéria escura, o chamado modelo de quartessência ou gás de Chaplygin. Neste cenário, a energia e matéria escuras são modeladas pelo mesmo fluido [73], com equação de estado

$$p = -\frac{A}{\rho}, \quad (3.41)$$

onde $\rho > 0$ e A é uma constante positiva.

Em um universo de FLRW preenchido por um fluido com esta EdE, ao resolver a equação de continuidade (2.23), obtem-se

$$\rho = \sqrt{A + \frac{B}{a^6}}, \quad (3.42)$$

onde B é uma constante de integração.

Ao selecionar um valor positivo para B , observa-se que para $a \ll B/A$ a expressão (3.42) reduz-se a

$$\rho \cong \frac{\sqrt{B}}{a^3}, \quad (3.43)$$

o que corresponde basicamente à evolução da densidade de energia em um universo dominado por matéria tipo poeira ($p = 0$). Por outro lado, para valores grandes do fator de escala, segue que

$$\rho \cong \sqrt{A} \quad \text{e} \quad p \cong -\sqrt{A}, \quad (3.44)$$

correspondendo a um universo dominado por uma constante cosmológica. Ao mantermos termos até primeira ordem para valores grandes de a , tem-se que a densidade e a pressão são:

$$\rho \cong \sqrt{A} + a^{-6} \frac{B}{2\sqrt{A}}, \quad (3.45)$$

§ Para uma discussão do futuro de um universo dominado por um campo fantasma, ver [72].

$$p \cong -\sqrt{A} + a^{-6} \frac{B}{2\sqrt{A}}. \quad (3.46)$$

Estas duas expressões para a densidade e a pressão descrevem uma mistura entre uma constante cosmológica e um tipo de matéria chamada matéria rígida, *stiff matter* (devido ao fato de que a velocidade da luz iguala-se à velocidade do som), e que está regida pela EdE,

$$p = \rho \iff w = 1. \quad (3.47)$$

Um universo FLRW preenchido por um gás de Chaplygin apresenta algumas fases distintas: desde uma fase dominada por matéria tipo poeira, passando por uma fase dominada por uma constante cosmológica e matéria rígida, até atingir uma fase dominada por uma constante cosmológica. É direta a associação da pressão e da densidade do gás de Chaplygin com o potencial e a energia cinética de um campo escalar, o qual foi discutido na seção (3.2)

Por último, note-se que uma aceleração cósmica é obtida quando

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G(\rho + 3p) > 0 \implies a^6 > \frac{B}{2A}, \quad (3.48)$$

mostrando assim que, a princípio, a aceleração poderia ser explicada com este tipo de modelo, sendo as constantes A e B determinadas com vínculos observacionais [74].

3.5. Gravidade Modificada

Até o momento, foram tratadas alternativas para explicar a aceleração cósmica que modificam o conteúdo material do universo ou, em outras palavras, o TME, enquanto a descrição geométrica tem permanecido invariante (tensor de Einstein). Entretanto, outro tipo de abordagem do problema da aceleração cósmica é a modificação das equações que governam o campo gravitacional na teoria do Einstein, do lado direito das ECE. Nesta seção, apresenta-se brevemente o formalismo métrico das teorias de gravidade $f(R)$, nas quais o acoplamento entre o conteúdo material e a geometria do espaço-tempo não se dá mais mediante a proporcionalidade do tensor de Einstein e o tensor Momento-Energia [¶].

Para obter as equações da gravitação nas teorias $f(R)$, minimiza-se a ação de Einstein-Hilbert generalizada,

$$S = \frac{1}{8\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_M(g_{\mu\nu}, \psi), \quad (3.49)$$

onde G é a constante gravitacional, g o determinante do tensor métrico, R o escalar de Ricci, $f(R)$ uma função arbitrária e S_M a ação da matéria para o campo ψ (ψ representa coletivamente os campos de matéria).

[¶] Para uma revisão sobre teorias $f(R)$, ver [76].

Por formalismo métrico entende-se que a variação da ação só depende do campo $g_{\mu\nu}$, assumindo a conexão de Levi-Civita, ou seja, o tensor métrico e a conexão não são entidades independentes.

Minimizando a ação (3.49) com respeito a $\delta g_{\mu\nu}$, obtém-se:

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - [\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square]f'(R) = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (3.50)$$

onde uma linha representa a diferenciação com respeito ao argumento, ∇_μ é a derivada covariante associada à conexão de Levi-Civita e $\square \equiv \nabla^\nu \nabla_\nu$. Sendo então, (3.50) as novas equações de campo.

Cabe notar que, ao contrário das ECE, o traço das equações (3.50) é uma equação diferencial e não algébrica,

$$\begin{aligned} R = -kT &\iff \text{TRG} \\ f'(R)R - 2f(R) + 3\square f'(R) = kT &\iff f(R). \end{aligned} \quad (3.51)$$

As equações de campo modificadas (3.50) podem ser reescritas mantendo o tensor de Einstein do lado esquerdo das equações enquanto, no lado direito, encontra-se o tensor momento-energia da matéria e um tensor momento-energia efetivo composto por termos geométricos,

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi GT_{\mu\nu}}{f'(R)} + g_{\mu\nu} \frac{[f(R) - Rf'(R)]}{2f'(R)} + \frac{[\nabla_\mu \nabla_\nu f'(R) - g_{\mu\nu} \square f'(R)]}{f'(R)}, \quad (3.52)$$

interpretando-se a fração $G/f'(R)$, no segundo membro, como se fosse uma constante gravitacional efetiva.

No caso particular do universo de FLRW, as EF generalizadas para as teorias de gravidade $f(R)$ tem a mesma forma que na TRG (2.18) e (2.19) com a identificação, $p \rightarrow p_{ef} = p_m + p_c$ e $\rho \rightarrow \rho_{ef} = \rho_m + \rho_c$, com p_m e ρ_m sendo a pressão e a densidade da matéria. A “pressão” e a “densidade” produzidas pela curvatura são dadas por:

$$p_c = \frac{1}{8\pi G f'} \left[2 \frac{\dot{a}}{a} \dot{R} f' + \ddot{R} f'' + \dot{R}^2 + f''' - \frac{1}{2} [f - Rf'] \right], \quad (3.53)$$

$$\rho_c = \frac{1}{8\pi G f'} \left[\frac{1}{2} \left(f - Rf' - 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{R} f'' \right) \right]. \quad (3.54)$$

A princípio esses termos podem induzir uma aceleração cósmica.

Cabe ressaltar que os novos termos de pressão e densidade, e de maneira geral, o tensor momento energia efetivo, devem ser interpretados como efeitos geométricos e não como outro tipo de fonte [75].

3.6. Parametrizações da Equação de Estado

As abordagens tratadas até este ponto para explicar a natureza da energia escura são descrições fundamentais. Entretanto, por questões práticas, o problema da descrição da EE pode ser tratado comumente de uma forma mais fenomenológica, parametrizando a EdE, w , onde w é uma função do *redshift* ou equivalentemente do fator de escala.

Nesta abordagem, o objetivo é fazer uma expansão em series de funções da seguinte forma:

$$w(z) = \sum_{n=0} w_n x_n(z), \quad (3.55)$$

sendo $x_n(z)$ alguma função bem comportada do *redshift* $\forall n$ (dependência implícita de t), e w_n os coeficientes da expansão que são ajustados fazendo um análise estatística com os dados observacionais. Esta série, no entanto, deve ser truncada e, por motivos de precisão dos dados atuais, as constantes w_n só são restritas de maneira efetiva até primeira ordem. Assim, a EdE é dada pelas funções $x_n(z)$ e os parâmetros w_n , que são independentes de z .

É usual construir EdE biparamétricas, tal que

$$x_0 = 1 \quad \text{e} \quad w_0 = w(0), \quad (3.56)$$

o que também pode ser escrito como

$$w(z) = w_0 + w_1 g(z), \quad (3.57)$$

onde $g(z)$ é uma função arbitrária que obedece à condição $g(0) = 0$. Desta forma, representa-se a parte constante da equação e a evolução da EE estaria incluída somente no termo de primeira ordem.

Podemos ainda calcular a função de evolução da energia escura resolvendo a equação de continuidade (2.23), utilizando uma EdE geral $w(z)$:

$$f(z) \equiv \frac{\rho(z)}{\rho_0} = \exp \left[3 \int_0^z \frac{1 + w(z')}{1 + z'} dz' \right] \quad (3.58)$$

e com isto temos que o parâmetro de Hubble é escrito como:

$$H^2(z) = H_0^2 [\Omega_\gamma (1+z)^4 + \Omega_m (1+z)^3 + \Omega_k (1+z)^2 + \Omega_x f(z)], \quad (3.59)$$

onde Ω_x representa o parâmetro de densidade da energia escura.

Utilizando o desenvolvimento do modelo de quintessência (seção 3.2), sempre que se tenha que $w > -1$, podemos reconstruir o campo escalar partindo da EdE. Solucionando a equação de continuidade para uma EdE $w(a)$ (3.58) e escrevendo a densidade de energia do campo hoje em termos da densidade crítica e do parâmetro de densidade,

$w(z)$	Referencia	
$w_0 + w_1 \frac{z}{1+z}$	Chevallier, Polarsky e Linder	[6]
$w_0 + w_1 \frac{(1+z)^{-\beta} - 1}{\beta}$	Barboza, Alcaniz, Zhu e Silva	[7]
$w_0 + w_1 \frac{z(1+z)}{1+z^2}$	Barboza e Alcaniz	[8]
$w_0 + w_1 \left[\frac{\sin(1+z) - (1+z) \sin(1)}{1+z} \right]$	Lazkoz, Salzano e Sendra	[9]
$-1 + (1 + w_0) \exp \left[\frac{c(1-(1+z)^{n-1})}{n-1} \right]$	Adak, Majumdar e Pal	[10]

Tabela 3.2.: Diferentes tipos de parametrizações da EdE da EE.

$$\rho_\phi(a) = \Omega_x \rho_c \exp 3 \int_a^1 d \ln a [1 + w(a)]. \quad (3.60)$$

A partir da definição da energia cinética (3.22) e substituindo a expressão anterior para a densidade de energia do campo, escrevemos ϕ em função do fator de escala da seguinte forma:

$$\phi(a) = \int d \ln a H^{-1} \sqrt{\rho_\phi(a) [1 + w(a)]}, \quad (3.61)$$

e tanto o potencial quanto a energia cinética estão determinados pela densidade de energia e a EdE

$$V(a) = \frac{1}{2} \rho_\phi(a) [1 - w_\phi(a)], \quad (3.62)$$

$$K(a) = \frac{1}{2} \rho_\phi(a) [1 + w_\phi(a)]. \quad (3.63)$$

Obtendo assim, todas as quantidades que caracterizam o campo escalar.

Existem muitas equações paramétricas da EdE da EE, todas elas feitas com o objetivo de ajustar a dinâmica do universo com as observações atuais. Algumas parametrizações encontradas na literatura são mostradas na Tabela 3.2. Vamos estudar em mais detalhe algumas delas.

3.6.1. Parametrização Chevallier-Polarsky-Linder (CPL)

Esta parametrização foi introduzida por primeira vez por Chevallier e Polarsky em [6] e, posteriormente, por Linder em [77] com a forma usualmente utilizada,

$$w_{CPL}(a) = w_0 + (1 - a/a_0)w_1, \quad (3.64)$$

ou, em termos do *redshift*,

$$w_{CPL}(z) = w_0 + \frac{z}{1+z} w_1. \quad (3.65)$$

Esta parametrização segue as condições mencionadas na seção anterior, onde a constante w_0

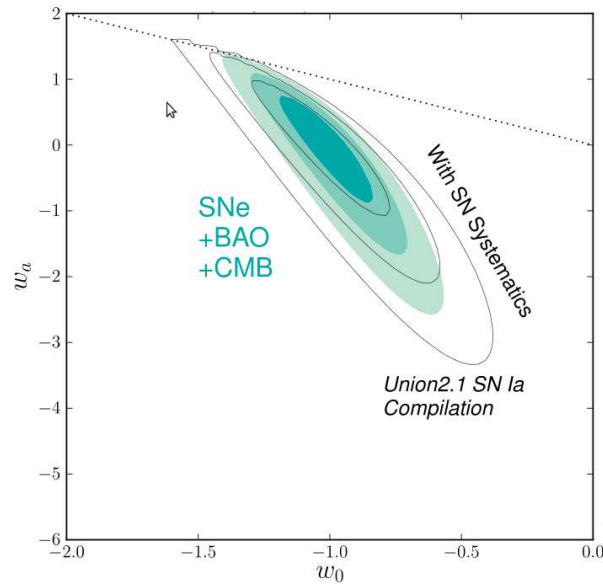


Figura 3.1.: Níveis de confiança de 1, 2 e 3σ para o modelo CPL plano obtidos por Suzuki et al. com dados de SNe Ia, OAB, RCF e um prior em H_0 .

representa o valor atual da EdE e a constante w_1 o valor da primeira derivada com respeito ao *redshift* em $z = 0$.

A parametrização CPL possui as seguintes vantagens:

- Espaço paramétrico bidimensional
- Para baixos *redshifts*, ela possui um comportamento linear, $w(z) \rightarrow w_0 + w_1 z$.
- É uma função limitada em altos *redshifts*, com o valor limite para $z \rightarrow \infty$, $w \rightarrow w_0 + w_1$.
- Pode-se recuperar a Constante Cosmológica como caso particular para $w_0 = -1$ e $w_1 = 0$.
- A densidade de energia pode ser integrada analiticamente,

$$f_{CPL}(z) = (1 + z)^{3(1+w_0+w_1)} \exp -w_1 \frac{z}{1+z}. \quad (3.66)$$

Entretanto, esta parametrização também sofre de alguns problemas, tais como:

- A partir de um ponto de vista teórico, ela apresenta uma divergência no fim da história do universo ($z = -1$) tanto na EdE (3.6.1) quanto na densidade de energia (3.66).
- A partir de um ponto de vista observacional, os parâmetros w_0 e w_1 encontram-se altamente correlacionados, com uma grande incerteza associada a w_1 (ver Figura 3.1).

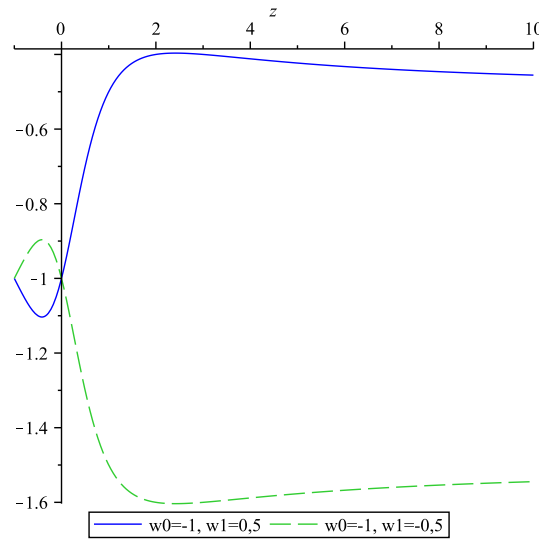


Figura 3.2.: Comportamento da função $g(z) = z(1+z)/1+z^2$ da parametrização BA. As linhas representam valores positivos e negativos do parâmetro w_1 .

3.6.2. Parametrização Barboza-Alcaniz (BA)

Esta parametrização foi introduzida por Barboza e Alcaniz em [8] com o objetivo de estender o intervalo de aplicabilidade da EdE da energia escura à história toda do universo, a qual depende do tempo (implicitamente) e apresenta o comportamento assintótico linear em baixos *redshifts*,

$$w(z) = w_0 + w_1 \frac{z(z+1)}{1+z^2}. \quad (3.67)$$

Note que, ao contrário da parametrização CPL, esta permanece limitada em todo o intervalo de *redshift* $[-1, \infty)$. A densidade de energia é encontrada solucionando (2.23), é dada por

$$\rho_{BA}(z) = \rho_0(1+z)^{3(1+w_0)}(1+z^2)^{3w_1/2}. \quad (3.68)$$

A parametrização BA permite uma divisão do plano $(w_0 - w_1)$ em seis regiões, de acordo com os valores destes dois parâmetros que implicam:

- Uma região associada a um campo de quintessência $(-1 \leq w \leq 1)$.
- Uma região associada a um campo fantasma $(w < -1)$.
- Duas regiões desconexas, onde a equação de estado ao longo da história do universo passa por fases de campo quintessencial e de campo fantasma.
- Uma região proibida, cujos valores de w_0 e w_1 produziriam uma densidade de energia escura dominante à da matéria em $z \gg 1$, o que atrapalharia a formação de estruturas.
- Uma região proibida, a causa da atual expansão acelerada do universo. Os valores dos parâmetros nesta região produzem uma desaceleração cósmica hoje.

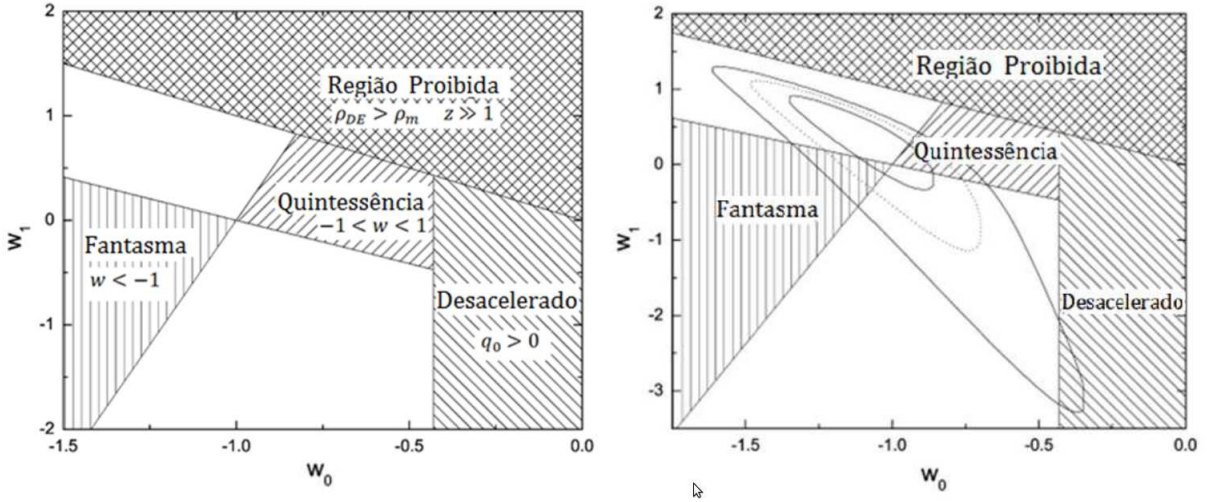


Figura 3.3.: Divisão do espaço paramétrico para a EdE Barboza-Alcaniz (lado esquerdo). Níveis de confiança em 68,3%, 95,4% e 99,7% obtidos por Barboza e Alcaniz (lado direito) [8].

Para encontrar as regiões dos campos de quintessência e fantasma, procura-se o máximo e o mínimo global (esta parametrização só apresenta um máximo e um mínimo, ver Figura 3.2), os quais são encontrados em $z_{\pm} = 1 \pm \sqrt{2}$ que são, respectivamente, $w_- = w(z_-) = w_0 - 0,21w_1$, o mínimo (máximo) e $w_+ = w(z_+) = w_0 + 1,21w_1$, o máximo (mínimo) para $w_1 > 0$ ($w_1 < 0$). Estas condições impõem os seguintes limites para quintessência:

$$-1 \leq w_0 - 0,21w_1 \quad \text{e} \quad w_0 + 1,21w_1 \leq 1 \quad \text{se} \quad w_1 > 0, \quad (3.69)$$

e

$$-1 \leq w_0 + 1,21w_1 \quad \text{e} \quad w_0 - 0,21w_1 \leq 1 \quad \text{se} \quad w_1 < 0. \quad (3.70)$$

Para o campo fantasma, temos:

$$w_0 + 1,21w_1 < -1 \quad \text{se} \quad w_1 > 0, \quad (3.71)$$

e

$$w_0 - 0,21w_1 < -1 \quad \text{se} \quad w_1 < 0. \quad (3.72)$$

Para delimitar a região proibida para evitar a dominância da energia escura em $z \gg 1$, impomos que o comportamento assintótico da densidade de energia seja menor que a terceira potencia (comportamento da matéria), isto é,

$$z \gg 1 \rightarrow f_{BA}(z) \cong z^{3(1+w_0+w_1)}, \quad (3.73)$$

implicando em

$$w_0 + w_1 < 0. \quad (3.74)$$

A última região, a região de aceleração, é obtida impondo que o parâmetro de desaceleração hoje seja menor que zero,

$$q(z) = -\frac{\ddot{a}}{aH^2} = \frac{1}{2}[1 + 3w(z)\Omega_x], \quad (3.75)$$

onde foi usado a condição de normalização para um universo plano, sem levar em conta a radiação ($\Omega_m + \Omega_x = 1$). Agora, calculando o valor de $w(z)$ na presente época com a condição $q_0 < 0$, temos

$$w_0 < -\frac{1}{3(1 - \Omega_m)}, \quad (3.76)$$

que para $\Omega_m = 0,27$ toma o valor $w_0 \leq -0,43$. Esta divisão do espaço paramétrico é mostrada na Figura 3.3.

Os vínculos observacionais encontrados no artigo original [8] são mostrados na Figura 3.3, para os quais foram utilizados o conjunto de dados de Supernovas do tipo Ia da compilação SNLS I, medidas de oscilações acústicas bariônicas do SSDS, o \mathcal{R} -parâmetro de WMAP5 e dados de $H(z)$.

Note ainda que a classificação do espaço de fase da Figura 3.3 pode ser estendida para a parametrização CPL. Entretanto, para esta EdE, só é possível obter as regiões de desaceleração, proibida e de campo fantasma uma vez que a parametrização CPL não é limitada para toda a história do universo.

4 Vínculos Observacionais

Neste capítulo, apresentamos o estudo principal deste trabalho de dissertação, no qual, ao quantificar o poder de vínculo dos dados atuais com a chamada Figura de Mérito (FoM), exploramos a forma de otimizar os vínculos observacionais impostos nos parâmetros de uma EdE geral via reparametrização. Apresentamos uma expressão analítica para a variação do valor da FoM, ao realizar uma transformação do espaço paramétrico ($w_0 - w_1$) para o espaço ($w_0 - w_c$), de modo que neste espaço transformado os parâmetros estejam total ou minimamente correlacionados. Os resultados obtidos analiticamente com esta equação são contrastados com os resultados da análise estatística da EdE original e da EdE reparametrizada para o caso dos modelos BA e CPL.

4.1. Testes Cosmológicos

4.1.1. Supernova do Tipo Ia como Vela Padrão

Na seção 2.2, foi definida um tipo de distância em termos da luminosidade intrínseca do objeto e o fluxo recebido na terra, a chamada distância luminosidade, d_L . A utilidade desta definição surge ao encontrar objetos no céu para os quais pode-se padronizar a sua luminosidade intrínseca ou, equivalentemente, a sua magnitude absoluta. Atualmente, esses objetos utilizados como vela padronizável são as Supernovas do tipo Ia (SNs Ia).

O termo Supernova (SN) refere-se ao evento de explosão de uma estrela de alta massa ($M > 9M_\odot$), sendo esta fase um dos possíveis estágios finais da evolução estelar. As supernovas são classificadas de acordo a sua aparência espectral acerca do brilho máximo da seguinte forma:

- SN do tipo I: não possuem traços claros de hidrogênio. Estas por sua vez podem ser classificadas em:

-SN do tipo Ia: o espectro deste tipo de SNs é dominado por linhas de elementos pesados, tal como cálcio, silício, enxofre e ferro. Não possui linhas de hélio. Este tipo de SN

é muito uniforme na sua aparência, embora mostre certa dispersão na sua luminosidade e evolução espectral.

-SN do tipo Ib: mostram linhas proeminentes de hélio.

-SN do tipo Ic: fraca linha do hélio ou sem a presença dela.

- SN do tipo II: apresentam traços de hidrogênio no seu espectro no brilho máximo.

O modelo mais aceito para explicar a explosão de uma SN Ia descreve a acreção de matéria por parte de uma anã branca de carbono e oxigênio em um sistema binário, até que seja atingido o limite de Chandrasekhar por parte da anã branca acretora. Este limite corresponde ao valor máximo de massa que pode suportar a pressão de degeneração de elétrons antes de colapsar gravitacionalmente. O limite é bem estabelecido para anãs brancas sem rotação, ou seja, $1,38M_{\odot}$ [78, 79]. No momento de atingir este limite, as altas temperaturas e densidades causam a ignição de reações termonucleares de queima de carbono e oxigênio. Esses processos produzem energia suficiente para superar a energia de ligação, conseguindo então desintegrar a estrela, levando assim, a uma explosão total, não deixando nenhum remanescente.

Existem dois cenários para explicar a acreção de matéria. O primeiro consiste da acreção de matéria por parte de uma anã branca a partir de uma companheira, tal como uma gigante vermelha. O segundo consiste da colisão de duas anãs brancas [80, 81, 82, 83].

A grande importância das SNs Ia no estudo da cosmologia é devida ao descobrimento de uma relação empírica entre uma quantidade observada e uma quantidade física. Estas são o declínio na magnitude da banda (B) nos primeiros 15 dias após o brilho máximo (ver Figura 4.1) e a luminosidade da supernova [83].

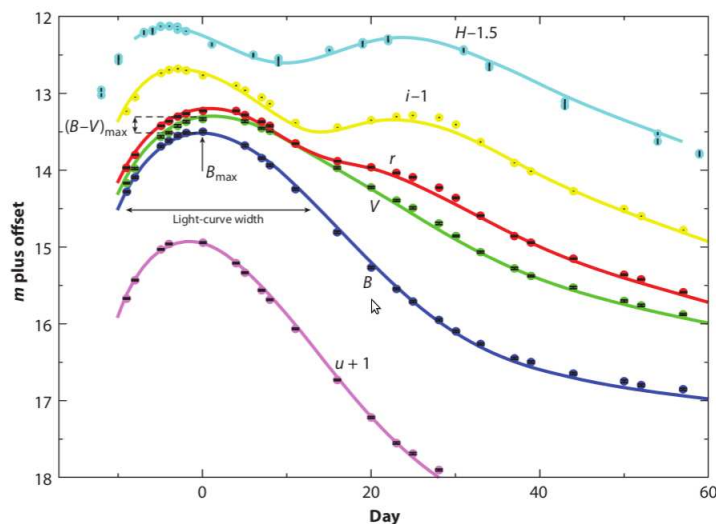


Figura 4.1.: Curvas de luz no óptico e no infravermelho próximo da supernova SN 2007af, obtidas pelo *Carnegie Supernova Project* [81].

Na época atual, há dois tipos de calibrações principais para tratar as curvas de luz de SNs Ia. Uma delas é a MCLS2k2 (segunda geração da calibração MCLS, *Multi-color Light Curve*

Shape) e a segunda é a calibração SALT2 (segunda geração da calibração SALT, *Spectral Adaptive Light curve Template*). As maiores diferenças entre estes dois tipos de calibrações residem no modelo de referência espectral nas regiões azul e ultravioleta, e sua interpretação do avermelhamento. Enquanto a MCLS2k2 utiliza SNs em baixo *redshift* ($z < 0.01$) como amostra de referência, a SALT2 combina dados em baixo e alto *redshift*, onde é necessária a utilização de um modelo cosmológico de fundo no tratamento de SNs que se encontram além do regime linear. Como consequência disto, na MCLS2k2 pode ser induzido um viés, dificultando a obtenção de dados de alta qualidade no ultravioleta, enquanto a SALT2 pode não ter a capacidade de detectar alterações intrínsecas com o *redshift* e fazer uso de dados fracos. Outra diferença relevante entre as duas calibrações envolve o tratamento da relação cor-luminosidade. MCLS2k2 assume que o avermelhamento é causado por poeira, o qual não permite correções de cor negativas. Em contraste, SALT2 combina todas as possíveis contribuições em uma única função, relacionando a intensidade como uma função do comprimento de onda, e ambas as correções positivas como também negativas são permitidas [81].

Para encontrar a distância de um objeto de luminosidade intrínseca conhecida, fazemos uso de duas grandezas. A primeira delas é a magnitude aparente m , definida como:

$$m = -2.5 \log F/F_x, \quad (4.1)$$

onde F é o fluxo medido e $F_x = 2,53 \times 10^{-8}$ watt m^{-2} é um fluxo de referência. Desta definição, tem-se que um objeto que aparece mais brilhante no céu (apresenta maior fluxo) possui menor magnitude m . A segunda grandeza utilizada é a magnitude absoluta, M , que se define como a magnitude aparente que apresentaria um objeto celeste se estivesse a uma distância de 10 pc.

Finalmente, é direto relacionar a distância luminosidade de uma fonte com o chamado módulo de distância, o qual é definido como

$$\mu \equiv m - M = 5 \log [d_L/Mpc] + 25. \quad (4.2)$$

A igualdade desta grandeza com o terceiro membro da equação anterior é encontrada ao utilizar a definição de m (4.1), M e fluxo (2.9). Esta expressão pode ser reescrita de uma forma mais útil, ou seja:

$$\mu = 5 \log \frac{H_0 d_L}{c} + \mu_0, \quad (4.3)$$

sendo $\mu_0 = 42,38 - 5 \log h$.

Diante do exposto, fica evidente a importância que tem para a determinação de distâncias de um objeto de luminosidade intrínseca bem conhecida, que como foi mostrado em capítulos anteriores (2.2), tem a ver com o modelo cosmológico. Vale a pena ressaltar que o estudo deste tipo de supernovas levou à descoberta da expansão acelerada do Universo, descrita na seção 2.4.2

4.1.2. Oscilações Acústicas Bariônicas

No plasma primordial, quando a radiação e a matéria bariônica encontravam-se acopladas via espalhamento Thomson, havia, nas regiões de sobredensidade, duas forças em oposição. A primeira, era a força de atração gravitacional e a segunda a pressão de radiação (a matéria escura não interage com os fótons, portanto, ela permanece desacoplada deste o plasma primordial). Neste estágio, as flutuações de densidade de matéria bariônicas propagavam-se como uma onda acústica com uma velocidade,

$$c_s = \frac{1}{\sqrt{3(1+R)}}, \quad (4.4)$$

com $R \equiv 3\rho_b/4\rho_\gamma$. Esta velocidade é comparável com a velocidade dos fótons e, para todos os fins práticos, pode ser considerada, $c_s \sim 1/\sqrt{3}$. Após o desacoplamento, os fótons viajam livremente, deixando uma perturbação impressa na densidade de bárions em uma escala característica, r_s , de aproximadamente 150 Mpc. A matéria escura interage com os bárions através da gravidade, portanto, ela também aglomera-se preferencialmente nessa escala. Desta forma, existe um incremento na probabilidade de uma galáxia se formar nas vizinhanças da onda de sobredensidade. A propagação da perturbação no perfil de densidade é mostrada na Figura 4.2 [84].

A função de correlação da distribuição de galáxias possui um pico na escala r_s . Ao ser aplicada a transformada de Fourier à função de correlação, evidenciam-se ondulações nesse espectro, chamando-se por esta razão, Oscilações Acústicas Bariônicas (OAB).

As OAB são de natureza estatística. Para ilustrar este comportamento, mostramos na Figura 4.3 uma distribuição de galáxias em vários anéis sobrepostos, todos eles com a mesma escala característica.

Por outra parte, o tamanho de um objeto ao longo da linha de visada, r_{\parallel} , e seu tamanho transversal, r_{\perp} , obedecem as seguintes relações

$$r_{\parallel} = \frac{c\Delta z}{H(z)} \quad (4.5)$$

e

$$r_{\perp} = (1+z)d_A\Delta\theta, \quad (4.6)$$

onde Δz é o intervalo de *redshift* observado e $\Delta\theta$ o tamanho angular do objeto [75].

Ao conhecer o tamanho próprio de um objeto, tanto r_{\parallel} quanto r_{\perp} , podemos obter estimativas de $H(z)$ e de d_A . Analogamente a um objeto de luminosidade intrínseca conhecida, tais objetos com tamanho próprio determinado são chamados de régua padrão.

Devido a limitações nas medidas, ainda não é possível separar os dois sinais, paralelo e perpendicular, entretanto, pode-se restringir uma combinação dos dois [86, 87],

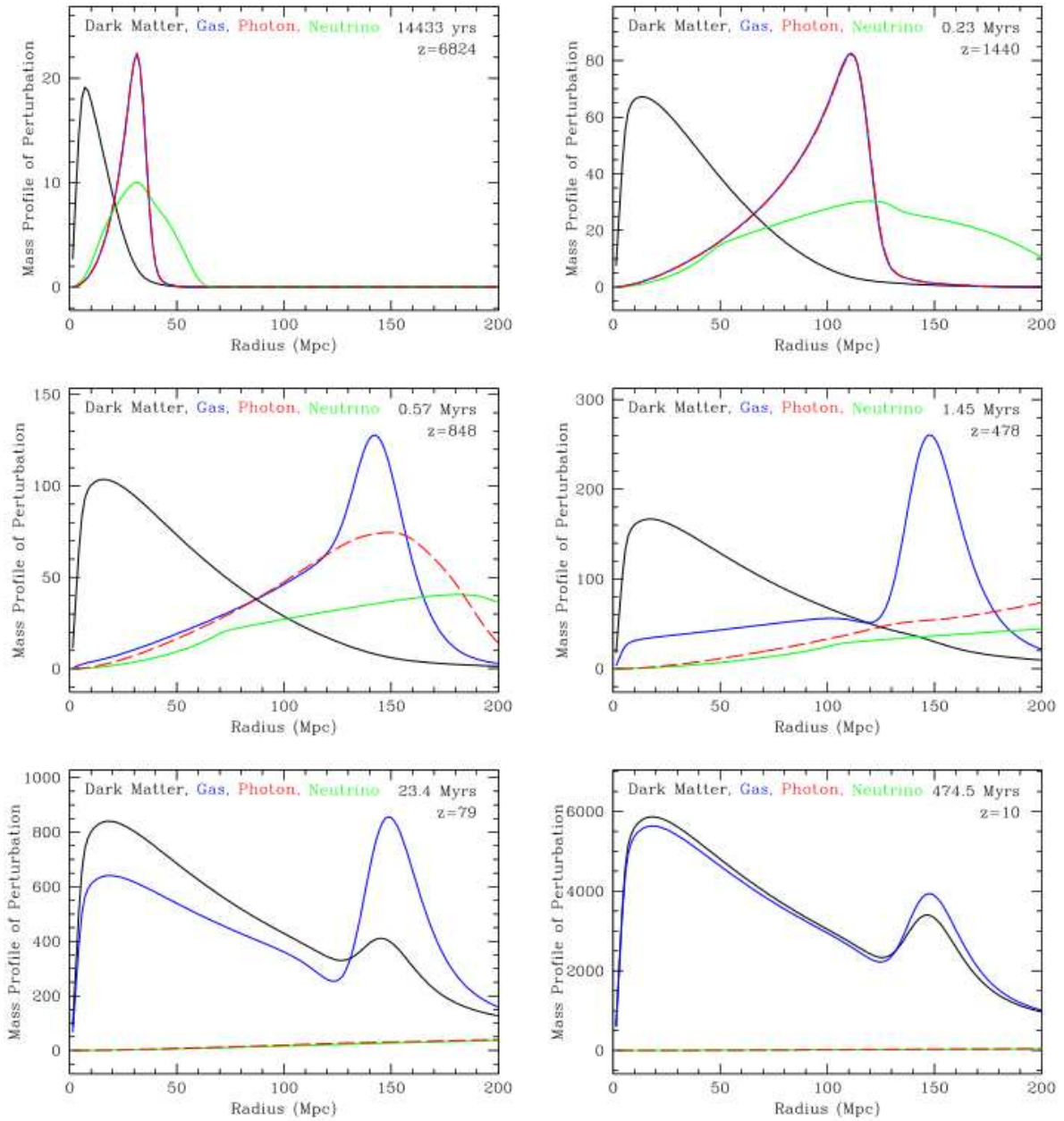


Figura 4.2.: Evolução do perfil de massa radial para uma perturbação pontual localizada na origem. Mostram-se a evolução das perturbações de matéria escura (curva preta), matéria bariônica (curva azul), fótons (curva vermelha) e neutrinos (curva verde). Em alto *redshift*, pode-se observar como os fótons e bárions propagam-se acoplados. Após a época do desacoplamento, os fótons viajam livremente, deixando uma distribuição de sobredensidade de bárions em uma escala de ~ 150 Mpc. Via atração gravitacional, é propagada uma perturbação na densidade de matéria escura nesta mesma escala [84].

$$D_v(z_*) \equiv \left[r_{\parallel} \left(\frac{r_{\perp}}{\Delta\theta} \right)^2 \right]^{1/3} = \left[(1+z_*)^2 d_A^2(z_*) \frac{cz_*}{H(z_*)} \right]^{1/3}, \quad (4.7)$$

com z_* representando o *redshift* efetivo da medida da OAB.

Define-se ainda o parâmetro \mathcal{A} [88] como uma grandeza alternativa independente do valor de H_0 ,

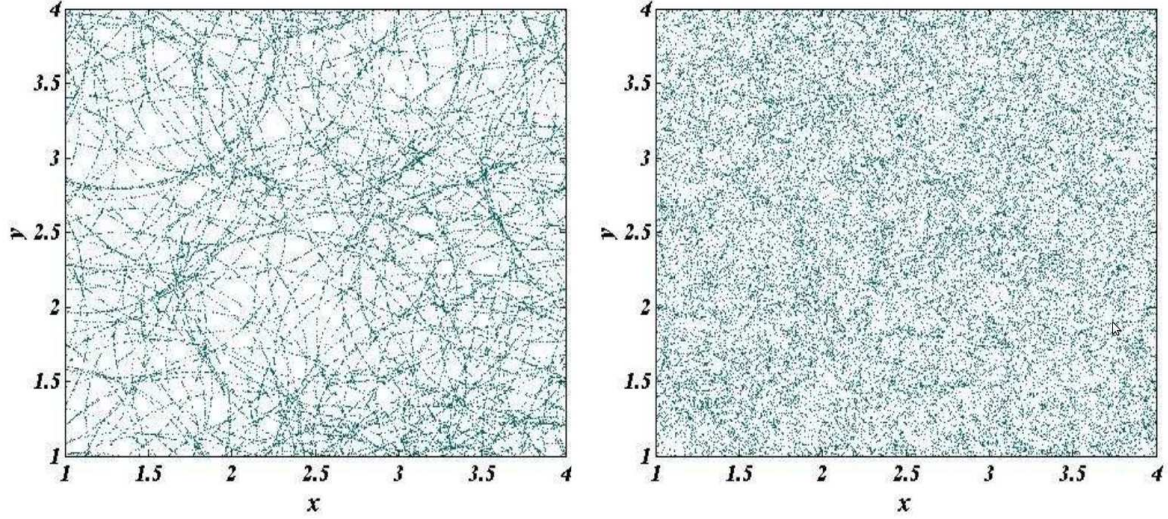


Figura 4.3.: Esquema da distribuição de galáxias. Construído com a localização de galáxias em anéis com o mesmo raio característico. A escala radial preferida é visível no painel esquerdo, onde encontram-se muitas galáxias por anel e poucos anéis. No painel direito, a situação é mais realística, onde há mais anéis e menos galáxias por anel [85].

$$\mathcal{A} = D_V(z_*) \frac{H_0 \sqrt{\Omega_{m,0}}}{z_*}, \quad (4.8)$$

que, para um universo plano, pode ser escrito como:

$$\mathcal{A} = \frac{H_0 \sqrt{\Omega_{m,0}}}{H(z_*)^{1/3}} \left[\frac{1}{z_*} \int_0^{z_*} \frac{dz}{H(z)} \right]^{2/3}. \quad (4.9)$$

4.1.3. Radiação Cósmica de Fundo como Teste Cosmológico

Semelhante ao que foi discutido no caso das OAB e as SNs Ia, pode-se também utilizar os dados da RCF, cuja física subjacente foi descrita na seção 2.6, para definir observáveis que são empregados como testes cosmológicos. Um desses observáveis é o chamado parâmetro de deslocamento, \mathcal{R} . Este parâmetro é definido como a razão entre a posição do primeiro pico no espectro de potência da RCF, l_1 , para um modelo particular, e a posição do primeiro pico de um modelo fiducial, l'_1 , i.e.,

$$\mathcal{R} \equiv 2 \frac{l_1}{l'_1}. \quad (4.10)$$

A posição l_1 está relacionada com a escala angular l_A por [89]

$$l_1 = l_A \left[1 - 0,268 \left(\frac{\rho_\gamma(z_{dec})}{0,3\rho_m(z_{dec})} \right)^{0,1} \right]^{-1}, \quad (4.11)$$

sendo l_A dado por

$$l_A = \pi \frac{d_A(z_{dec})}{r_s(z_{dec})}, \quad (4.12)$$

onde

$$r_s(z_{dec}) = \frac{1}{1 + z_{dec}} \int_{z_{dec}}^{\infty} \frac{c_s(z) dz}{H(z)}. \quad (4.13)$$

Nas equações acima, z_{dec} representa o *redshift* da superfície de último espalhamento.

Utilizando como modelo fiducial o modelo de matéria escura fria e espacialmente plano, temos:

$$r'_s(z_{dec}) = 2c_s H_0^{-1} (1 + z_{dec})^{-3/2} \quad (4.14)$$

e

$$d'_A(z_{dec}) \approx 2c H_0^{-1} (1 + z_{dec})^{-1}; \quad (4.15)$$

enquanto que, para um modelo com dominância da matéria na época de desacoplamento,

$$r_s(z_{dec}) \approx 2c_s H_0^{-1} \Omega_m^{-1/2} (1 + z_{dec})^{-3/2} \quad (4.16)$$

e a distância de diâmetro angular é dada por:

$$d_A(z_{dec}) = \frac{c}{1 + z_{dec}} \int_0^{z_{dec}} \frac{dz}{H(z)}. \quad (4.17)$$

Para um modelo espacialmente plano temos:

$$\mathcal{R} = \sqrt{\Omega_m} \int_0^{z_{dec}} \frac{H_0 dz}{H(z)}. \quad (4.18)$$

As maiores vantagens deste parâmetro são o pequeno erro associado às medições observacionais e que a integral em (4.18) estende-se até $z_{dec} \approx 1100$.

4.2. Análise Estatística

Baseados em considerações da física tem sido construídos um número considerável de modelos para descrever a dinâmica do universo. A preferência de um modelo sobre outro ou o estabelecimento dos valores dos parâmetros em um determinado modelo tem um carácter estatístico. Neste trabalho, foram descritos três observáveis (distância de luminosidade de SNs Ia, o parâmetro \mathcal{A} das OAB e o parâmetro \mathcal{R} da RCF), os quais estão relacionados com a dinâmica do universo por meio de $H(z)$.

Para os modelos cosmológicos $w(z)CDM$ que são testados neste trabalho de dissertação, o

parâmetro de Hubble é dado por *:

$$H(z | P) = H(z | \Omega_\gamma, \Omega_m, w(z | w_0, w_1)) \quad (4.19)$$

Para encontrar os valores que tomam os parâmetros cosmológicos em nosso Universo, deve-se contrastar os valores das grandezas observáveis, X_i^{obs} , com os mesmos preditos teoricamente pelo modelo, $X_i^{teo}(P)$. Os parâmetros cosmológicos mais prováveis serão os que minimizem a função χ^2 , a qual é dada pela expressão:

$$\chi^2 = \sum_{ij} (X_i^{obs} - X_i^{teo}(P))_i C_{ij}^{-1} (X_j^{obs} - X_j^{teo}(P))_j, \quad (4.20)$$

onde C_{ij} é a chamada matriz de covariância, a qual tem a informação das incertezas nas medições de cada um dos X_i^{obs} e as possíveis correlações e erros sistemáticos entre elas.

A probabilidade é representada pela expressão

$$P \propto \exp -\frac{\chi^2}{2}. \quad (4.21)$$

Em certas ocasiões, alguns parâmetros são de pouco interesse na análise que se vai realizar. Para evitar dar um valor fixo ao parâmetro irrelevante, integramos a função de probabilidade sobre todos os possíveis valores deste parâmetro, eliminando desta forma sua dependência na análise. Este processo é chamado de marginalização [90].

Cada um dos observáveis possui uma função χ^2 associada. Para dados de SN Ia, tem-se [91]

$$\chi_{SN}^2 = A - \frac{B^2}{C}; \quad (4.22)$$

sendo as quantidades A, B, C:

$$A = \sum_{ij} (\mu_i^{th} - \mu_i^{obs}) (C_{SN}^{-1})_{ij} (\mu_j^{th} - \mu_j^{obs}), \quad (4.23)$$

$$B = \sum_{ij} (C_{SN}^{-1})_{ij} (\mu_j^{th} - \mu_j^{obs}) \quad (4.24)$$

e

$$C = \sum_{ij} (C_{SN}^{-1})_{ij}. \quad (4.25)$$

Esta forma particular da função χ^2 para o teste de SN é a expressão resultante depois da marginalização de H_0 , que é comumente realizada, devido ao fato de que os outros testes utilizados não dependem da constante de Hubble.

* Nesta expressão para o parâmetro de Hubble, foi retirada a curvatura espacial Ω_k , já que trabalharemos assumindo um universo espacialmente plano. Entretanto, a análise que realizaremos da transformação do espaço paramétrico da EdE da energia escura é independente da curvatura e, conseqüentemente, igualmente válida para um universo com curvatura (elíptica ou hiperbólica).

Como o nosso objetivo principal é o estudo dos parâmetros da EdE, utilizando o formalismo da Matriz de Fisher (ver seção 4.3), realizamos uma marginalização sobre o parâmetro $\Omega_{m,0}$, a partir da manipulação apropriada da Matriz de Covariância[†].

Para o teste de OAB, utilizamos o parâmetro \mathcal{A} [93], com função

$$\chi_{\text{OAB}}^2 = \sum_i \frac{(\mathcal{A}_i - \mathcal{A}_i^{\text{obs}})^2}{\sigma_i^2} \quad (4.26)$$

e para a RCF, o parâmetro \mathcal{R} [94], com

$$\chi_{\text{RCF}}^2 = \frac{(\mathcal{R} - \mathcal{R}^{\text{obs}})^2}{\sigma^2}. \quad (4.27)$$

Assim, minimizamos o χ_{total}^2 total, i.e.,

$$\chi_{\text{total}}^2 = \chi_{\text{SN}}^2 + \chi_{\text{OAB}}^2 + \chi_{\text{RCF}}^2. \quad (4.28)$$

Para realizar a minimização da função χ^2 , foi desenvolvido um programa computacional que é composto por cinco partes com funções bem definidas:

- Função modelo: esta função dá conta do parâmetro de Hubble em função do *redshift* para valores específicos dos parâmetros da EdE e do parâmetro de densidade da matéria. Esta parte do programa leva em conta a informação dos parâmetros de densidade e da expressão para a evolução da energia escura $f(z)$. A função é definida como uma função do *redshifts*, enquanto os parâmetros cosmológicos são comuns à função χ^2 .
- Sub-rotina de integração: esta sub-rotina toma uma função e realiza sua integral definida empregando o método de quadratura de Gauss com 40 pontos gaussianos.
- Função χ^2 : calcula o χ^2 utilizando a sub-rotina de integração para obter os valores teóricos da distância luminosidade, do parâmetro \mathcal{A} e do parâmetro \mathcal{R} para valores específicos dos parâmetros de densidade na função modelo.
- Sub-rotina de inversão de matrizes: calcula a inversa de uma matriz.
- Função principal: fazendo uso da função χ^2 dentro de laços que modificam os valores dos parâmetros do modelo cosmológico, obtemos o χ^2 mínimo e os valores dos parâmetros do melhor ajuste. Com estes valores, calculamos a matriz de Fisher (ver seção 4.3) e depois inverte-se esta matriz para, assim, obtermos a matriz de covariância.

Os dados utilizados para realizar a análise estatística com cada um dos observáveis descritos neste capítulo foram:

- Para SN Ia: dados do módulo de distância da compilação Union2.1.

[†] Uma discussão deste processo pode ser encontrada em [92].

Levantamento	z	\mathcal{A}
6dFGS	0,106	$0,526 \pm 0,028$
SDSS	0,2	$0,488 \pm 0,016$
SDSS	0,35	$0,484 \pm 0,016$
WiggleZ	0,44	$0,474 \pm 0,034$
WiggleZ	0,6	$0,442 \pm 0,020$
WiggleZ	0,73	$0,424 \pm 0,021$

Tabela 4.1.: Determinações do parâmetro \mathcal{A} das OAB em diferentes *redshifts*.

- Para OAB: determinações do parâmetro \mathcal{A} dos levantamentos SDSS, WiggleZ e 6dFGS, mostrados na Tabela 4.1 [93].
- Para RCF: determinação do parâmetro de deslocamento com os resultados de WMAP9, $\mathcal{R} = 1,7327 \pm 0,0164$, e com os resultados do Planck, $\mathcal{R} = 1,7407 \pm 0,0094$ [94].

4.3. Matriz de Informação de Fisher

A Matriz de Informação de Fisher (MIF) é uma ferramenta muito útil para determinar as incertezas estatísticas dos parâmetros cosmológicos ao realizar uma análise com dados observacionais ou simulados. Esta corresponde a um meio da matriz Hessiana da função χ^2 com derivadas parciais com respeito aos parâmetros do modelo, i.e.,

$$[\mathbf{F}]_{ij} \equiv F_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial p_i \partial p_j}. \quad (4.29)$$

Esta matriz está diretamente relacionada com a Matriz de Covariância (MC) da seguinte forma:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^{-1}, \quad (4.30)$$

sendo esta relação a base fundamental da análise posterior (4.4). A MC possui na sua diagonal a variância de cada um dos parâmetros, $\sigma_{w_i}^2$, e os elementos fora da diagonal, $\sigma_{w_i w_j}$, correspondem à covariância entre pares deles. Por exemplo, para uma equação de estado biparamétrica, a MC é expressa como

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sigma_{w_0}^2 & \sigma_{w_0 w_1} \\ \sigma_{w_0 w_1} & \sigma_{w_1}^2 \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

O formalismo da MIF assume gaussianidade na função de distribuição dos parâmetros. Embora nem sempre essa suposição seja adequada, a utilização da MIF é muito prática devido à simplicidade do cálculo e à rápida forma de combinação de distintos testes (ver [95, 96, 97] para uma discussão sobre a validade da MIF).

4.4. Figura de Mérito

Com o objetivo de quantificar o progresso da medição das propriedades da energia escura e discriminar entre distintos modelos, define-se a Figura de Mérito (FoM, sigla do nome em inglês, *Figure of Merit*) como uma combinação das incertezas dos parâmetros do modelo de energia escura. Uma possível seleção da FoM é o produto das incertezas unidimensionais, σ_{w_0} e σ_{w_1} . Todavia, w_0 e w_1 estão altamente correlacionados fazendo com que esta definição da FoM não seja um bom indicador do poder de vínculo de um teste. Por esta razão, o *Dark Energy Task Force* (DETF) [95] propõe uma FoM inversamente proporcional ao volume N -dimensional contido no contorno de confiança em 2σ , i.e, 95.4%, fazendo assim com que uma FoM maior indique uma maior precisão. Para um espaço bidimensional, o 2-volume corresponde à área do contorno. Assim, define-se

$$\text{FoM}_{\text{DETF}} \equiv \frac{\pi}{A}. \quad (4.32)$$

Com o formalismo da MIF, ou seja, assumindo gaussianidade na distribuição dos parâmetros, o volume N -dimensional contido no contorno de confiança é proporcional à raiz quadrada do determinante da MC. Para um espaço biparamétrico em 2σ , temos

$$A = 6.17\pi\sigma_{w_0}\sigma_{w_1}\sqrt{1-\rho_p^2}. \quad (4.33)$$

A partir disto e da definição da FoM, é obtido

$$\text{FoM}_{\text{DETF}} = \frac{1}{6.17\sigma_{w_0}\sigma_{w_1}\sqrt{1-\rho_p^2}} = \frac{1}{6.17\sqrt{\det \mathbf{C}}}, \quad (4.34)$$

onde ρ_p é o coeficiente de correlação de Pearson (ver seção 4.5).

A definição da FoM do DETF possui a desvantagem de que, para parâmetros que não apresentam uma distribuição gaussiana (o que usualmente acontece para dados reais), o cálculo da área é complicado e, portanto, pouco prático. Por esta razão, em [98] propõe-se uma FoM generalizada da seguinte forma:

$$\text{FoM}_r = \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{C}}}. \quad (4.35)$$

Esta definição é prática, válida para qualquer tipo de parâmetros independentemente da gaussianidade e elimina os fatores desnecessários que não contribuem com a FoM.

4.5. Optimização dos Vínculos Observacionais Via Reparametrização

Como é mostrado nos gráficos do espaço paramétrico das EdE CPL e BA nas seções 3.6.1 e 3.6.2, respectivamente, as elipses de confiança encontram-se inclinadas com respeito aos eixos do espaço paramétrico. Isto significa que os parâmetros w_0 e w_1 estão correlacionados. Mais especificamente, dos resultados da análise estatística, a Matriz de Covariância obtida para cada uma das parametrizações tem elementos não nulos fora da diagonal. Esses elementos tem a ver com o coeficiente de correlação de Pearson da seguinte forma [99]:

$$\rho_p = \frac{\sigma_{w_0 w_1}}{\sigma_{w_0} \sigma_{w_1}}. \quad (4.36)$$

Esse coeficiente varia no intervalo $[-1, 1]$, onde o valor de zero do coeficiente significa uma não correlação, e os valores 1 e -1 significam que os parâmetros estão totalmente correlacionados e anticorrelacionados, respectivamente.

Devido à alta correlação (anticorrelação) que apresentam as parametrizações BA e CPL ao serem testadas com os dados atuais, é importante procurar um método para reduzir ou eliminar totalmente tal correlação. Por esse motivo, o nosso próximo passo será reparametrizar a EdE, de tal forma que $w(z)$ seja escrita em termos de novos parâmetros que não apresentem correlação alguma.

Dada a arbitrariedade ao escrever uma EdE para a EE, é possível reescrevê-la em termos de outros coeficientes, sem alterar a forma funcional original. Isto, com o objetivo que esses novos coeficientes tenham uma incerteza menor, uma correlação mínima ou, incluso, obter um volume menor dos contornos de confiança no espaço de parâmetros.

O DETF [95] propõe a definição de um novo parâmetro, w_p , para a CPL, como o valor da equação de estado em um *redshift* para o qual w_p tem uma incerteza mínima. Matematicamente, podemos escrever a definição de w_p como:

$$w_p \equiv w(z_p) = w_0 + w_1 \frac{z_p}{1 + z_p}, \quad (4.37)$$

tal que,

$$\left. \frac{\partial \sigma_{w(z)}^2}{\partial z} \right|_{z_p} = \left. \frac{\partial (\langle w(z)^2 \rangle - \langle w(z) \rangle^2)}{\partial z} \right|_{z_p} = 0. \quad (4.38)$$

Determinando desta forma um z_p ou, o que é equivalente, um a_p ,

$$a_p = 1 + \frac{\sigma_{w_0 w_1}}{\sigma_{w_1}^2} \leftrightarrow z_p = -\frac{\sigma_{w_0 w_1}}{\sigma_{w_1}^2 + \sigma_{w_0 w_1}}. \quad (4.39)$$

O z em que é definido o novo parâmetro é chamado de *redshift* pivô.

Ao realizar esta transformação, é encontrado que os dois parâmetros w_p e w_1 ficam descor-

relacionados. Com o método que nós utilizaremos mais adiante para definir um novo parâmetro para uma EdE geral, pode-se demonstrar que para o mapeamento do espaço $(w_0 - w_1)$ para $(w_p - w_1)$, a definição do w_p , como o parâmetro de mínima incerteza, é equivalente a defini-lo como o parâmetro que, a partir da transformação (4.37), tem correlação nula com w_1 . Pode ser demonstrado que esta transformação deixa a FoM invariante, motivo pelo qual é mais vantajoso adotar outra abordagem (ver seção 4.5.1).

Wang [98] propõe uma reparametrização da CPL em termos de w_0 e w_c , onde w_c está definido como o valor da EdE, $w(z)$, em um *redshift* pivô, i.e.,

$$w_c \equiv w(z_c) = w_0 + w_1 \frac{z_c}{1 + z_c} \quad (4.40)$$

onde ao selecionar

$$a_c = \frac{1}{1 + z_c} = 1 + \frac{\sigma_{w_0}^2}{\sigma_{w_0 w_1}}, \quad (4.41)$$

w_0 , w_c ficam descorrelacionados. Pode-se transformar a EdE em termos deste novo parâmetro e, como consequência direta disto, a função de evolução da EE também é transformada. Da definição de w_c , tem-se

$$w_1 = \frac{w_c - w_0}{1 - a_c}. \quad (4.42)$$

Substituindo isto na parametrização $w_{CPL}(a)$, a EdE da CPL reparametrizada torna-se

$$w_{RCPL}(a) = \frac{a_c w_0 - w_c + a(w_c - w_0)}{a_c - 1}. \quad (4.43)$$

Por último, apresentamos a transformação da função $f_{CPL}(z)$, Eq.(3.66),

$$f_{RCPL}(z) = \exp \left(3 \left[1 + \left(\frac{a_c w_0 - w_c}{a_c - 1} \right) \right] \ln(1 + z) + 3 \left(\frac{w_c - w_0}{a_c - 1} \right) \frac{z}{1 + z} \right). \quad (4.44)$$

O desenvolvimento anterior é particular para a EdE CPL, sendo óbvia a necessidade de generalizá-lo.

No que segue, mostraremos como realizar uma transformação para um espaço $(w_0 - w_c)$, de uma EdE geral:

$$w(z) = w_0 + w_1 g(z), \quad (4.45)$$

onde estes parâmetros estão descorrelacionados.

Dada a expressão que define o novo parâmetro, $w_c \equiv w(z_c) = w_0 + w_1 g(z_c)$, começamos por escrever o valor médio de $w_c w_0$,

$$\langle w_0 w_c \rangle = \langle w_0^2 \rangle + \langle w_0 w_1 \rangle g(z_c), \quad (4.46)$$

e a multiplicação dos valores médios $\langle w_0 \rangle \langle w_c \rangle$,

$$\langle w_0 \rangle \langle w_c \rangle = \langle w_0 \rangle^2 + \langle w_0 \rangle \langle w_1 \rangle g(z_c). \quad (4.47)$$

Continua-se com a relação entre as quantidades escritas e o termo de covariância,

$$\sigma_{w_0 w_c} \equiv \langle \delta w_0 \delta w_c \rangle = \langle w_0 w_c \rangle - \langle w_0 \rangle \langle w_c \rangle, \quad (4.48)$$

que impomos ser igual a zero ao procurar uma total desconexão ($\sigma_{w_0 w_c} = 0 \leftrightarrow \rho_{w_0 w_c} = 0$),

$$\langle \delta w_0 \delta w_c \rangle = \langle \delta w_0^2 \rangle + \langle \delta w_0 \delta w_1 \rangle g(z_c) = 0, \quad (4.49)$$

onde nas equações anteriores, $\sigma_{w_0}^2 = \langle \delta w_0^2 \rangle$ é a variância de w_0 .

Por último, obtem-se que os *redshifts* (podem ser vários, dependendo da forma funcional de $g(z)$) que desconexam os dois parâmetros, w_0 e w_c , são as raízes da equação anterior.

É simples mostrar que para uma forma funcional da EdE BA, $g(z) = z(z+1)/(1+z^2)$, obtem-se:

$$z_c = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1 + \sigma_{w_0}^2/\sigma_{w_0 w_1})(\sigma_{w_0}^2/\sigma_{w_0 w_1})}}{2(1 + \sigma_{w_0}^2/\sigma_{w_0 w_1})}, \quad (4.50)$$

Para finalizar, escreve-se w_1 em termos de w_0 , w_c e z_c , obtendo uma reparametrização de (3.67) do tipo:

$$w(z) = \frac{1 + z_c^2}{z_c(1 + z_c)} \left\{ \left[\frac{z_c(1 + z_c)}{1 + z_c^2} - \frac{z(1 + z)}{1 + z^2} \right] w_0 + w_c \frac{z(1 + z)}{1 + z^2} \right\}. \quad (4.51)$$

A classificação dos modelos de EE feita em [8] no plano transformado, $(w_0 - w_c)$, pode ser obtida facilmente com a relação $w_1 = (w_c - w_0)/g(z_c)$. Os resultados da análise realizada com os dados de SN Ia da compilação Union2.1, as determinações do parâmetro \mathcal{A} dos levantamentos SDSS, WiggleZ e 6dFGS, e a determinação do parâmetro \mathcal{R} a partir dos resultados do WMAP9 ou do Planck são apresentados nas Tabelas 4.2 e 4.3.

	χ_{min}^2	w_0	w_1	ρ_{w_0, w_1}	FoM _r (w_0, w_1)
SN Ia + OAB + WMAP9	550,40	$-0,98 \pm 0,33$	-0.03 ± 0.86	-0,89	30,09
SN Ia + OAB + Planck	550,34	$-0,96 \pm 0,32$	-0.16 ± 0.78	-0,90	36,81

Tabela 4.2.: Valores esperados de w_0 e w_1 em 95.4% CL para a parametrização (3.67). As barras de erros correspondem à variância. A correlação entre os dois parâmetros é dada pelo coeficiente de correlação de Pearson, $\rho_{ij} = \sigma_{ij}/\sigma_i\sigma_j$, e a FoM do espaço paramétrico é dada por FoM_r(i, j).

A mesma análise é realizada para a parametrização CPL (3.6.1) e, como esperado, o resultado obtido do *redshift* pivô para uma desconexão total é o mesmo apresentado em [98]. Para este

	χ_{min}^2	w_0	w_c	ρ_{w_0, w_c}	$FoM_r(w_0, w_c)$
SN Ia + OAB + WMAP9	550,40	$-0,98 \pm 0,33$	$-0,99 \pm 0,17$	-0,02	71,38
SN Ia + OAB +Planck	550,34	$-0,96 \pm 0,32$	$-1,04 \pm 0,16$	-0,01	78,88

Tabela 4.3.: Valores esperados de w_0 e w_c em 95.4% CL para a parametrização (4.51). A correlação entre os dois parâmetros é dada pelo coeficiente de correlação de Pearson e a FoM do espaço paramétrico é dada por $FoM_r(i, j)$.

caso, a Tabela 4.4 mostra os valores de χ_{min}^2 , w_0 , w_1 , w_c , ρ e FoM, obtidos a partir da análise envolvendo os dados mencionados em 4.1.

	χ_{min}^2	w_0	w_1	w_c	ρ	FoM_r
SN Ia + OAB	550,39	$-0,97 \pm 0,39$	$-0,10 \pm 1,78$	-	-0,92	14,55
+ WMAP9	550,40	$-0,97 \pm 0,39$	-	$-1,00 \pm 0,17$	-0,00	60,11
SN Ia + OAB	550,33	$-0,96 \pm 0,38$	$-0,28 \pm 1,57$	-	-0,93	18,21
+Planck	550,32	$-0,94 \pm 0,38$	-	$-1,04 \pm 0,15$	-0,04	68,08

Tabela 4.4.: Valores esperados de w_0 , w_1 e w_c em 95.4% CL, coeficiente de correlação, ρ , e FoM para a parametrização CPL.

Note nos resultados apresentados nas tabelas anteriores, que a FoM aumenta consideravelmente o seu valor nos dois casos (BA e CPL). Da mesma forma, a incerteza associada ao segundo parâmetro é significativamente melhorada. Os nossos resultados para as parametrizações CPL e BA são mostrados na Figura 4.4 e na Figura 4.5.

4.5.1. Transformação Analítica da FoM

Podemos ver que a FoM para as duas parametrizações anteriormente mencionadas aumenta ao serem reparametrizadas. O fator de aumento da FoM não é arbitrário e nós desenvolvemos uma expressão que permite saber qual é o valor da FoM no espaço reparametrizado sem necessidade de realizar novamente a análise estatística.

Primeiramente, adotamos a expressão para a FoM definida por Wang [98],

$$FoM_r \equiv \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{C}|}}, \quad (4.52)$$

onde \mathbf{C} é a matriz de covariância e $|\mathbf{C}|$ denota seu determinante. Como a matriz de covariância está relacionada com a matriz de Fisher por $\mathbf{C} = \mathbf{F}^{-1}$, a definição anterior pode ser escrita como:

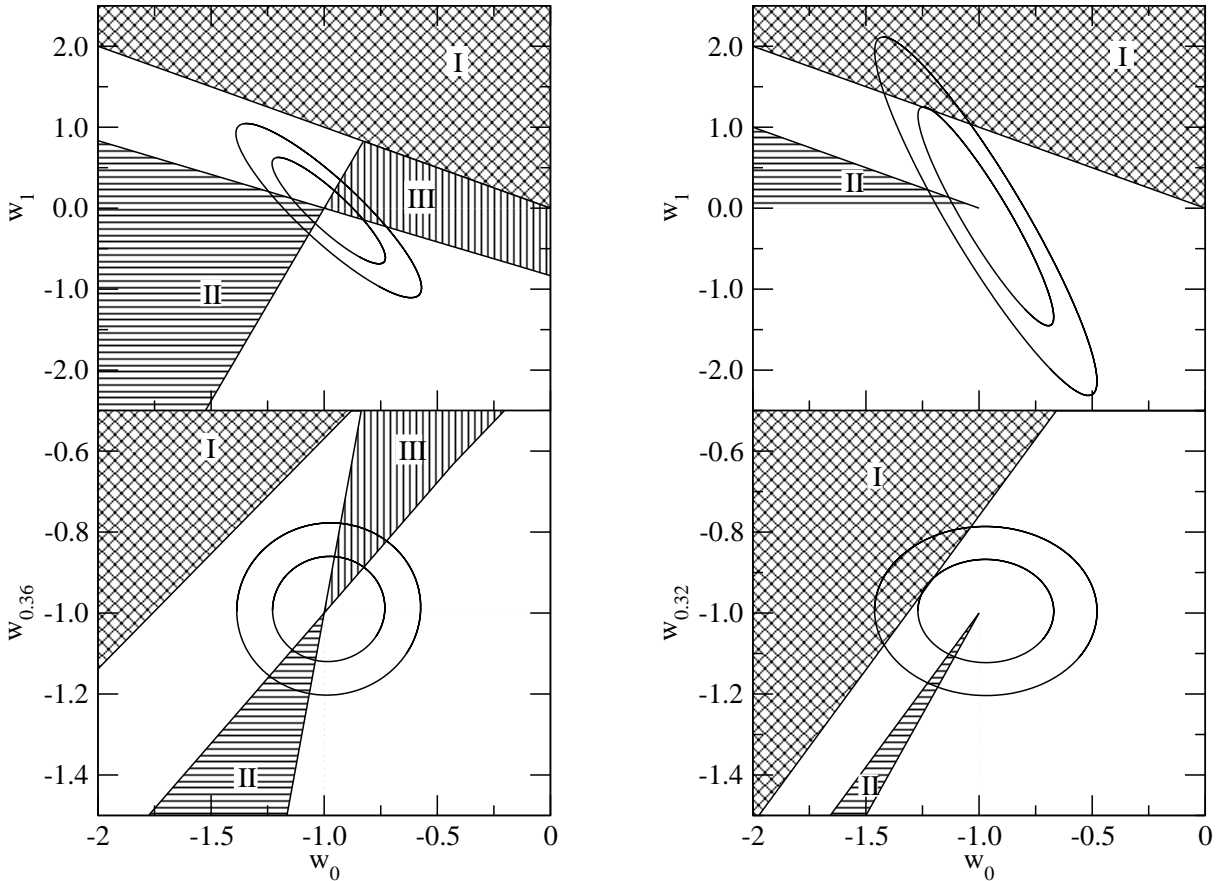


Figura 4.4.: Contornos de $\Delta\chi^2 = 2.30$ e $\Delta\chi^2 = 6.17$ para $(w_0 - w_1)$ e $(w_0 - w_c)$ para EdE (3.6.2) (esquerda) e EdE CPL (3.6.1) (direita), obtidos com os dados de SN Ia da compilação Union2.1, as determinações do parâmetro \mathcal{A} dos levantamentos SDSS, WiggleZ e 6dFGS, e a determinação do parâmetro \mathcal{R} com os resultados do WMAP9. As escalas dos gráficos para os parâmetros correspondentes são iguais, com o objetivo de uma rápida comparação. A região I representa a época de dominância da matéria. A Região II denota energia escura gerada por um campo fantasma ($w(z) < -1$, $\forall z$). A Região III corresponde a um campo de quintessência ($-1 \leq w(z) \leq 1$, $\forall z$). As regiões brancas correspondem a modelos de EE com origem desconhecida. Para a EdE (3.6.7) essas regiões são modelos que têm cruzado ou cruzarão a linha de campo fantasma $w = -1$.

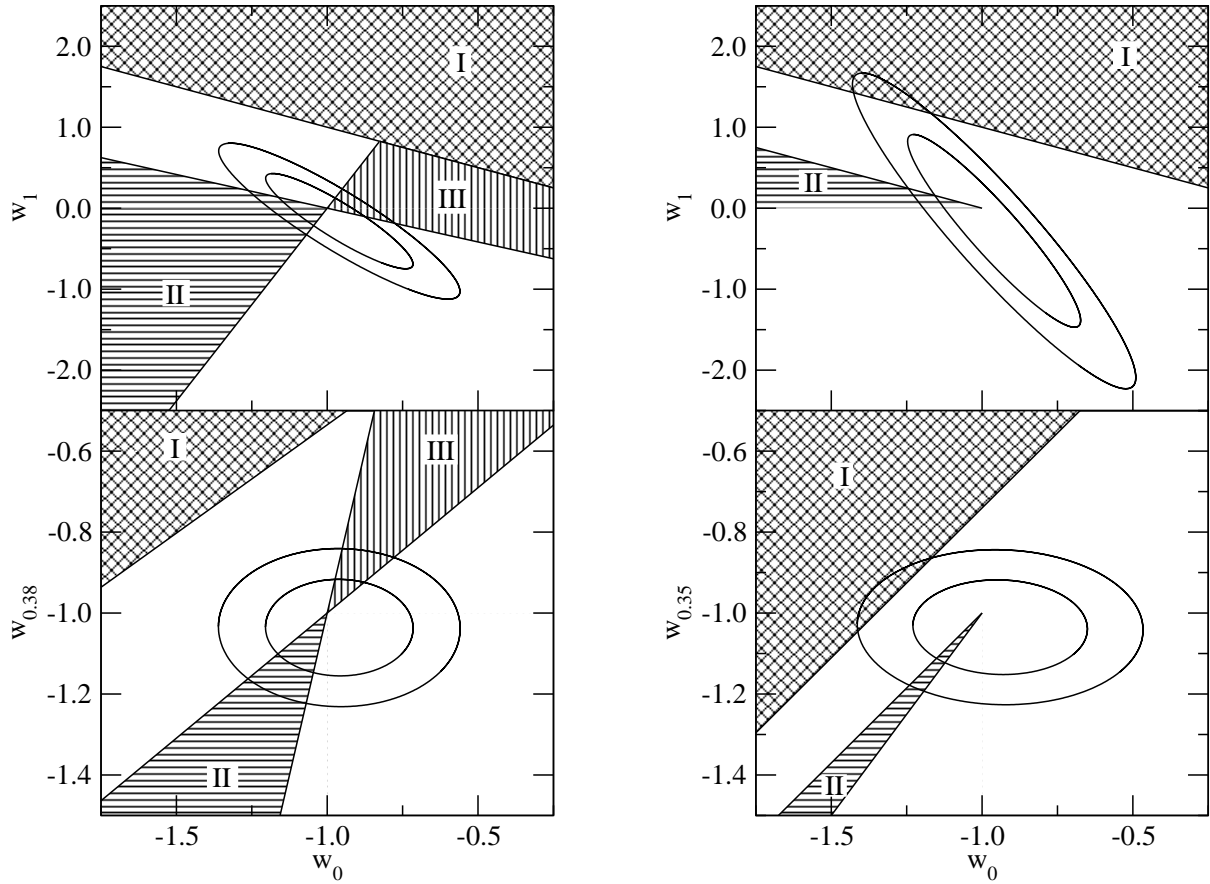


Figura 4.5.: Contornos de $\Delta\chi^2 = 2.30$ e $\Delta\chi^2 = 6.17$ para $(w_0 - w_1)$ e $(w_0 - w_c)$ para EdE (3.6.2) (esquerda) e EdE CPL (3.6.1) (direita), obtidos com os dados de SN Ia da compilação Union2.1, as determinações do parâmetro \mathcal{A} dos levantamentos SDSS, WiggleZ e 6dFGS, e a determinação do parâmetro \mathcal{R} com os resultados do Planck. As escalas dos gráficos para os parâmetros correspondentes são iguais, com o objetivo de uma rápida comparação. A região I representa a época de dominância da matéria. A Região II denota energia escura gerada por um campo fantasma ($w(z) < -1, \forall z$). A Região III corresponde a um campo de quintessência ($-1 \leq w(z) \leq 1, \forall z$). As regiões brancas correspondem a modelos de EE com origem desconhecida. Para a EdE (3.6.7) essas regiões são modelos que têm cruzado ou cruzarão a linha de campo fantasma $w = -1$.

$$\text{FoM}_r = \sqrt{|\mathbf{F}|}. \quad (4.53)$$

Já que a transformação do espaço paramétrico $(w_0 - w_1)$ ao $(w_0 - w_c)$ é linear, a nova matriz de Fisher, \mathbf{F}' , relaciona-se com a matriz de Fisher original, \mathbf{F} , via

$$\mathbf{F}' = \mathbf{M}^T \mathbf{F} \mathbf{M}, \quad (4.54)$$

onde \mathbf{M} é a matriz de transformação obtida tomando as derivadas parciais dos parâmetros anteriores com respeito aos novos [92]. Explicitamente, $[\mathbf{M}]_{ij} \equiv M_{ij} = (\partial p_i / \partial p'_j)$ e o superíndice T denota a transposta da matriz. Tomando o determinante de (4.54), obtemos:

$$|\mathbf{F}'| = |\mathbf{M}^T| |\mathbf{F}| |\mathbf{M}| = |\mathbf{F}| |\mathbf{M}|^2. \quad (4.55)$$

Lembrando que o determinante de uma matriz é igual ao determinante da sua transposta, obtem-se uma relação entre os valores da nova FoM e da FoM original,

$$\text{FoM}'_r = ||\mathbf{M}|| \text{FoM}_r, \quad (4.56)$$

sendo $||\mathbf{M}||$ o valor absoluto do determinante de \mathbf{M} .

Para uma equação paramétrica do tipo (4.45), a matriz de transformação do espaço (w_0, w_1) para (w_0, w_*) com $w_* = w(z_*)$ para um arbitrário z_* é dada por

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/g(z_*) & 1/g(z_*) \end{pmatrix}. \quad (4.57)$$

Explicitamente, para uma transformação representada pela matriz anterior, tem-se que as figuras de mérito obedecem a seguinte relação:

$$\text{FoM}'_r = ||1/g(z_*)|| \text{FoM}_r. \quad (4.58)$$

Esta expressão é comparada com os resultados obtidos na seção 4.5, onde realizamos uma reparametrização cuja matriz de transformação é dada pela Eq. (4.57) e cujo *redshift* pivô é selecionado de tal forma que os parâmetros fiquem totalmente descorrelacionados. Na Tabela 4.5, mostra-se o fator de aumento da FoM, utilizando a expressão anterior (4.58) para os dois modelos testados e o respectivo *redshift* pivô que produz uma correlação nula. Essencialmente, os fatores apresentados nesta tabela são iguais às razões entre as FoMs dos modelos originais e reparametrizados, obtidas via análise estatística (ver seção 4.5).

Cabe ressaltar que, o *redshift* pivô utilizado para realizar a reparametrização não pode ser uma raiz da função $g(z)$. Isto deixaria a transformação singular e os parâmetros totalmente degenerados.

Para finalizar, também apresentamos a matriz da transformação proposta pelo DETF [95],

Dados	Modelo	$g(z)$	z_c	$ 1/g(z_c) $
SN Ia + OAB	BA	$\frac{z(z+1)}{z^2+1}$	0,36	2,24
+ WMAP9	CPL	$\frac{z}{(z+1)}$	0,32	4,15
SN Ia + OAB	BA	$\frac{z(z+1)}{z^2+1}$	0,38	2,17
+ Planck	CPL	$\frac{z}{(z+1)}$	0,35	3,86

Tabela 4.5.: Valores obtidos do *redshift* z_c com os dados observacionais atuais para as parametrizações BA e CPL e os correspondentes fatores de variação da FoM ao reparametrizar cada um dos modelos.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -g(z_*) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.59)$$

a qual tem determinante unidade (implicando que a FoM fica invariante), deixando evidente o motivo pelo qual é mais vantajoso utilizar o método empregado em [98].

Desta forma, nós sugerimos explorar o segundo tipo de transformação ao testar modelos $w(z)CDM$, selecionando o *redshift* que produz uma correlação nula ao realizar o mapeamento do espaço $(w_0 - w_1)$ para o espaço $(w_0 - w_*)$, e não um *redshift* que aumente somente a FoM, sem levar em consideração a correlação dos novos parâmetros.

5 Conclusões

A descoberta da aceleração cósmica, através da análise de distâncias de luminosidade de Supernovas do tipo Ia e, posteriormente, confirmada por outros observáveis cosmológicos, constitui uma das maiores e mais surpreendentes descobertas da cosmologia moderna. Explicar de maneira satisfatória o mecanismo por trás da expansão acelerada do Universo, que hoje conhecemos como Energia Escura, tem-se convertido em um dos grandes desafios da ciência e envolve tanto à cosmologia quanto à física de partículas.

O candidato mais simples e atrativo para descrever a EE é a constante cosmológica Λ que, a partir do ponto de vista da Teoria Quântica de Campos, corresponde à densidade de energia do vácuo. Entretanto, quando as predições para o valor de Λ são comparadas aos dados observacionais, elas apresentam uma discrepância de cerca de 120 ordens de magnitude, o que tem levado ao desenvolvimento de um número considerável de modelos para solucionar a grande inconsistência entre teoria e observação.

Nesta dissertação, apresentamos diferentes modelos para representar a EE, explorando principalmente os $w(z)CDM$. Longe de ter uma resposta fundamental a este problema, é talvez mais simples começar por uma descrição fenomenológica, que corresponde a este tipo de modelos. Por tal motivo, é de grande interesse para a cosmologia otimizar os vínculos observacionais que podemos impôr nos parâmetros de teorias $w(z)CDM$.

Ao escrevermos equações de estado com expressões biparamétricas, os nossos objetivos principais são: encontrar um afastamento do valor da EdE com respeito à EdE $w = -1$ (ΛCDM) e ainda uma evolução de w com o tempo.

Utilizando o formalismo da figura de mérito, que serve para quantificar o poder de vínculo dos dados atuais e a precisão dos testes cosmológicos recentes, exploramos dois tipos de transformações entre espaços paramétricos ou reparametrizações. Uma vez que as duas podem produzir parâmetros descorrelacionados, só uma delas leva a uma melhora no valor da FoM. Com isto, temos mostrado que é mais produtivo fazer uma transformação a partir do espaço de parâmetros originais ($w_0 - w_1$) para um espaço paramétrico ($w_0 - w_c$), obtendo, desta forma, um aumento no valor da FoM. Esses dois parâmetros, w_0 e w_c , encontram-se totalmente descorrelacionados,

o que nos permite diferenciar entre o valor da EdE hoje e sua evolução temporal. Além do ganho na FoM, também obtem-se uma maior precisão na determinação do parâmetro associado à evolução temporal da EdE, w_c , reduzindo consideravelmente a incerteza associada a ele. Aqui, nós apresentamos o método que pode ser empregado para realizar a reparametrização, bem como a expressão desenvolvida para a obtenção do *redshift* pivô que produz uma total descorrelação.

Com isto, sugerimos levar em conta este tipo de reparametrizações ao momento de estudar modelos $w(z)CDM$ que sejam casos particulares da EdE geral explorada neste trabalho de dissertação. Além disto, deveria-se ressaltar a importância do novo valor da FoM no espaço em que os parâmetros estão descorrelacionados.

Como resultado principal do nosso trabalho, ressaltamos o desenvolvimento de uma expressão analítica que relaciona o valor da FoM da EdE original com a FoM da EdE reparametrizada, ao utilizarmos o formalismo da Matriz de Informação de Fisher e um formalismo matricial para realizar a transformação entre espaços. Esta fórmula permite conhecer o valor da FoM da reparametrização em qualquer *redshift* pivô selecionado, sem a necessidade de realizar novamente a análise estatística para cada transformação desejada. A importância da busca pela otimização dos vínculos observacionais, que hoje podemos impôr nos parâmetros de modelos $w(z)CDM$, está fundamentada na expectativa de obtenção de dados observacionais cada vez precisos que serão produzidos pela próxima geração de *surveys*.

A Redshifts e tempos de transição

A existência de uma componente de EE no Universo pode gerar uma aceleração cósmica sempre que sua pressão for negativa o suficiente para compensar a atração gravitacional produzida pelos demais componentes do Universo, tais como matéria e radiação. Nos modelos que possuem esses três tipos de matéria-energia, podemos identificar três fases da expansão cósmica, cada uma delas dominada por uma dessas componentes. O tempo no qual acontecem esses diferentes estágios depende das densidades de energia associadas a estas componentes.

O Universo primordial era dominado pela radiação e, com a expansão, sua densidade decaiu rapidamente ($\rho \propto a^{-4}$). Após essa fase, a matéria, cuja densidade decresce com a^{-3} , passa a dominar a dinâmica do Universo. Estas duas fases correspondem a uma expansão desacelerada. Por último, o fluido que domina a expansão é a EE, produzindo a atual aceleração cósmica.

Neste cenário, podemos identificar duas épocas cruciais: uma, em que as densidades da matéria e da EE são iguais, chamada de equipartição matéria-energia escura, e a segunda corresponde à época de transição entre a fase desacelerada e acelerada. Essas duas épocas não são independentes do modelo cosmológico e, em geral, ocorrem em tempos diferentes. Determinar o *redshift* e o tempo em que elas aconteceram, ajudaria a conhecer um pouco mais sobre a natureza da EE [100, 101].

Matematicamente, a época de equipartição é definida como:

$$\rho_m(z_{eq}) = \rho_x(z_{eq}) \quad (\text{A.1})$$

ou, em termos dos parâmetros de densidade na época atual,

$$\Omega_{m,0}(1 + z_{eq})^3 = \Omega_{x,0}f(z_{eq}). \quad (\text{A.2})$$

Por outro lado, o *redshift* de transição entre a fase desacelerada e a fase acelerada pode ser calculado solucionando a equação:

$$q(z_{ac}) = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = 0, \quad (\text{A.3})$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) = 0 \quad \rightarrow \quad \rho(z) + 3p(z) = 0. \quad (\text{A.4})$$

No caso de um modelo ΛCDM , pode ser mostrado que esses dois *redshifts* seguem a relação linear:

$$z_{ac} = 2^{1/3}(1 + z_{eq}) - 1. \quad (\text{A.5})$$

Para modelos $w(z)\text{CDM}$, uma fase acelerada da expansão é atingida sob duas condições: a primeira é a condição de uma EdE $w < -1/3$, e a segunda é condição de que a densidade da EE deve ser uma fração relevante do conteúdo total do Universo. Nesses modelos, a equação A.4 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\Omega_{m,0}(1 + z_{ac})^3 + \Omega_{x,0}f(z_{ac})(1 + 3w(z_{ac})) = 0, \quad (\text{A.6})$$

onde foi desconsiderada a radiação devido a sua fraca contribuição à densidade de energia do universo em baixos *redshifts*. Neste caso, os *redshifts*, z_{ac} e z_{eq} , obedecem uma relação mais complicada que depende, unicamente, da EdE $w(z)$. Pode ser mostrada a seguinte relação:

$$\frac{f(z_{eq})}{(1 + z_{eq})^3} = \frac{-f(z_{ac})(1 + 3w(z_{ac}))}{(1 + z_{ac})^3}. \quad (\text{A.7})$$

O tempo em que aconteceram estas duas transições é dependente do modelo e pode ser determinado com a relação:

$$t(z_*) = \int_{z_*}^{\infty} \frac{dz}{(1+z)H(z)}, \quad (\text{A.8})$$

onde z_* corresponde a z_{ac} ou a z_{eq} , dependendo do caso.

Para modelos $w(z)\text{CDM}$, as relações anteriores nos permitem transformar vínculos nos parâmetros cosmológicos ($\Omega_{m,0}$, w_0 , w_1) em vínculos nos *redshifts* ou épocas de transição. Poderia-se ainda realizar uma reconstrução do parâmetro $H(z)$ (independente do modelo) para baixos *redshifts* ($z < 1$), com o objetivo de impor vínculos no z_{ac} , que, a princípio, poderiam se transformar em vínculos nos parâmetros cosmológicos.

Referências

- [1] Immanuel Kant. *Crítica da Razão Pura*. 5a. edição. Fundação Calouste Gulbenkian, 2001. [pg: 1]
- [2] A. Einstein. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, pages 844–847, 1915. [pg: 1]
- [3] G. Lemaître. *Université catholique de Louvain*, 47:49–59, 1927. [pg: 1]
- [4] R. A. Alpher and R. C. Hermann. *Phys. Rev.*, 74:1577, 1948. [pg: 2]
- [5] A. A. Penzias and R. Wilson. *The Astrophysical Journal* , 142:419, 1965. [pg: 2]
- [6] Michel Chevallier and David Polarski. Accelerating universes with scaling dark matter. *Int.J.Mod.Phys.*, D10:213–224, 2001, gr-qc/0009008. [pg: 2, 39]
- [7] E.M. Barboza, J.S. Alcaniz, Z.-H. Zhu, and R. Silva. A generalized equation of state for dark energy. *Phys.Rev.*, D80:043521, 2009, 0905.4052. [pg: 2, 39]
- [8] E. M. Barboza Jr. and J. S. Alcaniz. *Phys.Lett.B.*, 666:415–419, 2008, 0805.1713. [pg: 2, 39, 41, 42, 43, 58]
- [9] Ruth Lazkoz, Vincenzo Salzano, and Irene Sendra. Oscillations in the dark energy EoS: new MCMC lessons. *Phys.Lett.*, B694:198–208, 2010, 1003.6084. [pg: 2, 39]
- [10] Debabrata Adak, Debasish Majumdar, and Supratik Pal. Generalizing thawing dark energy models: the standard vis-à-vis model independent diagnostics. 2012, 1210.2565. [pg: 2, 39]
- [11] E. Komatsu et al. Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation. *Astrophys.J.Suppl.*, 180:330–376, 2009, 0803.0547. [pg: 2]

- [12] R.R. Caldwell. A Phantom menace? *Phys.Lett.*, B545:23–29, 2002, astro-ph/9908168. [pg: 2, 33, 34]
- [13] Valerio Faraoni. Superquintessence. *Int.J.Mod.Phys.*, D11:471–482, 2002, astro-ph/0110067. [pg: 2, 33, 35]
- [14] Sean M. Carroll, Mark Hoffman, and Mark Trodden. Can the dark energy equation - of - state parameter w be less than -1 ? *Phys.Rev.*, D68:023509, 2003, astro-ph/0301273. [pg: 2, 7, 9, 34]
- [15] Nilanjana Mahata and Subenoy Chakraborty. Dynamical System Analysis for a phantom model. 2013, 1312.7644. [pg: 2]
- [16] Ping Xi, Xiang-Hua Zhai, and Xin-Zhou Li. Alternative mechanism of avoiding the big rip or little rip for a scalar phantom field. *Phys.Lett.*, B706:482–489, 2012, 1111.6355. [pg: 2]
- [17] S. Nojiri and S. D. Odintsov. *Phys. Rev. D.*, 68, 2003, 0307288. [pg: 2]
- [18] S. Capozziello, V.F. Cardone, and A. Troisi. *Phys. Rev. D.*, 71, 2005, 0501426. [pg: 2]
- [19] L. Amendola, S. Tsujikawa, and D. Polarski. *Phys. Rev. Lett.*, 98, 2006, 0603703. [pg: 2]
- [20] J. Santos, J. S. Alcaniz, M. J. Reboucas, and F. C. Carvalho. *Phys. Rev. D.*, 76, 2007, 0708.0411. [pg: 2]
- [21] F. C. Carvalho, M. Santos, E. J. S Alcaniz, and J. Santos. *JCAP*, 2008, 0804.2878. [pg: 2]
- [22] B. Santos, M. Campista, J. Santos, and J. S. Alcaniz. 2012, 1207.2478. [pg: 2]
- [23] J. S. Alcaniz. *Phys. Rev. D.*, 65, 2002, 0202492. [pg: 2]
- [24] J. S. Alcaniz, D. Jain, and A. Dev. *Phys. Rev. D.*, 66, 2002, 0206448. [pg: 2]
- [25] L. Bouhmadi-Lopez, Chimento. *Phys. Rev. D.*, 82, 2010, 1007.4141. [pg: 2]
- [26] M. Bouhmadi-Lopez, S. Capozziello, and V. F. Cardone. *Phys. Rev. D.*, 82, 2010, 1010.1547. [pg: 2]
- [27] J. E. González, E. M. Barboza Jr., and J. S. Alcaniz. Figure of Merit for Dark Energy Parameterizations. *Para ser submetido ao Physics Letters B.*, (2014). [pg: 3]
- [28] Jeremy Goodman. Geocentrism reexamined. *Phys.Rev.*, D52:1821–1827, 1995, astro-ph/9506068. [pg: 5]

- [29] Roy Maartens. Is the Universe homogeneous? *Phil.Trans.Roy.Soc.Lond.*, A369:5115–5137, 2011, 1104.1300. [pg: 5]
- [30] Ben Hoyle, Rita Tojeiro, Raul Jimenez, Alan Heavens, Chris Clarkson, et al. Testing Homogeneity with the Galaxy Fossil Record. *Astrophys.J.*, 762:L9, 2012, 1209.6181. [pg: 5]
- [31] Alan F. Heavens, Raul Jimenez, and Roy Maartens. Testing homogeneity with the fossil record of galaxies. *JCAP*, 1109:035, 2011, 1107.5910. [pg: 5]
- [32] A. Einstein. *PEl Significado de la Relatividad*. Planeta Agostini, 1986. [pg: 6]
- [33] J. M. Tejeiro. *Principios de Relatividad General*. Universidad Nacional de Colombia, 2005. [pg: 7, 11]
- [34] T. Padmanabhan. *Gravitation, Foundation and Fronteirs*. Cambridge University Press, 2010. [pg: 7, 31]
- [35] J. R. Arenas. *Agujeros Negros Cuánticos. Notas de Clase*. Universidad Nacional de Colombia. [pg: 7]
- [36] Brett McInnes. What if $w < -1$? 2002, astro-ph/0210321. [pg: 7]
- [37] Tamara M. Davis and Charles H. Lineweaver. Expanding confusion: Common misconceptions of cosmological horizons and the superluminal expansion of the universe. *Publications of the Astronomical Society of Australia*, 21:97–109, 1 2004. [pg: 8, 17]
- [38] G.F.R. Ellis and T. Rothman. Lost Horizons. *Am. J. Phys*, 61:10, 1993. [pg: 8]
- [39] S. Weinberg. *Cosmology*. Oxford University Press, 2008. [pg: 9, 19, 20, 26]
- [40] Sean M. Carroll. The Cosmological constant. *Living Rev.Rel.*, 4:1, 2001, astro-ph/0004075. [pg: 15]
- [41] Edvard Mortsell and Chris Clarkson. Model independent constraints on the cosmological expansion rate. *JCAP*, 0901:044, 2009, 0811.0981. [pg: 15]
- [42] A. Z. Friedmann. *Zeitschrift für Physik*, 10:377–386, 1922. [pg: 16]
- [43] E. Hubble. *Proceedings of the National Academy of Science*, 15:168–173, 1929. [pg: 16]
- [44] Helge Kragh. What’s in a Name: History and Meanings of the Term ‘Big Bang’. 2013, 1301.0219. [pg: 16]
- [45] H. Kragh. *Conceptions of Cosmos*. Oxford University Press, 2007. [pg: 16]

- [46] E. Harrison. The redshift-distance and velocity-distance laws. *The Astrophysical Journal*, 403:28–31, 1 1993. [pg: 16, 17]
- [47] W. deSitter. *Scientia*, 49:1, 1931. [pg: 16]
- [48] Ali Kaya. Hubble’s law and faster than light expansion speeds. *Am.J.Phys.*, 79:1151, 2011, 1107.5168. [pg: 17]
- [49] P.A.R. Ade et al. Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters. 2013, 1303.5076. [pg: 18]
- [50] S. Perlmutter et al. *The Astrophysical Journal*, 517:565–586, 1999, astro-ph/9812133. [pg: 18, 19, 27]
- [51] A. G. Riess et al. *Astronomical Journal*, 116:1009–1038, 1998, astro-ph/9805201. [pg: 18, 27]
- [52] S. Burles, K.M. Nollett, and Michael S. Turner. Big bang nucleosynthesis: Linking inner space and outer space. 1999, astro-ph/9903300. [pg: 22]
- [53] D.J. Fixsen. The Temperature of the Cosmic Microwave Background. *Astrophys.J.*, 707:916–920, 2009, 0911.1955. [pg: 23, 24]
- [54] P.A.R. Ade et al. Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results. 2013, 1303.5062. [pg: 24, 25]
- [55] Wayne Hu and Scott Dodelson. Cosmic microwave background anisotropies. *Ann.Rev.Astron.Astrophys.*, 40:171–216, 2002, astro-ph/0110414. [pg: 24]
- [56] P.J.E. Peebles and David T. Wilkinson. Comment on the Anisotropy of the Primeval Fireball. *Phys.Rev.*, 174:2168–2168, 1968. [pg: 24]
- [57] A. Einstein. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, pages 142–153, 1917. [pg: 27]
- [58] Ya.B. Zel’dovich. The Cosmological constant and the theory of elementary particles. *Sov.Phys.Usp.*, 11:381–393, 1968. [pg: 29]
- [59] Varun Sahni, Andrzej Krasinski, and Ya.B. Zeldovich. Republication of: The cosmological constant and the theory of elementary particles (By Ya. B. Zeldovich). *Sov.Phys.Usp.*, 11:381–393, 1968. [pg: 29]
- [60] Edmund J. Copeland. Dynamics of dark energy. *AIP Conf.Proc.*, 957:21–29, 2007. [pg: 29]

- [61] P.J.E. Peebles and Bharat Ratra. The Cosmological constant and dark energy. *Rev.Mod.Phys.*, 75:559–606, 2003, astro-ph/0207347. [pg: 30]
- [62] Eric V. Linder. The Dynamics of Quintessence, The Quintessence of Dynamics. *Gen.Rel.Grav.*, 40:329–356, 2008, 0704.2064. [pg: 30, 32]
- [63] R.R. Caldwell and Eric V. Linder. The Limits of quintessence. *Phys.Rev.Lett.*, 95:141301, 2005, astro-ph/0505494. [pg: 30]
- [64] Bharat Ratra and P.J.E. Peebles. Cosmological Consequences of a Rolling Homogeneous Scalar Field. *Phys.Rev.*, D37:3406, 1988. [pg: 33]
- [65] Joshua A. Frieman, Christopher T. Hill, Albert Stebbins, and Ioav Waga. Cosmology with ultralight pseudo Nambu-Goldstone bosons. *Phys.Rev.Lett.*, 75:2077–2080, 1995, astro-ph/9505060. [pg: 33]
- [66] Philippe Brax, Jerome Martin, and Alain Riazuelo. Exhaustive study of cosmic microwave background anisotropies in quintessential scenarios. *Phys.Rev.*, D62:103505, 2000, astro-ph/0005428. [pg: 33]
- [67] Varun Sahni and Li-Min Wang. A New cosmological model of quintessence and dark matter. *Phys.Rev.*, D62:103517, 2000, astro-ph/9910097. [pg: 33]
- [68] Varun Sahni and Alexei A. Starobinsky. The Case for a positive cosmological Lambda term. *Int.J.Mod.Phys.*, D9:373–444, 2000, astro-ph/9904398. [pg: 33]
- [69] T. Barreiro, Edmund J. Copeland, and N.J. Nunes. Quintessence arising from exponential potentials. *Phys.Rev.*, D61:127301, 2000, astro-ph/9910214. [pg: 33]
- [70] Ivaylo Zlatev, Li-Min Wang, and Paul J. Steinhardt. Quintessence, cosmic coincidence, and the cosmological constant. *Phys.Rev.Lett.*, 82:896–899, 1999, astro-ph/9807002. [pg: 33]
- [71] Andreas Albrecht and Constantinos Skordis. Phenomenology of a realistic accelerating universe using only Planck scale physics. *Phys.Rev.Lett.*, 84:2076–2079, 2000, astro-ph/9908085. [pg: 33]
- [72] Robert R. Caldwell, Marc Kamionkowski, and Nevin N. Weinberg. Phantom energy and cosmic doomsday. *Phys.Rev.Lett.*, 91:071301, 2003, astro-ph/0302506. [pg: 35]
- [73] Alessandro Melchiorri, Luca Pagano, and Stefania Pandolfi. When Did Cosmic Acceleration Start ? *Phys.Rev.*, D76:041301, 2007, 0706.1314. [pg: 35]
- [74] Alexander Yu. Kamenshchik, Ugo Moschella, and Vincent Pasquier. An Alternative to quintessence. *Phys.Lett.*, B511:265–268, 2001, gr-qc/0103004. [pg: 36]

- [75] Florian Beutler. Cosmology with the 6-degree Field Galaxy Survey. 2013, 1303.3302. [pg: 37, 48]
- [76] Shin’ichi Nojiri and Sergei D. Odintsov. Introduction to modified gravity and gravitational alternative for dark energy. *eConf*, C0602061:06, 2006, hep-th/0601213. [pg: 36]
- [77] Eric V. Linder. Exploring the expansion history of the universe. *Phys.Rev.Lett.*, 90:091301, 2003, astro-ph/0208512. [pg: 39]
- [78] Paolo A. Mazzali, Friedrich K. Ropke, Stefano Benetti, and Wolfgang Hillebrandt. A Common Explosion Mechanism for Type Ia Supernovae. *Science*, 315:825, 2007, astro-ph/0702351. [pg: 46]
- [79] Sung-Chul Yoon and N. Langer. Presupernova evolution of accreting white dwarfs with rotation. *Astron.Astrophys.*, 419:623, 2004, astro-ph/0402287. [pg: 46]
- [80] Wolfgang Hillebrandt and Jens C. Niemeyer. Type Ia supernova explosion models. *Ann.Rev.Astron.Astrophys.*, 38:191–230, 2000, astro-ph/0006305. [pg: 46]
- [81] Ariel Goobar and Bruno Leibundgut. Supernova cosmology: legacy and future. *Ann.Rev.Nucl.Part.Sci.*, 61:251–279, 2011, 1102.1431. [pg: 46, 47]
- [82] Hans-Thomas Janka. Explosion Mechanisms of Core-Collapse Supernovae. *Ann.Rev.Nucl.Part.Sci.*, 62:407–451, 2012, 1206.2503. [pg: 46]
- [83] Paolo A. Mazzali, Friedrich K. Ropke, Stefano Benetti, and Wolfgang Hillebrandt. A Common Explosion Mechanism for Type Ia Supernovae. *Science*, 315:825, 2007, astro-ph/0702351. [pg: 46]
- [84] Daniel J. Eisenstein, Hee-jong Seo, and 1 White, Martin J. On the Robustness of the Acoustic Scale in the Low-Redshift Clustering of Matter. *Astrophys.J.*, 664:660–674, 2007, astro-ph/0604361. [pg: 48, 49]
- [85] Bruce A. Bassett and Renee Hlozek. Baryon Acoustic Oscillations. 2009, 0910.5224. [pg: 50]
- [86] Daniel J. Eisenstein et al. Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of SDSS luminous red galaxies. *Astrophys.J.*, 633:560–574, 2005, astro-ph/0501171. [pg: 48]
- [87] Nikhil Padmanabhan and 1 White, Martin J. Constraining Anisotropic Baryon Oscillations. *Phys.Rev.*, D77:123540, 2008, 0804.0799. [pg: 48]
- [88] Michael Doran, Steffen Stern, and Eduard Thommes. Baryon Acoustic Oscillations and Dynamical Dark Energy. *JCAP*, 0704:015, 2007, astro-ph/0609075. [pg: 49]

- [89] Ruth Lazkoz and Elisabetta Majerotto. Cosmological constraints combining $H(z)$, CMB shift and SNIa observational data. *JCAP*, 0707:015, 2007, 0704.2606. [pg: 50]
- [90] S. Nesseris and Leandros Perivolaropoulos. Comparison of the legacy and gold snia dataset constraints on dark energy models. *Phys.Rev.*, D72:123519, 2005, astro-ph/0511040. [pg: 52]
- [91] Zhenhui Zhang, Song Li, Xiao-Dong Li, Xin Zhang, and Miao Li. Revisit of the Interaction between Holographic Dark Energy and Dark Matter. *JCAP*, 1206:009, 2012, 1204.6135. [pg: 52]
- [92] Dan Coe. 2009, 0906.4123. [pg: 53, 62]
- [93] Arman Shafieloo, Varun Sahni, and Alexei A. Starobinsky. A new null diagnostic customized for reconstructing the properties of dark energy from BAO data. *Phys.Rev.*, D86:103527, 2012, 1205.2870. [pg: 53, 54]
- [94] Yun Wang and Shuang Wang. Distance Priors from Planck and Dark Energy Constraints from Current Data. *Phys.Rev.*, D88:043522, 2013, 1304.4514. [pg: 53, 54]
- [95] Andreas Albrecht, Gary Bernstein, Robert Cahn, Wendy L. Freedman, Jacqueline Hewitt, et al. Report of the Dark Energy Task Force. 2006, astro-ph/0609591. [pg: 54, 55, 56, 62]
- [96] V. Papathanasiou. Some Characteristic Properties of the Fisher Information Matrix via Cacoullos-Type Inequalities. *Journal of Multivariate Analysis*, 44:256–265, 1993. [pg: 54]
- [97] A. Kagan and Z. Landsman. Relation between the covariance and Fisher information matrices. *Statistics & Probability Letters*, 42:7–13, 1999. [pg: 54]
- [98] Yun Wang. Figure of Merit for Dark Energy Constraints from Current Observational Data. *Phys.Rev.*, D77:123525, 2008, 0803.4295. [pg: 55, 57, 58, 59, 63]
- [99] J. Lee and W. A. Nicewander. Thirteen Ways to Look the Correlation Coefficient. *The American Statistician.*, 42:59–66, 1988. [pg: 56]
- [100] Alessandro Melchiorri, Luca Pagano, and Stefania Pandolfi. When Did Cosmic Acceleration Start ? *Phys.Rev.*, D76:041301, 2007, 0706.1314. [pg: 67]
- [101] Emille E.O. Ishida, Ribamar R.R. Reis, Alan V. Toribio, and Ioav Waga. When did cosmic acceleration start? How fast was the transition? *Astropart.Phys.*, 28:547–552, 2008, 0706.0546. [pg: 67]