

ANÁLISE DA ESCALA DE HOMOGENEIDADE DO UNIVERSO LOCAL  
USANDO O CATÁLOGO ALFALFA

Felipe da Silva Avila

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Astronomia do Observatório Nacional/MCTIC, como parte dos requisitos necessários à obtenção do Grau de Mestre em Astronomia.

Orientador: Armando Bartolome Bernui  
Leo

Co-orientadora: Camila Paiva Novaes

Rio de Janeiro  
Janeiro de 2018

“ANÁLISE DA ESCALA DE HOMOGENEIDADE DO UNIVERSO LOCAL  
USANDO O CATÁLOGO ALFALFA”

FELIPE DA SILVA AVILA

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE  
PÓS-GRADUAÇÃO EM ASTRONOMIA DO OBSERVATÓRIO NACIONAL  
COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO  
GRAU DE MESTRE EM ASTRONOMIA.

Aprovada por:




---

Dr. Armando Bartolome Bernui Leo – ON/MCTIC  
(Orientador)



---

Dra. Camila Paiva Novaes – ON/MCTIC (Coorientadora)



---

Dr. Jailson Souza de Alcaniz – ON/MCTIC



---

Dr. Saulo Carneiro - UFBA

RIO DE JANEIRO – BRASIL

27 DE FEVEREIRO DE 2018

da Silva Avila, Felipe

Análise da Escala de Homogeneidade do Universo local usando o Catálogo ALFALFA/Felipe da Silva Avila. – Rio de Janeiro: ON/MCTIC, 2018.

XI, 63 p.: il.; 29,7cm.

Orientador: Armando Bartolome Bernui Leo

Co-orientadora: Camila Paiva Novaes

Dissertação (mestrado) – ON/MCTIC/Programa de Pós-graduação em Astronomia, 2018.

Referências Bibliográficas: p. 53 – 60.

1. Primeira palavra-chave. 2. Segunda palavra-chave. 3. Terceira palavra-chave. I. Paiva Novaes, Camila. II. Observatório Nacional/MCTIC, Programa de Pós-graduação em Astronomia. III. Título.

# Agradecimentos

Aos meus orientadores, Armando Bernui e Camila Novaes, por toda atenção, dedicação, amizade e principalmente pela paciência diante de todas as dificuldades que surgiram durante esses dois anos.

À minha família, pela compreensão diante das dificuldades e privações de uma vida acadêmica.

Aos meus amigos do Observatório Nacional, Edilson de Carvalho, Simony Costa, Gabriela Marques, Gabriela Coutinho, Sérgio Laranjeira, Hissa Medeiros, Rodrigo Sousa, Carlos Bengaly, Isaac Macedo e Javier Gonzalez pela excelente convivência e discussões. Em especial a Sandro, pela ajuda no início da minha jornada com programação em Python.

Aos meus amigos de faculdade e pós-graduação, Uendert Andrade e Rebeca Batalha, por todas as conversas sobre o passado, presente e futuro.

Ao corpo docente do ON, em especial aos professores Joel Carvalho e Jailson Alcaniz, pelas valiosas sugestões para a realização deste trabalho.

Aos funcionários e servidores do Observatório Nacional, por proporcionar um ambiente agradável e harmonioso.

À CAPES, pela bolsa de estudos concedida.

Resumo da Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Astronomia do Observatório Nacional/MCTIC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Astronomia (M.Sc.)

## ANÁLISE DA ESCALA DE HOMOGENEIDADE DO UNIVERSO LOCAL USANDO O CATÁLOGO ALFALFA

Felipe da Silva Avila

Janeiro/2018

Orientador: Armando Bartolome Bernui Leo

Co-orientadora: Camila Paiva Novaes

Programa: Astronomia

O modelo cosmológico padrão assume que, em grandes escalas, o Universo é homogêneo e isotrópico, hipótese conhecida como Princípio Cosmológico (PC). Ele prevê ainda que a transição de um Universo altamente não-homogêneo para homogêneo ocorre de forma suave. Atualmente, com o advento dos grandes e profundos levantamentos de dados, mapeando a distribuição de matéria luminosa no Universo, temos a possibilidade de explorar de forma mais consistente o PC. De forma totalmente independente de modelo, este trabalho estima a escala de transição para homogeneidade do universo local ( $z < 0,06$ ) a partir de uma amostra de fontes em HI do catálogo ALFALFA. Para tal, utilizou-se o método de contagem em esferas normalizada  $\mathcal{N}(< r)$  e a dimensão fractal  $\mathcal{D}_2(r)$  adaptados à projeção dos dados na esfera celeste. O método utiliza catálogos aleatórios com o intuito de pesar efeitos geométricos e de incompletude dos catálogos de dados. Três estimadores foram utilizados na obtenção de  $\mathcal{N}(< \theta)$  e  $\mathcal{D}_2(\theta)$ , para posterior medida da escala angular de transição para a homogeneidade,  $\theta_H$ . Os três estimadores encontraram resultados semelhantes,  $\theta_H$  no intervalo  $15,38^\circ - 16,49^\circ$ . Testes de consistência utilizando catálogos fractais, de dimensão conhecida e geometria semelhante aos dados, e analisando a presença de regiões de mais alta ou baixa densidade em relação à média, confirmaram a validade da metodologia utilizada.

**Palavras-Chave:** Cosmologia; Princípio Cosmológico; Homogeneidade; Isotropia; ALFALFA

Abstract of Dissertation presented to Observatório Nacional/MCTIC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Astronomy (M.Sc.)

ANALYSIS OF THE HOMOGENEITY SCALE FROM THE LOCAL  
UNIVERSE USING ALFALFA SURVEY

Felipe da Silva Avila

January/2018

Advisor: Armando Bartolome Bernui Leo

Co-advisor: Camila Paiva Novaes

Department: Astronomy

The standard model of cosmology is based on the Cosmological Principle (CP), which states that, on large scales, the Universe is homogeneous and isotropic. It predicts that the transition from an inhomogeneous to a homogeneous Universe is smooth. Today with the big and deep galaxy surveys mapping the luminous mass distribution of the Universe, we have the possibility to explore the CP. In a model independent analysis, this work study the transition to homogeneity in the local Universe ( $z < 0.06$ ) from a HI sample of the ALFALFA catalog. We used the scaled count-in-sphere,  $\mathcal{N}(< r)$  and the correlation dimension  $\mathcal{D}_2(r)$ , adapted to the case of a projected analyses. The methodology employed has the advantage of using random catalogs that weight the geometric and incompleteness effects of the survey. We used three estimators to obtain  $\mathcal{N}(< \theta)$  and  $\mathcal{D}_2(\theta)$  to probe the transition to homogeneity,  $\theta_H$ . Our analysis show a transition in a range  $15.38^\circ - 16.49^\circ$ . Moreover, our approach is able to indicate the presence of under- and over-densities in the data, the latter possibly originated by a galaxy cluster. Robustness tests confirmed the validity of our methodology using fractal catalogs with a known dimension and geometry like ALFALFA sample.

**Keywords:** Cosmology; Cosmological Principle; Homogeneity; Isotropy; ALFALFA

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 O Modelo Cosmológico Padrão</b>	<b>4</b>
2.1 Fundamentos da Cosmologia Moderna . . . . .	4
2.1.1 A Teoria da Relatividade Geral . . . . .	4
2.1.2 O Espaço-Tempo homogêneo e isotrópico . . . . .	5
2.1.3 As Equações de Friedmann . . . . .	8
2.1.4 Medindo distâncias na cosmologia . . . . .	11
2.2 Observáveis Cosmológicos . . . . .	12
2.2.1 A Expansão do Universo . . . . .	12
2.2.2 Matéria Escura . . . . .	15
2.2.3 A Radiação Cósmica de Fundo em Micro-ondas . . . . .	16
<b>3 Análise Fractal do Universo Observado</b>	<b>20</b>
3.1 Dimensão fractal . . . . .	22
3.1.1 Dimensão de contagem em caixas . . . . .	22
3.1.2 Dimensão de correlação . . . . .	23
3.1.3 Análise multifractal . . . . .	23
3.2 Contagem em esferas normalizada . . . . .	26
3.3 Relação entre função de correlação e contagem em esferas normalizada	28
<b>4 Metodologia</b>	<b>34</b>
4.1 Dados Observacionais . . . . .	34
4.2 Catálogos Aleatórios . . . . .	36
4.3 Contagem Normalizada Projetada . . . . .	36
4.4 Escala de Homogeneidade . . . . .	38
4.5 Testes de Consistência . . . . .	38

<b>5</b>	<b>Resultados e Discussões</b>	<b>41</b>
5.1	Estimativas da escala de homogeneidade . . . . .	41
5.2	Testes de Consistência . . . . .	46
5.2.1	Análise de catálogos fractais . . . . .	46
5.2.2	<i>Voids</i> artificiais e análise sem o aglomerado de Virgo . . . . .	47
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>51</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>53</b>
<b>A</b>	<b>Relação entre <math>\mathcal{N}(&lt; \theta)</math> e <math>\omega(\theta)</math></b>	<b>61</b>
<b>B</b>	<b>Relação entre <math>\mathcal{N}(&lt; \theta)</math> e <math>\mathcal{D}_2(\theta)</math></b>	<b>62</b>



# Lista de Figuras

2.1	Possíveis curvaturas para o Universo. . . . .	6
2.2	Hipersuperfície de tipo espaço. . . . .	7
2.3	Evolução da densidade de energia com o tempo . . . . .	9
2.4	Lei de Hubble . . . . .	13
2.5	Triângulo definido por três galáxias em um espaço homogêneo e isotrópico. . . . .	14
2.6	Curva de rotação da galáxia M33 . . . . .	16
2.7	Radiação Cósmica de Fundo . . . . .	17
2.8	Mapas da variação de temperatura da RCF . . . . .	19
3.1	Exemplo de auto-semelhança. . . . .	20
3.2	Floco de neve de Koch. . . . .	21
3.3	Distribuição de galáxias do SDSS-DR1 . . . . .	24
3.4	$C_q$ para $q=-4$ . . . . .	25
3.5	$C_q$ para $q=+4$ . . . . .	25
3.6	Espectro da dimensão generalizada $D_q$ . . . . .	26
3.7	Contagem em esferas normalizada para o WiggleZ . . . . .	28
3.8	Dimensão de correlação para o WiggleZ . . . . .	29
3.9	Contagem em esferas normalizadas para a amostra CMASS. . . . .	31
3.10	Dimensão de correlação para a amostra CMASS . . . . .	32
3.11	Diferença entre estimadores para a contagem normalizada. . . . .	33
3.12	Diferença entre estimadores para a dimensão de correlação. . . . .	33
4.1	Área do céu coberta pelo ALFALFA. . . . .	34
4.2	Região do catálogo ALFALFA utilizada na análise fractal. . . . .	36
4.3	Exemplo de catálogo aleatório . . . . .	37
4.4	Processo de construção de catálogos fractais. . . . .	40
5.1	$\mathcal{N}(< \theta)$ e $\mathcal{D}_2(\theta)$ para o estimador E1. . . . .	42
5.2	$\mathcal{N}(< \theta)$ e $\mathcal{D}_2(\theta)$ para o estimador E2. . . . .	43
5.3	Comparação entre os resultados de E1 e E2. . . . .	43
5.4	Função de correlação $\omega(\theta)$ . . . . .	44

5.5	$\mathcal{N}(< \theta)$ e $\mathcal{D}_2(\theta)$ para o estimador E3. . . . .	44
5.6	Estimadores E1, E2 e E3 em uma análise euclidiana 2D . . . . .	45
5.7	Testes com catálogos fractais . . . . .	46
5.8	Exemplos de catálogos <i>void</i> . . . . .	47
5.9	Análise do estimador E1 para catálogos <i>void</i> . . . . .	48
5.10	Catálogo ALFALFA com as fontes HI pertencentes ao aglomerado Virgo. . . . .	49
5.11	Análises sem o aglomerado virgo para os estimadores E1 e E2. . . . .	49

# Lista de Tabelas

3.1	Escala de homogeneidade para a distribuição de galáxias e matéria no NGC e SGC. . . . .	31
5.1	Resumo dos resultados obtidos para a escala de transição para homogeneidade, $\theta_H$ , utilizando três estimadores diferentes, E1, E2 e E3. Vide texto para detalhes. . . . .	43

# Capítulo 1

## Introdução

A Cosmologia, considerada parte integrante da ciência e não mais como especulação, teve seu início com a teoria da relatividade geral de Einstein [1], que descreve como matéria-energia afetam a estrutura do espaço-tempo, tornando possível o estudo do Universo como um todo. É importante ter uma teoria coerente para descrever a gravidade, já que ela é a principal responsável pela dinâmica e evolução do Universo. No entanto, algumas hipóteses de difícil verificação são necessárias para estudar o Universo, por exemplo, assumir que as leis da física são válidas sempre (não mudam com o tempo) e em todo lugar (não dependem da localização no espaço-tempo) [2].

O atual modelo cosmológico padrão se fundamenta no *Princípio Cosmológico* (PC), hipótese de que o Universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas. A homogeneidade implica que, quando mudamos de posição no espaço, as características do Universo continuam as mesmas, por exemplo, a distribuição de densidade ou a temperatura da radiação cósmica de fundo. Já a isotropia implica que essas mesmas características não variam com a direção de observação.

Para testar o PC com observações é preciso distinguir entre isotropia radial e projetada, como definidas em [3]. Isotropia radial é a hipótese de que a densidade de matéria é igual em qualquer direção do céu dada uma distância fixa  $\rho(r, \theta_1, \phi_1) = \rho(r, \theta_2, \phi_2)$ . Já a isotropia projetada, é a hipótese da igualdade entre as densidades projetadas em qualquer direção  $\rho(\theta_1, \phi_1) = \rho(\theta_2, \phi_2)$ . A partir dessas definições, somente com a isotropia radial combinada com o *Princípio Copernicano* (não estamos em um local especial do Universo), pode-se mostrar a homogeneidade pois, *qualquer espaço que seja isotrópico sobre todos os pontos, é também homogêneo* [4].

Recentemente [5], um estudo de isotropia radial foi realizado utilizando o método *information entropy* [6] com o catálogo de galáxias *Two Micron All-Sky redshift survey* (2MRS). Observou-se que, em pequenas escalas, a distribuição radial de galáxias

é altamente anisotrópica mas, em escalas acima de  $100 h^{-1} \text{ Mpc}^{1,2}$ , a distribuição se torna isotrópica. Em sua maioria, as análises estudam isotropia projetada, mostrando, por exemplo, que fontes de raio-X [7] e rádio [8] apresentam alto grau de isotropia. Outros testes, por exemplo, com *Gamma-ray bursts* [9], mapas de convergência do *Planck* [10] e mapas de galáxias do catálogo WISE [11] também são estudos de isotropia projetada, com resultados favoráveis ao PC. A radiação cósmica de fundo (RCF) também pode ser utilizada para um estudo de isotropia projetada, com as flutuações de temperatura da ordem de  $10^{-5}$  [12, 13]. Apesar dos fótons da RCF serem provenientes de uma faixa de *redshift* (1100-1300), não é possível distingui-los, o que leva à projeção dos dados na esfera celeste [14].

A aplicação das ferramentas matemáticas da análise fractal, estruturas geométricas que se assemelham ao todo a medida que aumentamos ou diminuimos a escala, possibilitou estudar a homogeneidade do Universo observado [15, 16]. A contagem em esferas é o principal método para decidir se uma distribuição é fractal ou homogênea. Ao contarmos, por exemplo, o número  $N$  de objetos em uma esfera de raio  $r$  centrada em uma galáxia, vê-se que  $N(r) \propto r^D$ , onde  $D$  é a dimensão da distribuição, de forma que, para um fractal,  $D$  é fracionário, e para uma distribuição homogênea,  $D$  é inteiro. No entanto, estudar a transição para homogeneidade requer catálogos de volume e completude consideráveis, pois a dimensão fractal é definida somente para um espaço de infinitos pontos e, por isso, catálogos incompletos podem apresentar falsos resultados [17, 18].

Estudos recentes [3, 19, 20], estimaram uma escala de transição para a homogeneidade em todas as faixas de *redshift* analisadas utilizando a dimensão fractal. Ou seja, existe uma escala na qual a distribuição passa de altamente não-homogênea (pequenas escalas) para homogênea. Os três trabalhos citados utilizaram o método de contagem em esferas normalizada, que usa catálogos aleatórios para corrigir efeitos de borda e de completude dos dados. Métodos anteriores [18, 21] utilizaram também as contagens em esferas, mas não consideravam aquelas que ultrapassassem as fronteiras do catálogo, o que diminuiu significativamente o número de esferas em grandes escalas.

Além disso, vale notar que, esse tipo de análise 3D utilizando *redshift* necessita de um modelo cosmológico para o cálculo das distâncias e, como o modelo atual assume homogeneidade e isotropia em grandes escalas, devemos considerar esse tipo de análise como um teste de consistência para o modelo assumido [19]. Com o intuito de contornar esse problema, uma série de trabalhos optou por uma análise angular, por ser independente de modelo, como, por exemplo, as referências [22–24]. A última em especial, recupera a escala física obtida em [20].

---

<sup>1</sup>Mpc =  $3,086 \times 10^{22}$  m.

<sup>2</sup>Veja a seção 2.2.1 para  $h$ .

Nosso trabalho consiste em analisarmos a distribuição de fontes HI do Universo local a partir da contagem normalizada projetada. Para tal, fazemos uso de três estimadores: *Average* e *Centre* [24] (denominados aqui E1 e E2, respectivamente), e o estimador  $\hat{\mathcal{N}}_{cor}$  (que chamamos estimador E3, ver referência [20]). Utilizamos ainda testes de consistência com catálogos fractais simulados de dimensão conhecida, para analisar a eficiência da nossa metodologia e verificar se a dimensão fractal é recuperada por eles.

A dissertação é estruturada da seguinte maneira: Capítulo 2 apresenta o modelo cosmológico padrão e seus principais observáveis cosmológicos. No capítulo 3 faremos uma breve introdução das ferramentas matemáticas envolvidas na análise fractal em cosmologia e apresentaremos alguns dos resultados mais recentes. A apresentação dos dados utilizados e a metodologia estão contidos no capítulo 4. Os resultados são apresentados no capítulo 5. Finalmente, no capítulo 6 as conclusões são apresentadas. Algumas demonstrações das passagens do caso 3D para 2D são deixadas para os dois apêndices.

# Capítulo 2

## O Modelo Cosmológico Padrão

Este capítulo apresenta a base do modelo cosmológico padrão e seus principais observáveis cosmológicos. As bases do modelo se estruturaram em dois pilares fundamentais: O *Princípio Cosmológico* (PC), assume-se que a distribuição de matéria no Universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas, e a Relatividade Geral de Einstein, considerada a teoria correta que descreve a gravidade.

### 2.1 Fundamentos da Cosmologia Moderna

#### 2.1.1 A Teoria da Relatividade Geral

Para estudar o Universo é necessário uma teoria que descreva, em boa aproximação, a dinâmica de objetos em um dado campo gravitacional. Com o desenvolvimento da Teoria da Relatividade Geral por Einstein, foi possível estudar como o espaço-tempo interage na presença de matéria-energia, e vice-versa [1].

Em sua construção, a primeira etapa realizada por Einstein foi a formulação do *Princípio da Equivalência*: Em um campo gravitacional arbitrário é possível utilizar, localmente, referenciais inerciais, de tal modo que a relatividade especial possa ser aplicada<sup>1</sup>. Tal princípio é sustentado pela igualdade observada entre as massas inercial e gravitacional [26]. Einstein formulou também o *Princípio da Covariância Geral*: As leis da natureza devem ser expressas por equações que sejam válidas em qualquer sistema de coordenada, ou seja, que preservem sua forma (covariante) em qualquer transformação.

As equações que relacionam espaço-tempo com a matéria-energia desenvolvidas por Einstein para um sistema de coordenadas  $x^\mu$ , podem ser escritas como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

---

<sup>1</sup>Este é considerado o princípio da equivalência forte, aplicado a todas as leis da física. O fraco, aplica-se somente a trajetória de partículas em queda livre [25].

onde  $R_{\mu\nu}$  é o tensor de Ricci,  $R$  é o escalar de Ricci,  $T_{\mu\nu}$  é o tensor momento-energia e  $\kappa = 8\pi G/c^4$ , sendo  $G$  e  $c$  a constante da gravitação universal e a velocidade da luz, respectivamente, e  $g_{\mu\nu}$  as componentes do tensor métrico. Na aproximação conhecida como limite newtoniano, em que as equações de Einstein são simplificadas na presença de campos gravitacionais fracos e velocidades não-relativísticas,  $v \ll c$ , obtêm-se [25]

$$\vec{\nabla}^2\Phi(x, y, z) \approx 4\pi G\rho(x, y, z), \quad (2.2)$$

a equação de Poisson para gravidade newtoniana na presença de uma densidade  $\rho(x, y, z)$ .

Para resolvermos as equações de Einstein é necessário definir uma métrica  $g_{\mu\nu}$  e um tenso momento-energia  $T_{\mu\nu}$ . Veremos na seção seguinte que no modelo cosmológico padrão utilizamos uma métrica que descreve um espaço-tempo localmente homogêneo e isotrópico devido ao PC, e seu conteúdo pode ser representado por um fluido ideal de pressão  $p$ , quadrivetor velocidade  $u^\mu$  e densidade  $\rho$

$$T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (p + \rho)u^\mu u^\nu. \quad (2.3)$$

Por fim, é importante mencionar que a relatividade geral passou por diversos testes experimentais e observacionais [27]. No entanto, ainda restam dúvidas quanto à sua aplicabilidade ao Universo observado, principalmente devido aos resultados que levaram à descoberta de que o Universo se encontra em expansão acelerada [28, 29]. Para explicá-las, algumas hipóteses foram feitas, tais como modificar as equações de Einstein [30], assumir métricas não-homogêneas [31] ou considerar uma componente de pressão negativa, conhecida por energia escura [32].

## 2.1.2 O Espaço-Tempo homogêneo e isotrópico

A métrica que compõe as soluções das equações de Einstein para um espaço homogêneo e isotrópico, conhecida por métrica FLRW - Friedmann-Leîmatre-Robertson-Walker, pode ser escrita como [33]

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[ \frac{dx^2}{1 - \kappa x^2/R_0^2} + x^2 d\Omega^2 \right], \quad (2.4)$$

onde  $t$  é a variável conhecida como *tempo cósmico*, medido por um observador que vê o Universo se expandir uniformemente ao seu redor. As coordenadas angulares estão contidas no ângulo sólido  $d\Omega$ . O fator de escala  $a(t)$  mede a taxa com que esse espaço-tempo se expande. A coordenada  $x$  está definida como

$$x \equiv S_\kappa(r), \quad (2.5)$$



sendo

$$S_{\kappa}(r) = \begin{cases} R \operatorname{sen}(r/R) & (\kappa = +1) \\ r & (\kappa = 0) \\ R \operatorname{senh}(r/R) & (\kappa = -1). \end{cases} \quad (2.6)$$

A constante  $\kappa$  é chamada por *constante de curvatura* e pode assumir três valores:  $\kappa = 0$  para um espaço plano,  $\kappa = +1$  para um espaço curvado positivamente e  $\kappa = -1$  para um espaço curvado negativamente. Caso o espaço assuma  $+1$  ou  $-1$ , a quantidade  $R$  é o raio da curvatura, sendo  $R_0$  seu valor medido hoje. A figura 2.1 ilustra o caso bidimensional das possíveis geometrias de um espaço-tempo que obedece a métrica de Robertson e Walker. As coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$  são conheci-

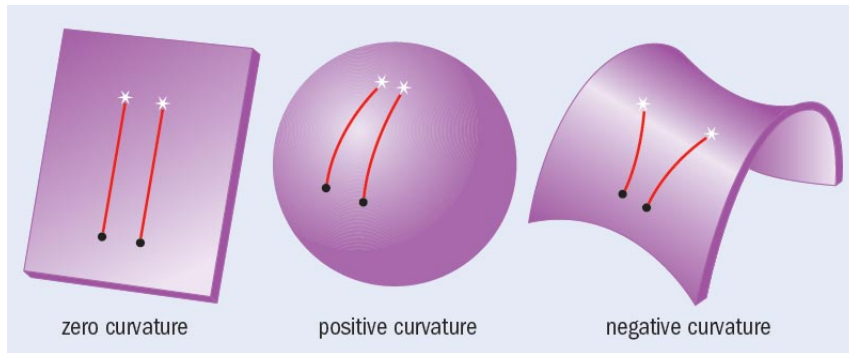


Figura 2.1: Possíveis geometrias em um espaço homogêneo e isotrópico. Para  $k = 0$ , o espaço é plano (esquerda), para  $k = +1$ , a curvatura é positiva (centro) e  $k = -1$ , a curvatura é negativa (direita). Diversas análises com diferentes observáveis cosmológicos indicam um Universo plano, ou seja, com  $k = 0$  [34]. **Fonte:** <http://images.iop.org/objects/phw/world/23/6/42/dark2.jpg>

das como *coordenadas comóveis*, quantidades que permanecem constantes em um Universo homogêneo e isotrópico em expansão. O espaço-tempo na métrica de Robertson e Walker pode ser representado graficamente pela figura 2.2, onde o espaço tridimensional é representado por hipersuperfícies de  $t=\text{cte}$  que não se interceptam e podem ser parametrizadas pela coordenada  $t$ .

A partir da métrica 2.4 é possível calcular a distância entre dois eventos em um tempo fixo  $t$ , conhecido o fator de escala no tempo  $t$  e a constante de curvatura. Dado um observador na origem das coordenadas espaciais e o evento a ter sua distância medida localizado em  $(x, \theta, \phi)$ , a *distância própria* é obtida ao integrar  $ds$  [33]

$$d_p(t) = \int_0^x ds = \int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{1 - \kappa x'^2/R_0^2}} \quad (2.7)$$

já que  $dt = d\Omega = 0$ . A distância própria pode assumir três expressões diferentes,

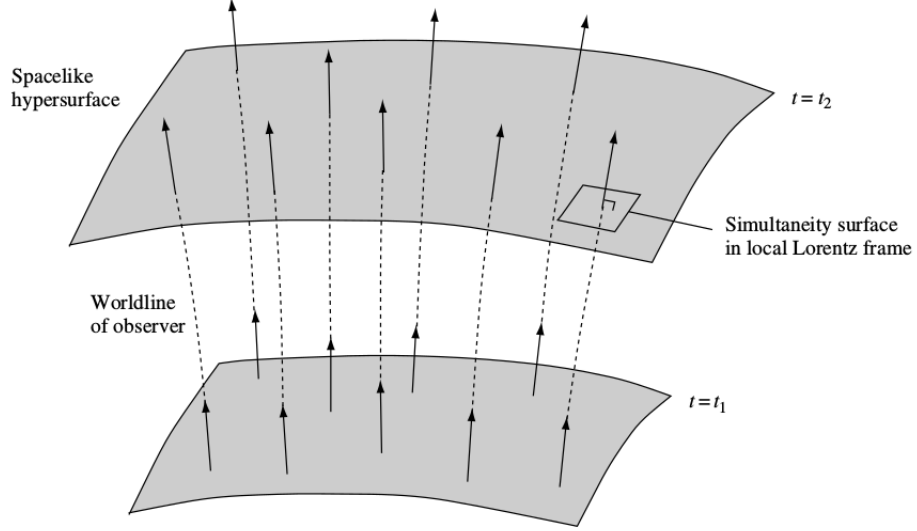


Figura 2.2: Representação das hipersuperfícies para os instante  $t_1$  e  $t_2$ . As linhas perpendiculares ao plano representam a trajetória temporal de um observador localizado no plano com coordenadas comóveis. **Fonte:** [25]

dados o valor da constante de curvatura, ao integrar a expressão 2.7

$$d_p(t) = \begin{cases} a(t)R_0 \operatorname{sen}^{-1}(x/R_0) & (\kappa = +1), \\ a(t)x & (\kappa = 0), \\ a(t)R_0 \operatorname{senh}^{-1}(x/R_0) & (\kappa = -1). \end{cases} \quad (2.8)$$

Lembrando que o parâmetro  $x$  está relacionado com  $r$  através de  $S_k(r)$ , e equação 2.6. A distância  $d_p$  está relacionada à trajetória do fóton emitido pelo objeto no tempo  $t_e$  e recebido pelo observador em  $t_0$  ao fazer  $ds = d\Omega = 0$ ,

$$d_p = \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)}. \quad (2.11)$$

O fator de escala  $a(t)$  é obtido ao resolver as equações de Einstein para a métrica 2.4, portanto, dependerá do conteúdo do Universo. Caso a aproximação de um Universo homogêneo e isotrópico esteja equivocada, o cálculo das distâncias estarão subestimadas.

### 2.1.3 As Equações de Friedmann

A partir da métrica 2.4 e assumindo um fluido ideal dado pela equação 2.3, obtém-se das equações de Einstein 2.1 as *equações de Friedmann* [25]

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -4\pi G \left( \rho(t) + \frac{3p(t)}{c^2} \right), \quad (2.12)$$

$$\frac{\dot{a}(t)^2}{a(t)^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho(t) - \frac{c^2 k}{a^2(t) R_0^2}, \quad (2.13)$$

onde  $(\cdot)$  significa derivada com respeito ao tempo cósmico. Essas equações descrevem a velocidade e a aceleração do espaço-tempo homogêneo e isotrópico dado o seu conteúdo material e a curvatura do espaço. Pressão e densidade dependem somente de  $t$  ao considerarmos um fluido ideal em coordenadas comóveis.

Podemos obter uma terceira equação derivando a 2.13 em função do tempo e substituindo em 2.12,

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a} \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0, \quad (2.14)$$

que é uma equação que expressa a conservação de energia. Para resolver essa equação diferencial, assumimos uma relação entre densidade e pressão, chamada *equação de estado*. Vamos assumir que essa relação é linear<sup>2</sup> da forma

$$p = \omega c^2 \rho, \quad (2.15)$$

onde  $\omega$  é uma constante de proporcionalidade característica de cada componente contida no Universo. Além da equação de estado, assumimos que não há nenhuma interação, ou que ela seja desprezível, entre cada componente, por exemplo, matéria e radiação. Portanto, podemos escrever a equação 2.14 para cada componente de índice  $i$ ,

$$\dot{\rho}_i + 3\frac{\dot{a}}{a} (\rho_i + \omega \rho_i) = 0. \quad (2.16)$$

Resolvendo essa equação diferencial temos

$$\frac{1}{3(1+\omega)} \int_{\rho}^{\rho_0} \frac{d\rho'}{\rho'} = \int_{a_0}^a \frac{da'}{a'}, \quad (2.17)$$

que leva em

$$\rho(a) = \rho_{\omega,0} a^{-3(1+\omega)}. \quad (2.18)$$

Normaliza-se o valor do fator de escala hoje com  $a_0 = 1$ . O índice 0 indica medidas feitas hoje.

O modelo padrão da cosmologia utiliza basicamente três componentes para

---

<sup>2</sup>Gases diluídos apresentam uma relação linear da forma 2.15, considerada uma boa aproximação para a cosmologia [33].

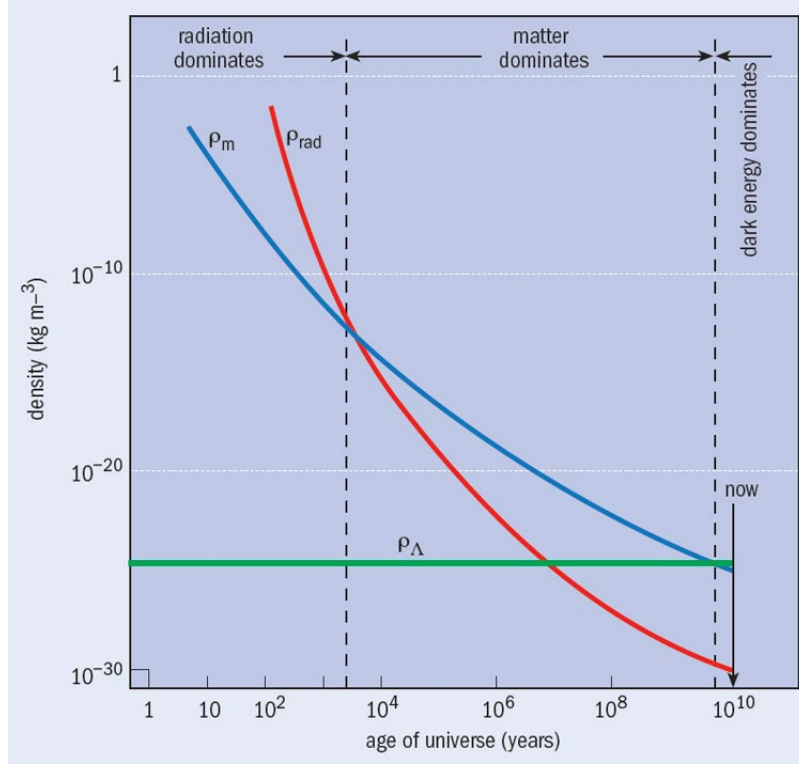


Figura 2.3: Evolução da densidade de energia, em  $\text{kg}/\text{m}^3$  com o tempo, em anos. Há dois momentos importantes: Quando a densidade da matéria torna-se maior que a da radiação e, recentemente na história do Universo, a energia escura domina em relação a matéria e radiação. **Fonte:** <http://images.iop.org/objects/phw/world/23/6/42/dark4.jpg>

descrever o conteúdo material do Universo: Matéria (escura e bariônica) não-relativística com  $\omega = 0$ , radiação,  $\omega = 1/3$ , e energia escura,  $\omega = -1$ . Substituindo os valores de  $\omega$  na equação 2.18

$$\rho_m(a) = \rho_{m,0} a^{-3}, \quad (2.19)$$

$$\rho_r(a) = \rho_{r,0} a^{-4}, \quad (2.20)$$

$$\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda,0}. \quad (2.21)$$

Na figura 2.3 vemos que o Universo passa por diversas fases, dominadas por diferentes componentes: tem-se a era da radiação, quando o Universo era quente e denso, depois um intervalo dominado pela matéria, onde acontece a formação das primeiras estrelas, enquanto que hoje a energia escura domina a evolução do Universo.

Podemos reescrever a equação 2.13 a partir de duas novas definições:

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (2.22)$$

e

$$\Omega(t) \equiv \frac{\rho(t)}{\rho_{crit}(t)}, \quad (2.23)$$

onde  $H(t)$  é o parâmetro de Hubble e  $\Omega(t)$  é o parâmetro de densidade. Essas duas quantidades são medidas observacionalmente.  $\rho_{crit}$  é a densidade crítica, definida como sendo a densidade tal que a geometria do Universo é euclidiana ( $\kappa = 0$ ) na equação 2.13

$$\rho_{crit} \equiv \frac{3H(t)^2}{8\pi G}. \quad (2.24)$$

Acima deste valor o Universo tem geometria esférica e abaixo disso, geometria hiperbólica. Substituindo os dois parâmetros na equação 2.13 temos

$$1 - \Omega(t) = -\frac{c^2 k}{R_0^2 a(t)^2 H(t)^2}. \quad (2.25)$$

Dada uma medida precisa de  $\Omega$  hoje,  $\Omega_0$ , para a soma de todas as componentes, poderíamos determinar a curvatura do Universo,

$$1 - \Omega_0 = -\frac{c^2 k}{R_0^2 H_0^2}, \quad (2.26)$$

onde  $\Omega_0 = \Omega_{r,0} + \Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0}$ . Para  $\Omega_0$  maior que 1, menor que 1 e zero, a curvatura do Universo é esférica, hiperbólica e euclidiana, respectivamente.

A equação 2.13 pode ser escrita em termos dos parâmetros medidos hoje dividindo ambos os lados por  $H_0^2$

$$\frac{H(t)^2}{H_0^2} = \frac{\rho(t)}{\rho_{c,0}} + \frac{1 - \Omega_0}{a(t)^2}, \quad (2.27)$$

que resulta em

$$\frac{H(t)^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{r,0}}{a(t)^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a(t)^3} + \Omega_{\Lambda,0} + \frac{1 - \Omega_0}{a(t)^2}, \quad (2.28)$$

ao aplicar a equação 2.18 para cada componente. Com essa equação podemos determinar o tempo cósmico  $t$  em função do fator de escala  $a$ . No entanto, não existe soluções analíticas para ela na presença da radiação, somente aproximações numéricas. Escrevendo  $\Omega_0$  em função dos outros parâmetros e desprezando a contribuição da radiação<sup>3</sup>, pode-se calcular o tempo cósmico transcorrido entre o tempo em que toda matéria estava reunida (singularidade) e hoje,

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{\sqrt{ada}}{\sqrt{(1-a)\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0}(a^2 - 1)a + a}}. \quad (2.29)$$

Os dados atuais mostram que o Universo tem uma idade aproximada de 13.8 bilhões

---

<sup>3</sup> $\Omega_{r,0}$  é da ordem de  $10^{-5}$ .

de anos [34].

## 2.1.4 Medindo distâncias na cosmologia

Nesta seção serão revisitadas as principais equações para cálculos de distâncias em cosmologia. Para uma descrição mais completa, veja referência [35]. Para uma análise cosmográfica (isto é, sem usar parâmetros cosmológicos) veja referência [36].

### Distância Comóvel

Agora podemos reescrever a equação 2.11 em termos dos parâmetros da densidade, mas para isso precisamos realizar uma mudança de variável, pois o que medimos é o desvio para o vermelho dos espectros das galáxias, conhecido como *redshift*,  $z$ . A relação entre  $z$  e  $a$  é dada por [33]

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t)}. \quad (2.30)$$

Tomando o fator de escala hoje como sendo  $a(t_0) = 1$  e derivando em relação a  $t$ , obtemos

$$\frac{dt}{a} = -\frac{dz}{H}. \quad (2.31)$$

Substituindo na equação 2.11, a distância comóvel pode ser escrita como

$$d_{com} = \int_0^z \frac{cdz'}{H(z')}. \quad (2.32)$$

Introduzindo a relação 2.30 na equação 2.28, e esta, por sua vez, na equação 2.32, obtêm-se a distância em função dos parâmetros de densidade

$$d_{com} = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_{r,0}(1+z')^4 + \Omega_{m,0}(1+z')^3 + \Omega_{\Lambda,0} + (1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0})(1+z')^2}}. \quad (2.33)$$

Esta expressão poder ser simplificada ao desprezarmos o efeito da radiação,

$$d_{com} = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{(1+z')^2(1 + \Omega_{m,0}z') - z'(z'+2)\Omega_{\Lambda,0}}}. \quad (2.34)$$

### Distância de Luminosidade

Dado um objeto de luminosidade  $L$ , é possível definir uma função  $d_L$  chamada *distância de luminosidade* [35]

$$d_L \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi f}}, \quad (2.35)$$

onde  $f$  é o fluxo de energia do objeto. Essa relação somente é válida na geometria euclidiana. Para um espaço que pode ter uma curvatura diferente de zero e sujeito à expansão, essa relação é modificada e se relaciona com a distância comóvel da seguinte maneira

$$d_L = (1 + z)d_{com}. \quad (2.36)$$

Diferentemente da distância comóvel,  $d_L$  pode ser medido diretamente das observações.

### Distância de Diâmetro Angular

Dado um objeto de escala física conhecida  $l$  e extensão angular  $\theta$ , pode-se definir *distância de diâmetro angular* como sendo [35]

$$d_A \equiv \frac{l}{\theta}, \quad (2.37)$$

válida somente para ângulos pequenos e expressos em radianos. Novamente, tratando-se de um Universo em expansão e curvatura não-nula,  $d_A$  se relaciona com a distância comóvel da seguinte maneira

$$d_A = \frac{d_{com}}{(1 + z)}. \quad (2.38)$$

Comparando com a equação 2.36, obtemos a seguinte relação

$$d_A = \frac{d_L}{(1 + z)^2}. \quad (2.39)$$

## 2.2 Observáveis Cosmológicos

A seguir faremos um breve resumo de alguns dos principais observáveis cosmológicos, são eles: A lei de Hubble e a expansão acelerada do Universo, a radiação cósmica de fundo, resquícios de quando o Universo era denso e quente, e a matéria escura, componente exótica que interage somente pela gravidade, necessária para explicar, por exemplo, o movimento de rotação das galáxias.

### 2.2.1 A Expansão do Universo

#### A Lei de Hubble

As medidas de distância e *redshift* de galáxias obtidas por Edwin Hubble em 1929 mostraram que, quanto maior suas distâncias, maior o desvio para o vermelho

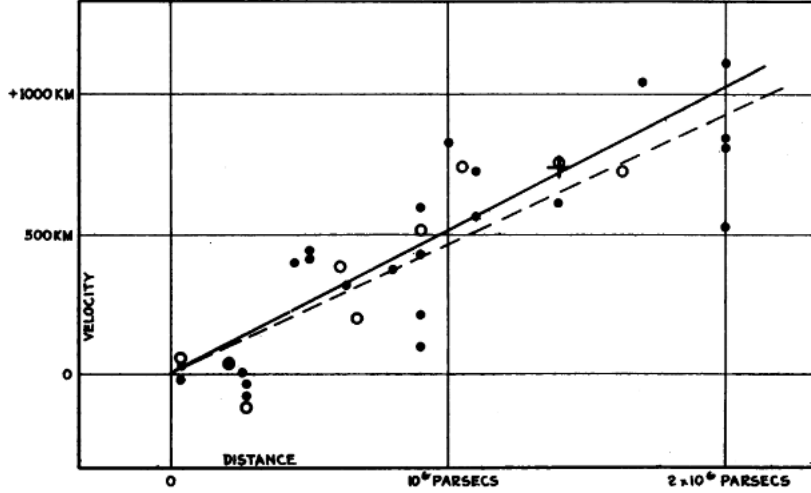


Figura 2.4: Gráfico do artigo de Edwin Hubble sobre a recessão de galáxias. Eixo vertical está em km, mas deveria estar em km/s, correspondendo a  $cz$ . Eixo horizontal é a distância em Parsec. **Fonte:** [37].

observado em seus espectros [37]. Essa relação pode ser escrita da seguinte maneira

$$z = \frac{H_0}{c}d, \quad (2.40)$$

em que  $H_0$ , medido hoje, é conhecido como *constante de Hubble*, que pode ser escrita em termos do parâmetro adimensional  $h$  [38]

$$h \equiv \frac{H_0}{100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}}. \quad (2.41)$$

Na figura 2.4 temos a análise original de Hubble onde o eixo vertical é a velocidade de recessão das galáxias em unidades de km/s e no eixo horizontal a distância, medida em *parsecs*. Considerando as medidas apresentadas em [39],  $H_0$  vale

$$H_0 = 73,8 \pm 2,4 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (2.42)$$

Para baixos *redshifts* podemos ainda utilizar a relação não-relativística  $v = cz$ , em que  $v$  é a velocidade radial das galáxias. Assim a equação 2.40, conhecida como *Lei de Hubble*, fica

$$v = H_0d, \quad (2.43)$$

onde  $v$  é a velocidade de recessão das galáxias. Para entendermos como essa observação indica a expansão do Universo, considere 3 galáxias em um espaço homogêneo e isotrópico, como na figura 2.5. Se esse espaço expande de maneira uniforme e homogênea, as galáxias se afastam uma das outras e a forma do triângulo é



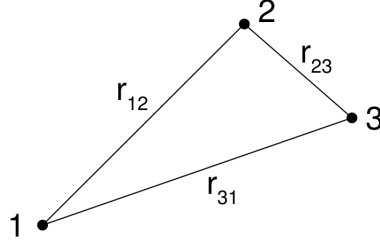


Figura 2.5: Triângulo definido por três galáxias em um espaço homogêneo e isotrópico. A medida que se expande a forma do triângulo se mantém mas sua área aumenta. **Fonte:** [33].

preservada, ou seja, as distâncias devem crescer igualmente por um fator de escala

$$r_{12}(t) = a(t)r_{12}(t_0), \quad (2.44)$$

$$r_{23}(t) = a(t)r_{23}(t_0), \quad (2.45)$$

$$r_{31}(t) = a(t)r_{31}(t_0). \quad (2.46)$$

As velocidades das galáxias 2 e 3 vistas por 1 seria

$$v_{12}(t) = \frac{dr_{12}}{dt} = \dot{a}r_{12}(t_0) = \frac{\dot{a}}{a}r_{12}(t), \quad (2.47)$$

$$v_{31}(t) = \frac{dr_{31}}{dt} = \dot{a}r_{31}(t_0) = \frac{\dot{a}}{a}r_{31}(t). \quad (2.48)$$

O ponto de vista das galáxias 2 e 3 seria o mesmo, cada uma veria as outras duas galáxias se afastando de forma proporcional à distância, onde a constante de proporcionalidade é o parâmetro de Hubble  $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$ , definido na seção anterior. Se revertemos a expansão, veríamos todas as galáxias se aproximando umas das outras. Assim, em um determinado instante  $t_0$ , todas as galáxias estavam juntas. Usando uma aproximação grosseira, pois já vimos como calcular a idade do Universo, o instante em que todas estavam juntas pode ser calculada pelo inverso da constante de Hubble,

$$t_0 = \frac{1}{H_0} = \frac{1}{73,8} \times 3,086 \times 10^{19} = 13,3 \text{ bilhões de anos}, \quad (2.49)$$

sendo um valor bem próximo do modelo padrão da cosmologia.

## Supernovas e a Expansão Acelerada do Universo

Quase 70 anos após os resultados mostrando a relação entre velocidade e distância observada por Hubble, dois grupos, de forma independente, observando supernovas do tipo Ia, descobriram que a expansão do Universo está acelerando [28, 29].

Supernovas do tipo Ia são explosões que acontecem em circunstâncias muito especiais: Quando uma anã branca, um tipo de estrela que esgotou todo o seu combustível, atinge uma massa de  $1,38M_{\odot}$ <sup>4</sup>, devido a mecanismos como acreção de massa de uma estrela companheira, ela entra em colapso<sup>5</sup>. Essa explosão acontece de maneira semelhante para todas as supernovas do tipo Ia. Isso as torna importantes para cosmologia, pois é possível padronizar suas curvas de luz, possibilitando o cálculo das distâncias sem o uso de modelo cosmológico [41]. Lembrando da equação 2.35, sua distância pode ser calculada conhecendo sua magnitude aparente  $m$  e absoluta  $M$  (equivalente à luminosidade), que é padronizada para todas as supernovas do tipo Ia. A equação que descreve essa relação é

$$m - M = 5 \log_{10} \left( \frac{d_L}{10 \text{ pc}} \right). \quad (2.50)$$

Portanto, é possível fazer estimativas de parâmetros cosmológicos a partir da observação destes objetos, já que o lado esquerdo é medido e em  $d_L$  está inserido o modelo cosmológico a ser estudado.

Neste contexto, alguns resultados pioneiros foram obtidos por Riess [29] e Perlmutter [28], ambos encontrando um valor diferente de zero para o parâmetro de densidade  $\Omega_{\Lambda}$ . O consenso geral daquela época era um modelo com  $k = 0$  e  $\Omega_m = 1$ . Nesse modelo, o Universo está expandindo, mas de forma cada vez mais devagar. No entanto, os dados não favoreciam esse modelo e, mais de 70% do conteúdo do Universo era desconhecido.

Lembrando das equações de Friedmann, para termos um Universo acelerado, na equação 2.12 deve-se assumir uma componente de pressão negativa. A energia escura, como é conhecida hoje essa componente que causa uma expansão acelerada, é um dos grandes problemas a serem solucionados pelos cosmólogos. Algumas alternativas a ela vem sendo propostas, tais como modificar as equações de campo de Einstein [30], ou explicar por efeitos de não-homogeneidades locais [31].

## 2.2.2 Matéria Escura

Matéria escura fria (*Cold Dark Matter*) é o nome dado à matéria não-bariônica e não-relativística que não interage com a radiação eletromagnética, somente vemos seus efeitos no campo gravitacional. O nome reflete a nossa ignorância de sua natureza. No entanto, alguns objetos como WIMPS (*Weakly Interacting Massive Particle*), partículas massivas de fraca interação, são possíveis candidatas a matéria escura [42].

<sup>4</sup>Massa do sol:  $M_{\odot} = 1,9891 \times 10^{30}$  kg.

<sup>5</sup>Para um estudo mais detalhado sobre a formação das supernovas do tipo Ia veja [40].

As primeiras evidências da existência de matéria escura surgiram em 1933. Estudando o aglomerado de Coma, Fritz Zwicky encontrou evidências de que a massa necessária para manter um aglomerado coeso era 100 vezes maior do que a matéria luminosa observada [43]. Desde então, observações em raios-X e de efeitos de lenteamento gravitacional reforçaram a necessidade de um componente de matéria escura [42].

Outra descoberta importante para a aceitação da matéria escura foi o estudo das curvas de rotação das galáxias. Vera Rubin [44], ao observar curvas de rotação de galáxias, verificou que a velocidade da matéria mantinha-se constante ao longo do raio, diferente do que se esperaria teoricamente. Este comportamento é ilustrado na figura 2.6 para o caso da galáxia M33.

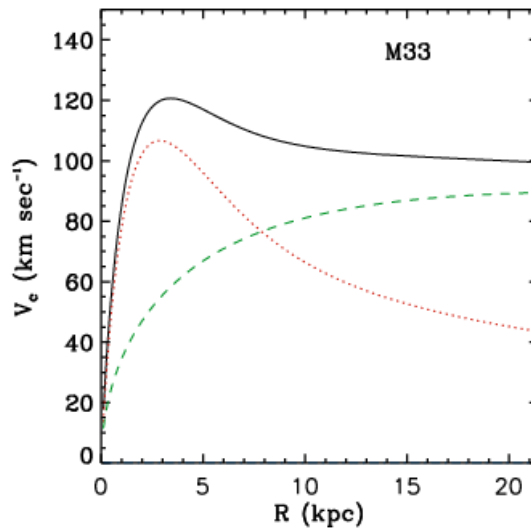


Figura 2.6: Curva de rotação da galáxia M33. A curva pontilhada seria o esperado caso houvesse somente matéria luminosa, ou seja, a uma determinada distância, as velocidades cairiam. No entanto, a curva que se ajusta aos dados, curva cheia, indica uma quantidade muito maior de massa do que é observado como matéria luminosa, que seria a soma das curvas pontilhada e tracejada. Esta última representa a massa de matéria escura. **Fonte:** [45]

### 2.2.3 A Radiação Cósmica de Fundo em Micro-ondas

Uma radiação eletromagnética com comprimento de onda na faixa do micro-ondas, a RCF, descoberta por Penzias e Wilson [46], permeia todo o Universo com uma temperatura uniforme [47]

$$T_0 = 2.72548 \pm 0.00057 \text{ K.} \quad (2.51)$$

A RCF é perfeitamente descrita por um espectro de corpo negro. A figura 2.7 ilustra a curva de um corpo negro. Essa é uma indicação de que o Universo passou por uma

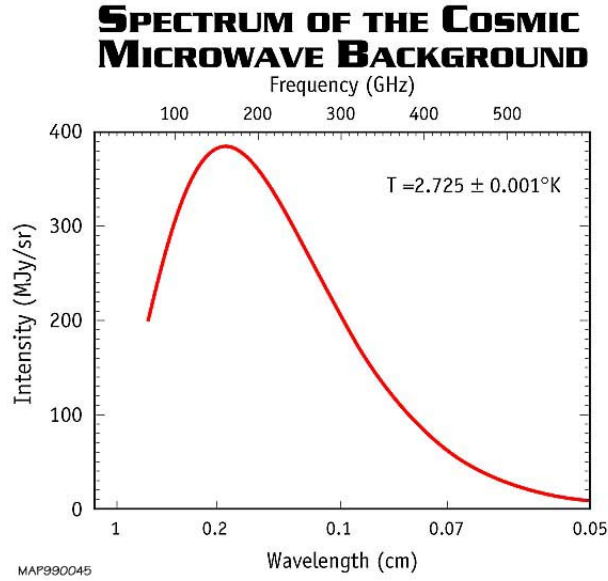


Figura 2.7: Espectro de corpo negro da RCF que permeia todo o Universo. Considera-se um dos ajustes mais perfeitos a uma observação. Essa é uma das mais fortes evidências de que o Universo passou por uma fase de equilíbrio termodinâmico. **Fonte:** <https://map.gsfc.nasa.gov/media/ContentMedia/990015b.jpg>

fase de equilíbrio térmico ao longo de sua evolução. Podemos, portanto, mostrar que a expansão do Universo não afeta a forma do espectro mas diminui a temperatura da RCF.

Suponhamos uma região de volume  $V$  que se expande à mesma taxa que o Universo. A densidade de energia dos fótons contidos nessa região, à temperatura  $T$ , pode ser modelada pela função de corpo negro [33]

$$\varepsilon(f)df = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{f^3 df}{\exp(hf/kT) - 1}, \quad (2.52)$$

onde  $h$ ,  $k$  e  $f$  são as constante de Planck, constante de Boltzmann e a frequência, respectivamente. Integrada em todas as frequências obtemos a energia total da radiação

$$\varepsilon_\gamma = \alpha T^4, \quad (2.53)$$

sendo  $\alpha = 7,56 \times 10^{-16} \text{Jm}^{-3}\text{K}^{-4}$ . A pressão exercida por esses fótons é

$$P_\gamma = \frac{\rho c^2}{3}. \quad (2.54)$$

Vamos considerar a primeira lei da termodinâmica para esse gás de fótons

$$dQ = dE + PdV, \quad (2.55)$$

onde  $dQ$ ,  $dE$  e  $dV$  são as variações de calor, de energia interna e de volume, respec-

tivamente. Em um universo homogêneo não há variação de calor, portanto  $dQ=0$ . Escrevendo em termos da densidade e pressão dos fótons, temos

$$0 = 4\alpha T^3 V dT + \alpha T^4 dV + \frac{1}{3}\alpha T^4 dV. \quad (2.56)$$

Simplificando e dividindo por  $dt$

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = -\frac{1}{3} \frac{1}{V} \frac{dV}{dt} \quad (2.57)$$

$$\frac{d(\ln T)}{dt} = -\frac{1}{3} \frac{d(\ln V)}{dt}. \quad (2.58)$$

como o volume da região expande junto com o Universo, ou seja,

$$V \propto a(t)^3, \quad (2.59)$$

temos, portanto,

$$\frac{d(\ln T)}{dt} = -\frac{d(\ln a)}{dt}. \quad (2.60)$$

Essa relação implica que o Universo vai se resfriando conforme se expande. Isso explica a observação da RCF em um comprimento de onda longo, ou seja, baixa energia implica no aumento do comprimento de onda, dada pela relação  $E = hc/\lambda$ . Assim, como a relação entre temperatura e fator de escala é independente da frequência, o espectro de corpo negro não se altera ao longo da evolução do Universo.

Buscando por possíveis flutuações da RCF, em 1989 foi lançado o satélite *COsmic Background Explorer* (COBE), com o intuito de realizar medidas precisas e livre de distorções causadas pela atmosfera. Os principais resultados obtidos da análise dos dados do COBE [48] foram a confirmação do espectro de corpo negro da RCF com temperatura,

$$T_0 = 2.725 \pm 0.020 \text{ K}, \quad (2.61)$$

e a existência de um dipolo com amplitude de  $3.353 \pm 0.024 \text{ mK}$ , na direção  $(l, b) = (264^\circ.26 \pm 0^\circ.33, 48^\circ.22 \pm 0^\circ.13)$ <sup>6</sup>. Este dipolo é simplesmente um resultado claro que o nosso Universo local não é isotrópico, os movimentos relativos da nossa galáxia afetam a medida da temperatura da RCF. Por fim, o COBE foi capaz de medir flutuações de temperatura na RCF, o que possibilitou estudar a origem de estruturas no Universo. A figura 2.8 mostra mapas de temperatura obtidos com o COBE, cujas flutuações são da ordem de  $10^{-5} \text{ mK}$ .

---

<sup>6</sup> $l$  e  $b$  são coordenadas galácticas, sendo  $l$  a longitude galáctica medido ao longo do plano de nossa galáxia, variando de  $0^\circ$  a  $360^\circ$  e  $b$ , a latitude galáctica, distância angular medida perpendicularmente ao plano galáctico, variando de  $90^\circ$  a  $-90^\circ$ .

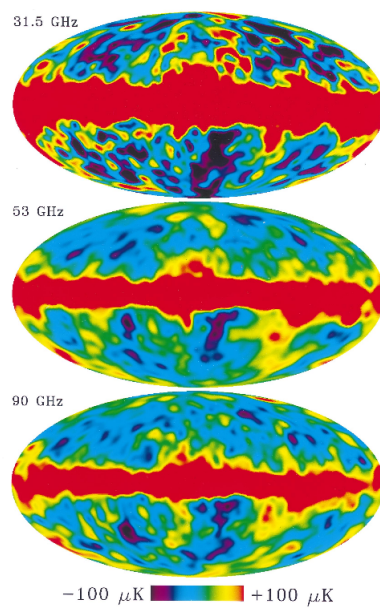


Figura 2.8: Mapas de variação de temperatura da RCF em diferentes frequências, obtidas com o satélite COBE. A faixa vermelha representa o plano de nossa galáxia, que é retirado para análises posteriores. Essas pequenas variações na temperatura, são de extrema importância para explicar a formação de estruturas que observamos hoje com os grandes levantamentos de galáxias e outros objetos. **Fonte:** [48].

## Capítulo 3

# Análise Fractal do Universo Observado

Fractais são estruturas geométricas capazes de descrever a forma de objetos irregulares, ou ainda, alguma distribuição que aparece de forma não uniforme no espaço. Seu desenvolvimento formal surgiu com os trabalhos de Benoit Mandelbrot ao estudar fenômenos irregulares em linhas telefônicas [15].

As principais propriedades dos fractais são: Auto-semelhança, complexidade infinita e sua dimensão. A característica de auto-semelhança pode ser vista na figura 3.1, em que, ampliando-se uma de suas partes, o padrão observado permanece. A

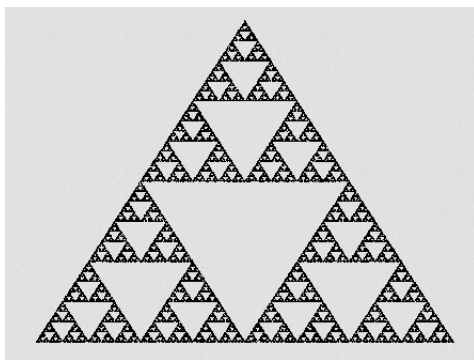


Figura 3.1: Exemplo clássico de fractal, conhecido como triângulo de Sierpinski. A característica de auto-semelhança pode ser observada ao ampliar um dos triângulos menores, verificando que este se assemelha ao todo. **Fonte:** <http://www.stsci.edu/~lbradley/seminar/fractals.html>

criação de um fractal ocorre de forma recursiva, construindo estruturas cada vez menores e que se assemelham ao todo. Deste modo, quando particionado, cada uma destas partes (e suas respectivas partes) são semelhantes à estrutura original, processo tal que pode ser repetido infinitamente, por isso dito de complexidade infinita. Por fim, como o próprio nome diz, um fractal possui dimensão fracionária. Um exemplo é o floco de neve de Koch [49], ilustrado na figura 3.2, cuja dimensão

fractal é aproximadamente 1,262.

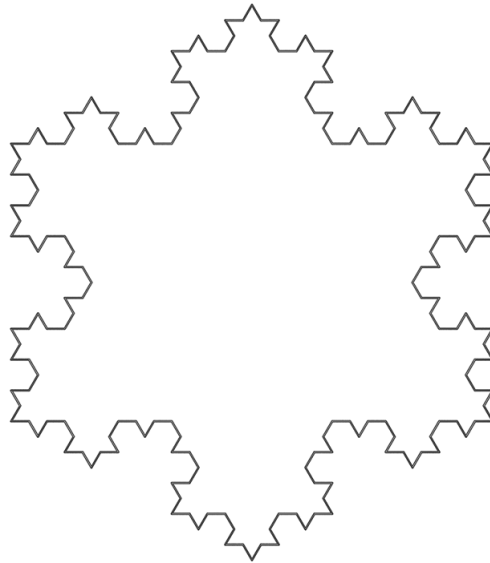


Figura 3.2: Fractal clássico conhecido como floco de neve de Koch, cuja dimensão fractal é aproximadamente 1,262. **Fonte:** [http://paulbourke.net/fractals/vonkoch\\_snowflake/](http://paulbourke.net/fractals/vonkoch_snowflake/)

A aplicação da geometria fractal aos grandes levantamentos de dados da estrutura em larga escala surgiu com o propósito de estudar a forma com que objetos, como galáxias, se distribuem no Universo observável. As características de um fractal são apropriadas para estudar sistemas complexos e caóticos. Portanto, o uso da geometria fractal na Cosmologia tem como principal motivação caracterizar a aglomeração de objetos no Universo, dada a presença de estruturas complexas, como por exemplo, a estrutura filamentar observada na distribuição de galáxias e a presença de aglomerados de galáxias, decorrentes da evolução não-linear das estruturas em pequenas escalas. No entanto, utilizar o conceito de fractal não implica que o Universo é representado por uma estrutura auto-similar em todas as escalas [50].

Note que, se o Universo é fractal, não poderíamos assumir o PC, um Universo de dimensão fracionária não é homogêneo e nem isotrópico. Visto isso, alguns modelos cosmológicos alternativos foram propostos com o objetivo de obter novas equações para a Cosmologia, veja por exemplo [51].

Dadas as observações recentes apresentadas na introdução, espera-se encontrar uma quebra da invariância de escala na distribuição de galáxias, portanto, a análise fractal ainda poderia ser utilizada, mas com a finalidade de obter essa escala onde ocorre a transição de uma distribuição não-homogênea (fractal) para homogênea.

Devido às primeiras análises não apresentarem uma clara transição de uma distribuição fractal para homogênea, gerou-se muito questionamentos e dúvidas quanto



ao PC<sup>1</sup>. No entanto, o principal motivo pelo qual as análises dos primeiros catálogos com medidas de distâncias não encontrarem uma clara transição para homogeneidade é a falta de completude, ou seja, o número de objetos não é grande o suficiente para obter uma boa estatística [17].

Neste capítulo será apresentado o formalismo matemático básico para análise fractal da distribuição de galáxias. Os principais resultados da literatura, explorando os mais recentes catálogos, também são resumidos nas seções a seguir. Para um estudo matemático mais detalhado veja referência [53].

## 3.1 Dimensão fractal

A dimensão fractal é a principal ferramenta utilizada para investigar se uma distribuição é estatisticamente homogênea ou se apresenta características de um fractal. Se o valor encontrado para a dimensão for inteiro, ou próximo disto<sup>2</sup>, temos uma distribuição homogênea, caso contrário, fractal.

### 3.1.1 Dimensão de contagem em caixas

Uma maneira de calcular a dimensão fractal é utilizando a contagem em caixas. Considere uma caixa com pontos distribuídos no seu interior. Cada lado da caixa é dividido ao meio, para uma caixa tridimensional teremos 8 cubos menores. O próximo procedimento é contar o número de caixas não vazias. Feita a contagem, dividi-se novamente pela metade os lados dessas mesmas caixas. O procedimento é repetido de forma que no limite em que a escala de comprimento da caixa tende a zero, a dimensão da contagem em caixas é dada por [54]

$$D_B = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log (1/\epsilon)}. \quad (3.1)$$

A quantidade  $N(\epsilon)$  corresponde ao número mínimo de caixas com lado  $\epsilon$  para cobrir todos os pontos da distribuição. Se aplicarmos a definição 3.1 a objetos com formas suaves, como linhas, superfícies e cubos, obtemos, respectivamente,  $N(\epsilon) \sim \epsilon^{-1}$ ,  $N(\epsilon) \sim \epsilon^{-2}$  e  $N(\epsilon) \sim \epsilon^{-3}$ , sendo os expoentes os valores correspondentes à dimensão em cada caso. Na prática, em situações físicas, a definição 3.1 não é viável, devido ao limite aplicado. Um exemplo são os catálogos de galáxias que apresentam um número finito de objetos e uma escala limite para o tamanho das caixas.

---

<sup>1</sup>Veja [52] para uma revisão detalhada sobre o estudo de fractal em distribuição de galáxias e seus principais debates.

<sup>2</sup>Mais à frente serão discutidos os critérios estatísticos para determinar quando uma distribuição é fractal ou não.

### 3.1.2 Dimensão de correlação

O método mais utilizado para obter a dimensão fractal em catálogos de galáxias é o cálculo da quantidade [55]

$$C_2(r) = \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M n_i(r), \quad (3.2)$$

de forma que, caso obedeça uma lei de potência

$$C_2(r) \propto r^{D_2}, \quad (3.3)$$

o parâmetro  $D_2$  será interpretado como a dimensão da distribuição. Essa quantidade é conhecida como dimensão de correlação, e pode ser calculada tomando a derivada logarítmica de  $\log C_2$ ,

$$D_2(r) = \frac{d \log C_2(r)}{d \log r}. \quad (3.4)$$

Caso  $D_2$  seja fracionário, a distribuição é fractal, se inteiro, é homogênea. Na equação 3.2,  $n_i$  é o número de objetos contidos em uma esfera de raio  $r$  centrada no  $i$ -ésimo objeto do catálogo,  $N$  é o número total de objetos usados na análise e  $M$  é o número de objetos utilizados como centros para o cálculo de  $n_i$ . Note que em um caso real, por exemplo um catálogo de galáxias, nem sempre é possível utilizar todos os objetos como centros para esferas de contagem. Isto se deve à finitude do próprio catálogo, já que estas esferas devem permanecer dentro da região do catálogo e, por isso, à medida que o raio  $r$  aumenta, o número  $M$  diminui. Alguns métodos foram utilizados para corrigir estes chamados “efeitos de borda”, como mostrado, por exemplo na referência [56]. Mais adiante será apresentado um método mais eficaz para contornar o problema de borda, retirando o máximo de informação do catálogo, o qual será a principal ferramenta deste trabalho.

Note que a quantidade  $C_2$  pode ser calculada também pela integral de volume da função de correlação de dois pontos. No entanto, a forma como é definida a função de correlação exige o conhecimento prévio da densidade média de galáxias, sendo necessário assumir a priori uma distribuição homogênea [16]. Mais detalhes serão apresentados na seção 3.3.

### 3.1.3 Análise multifractal

Para caracterizar completamente a estatística de uma distribuição é necessário realizar uma análise multifractal, ou seja, generalizar o nosso conceito de dimensão de correlação para vários momentos de contagem. A quantidade  $C_2$  pode ser gene-

realizada como [18]

$$C_q(r) = \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M [n_i(r)]^{q-1}, \quad (3.5)$$

onde  $q$  representa os diferentes momentos de contagem. A dimensão generalizada de Minkowski-Bouligand,  $D_q$ , é definida como

$$D_q = \frac{1}{q-1} \frac{d \log C_q(r)}{d \log r}. \quad (3.6)$$

Note que, a dimensão de correlação  $D_2$  corresponde a  $q = 2$ , considerada uma contagem natural.

Por construção, à medida que  $q$  aumenta, a contagem fica mais sensível à aglomeração de objetos e, com a diminuição de  $q$ , a contagem fica mais sensível a regiões de baixa densidade, conhecidas na astronomia como *voids*. Se  $D_q$  varia com  $q$  para todas as escalas, a distribuição é chamada de multifractal. Se  $D_q$  permanece constante para todo e qualquer valor de  $q$  em todas as escalas, a distribuição é chamada de monofractal e  $D_q = D_2$ . Espera-se que, para uma distribuição homogênea e isotrópica,  $D_q \simeq 3$  na escala analisada e independente do valor de  $q$  [18].

No trabalho apresentado em [21], aplicou-se a análise multifractal projetada ao SDSS-DR1 (*Sloan Digital Sky Survey Data, release one* [57]) e concluiu que a distribuição de galáxias é homogênea e isotrópica. A figura 3.3 ilustra as regiões analisadas, onde as siglas em inglês NGP (*Nothern Galactic Cap*) e SGP (*Southern Galactic Cap*) referem-se ao norte e sul galáctico, respectivamente. O intervalo de *redshift* analisado foi  $0,08 \leq z \leq 0,2$ .

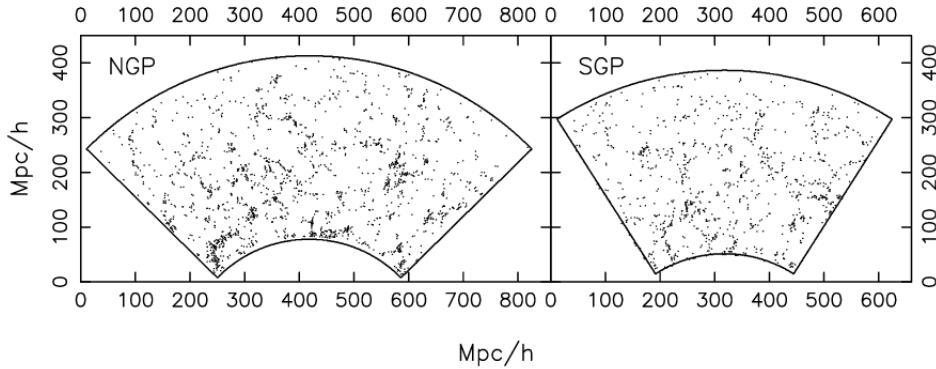


Figura 3.3: Projeções do NGP(esquerda) e SGP(direita) do conjunto de dados DR-I utilizados na análise multifractal. **Fonte:** [21].

As amostras utilizadas para a análise continham 1.936 e 1.096 galáxias no NGP e SGP, respectivamente. Devido a esse baixo número de objetos, a quantidade de centros utilizados na contagem diminui consideravelmente para grandes escalas. Por exemplo, na análise da região NGP, para discos com  $150h^{-1}\text{Mpc}$  de raio, o número

de centros é de apenas 100.

As figuras 3.4 e 3.5 mostram o resultado de  $C_q$ , obtido da análise de NGP e SGP, para  $q = -4$  e  $q = +4$ , respectivamente. Note que, a partir de  $60 - 70h^{-1}\text{Mpc}$ ,  $C_q$

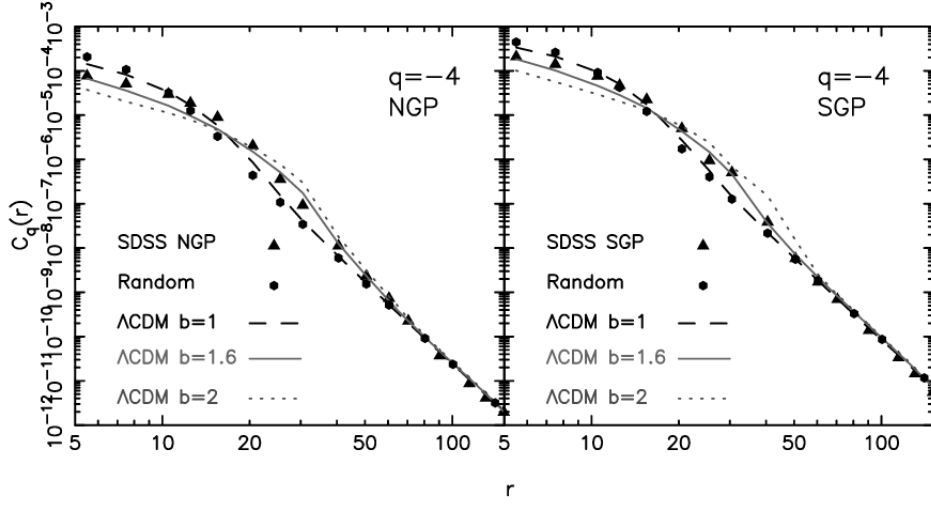


Figura 3.4:  $C_q$  para  $q=-4$ . A partir de  $60h^{-1}\text{Mpc}$ , os dados apresentam uma escala fixa, assim como as simulações e catálogos aleatórios. **Fonte:** [21].

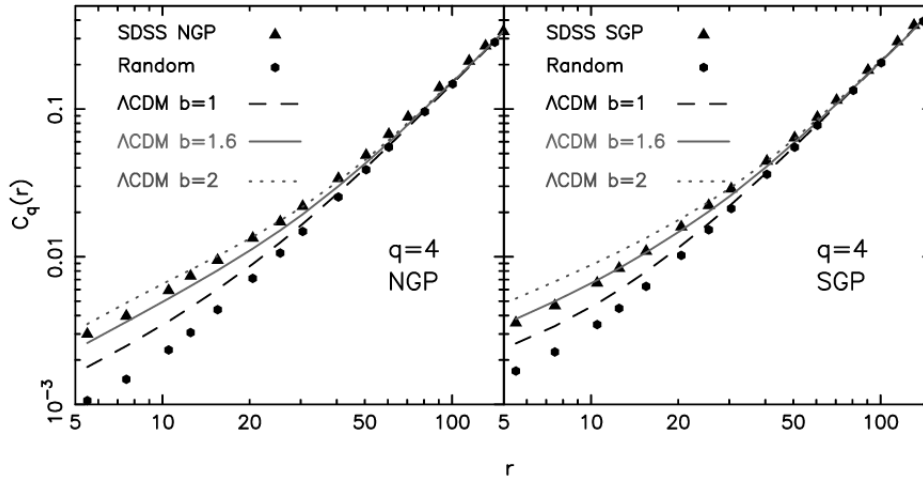


Figura 3.5:  $C_q$  para  $q=+4$ . O mesmo comportamento em  $q=-4$  é observado aqui. **Fonte:** [21].

apresenta um comportamento do tipo lei de potência, assim como os dados simulados e aleatórios, o que possibilita obter  $D_q$ . Os autores afirmam que o resultado é similar para os outros valores de  $q$  escolhidos, no intervalo  $-4 \leq q \leq 4$ .

Na figura 3.6 é apresentado o resultado da dimensão generalizada, no referido intervalo de valores de  $q$ . A escala analisada foi entre  $60 - 70h^{-1}\text{Mpc}$  e  $150h^{-1}\text{Mpc}$ . Para obtenção de  $D_q$  foi feito um ajuste de  $C_q$  entre os pontos 60 e 150.

Os dados simulados mostram que, para o aumento do  $bias^3$ , a variação em  $D_q$  aumenta significativamente. Se os dados forem interpretados como uma realização de Universo, dado um  $bias$ , pode-se afirmar que há uma transição para homogeneidade em  $60 - 70h^{-1}\text{Mpc}$ .

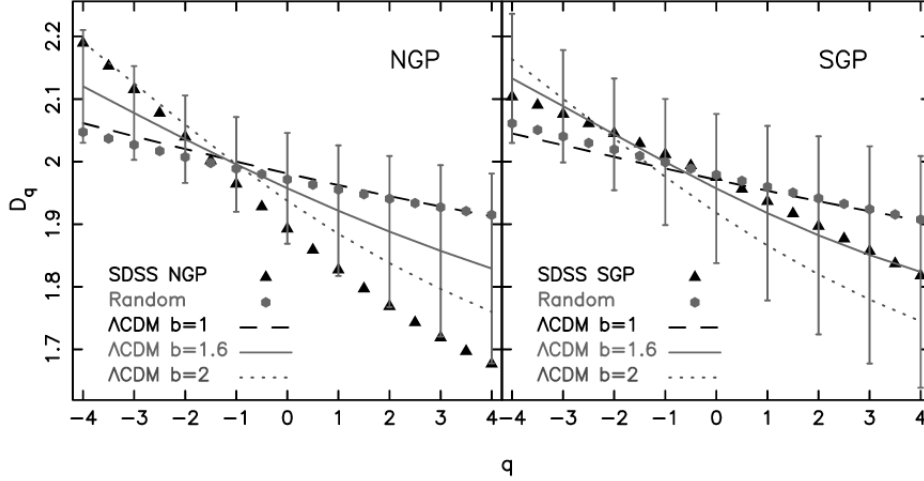


Figura 3.6: Espectro da dimensão generalizada  $D_q$  entre as escalas  $60 - 150h^{-1}\text{Mpc}$ . A barra de erro foi obtida pelo modelo  $\Lambda\text{CDM}$  com  $bias = 1,6$ . **Fonte:** [21].

Em outro trabalho, Sarkar *et al.* [59] realizaram as mesmas análises<sup>4</sup> em uma subamostra do SDSS DR6 [60], e obtiveram resultados semelhantes para a escala de transição, ou seja, entre  $60$  e  $70h^{-1}\text{Mpc}$ .

## 3.2 Contagem em esferas normalizada

Nos resultados anteriores a escala de homogeneidade é atingida quando  $C_2$  apresenta um comportamento do tipo lei de potência  $C_2 \propto r^{D_2}$ , onde  $D_2 \approx 2$ . No entanto, com o aumento da escala, diminui-se o número de centros utilizados na contagem e cálculo de  $C_2$ . Alguns autores sugerem que a análise multifractal é prejudicada por não utilizar nenhuma correção de fronteiras, e que não seria correto, do ponto de vista estatístico, utilizar muitos centros em pequenas escalas enquanto este número é muito menor em grandes escalas [56]. Portanto, parece válido questionar se realmente a escala de homogeneidade foi atingida ou se é devido à falta de completude do catálogo ou um efeito de borda, já que são utilizados poucos centros de contagem.

<sup>3</sup>O  $bias$  representa a constante de proporcionalidade entre as densidades de matéria escura e galáxias. Tal relação depende de vários fatores, tais como redshift e o tipo de galáxia [58].

<sup>4</sup>Com exceção do uso de círculos, pois nesta análise foi possível realizar uma análise 3D devido ao aumento da área coberta no céu,  $\sim 7.000$  graus quadrado, e o número de galáxias,  $\sim 41.000$  na subamostra utilizada.

Uma solução para esse problema é pesar o efeito de borda e a não completeza com um catálogo aleatório, cujas características (geometria e densidade numérica) são as mesmas do catálogo real, mas homogêneo por construção. Para tal, no trabalho [19] é introduzida a ideia de contagem em esferas normalizada,  $\mathcal{N}$ , definida como

$$\mathcal{N}(< r) \equiv \frac{N_{gal}(< r)}{N_{ale}(< r)}, \quad (3.7)$$

onde  $N_{gal}(< r)$  é a contagem de objetos em esferas de raio  $r$  no catálogo real e  $N_{ale}(< r)$  é a contagem no catálogo aleatório. A dimensão de correlação,  $D_2(< r)$ , deve ser modificada com o uso do  $\mathcal{N}$ , tal que

$$\mathcal{D}_2(r) \equiv \frac{d \log \mathcal{N}(< r)}{d \log r} + 3. \quad (3.8)$$

Para uma distribuição homogênea, espera-se que  $\mathcal{D}_2 = 3$  e  $\mathcal{N} = 1$ . Assim,  $\mathcal{N}(< r)$  e  $\mathcal{D}_2$  são medidas da homogeneidade do catálogo, mas  $\mathcal{D}_2$  fornece mais informações, pois revela as possíveis propriedades fractais de uma distribuição<sup>5</sup>. A contagem é feita da seguinte maneira:

$$\mathcal{N}(< r) = \frac{1}{G} \sum_{i=1}^G \frac{N^i(< r)}{\frac{1}{R} \sum_{j=1}^R \rho_j N_R^{i,j}(< r)}, \quad (3.9)$$

onde  $G$  é o número de galáxias usadas como centro de contagem,  $R$  é o número de catálogos aleatórios,  $N(< r)$  e  $N_R(< r)$  são as contagem no catálogo real e aleatório, respectivamente, e  $\rho_j$  é a razão entre o número de objetos nos catálogos real e aleatório.

Para ilustração, as figuras 3.7 e 3.8 apresentam os resultados de  $\mathcal{N}$  e  $\mathcal{D}_2$ , respectivamente, apresentados em [19]. Para obter a escala de transição, um polinômio de quinta ordem foi ajustado aos pontos. A escala de homogeneidade é atingida quando o ajuste polinomial intercepta o limite de 1% antes da homogeneidade, ou seja,  $\mathcal{N} = 1,01$  e  $\mathcal{D}_2 = 2.97$ ; o erro associado é obtido utilizando 100 catálogos simulados. Apesar de ser uma definição arbitrária, a escala medida não depende de erros derivados do catálogo e pode ser facilmente utilizada para comparações futuras com outros trabalhos, caso estes utilizem a mesma definição [20].

---

<sup>5</sup>Note que, segundo [3, 19, 20],  $\mathcal{D}_2$  é melhor estimador que  $\mathcal{N}$ , pois apresenta pouca correlação entre bins.

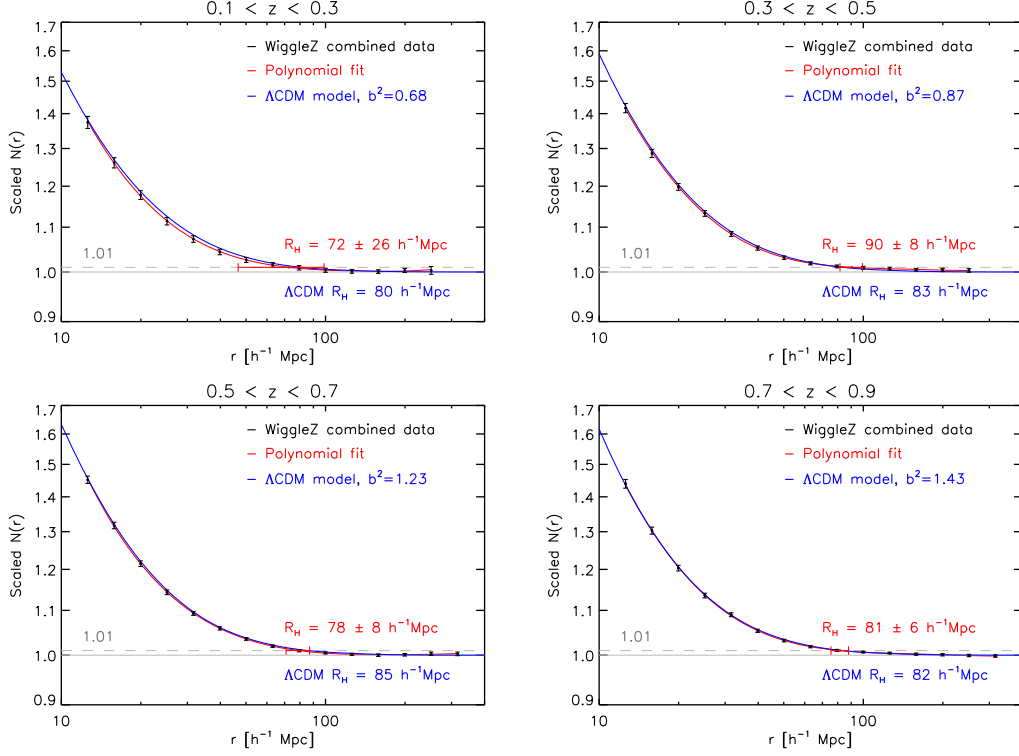


Figura 3.7:  $\mathcal{N}(< r)$  para os quatro bins de redshift analisados do catálogo WiggleZ. Um polinômio de quinta ordem foi ajustado aos dados na obtenção da escala de transição para a homogeneidade. A linha tracejada indica o limite de 1% acima da homogeneidade real. O erro foi obtido a partir dos 100 catálogos simulados. O modelo  $\Lambda$ CDM é ajustado aos pontos para obtenção do *bias*. **Fonte:** [19]

### 3.3 Relação entre função de correlação e contagem em esferas normalizada

Em cosmologia, a função de correlação de dois pontos,  $\xi(r)$ , mede a amplitude da aglomeração de galáxias em função da escala  $r$ .  $\xi(r)$  é definido como [61]

$$dP = \bar{n}[1 + \xi(\vec{r})]dV, \quad (3.10)$$

que pode ser entendida como um excesso de probabilidade  $dP$  de encontrar uma galáxia em um elemento  $dV$  separado por uma distância  $\vec{r}$  de outra galáxia, onde  $\bar{n}$  é a densidade numérica média da amostra de galáxias.

A contagem em esferas de uma distribuição de galáxias é obtida ao integrar a equação 3.10

$$N(< r) = \int dP = \bar{n} \int [1 + \xi(\vec{r})]dV. \quad (3.11)$$

Assumindo a isotropia na distribuição de objetos, a função de correlação não depen-

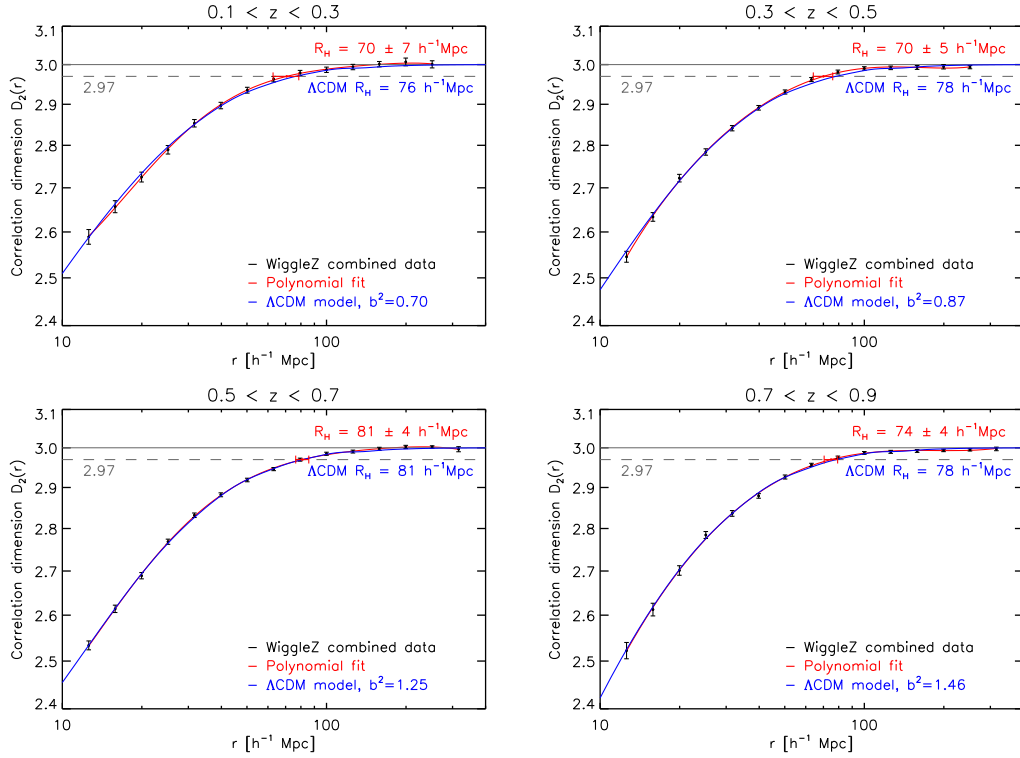


Figura 3.8: Resultado da dimensão de correlação  $\mathcal{D}_2$ , com os mesmos parâmetros da análise de  $\mathcal{N}$ . Diferentemente de  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{D}_2$  não é afetado por assumir uma densidade média, que o torna uma medida mais confiável da escala de homogeneidade. **Fonte:** [19].

derá da direção, portanto,

$$N(< r) = 4\pi\bar{n} \int_0^r [1 + \xi(r')]r'^2 dr'. \quad (3.12)$$

A densidade numérica  $\bar{n}$  pode ser escrita em termos da contagem em esferas  $N_R(< r)$ ,

$$N_R(< r) = \bar{n}V = \frac{4\pi\bar{n}r^3}{3}, \quad (3.13)$$

substituindo 3.13 em 3.12 tem-se, portanto,

$$\mathcal{N}(< r) = \frac{N(< r)}{N_R(< r)} = 1 + \frac{3}{r^3} \int_0^r \xi(r')r'^2 dr', \quad (3.14)$$

chegando-se à relação entre a contagem em esferas normalizada e a função de correlação de dois pontos.

A função de correlação de dois pontos pode ser estimada de diversas maneiras. A mais simples e intuitiva é contar o número de pares de galáxias,  $DD(r)$ , em uma casca esférica de raio  $[r, r + \Delta r]$  no catálogo real e dividir pela contagem equivalente



no catálogo aleatório,  $RR(r)$  [61]

$$\xi(r) = \frac{DD(r)}{RR(r)} - 1. \quad (3.15)$$

Outro estimador, definido em [62], é dado por

$$\xi_{DP}(r) = \frac{N_R DD(r)}{N_D DR(r)} - 1, \quad (3.16)$$

onde  $DR(r)$  é a contagem de pares entre os catálogos real e aleatório e  $N_D$  e  $N_R$  são os respectivos números de objetos.

Por fim, um estimador amplamente utilizado na literatura para o cálculo da função de correlação de dois pontos é o obtido por [63]

$$\xi_{LS}(r) = \frac{1}{RR} \left[ DD \left( \frac{n_R}{n_D} \right)^2 - 2DR \left( \frac{n_R}{n_D} \right) + RR \right], \quad (3.17)$$

onde  $n_R$  e  $n_D$  são os números de objetos no catálogo aleatório e de dados, respectivamente. Considerando catálogos aleatórios cujos volumes são muito maiores que dos dados e uma função de correlação não-nula, o estimador de Landy-szalay não apresenta *bias* ou tem uma variância mínima [64].

Em [20], Ntelis *et al.* utilizou-se o estimador Landy-Szalay juntamente com a equação 3.14 para determinar a contagem normalizada  $\mathcal{N}(< r)$  de uma amostra de galáxias (CMASS) do catálogo BOSS (*Baryon Oscillation Spectroscopic Survey*). Por cobrir um volume grande,  $5h^{-3} \text{ Gpc}^3$ , com um número considerável de galáxias (571.379 galáxias no NGC e 215.571 no SGP), este trabalho apresenta a análise mais robusta da escala de homogeneidade até o presente momento, cujos resultados são confirmados pela análise 2D desenvolvida em [24].

As figuras 3.9 e 3.10 apresentam os resultados de Ntelis *et al.* para a contagem normalizada e a dimensão de correlação na amostra CMASS do NGC, respectivamente. De imediato, nota-se uma boa concordância com o modelo padrão da cosmologia. A tabela 3.1 apresenta os resultados obtidos em [20] para a escala de homogeneidade da distribuição de galáxias e matéria.

Note que não se exclui a possibilidade deste resultado ter sido afetado ao se assumir o modelo  $\Lambda$ CDM no cálculo das distâncias. As barras de erro são calculadas a partir da análise de 1.000 catálogos simulados. Para a obtenção da escala de homogeneidade, é feito um ajuste dos pontos próximos a  $\mathcal{N}(< r) = 1,01$ , e para  $\mathcal{D}_2(r) = 2,97$ , procedimento análogo ao assumido em [19], mas ajustado a todos os pontos.

Além disso, em [20] também é mostrado que o estimador 3.14 é menos enviesado

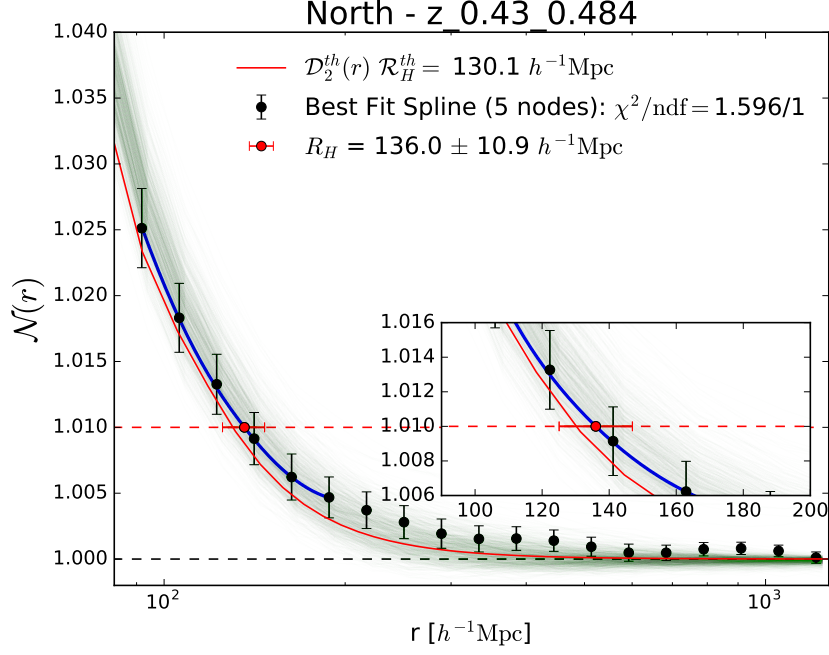


Figura 3.9: Contagem normalizada  $\mathcal{N}(< r)$  para a distribuição de galáxias no NGC no intervalo  $0.43 \leq z \leq 0.484$ . A linha azul é o melhor ajuste dos pontos próximos à escala de transição para a homogeneidade. A escala de homogeneidade apresenta boa concordância com o modelo  $\Lambda$ CDM. O erro é obtido a partir dos 1000 catálogos simulados. **Fonte:** [20].

Tabela 3.1: Escala de homogeneidade para a distribuição de galáxias e matéria no NGC e SGC. Fonte: [20].

$z$	$\mathcal{R}_H[h^{-1}\text{Mpc}]$ Matter		$\mathcal{R}_H[h^{-1}\text{Mpc}]$ Galaxy	
	NGC	SGC	NGC	SGC
0.430 – 0.484	$64.2 \pm 1.3$	$66.7 \pm 1.6$	$124.5 \pm 12.5$	$121.1 \pm 9.8$
0.484 – 0.538	$65.4 \pm 0.9$	$63.9 \pm 1.5$	$111.9 \pm 4.9$	$119.8 \pm 8.8$
0.538 – 0.592	$62.6 \pm 0.8$	$65.2 \pm 1.6$	$116.4 \pm 7.8$	$110.5 \pm 5.1$
0.592 – 0.646	$60.4 \pm 0.8$	$60.1 \pm 1.1$	$108.8 \pm 3.9$	$120.1 \pm 11.7$
0.646 – 0.700	$59.0 \pm 0.8$	$60.1 \pm 1.8$	$125.8 \pm 7.3$	$147.4 \pm 8.4$

do que o apresentado em [3], que é calculado da seguinte maneira:

$$\mathcal{N}_{Lau}(< r) = 1 + \frac{\int_0^r (dd(s) - 2dr(s) + rr(s))ds}{\int_0^r rr(s)ds}, \quad (3.18)$$

onde

$$dd(r) = \frac{DD(r)}{N_D(N_D - 1)/2}, \quad (3.19)$$

$$rr(r) = \frac{RR(r)}{N_R(N_R - 1)/2} \quad (3.20)$$

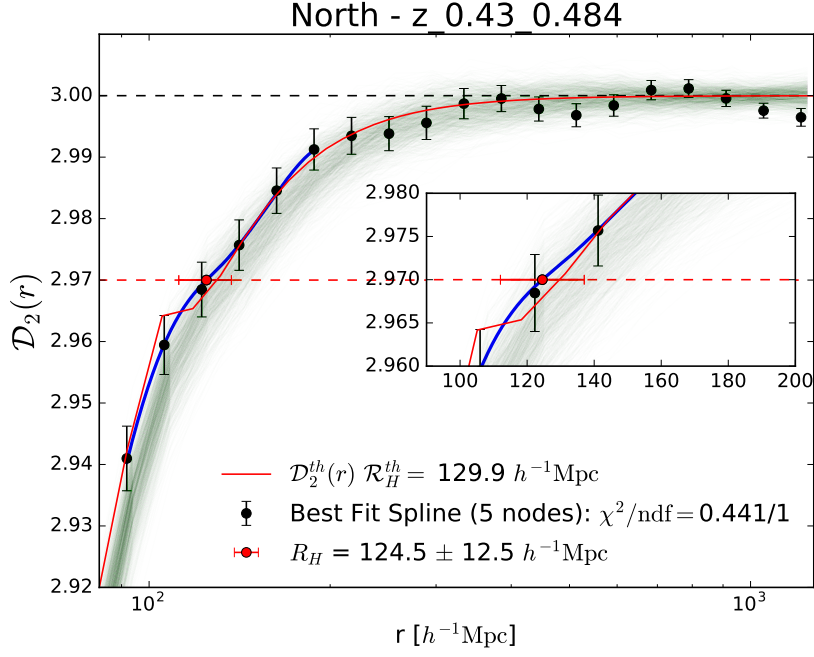


Figura 3.10: Dimensão de correlação  $\mathcal{D}_2$ , com o mesmo bin e região do céu apresentado na figura 3.9. **Fonte:** [20].

e

$$dr(r) = \frac{DR(r)}{N_D(N_R - 1)/2}. \quad (3.21)$$

Ao aplicar os dois estimadores aos 1.000 catálogos simulados, como observados nas figuras 3.11 e 3.12, o estimador dado pela equação 3.14 se aproxima mais do modelo  $\Lambda$ CDM do que aquele da equação 3.18.

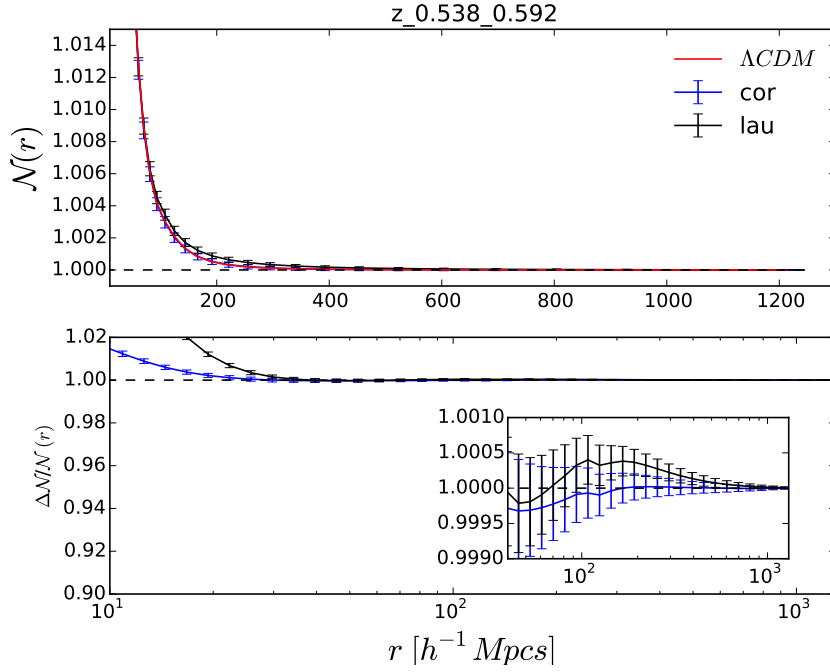


Figura 3.11: Contagem normalizada  $\mathcal{N}(< r)$  para a distribuição de matéria. Os gráficos mostram que o estimador 3.14 ('cor' - linha azul) se aproxima mais do esperado pelo modelo  $\Lambda\text{CDM}$  do que aquele da equação 3.18 ('lau' - linha preta). **Fonte:** [20].

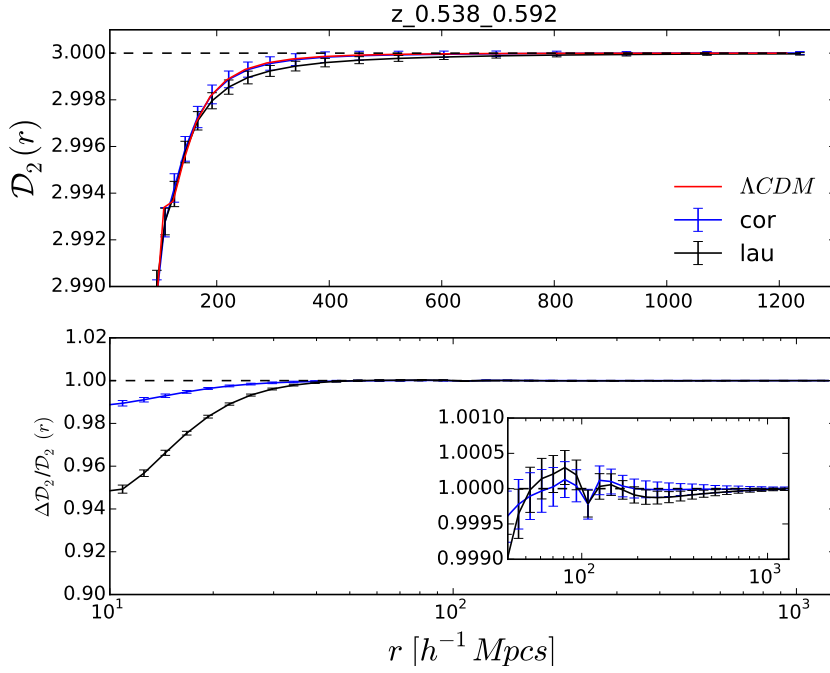


Figura 3.12: Análogo à figura 3.11, para a dimensão de correlação  $\mathcal{D}_2(r)$  da distribuição de matéria. Assim como em  $\mathcal{N}(< r)$ , o estimador 3.14 apresenta uma melhor concordância com  $\Lambda\text{CDM}$ . **Fonte:** [20].

# Capítulo 4

## Metodologia

### 4.1 Dados Observacionais

O conjunto de dados utilizado na análise fractal realizada neste trabalho corresponde ao catálogo obtido com o levantamento de fontes extragalácticas em 21cm (HI)<sup>1</sup> no Universo local ( $z \leq 0.06$ ), realizado pelo projeto ALFALFA - *Arecibo Legacy Fast ALFA* [65]. O catálogo consiste, em sua maioria, de galáxias ricas em gás, de baixo brilho, azuis e encontradas em ambientes de baixa densidade.

A área coberta pelo ALFALFA está ilustrada na figura 4.1. A região compreendida entre  $110^\circ$  e  $250^\circ$  em ascensão reta é chamada *spring*, e a compreendida entre  $50^\circ$  e  $327^\circ$ , *fall*. As duas áreas estão entre  $0^\circ$  e  $36^\circ$  em declinação. As regiões

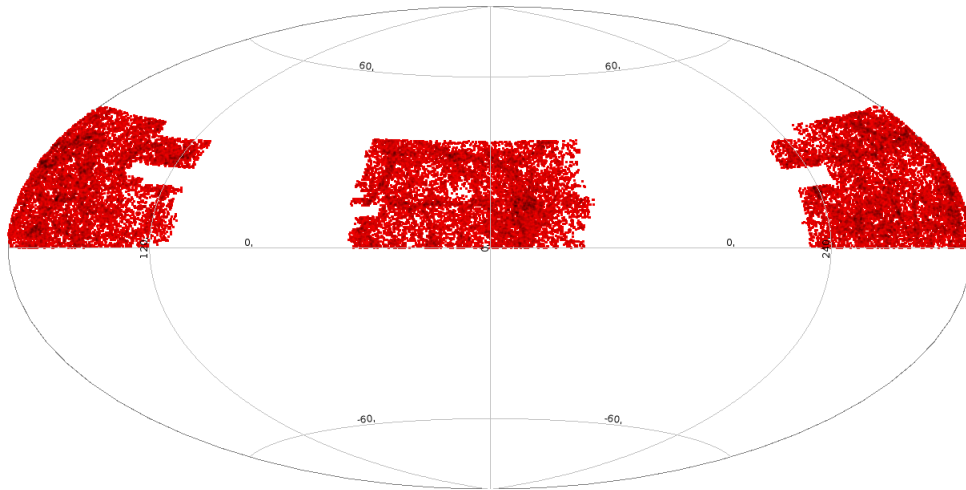


Figura 4.1: Área do céu coberta pelo ALFALFA. A região central é chamada *fall* e as laterais *spring*.

*spring* e *fall* contém 22.140 e 11.433 fontes HI, respectivamente. Esses objetos são classificados com os três seguintes códigos dentro do catálogo [65]:

---

<sup>1</sup>21 cm corresponde ao comprimento de onda emitido quando um elétron transita para um estado menos energético do átomo de Hidrogênio.

- Código 1: Fontes com alto grau de confiabilidade na detecção, razão sinal-ruído acima de 6,5.
- Código 2: Fontes com baixo grau de confiabilidade na detecção, razão sinal-ruído abaixo de 6,5<sup>2</sup>.
- Código 3: Nuvens de alta velocidade, *High Cloud Velocity* (HVC).

Ao utilizar somente as fontes de código 1, as regiões *spring* e *fall* tem seus números reduzidos a 16.287 e 9.150, respectivamente. Sendo assim, optamos por utilizar somente a região com maior número de fontes HI, ou seja, a região *spring*.

A escala máxima, ou seja, o raio da maior esfera que se pode colocar em uma região coberta por um catálogo, pode ser calculado através da definição [66]

$$R = \frac{d_{max} \operatorname{sen}\theta_{max}}{1 + \operatorname{sen}\theta_{max}}, \quad (4.1)$$

onde  $d_{max}$  é a distância do observador ao objeto mais afastado do catálogo e  $\theta_{max}$  o angulo máximo de abertura no céu. Para ALFALFA, considerando os objetos de código 1 e a região *spring*, o raio máximo de uma esfera contida inteiramente no volume do catálogo corresponde a 95,5 Mpc.

Os resultados que foram apresentados no capítulo anterior sugerem uma escala de homogeneidade acima de 100 Mpc, o que, dada a nossa escala máxima, indica que seria difícil obter uma boa estatística, mesmo utilizando o método das contagens normalizadas. Portanto, para melhor aproveitamento dos dados do catálogo ALFALFA, decidiu-se analisar a dimensão fractal projetada, cujo angulo máximo de uma calota esférica é 36°. Resultados da literatura utilizando o método de contagem em esferas normalizadas para dados projetados sugerem que, dado o nosso angulo máximo, poderíamos obter a escala de transição para homogeneidade com uma boa estatística. Por exemplo, extrapolando os resultados apresentados em [24] para o *redshift* do ALFALFA, a escala de homogeneidade seria próximo a 22°. No entanto, vale ressaltar que em [24], utilizou-se dados do CMASS-BOSS-DR12, que consiste de galáxias muito massivas, portanto, espera-se um bias entre nossos resultados, já que ambos traçam a matéria escura de maneiras distintas. Com essas considerações, um resultado abaixo de 22° é esperado, já que as fontes de HI do ALFALFA se aglomeram menos e são consideradas *antibiased* [67, 68].

Além de utilizar somente objetos com código 1 e localizados na região *spring*, um corte final foi realizado com o objetivo de suavizar a geometria do catálogo. Para isso, restringiu-se a ascensão reta entre 138° e 232°, removendo assim as regiões com geometria irregular. O resultado final da área utilizada para a análise pode ser vista na figura 4.2.

---

<sup>2</sup>O uso do código 2 não deve ser utilizado em análises estatísticas, de acordo com [65].

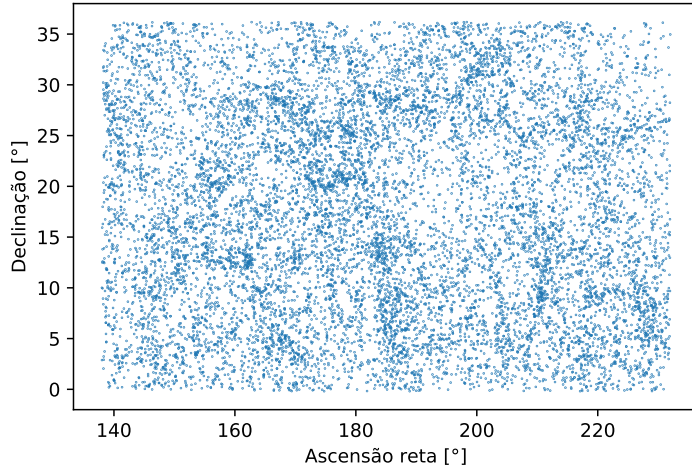


Figura 4.2: Região do catálogo ALFALFA utilizada na análise fractal. O número de objetos é 13.144.

Para mais detalhes sobre levantamentos em 21 cm veja [69] e [70].

## 4.2 Catálogos Aleatórios

Os catálogos aleatórios são construídos de forma tal que suas características sejam idênticas a área selecionada no catálogo ALFALFA, ou seja, mesma geometria e número de objetos. Para tal, gerou-se uniformemente 13.144 pontos no intervalo  $\sin(0^\circ) \leq \delta' \leq \sin(36^\circ)$ . Fazendo

$$\delta = 90^\circ - \cos^{-1}(\delta'), \quad (4.2)$$

obtêm-se as coordenadas da declinação. Para a ascensão reta, gera-se uniformemente 13.144 pontos no intervalo  $138^\circ \leq \alpha \leq 232^\circ$ . Um total de 20 catálogos aleatórios foram construídos para a análise. A figura 4.3 mostra um exemplo de catálogo aleatório.

## 4.3 Contagem Normalizada Projetada

Os estimadores utilizados para analisar a escala de transição para a homogeneidade do catálogo ALFALFA são baseados no trabalho [19], mas adaptados para uma análise com dados projetados no céu. Usar a contagem normalizada nos permite utilizar todos as fontes de HI como centros de contagem.

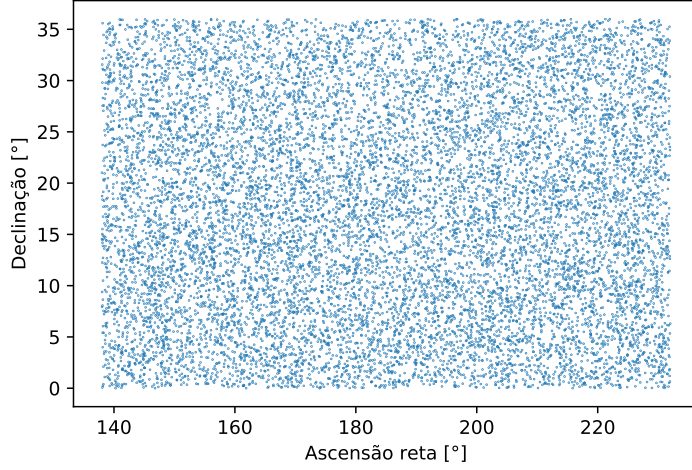


Figura 4.3: Exemplo de um dos 20 catálogos aleatórios gerados com mesma geometria e número de objetos do corte final no catálogo ALFALFA.

O primeiro estimador utilizado, E1, é definido como<sup>3</sup>

$$\mathcal{N}_{E1}(< \theta) = \frac{1}{20} \sum_{j=1}^{20} \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_{gal}^i(< \theta)}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_{alea}^{i,j}(< \theta)}, \quad (4.3)$$

onde  $N_{gal}$  e  $N_{alea}$  são as contagens em calotas esféricas nos catálogos ALFALFA e aleatório, respectivamente, e  $n$  é o número de pontos utilizados como centros de contagens, ou seja, 13.144. O nosso segundo estimador, E2, é definido como

$$\mathcal{N}_{E2}(< \theta) = \frac{1}{20} \sum_{j=1}^{20} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{N_{gal}^i(< \theta)}{N_{alea}^{i,j}(< \theta)}. \quad (4.4)$$

O terceiro e último estimador E3 é baseado na equação 3.14, mas redefinido para análise projetada (veja apêndice A)

$$\mathcal{N}_{E3}(< \theta) = 1 + \frac{1}{1 - \cos \theta} \int_0^\theta \omega(\theta') \sin \theta' d\theta'. \quad (4.5)$$

A função de correlação  $\omega(\theta)$  é obtida ajustando os pontos calculados a partir da equação 3.17 usando a expressão

$$\omega(\theta) = ae^{-b\theta} + c, \quad (4.6)$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são parâmetros a serem ajustados (veja, por exemplo, [71]). O uso de E3 como está definido na equação 4.5, é justificado pela análise apresentada em [20]

<sup>3</sup>Em [24], define-se quatro estimadores, sendo que utilizamos dois: E1 - *Average* e E2 - *Centre*.



e discutida na seção 3.3 da dissertação. Para uma análise projetada, a dimensão de correlação,  $\mathcal{D}_2$ , é redefinida como (veja apêndice B)

$$\mathcal{D}_2(\theta) = \frac{d \log \mathcal{N}(< \theta)}{d \log \theta} + \frac{\theta \operatorname{sen} \theta}{1 - \cos \theta}. \quad (4.7)$$

Os erros em  $\mathcal{N}(< \theta)$  e  $\mathcal{D}_2(\theta)$  são obtidos pelo desvio padrão dos resultados obtidos usando cada um dos 20 catálogos aleatórios. Por fim, a distância angular entre duas galáxias é obtida por

$$\theta_{i,j} = \cos^{-1}[\operatorname{sen}(\delta_i)\operatorname{sen}(\delta_j) + \cos(\delta_i)\cos(\delta_j)\cos(\alpha_i - \alpha_j)], \quad (4.8)$$

onde  $\alpha$  e  $\delta$  são ascensão reta e declinação, respectivamente.

## 4.4 Escala de Homogeneidade

Como visto no capítulo 3, [19, 20] definem a escala de homogeneidade quando os estimadores atingem 1%<sup>4</sup> do valor de uma distribuição perfeitamente homogênea

$$\mathcal{N}(r_H) = 1,01 \quad \text{e} \quad \mathcal{D}_2(r_H) = 2,97. \quad (4.9)$$

Apesar da aparente arbitrariedade, os autores argumentam que essa definição não depende do catálogo, pode ser utilizada como teste de modelos cosmológicos e os resultados podem ser comparados, como foi feito em [24]. Portanto, dados esses argumentos, decidiu-se adotar essa definição para o presente trabalho.

Como estamos tratando de análise projetada, o ponto de transição para homogeneidade precisa ser redefinido como

$$\mathcal{D}_2^H(\theta_H) = 0,99f(\theta_H) \quad \text{e} \quad \mathcal{N}^H(\theta_H) = 1,01 \quad (4.10)$$

onde

$$f(\theta_H) = \frac{\theta_H \operatorname{sen} \theta_H}{1 - \cos \theta_H}. \quad (4.11)$$

## 4.5 Testes de Consistência

O uso de catálogos aleatórios homogêneos tem como finalidade contornar problemas de completude e geometria das regiões observadas, mas seu uso também pode trazer falsos resultados quanto à escala de transição da homogeneidade [19, 20].

Para testar se os estimadores estão revelando resultados coerentes, utilizou-se um algoritmo para construção de catálogos fractais com dimensão conhecida, baseado

---

<sup>4</sup>Para  $\mathcal{N}$  será 1% acima e para  $\mathcal{D}_2$ , 1% abaixo.

no modelo  $\beta$  [72]. Isso possibilita checar se, no intervalo de escala angular estudada, os estimadores estão revelando corretamente a escala de homogeneidade.

O método consiste, para o caso 3D, em construir um cubo de lado  $L$  e dividi-lo em  $2^3$  cubos menores de lados  $L/2$ . A cada cubo é atribuída uma probabilidade  $p$  de “sobreviver” à próxima iteração. Repete-se o processo  $k$  vezes. No limite de infinitas iterações

$$D_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(pM)^k}{\log n^k} = \frac{\log(pM)}{\log n}, \quad (4.12)$$

onde  $M = n^2$  é o número de cubos após cada iteração e  $n$  é a quantidade de divisões realizadas em cada iteração.

Ao considerar a geometria e o número de objetos da região selecionada para análise no catálogo ALFALFA, construiu-se 100 catálogos fractais da seguinte maneira:

- Toma-se um quadrado de lado  $L = 90$ . Dois cortes são feitos, dividindo-o em quatro. Cada quadrado então, tem atribuído um ponto em seu centro.
- A cada quadrado (ponto) é atribuída uma probabilidade de sobreviver

$$p = 10^{(D_2-2) \times \log 2}, \quad (4.13)$$

ou seja, de passar pela próxima iteração. Caso não sobreviva, seu ponto é removido e apenas os quadrados que sobraram são novamente subdivididos.

- Foram realizadas 6 iterações, de dimensão  $D_2 = 1.9$ , que proporcionam chegar a um número de pontos próximo ao de objetos do catálogo de dados.
- Finalizadas as iterações, o catálogo fractal tem seus pontos deslocados ligeiramente de forma aleatória, com o intuito de se assemelhar a um catálogo real.

O processo de criação dos fractais pode ser visto na figura 4.4.

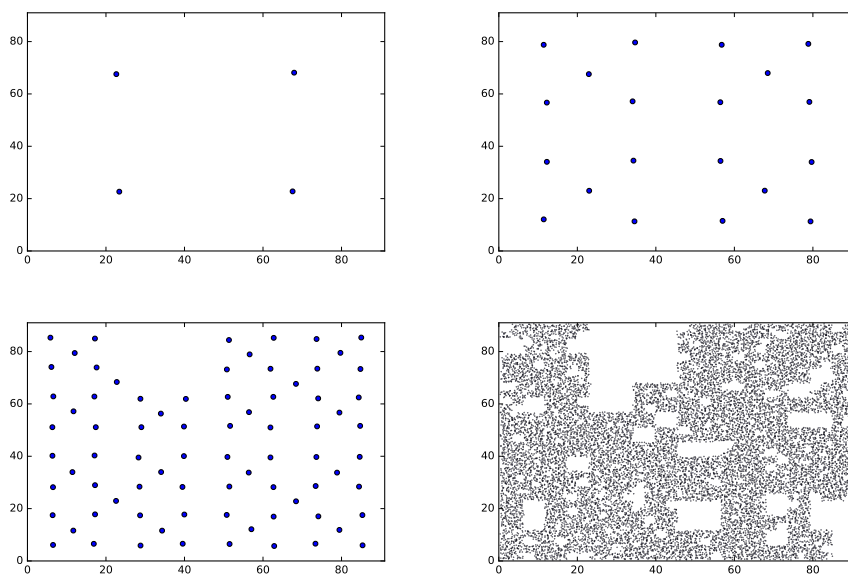


Figura 4.4: A Primeira etapa na construção dos catálogos fractais é mostrada acima à esquerda, onde os quatro pontos são posicionados nos centros do que seriam quatro quadrados de lado  $L/2$ . A cada ponto é atribuída uma probabilidade  $p$  de sobreviver e sofre a primeira iteração. Acima à direita está a primeira iteração, abaixo à esquerda, a terceira. Por último, abaixo à direita a sexta iteração, onde é aplicado um pequeno deslocamento aleatório aos pontos com o intuito de se assemelhar a um catálogo real.

# Capítulo 5

## Resultados e Discussões

Neste capítulo são apresentados os resultados de nossas análises com os estimadores E1, E2 e E3. Também mostramos a equivalência entre os tratamentos na geometria esférica e euclidiana (plana). Por último, discutimos os resultados dos testes de consistência para os estimadores.

### 5.1 Estimativas da escala de homogeneidade

A dimensão de correlação para os dados projetados do catálogo ALFALFA foi calculada utilizando os estimadores E1, E2 e E3 em um intervalo angular de  $1^\circ \leq \theta \leq 40^\circ$ . Os resultados obtidos a partir do estimador E1 (E2), dado pela equação 4.3, são ilustrados na figura 5.1. Note que a contagem normalizada,  $\mathcal{N}(< \theta)$ , não apresenta uma transição para homogeneidade, enquanto a correspondente dimensão de correlação,  $\mathcal{D}_2(\theta)$ , fornece informações sobre as propriedades fractais da distribuição, mostrando uma clara transição para a homogeneidade, dada nossa definição 4.10. A escala de transição foi de  $\theta_H = 15,38^\circ \pm 0,16^\circ$ , obtida a partir da média dos valores de  $\theta_H$  obtidos do ajuste polinomial de terceiro grau de  $\mathcal{N}(< \theta)$  e  $\mathcal{D}_2(\theta)$  calculados usando cada um dos vinte catálogos aleatórios. O erro em  $\theta_H$  foi estimado a partir do método *bootstrap* [73].

O estimador E2, calculado a partir da equação 4.4, apresenta resultados semelhantes a E1,  $\theta_H = 15,40^\circ \pm 0,18^\circ$ , como observado na figura 5.2. Para facilitar a comparação entre os dois estimadores, a superposição de seus resultados é mostrada na figura 5.3, onde é possível notar claramente que há uma diferença em pequenas e grandes escalas. Para  $\mathcal{N}(< \theta)$ , o estimador E2 mostra um erro maior e uma amplitude mais baixa. Em  $\mathcal{D}_2(\theta)$ , os estimadores E1 e E2 também apresentam diferenças, principalmente em grandes escalas angulares, a partir de  $25^\circ$ , onde os estimadores começam a se distanciar um do outro. Note que, os estimadores não são independentes e sim complementares no sentido que, sendo pouco ou muito sensíveis às

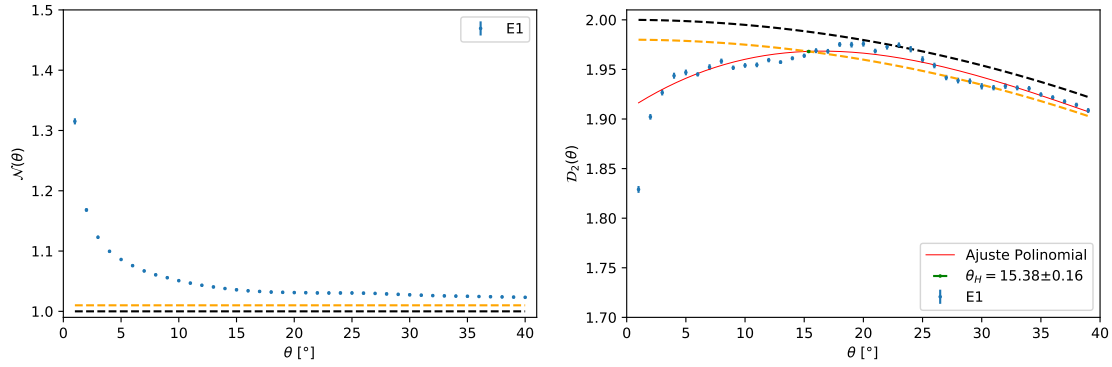


Figura 5.1:  $\mathcal{N}(< \theta)$  e  $\mathcal{D}_2(\theta)$  para o estimador E1. As linhas tracejadas preta e laranja são, por definição, as escalas de transição para a homogeneidade definidas em 4.10.  $\mathcal{N}(< \theta)$  não apresenta uma transição para a homogeneidade, enquanto que, dada a nossa definição (vide seção 4.4),  $\mathcal{D}_2(\theta)$  apresenta uma transição em  $15^\circ$ . A curva vermelha é o melhor ajuste a um polinômio de terceiro grau e sua interseção com a linha tracejada laranja fornece o valor de  $\theta_H$ . As flutuações indicam a influência de aglomerados sobre as medidas da dimensão de correlação. A barra de erro vertical corresponde ao desvio padrão dos 20 catálogos aleatórios.

propriedades das estruturas em grandes escalas, eles fornecem informações diferenciadas sobre tais propriedades.

O terceiro e último estimador é calculado a partir da função de correlação,  $\omega(\theta)$ , obtida com um ajuste exponencial, equação 4.6, aos pontos calculados usando a equação 3.17. A figura 5.4 mostra tais resultados. Note que, as flutuações que apareciam em  $\mathcal{D}_2(\theta)$  agora são observadas na função de correlação. Devido ao ajuste exponencial, as flutuações são suavizadas e por isso não são transferidas a  $\mathcal{D}_2(\theta)$ .

A partir da função de correlação, obtêm-se E3 usando a equação 4.5, e por fim,  $\mathcal{D}_2(\theta)$ . Os resultados são apresentados na figura 5.5. Vemos que a escala angular de homogeneidade obtidas de  $\mathcal{N}(< \theta)$  e  $\mathcal{D}_2(\theta)$  individualmente estão próximas e dentro da margem de erro,  $\theta \sim 16^\circ$ . Além disso, nossos resultados concordam com os dados simulados das referências [22, 23].

Considerando o ajuste exponencial e conhecido o erro na derivação numérica como sendo o intervalo de contagem,  $\sim 1^\circ$ , os três estimadores concordam muito bem entre si, com a escala de homogeneidade entre  $15^\circ$  e  $16^\circ$ . A tabela 3.1 resume os resultados dos estimadores. Por fim, também é válido notar que, a partir de uma análise euclidiana 2D, os resultados são bem próximos daqueles encontrados na análise angular. Neste caso, o único aspecto que muda é o cálculo das distâncias, dado por

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (5.1)$$

Os resultados dessas análises são apresentados na figura 5.6.

<sup>1</sup>Valor esperado com base nos resultados obtidos em [22, 23] para um  $bias=0,48$  [67].

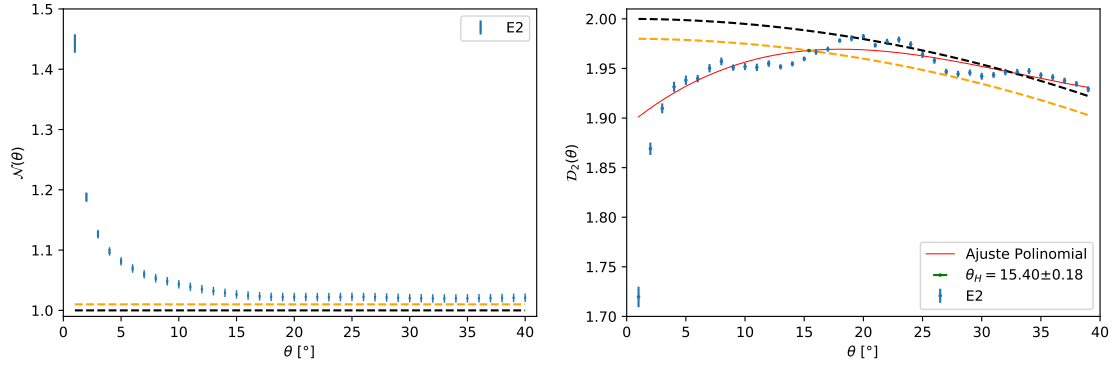


Figura 5.2: Análoga à figura 5.1, mas considerando o estimador E2. Os resultados de E1 e E2 para a escala angular de homogeneidade são bastante parecidos, no entanto, as amplitudes variam em  $\mathcal{N}(< \theta)$  e, em determinadas escalas angulares, em  $\mathcal{D}_2(\theta)$ .

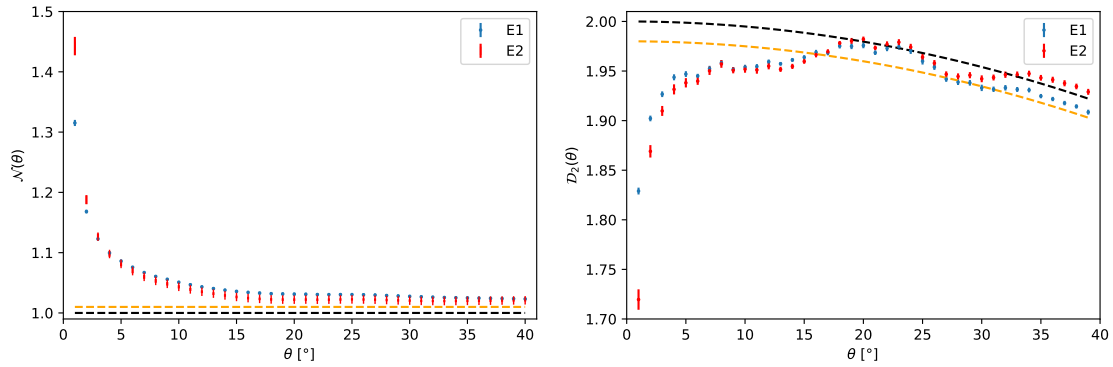


Figura 5.3: Comparação entre os resultados de E1 e E2. Na figura acima, nota-se que os estimadores se diferenciam basicamente na amplitude de  $\mathcal{N}(< \theta)$ . E2 apresenta uma barra de erro maior e amplitude mais baixa, em comparação com E1. No caso de  $\mathcal{D}_2(\theta)$ , as diferenças se encontram principalmente em pequenas escalas,  $\theta \lesssim 7^\circ$ , e a partir de  $25^\circ$ , onde os dois estimadores se distanciam um do outro.

Tabela 5.1: Resumo dos resultados obtidos para a escala de transição para homogeneidade,  $\theta_H$ , utilizando três estimadores diferentes, E1, E2 e E3. Vide texto para detalhes.

$\theta_H$	E1	E2	E3	V.E. <sup>1</sup>
$\mathcal{N}^H$	—	—	$16,34 \pm 0,24$	—
$\mathcal{D}_2^H$	$15,38 \pm 0,16$	$15,40 \pm 0,18$	$16,49 \pm 0,28$	15,58

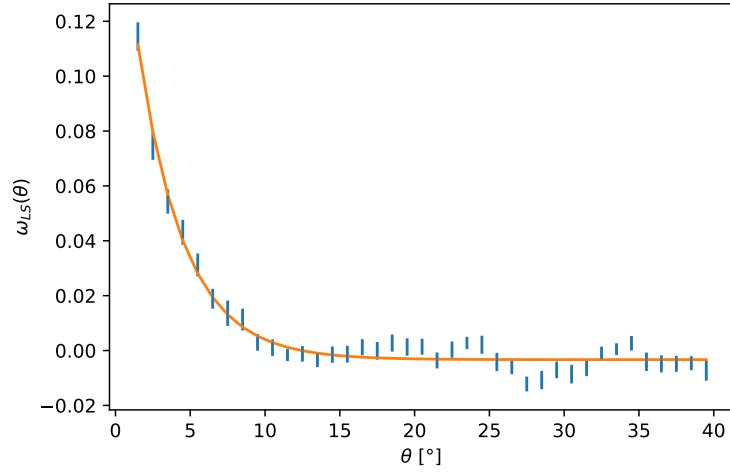


Figura 5.4: Função de correlação  $\omega(\theta)$  calculada utilizando a equação 3.17. Os pares  $DD$ ,  $RR$  e  $DR$  são calculados em intervalos de  $1^\circ$ . A curva laranja é o melhor ajuste da função exponencial 4.6. As barras de erro foram obtidas pelo desvio padrão sobre 20 catálogos aleatórios.

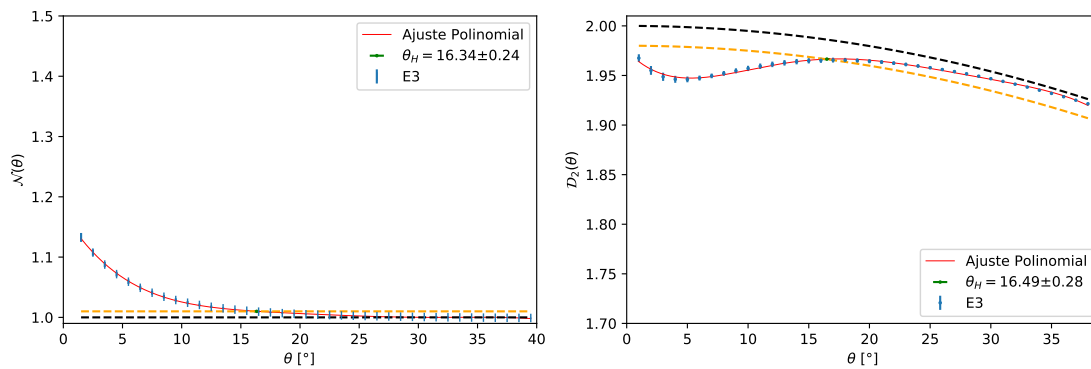


Figura 5.5:  $\mathcal{N}(< \theta)$  e  $\mathcal{D}_2(\theta)$  para o estimador E3. Através do ajuste polinomial de quinta ordem, a escala angular de homogeneidade foi obtida, concordando bem entre os gráficos.

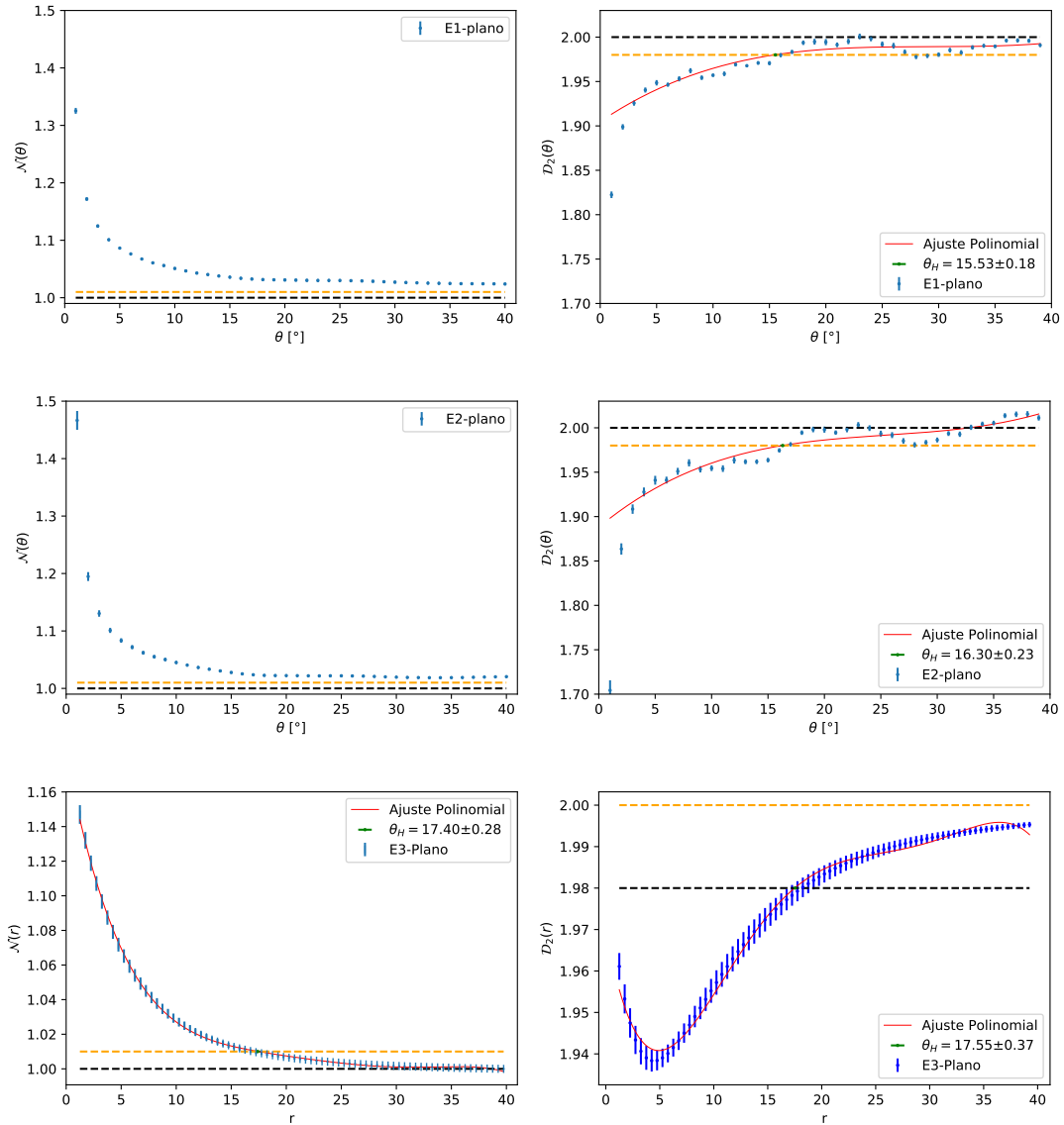


Figura 5.6: Estimadores E1, E2 e E3 em uma análise euclidiana 2D. Como não existe efeito significativo de curvatura,  $\mathcal{D}_2(r)$  pode ser calculado diretamente pela equação 3.8, trocando o termo 3 por 2. O ponto de transição para homogeneidade neste caso também muda, ele é constante ao longo de  $r$ , ou seja,  $\mathcal{N}(r_H) = 1,01$  e  $\mathcal{D}_2(r_H) = 1,98$ . A escala de homogeneidade é obtida de maneira semelhante ao caso angular.



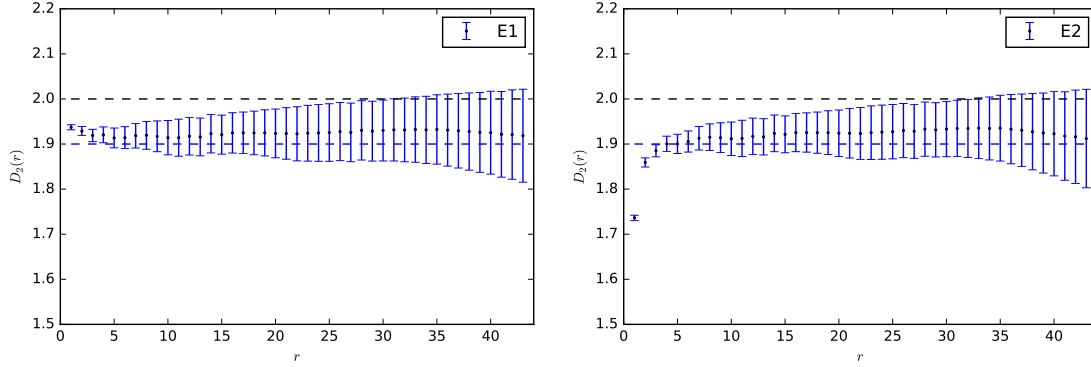


Figura 5.7: Teste de consistência para os estimadores E1 e E2. 100 catálogos fractais de dimensão 1.9 foram construídos. Aplicou-se os mesmos procedimentos de análise utilizada no ALFALFA. O erro é obtido a partir do desvio padrão dos 100 catálogos. Os valores médios obtidos por E2 e E3 são 1,924 e 1,916, respectivamente.

## 5.2 Testes de Consistência

A seguir são apresentados os resultados dos testes de consistência dos estimadores, com o intuito de procurar por possíveis *bias* nos resultados. Para o teste sobre catálogos fractais, decidiu-se aplicar somente aos estimadores E1 e E2, pois apresentaram resultados muito semelhantes aos obtidos com E3. Além disto, visto que os efeitos de curvatura são desprezíveis (figura 5.6), optou-se por realizar os testes de consistência no plano, o que diminui tempo de computação e possibilita o aumento no número de fractais e *voids* para a análise.

### 5.2.1 Análise de catálogos fractais

A seguir, são apresentados os resultados da análise do estimadores E1 e E2 em 100 catálogos fractais construídos com dimensão 1,9 a partir de 6 iterações. Para cada catálogo fractal, 10 catálogos aleatórios foram gerados, semelhantes aos utilizados na análise no plano para os dados, mas de mesma densidade numérica dos catálogos fractais. A figura 5.7 mostra  $D_2$  obtidos a partir de E1 e E2. A barra de erro corresponde ao desvio padrão das medidas de  $D_2$  sobre os 100 catálogos fractais.

A interpretação para o crescimento da barra de erro com a escala é atribuída ao fato de que, à medida que  $\theta$  cresce, ou seja, os círculos aumentam, as contagens de um catálogo para outro ficam mais distintas, já que cada fractal é único devido à probabilidade associada aos pontos (vide seção 4.5). Os estimadores conseguem obter, dentro da barra de erro, a dimensão considerada para gerar o catálogo fractal. Os valores médios obtidos por E1 e E2 são 1,924 e 1,916, respectivamente. Pode-se concluir que, apesar da diferença em pequenas escalas, como observado na seção 5.1, os estimadores E1 e E2 são indistinguíveis nas escalas angulares analisadas.

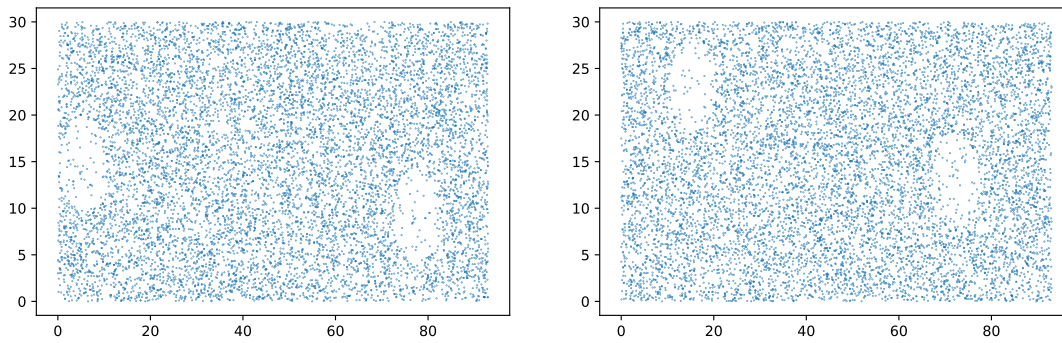


Figura 5.8: Dois exemplos de catálogos construídos com regiões circulares de baixa densidade numérica, simulando *voids*.

### 5.2.2 *Voids* artificiais e análise sem o aglomerado de Virgo

O próximo teste tem como finalidade analisar as origens das flutuações observadas em E1 e E2 na dimensão fractal. Uma das possíveis causas dessas flutuações pode ser a presença de regiões com baixa densidade de objetos, conhecidas como *voids*.

A construção dos catálogos se deu de forma semelhante aos aleatórios, gerando-se uma distribuição uniforme de pontos com a mesma geometria final dos dados do ALFALFA. Os *voids* são construídos removendo um número significativo de pontos de um círculo de raio  $5u^2$ , de forma aleatória. Foram construídos catálogos com 1, 2 e 3 *voids*, para verificar o comportamento das flutuações com o aumento do número de *voids*. Em cada catálogo *void* foram incluídos 10.000 objetos. Um total de 100 realizações foram geradas para essa análise. Os catálogos aleatórios utilizados foram construídos de forma similar ao teste anterior contendo o mesmo número de objetos incluídos nos catálogos com *voids*. A figura 5.8 ilustra um exemplo de dois catálogos, cada um com dois *voids*, mostrando que suas posições são aleatórias. Como o objetivo é somente analisar os efeitos de flutuação, utilizou-se unicamente o estimador E1 para esta análise no plano, já que os resultados obtidos por E1 e E2 nas análises anteriores se mostraram semelhantes.

De imediato se vê pela figura 5.9 que, as flutuações se intensificam com o aumento do número de *voids*. Um “vale” é observado nos três casos em  $\sim 10u$ , o que corresponde ao diâmetro dos *voids*. Deve-se notar que  $D_2$  já começa a diminuir próximo de  $5u$  e cresce a partir de  $10u$ . Esse crescimento tem seu pico próximo a  $25u$ , medindo aglomerações. Isto ocorre devido ao fato de que os catálogos aleatórios possuem o mesmo número de objetos dos catálogos com *voids*. Esta propriedade faz com que a região exterior aos *voids* apresentem densidade maior que aquela dos catálogos aleatórios, causando o aumento de amplitude, em torno de  $25u$ . Acima de

<sup>2</sup>A letra u representa unidades arbitrárias.

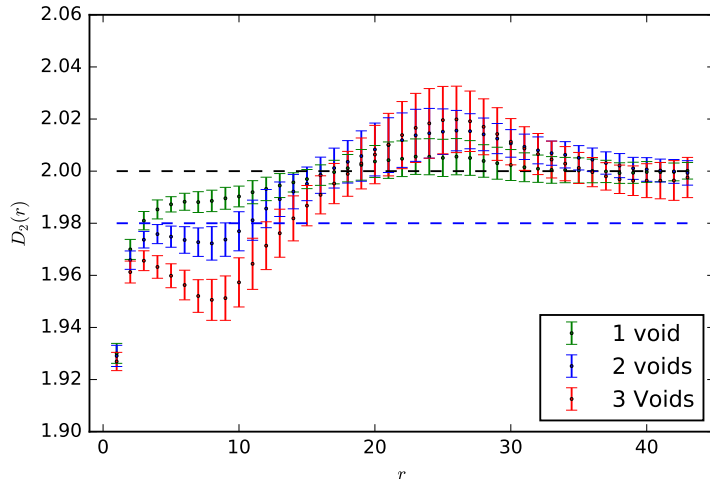


Figura 5.9: Resultado do estimador E1 para os catálogos com *voids*. Vales e picos são mais pronunciados, e a escala de homogeneidade é maior com o aumento do número de *voids*. Estatisticamente, em grandes escalas, o estimador indica que os catálogos são homogêneos, apesar da presença desses vazios.

30u, os efeitos dos *voids* são desprezíveis e a distribuição se torna estatisticamente homogênea.

Além disso, testamos também o efeito de sobredensidades nos estimadores. Para tal, removemos as fontes de HI pertencentes ao aglomerado de Virgo. Espera-se que com isso, os pontos de  $\mathcal{D}_2(\theta)$  caiam na escala do aglomerado e cresçam em grandes escalas angulares, pois removendo um aglomerado, a distribuição fica mais homogênea.

Com base no trabalho apresentado em [74], removeu-se pontos que se encontram entre 16 e 18 Mpc, restritos à declinação entre 0 e 20° e ascensão reta entre 180° e 200°. Com isso, 287 fontes de HI foram removidas da subamostra utilizada nas análises<sup>3</sup>. A figura 5.10 ilustra as fontes HI que foram removidas para a análise.

Os resultados podem ser vistos na figura 5.11. Os efeitos em  $\mathcal{N}(< \theta)$  são observados na amplitude, que aparece mais baixa na análise sem Virgo, para os dois estimadores. Próximo de 20° os dois estimadores apresentam uma queda, e em grandes escalas angulares, próximo de 35°, os pontos se aproximam mais da escala de homogeneidade, a linha tracejada preta.

Portanto, é possível afirmar que a presença de regiões de sobredensidade numérica podem causar as flutuações vistas nas análises da seção 5.1, em  $\mathcal{D}_2(\theta)$ , para os estimadores E1 e E2, e aparecendo na função de correlação no caso de E3. No entanto, apesar dessas flutuações, a distribuição ainda apresenta uma escala de transição para homogeneidade entre 15° e 16°, dada nossa definição apresentada na

<sup>3</sup>Essa mesma quantidade de pontos é removida de cada catálogo aleatório.

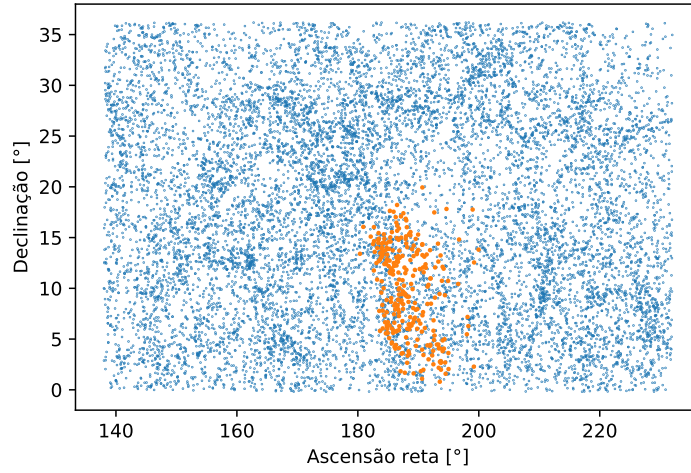


Figura 5.10: Catálogo ALFALFA com as fontes HI pertencentes ao aglomerado Virgo, representadas pelos pontos laranja.

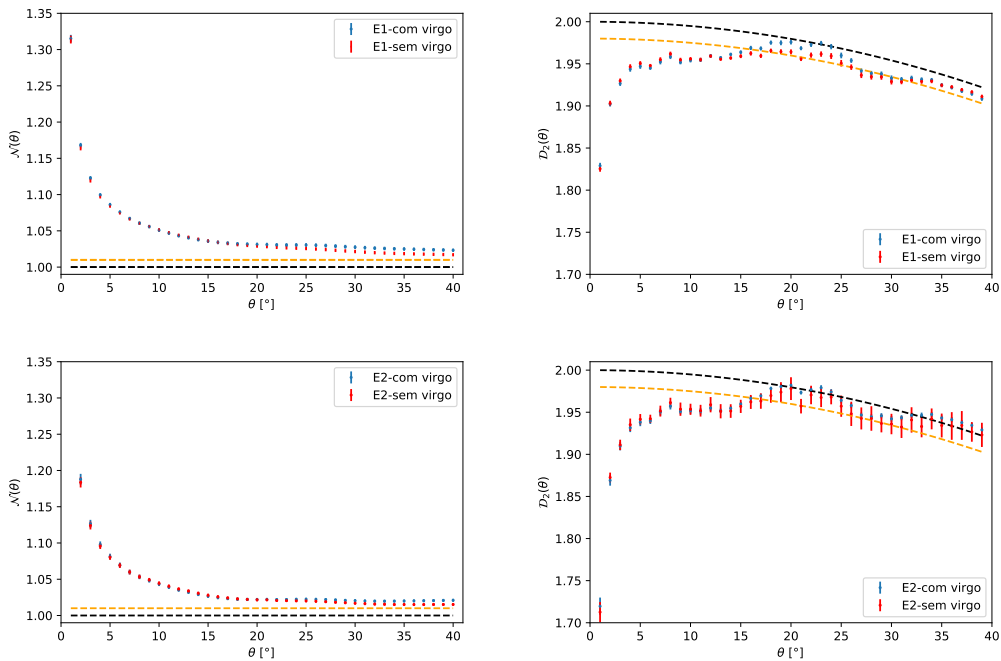


Figura 5.11: Análises mostrando o efeito da ausência do aglomerado Virgo para os estimadores E1 e E2. Novamente as barras de erro são calculadas a partir dos resultados obtidos com os 20 catálogos aleatórios. A amplitude em  $\mathcal{N}(< \theta)$  abaixa quando são removidas as fontes de HI. O valor de  $\mathcal{D}_2(\theta)$  cai em  $20^\circ$ , sendo esta a dimensão de Virgo projetada. Os efeitos são semelhantes para os dois estimadores.

seção 4.4.

# Capítulo 6

## Conclusões

Um dos muitos desafios da cosmologia moderna é testar suas hipóteses fundamentais, tal como o PC. Análises de isotropia são favorecidas por uma gama de observáveis cosmológicos, tais como a RCF, fontes de radio e raio-X. Já o estudo da homogeneidade é mais difícil. Métodos que utilizam contagens em esferas ou calotas esféricas (quando utilizadas fontes projetadas no céu) não são testes diretos de homogeneidade espacial, pois não obtemos informações de todas as hipersuperfícies contidas no cone de luz do passado, mas somente de suas interseções com o cone [75, 76]. No entanto, esses métodos provem testes consistentes no sentido de: Se o método de contagem em esferas mostra que a distribuição de objetos não se aproxima da homogeneidade em grandes escalas, então o PC é violado, caso contrário, se existe tal escala em que há uma transição para a homogeneidade, isso é uma forte evidência para o PC, mesmo sem prová-lo rigorosamente [75, 77]. O modelo cosmológico atual sugere que essa transição é feita de modo suave, próximo de 100 Mpc (variando com  $t$  e com o traçador utilizado), o que vem sendo favorecido pelos resultados mais recentes [3, 19, 20]. Alguns trabalhos conseguiram reproduzir resultados semelhantes utilizando análises projetadas, o que é completamente independente de modelo cosmológico [22–24].

Este trabalho teve como finalidade procurar uma escala de homogeneidade utilizando fontes de HI do catálogo ALFALFA, que oferece uma boa área para uma análise projetada,  $\sim 7000$  graus<sup>2</sup>. Além disso, suas fontes estão próximas,  $z \leq 0,06$ , o que proporciona uma análise do Universo local independente de modelo e original. O método utilizado foi a contagem normalizada,  $\mathcal{N}(< \theta)$ , que está relacionada com a dimensão de correlação  $\mathcal{D}_2(\theta)$ , ferramenta utilizada para medir a dimensão fractal de uma distribuição. A contagem normalizada tem a vantagem de corrigir efeitos sistemáticos em catálogos, tal como incompletude dos dados e efeitos de borda, com o uso de catálogos aleatórios homogêneos. No entanto, ainda sim, podemos estar obtendo resultados imprecisos. Por isso é importante realizar testes de consistência do método, como por exemplo, utilizando o modelo- $\beta$  [72], construindo catálogos

fractais de dimensão preestabelecida, sobre os quais validamos.

Nossos resultados, utilizando três estimadores (E1,E2 e E3) para o cálculo de  $\mathcal{N}(< \theta)$  e, a partir dele  $\mathcal{D}_2(\theta)$ , mostraram uma transição para a homogeneidade no intervalo  $15,38^\circ - 16,49^\circ$ . Simulações na literatura mostram que o valor esperado para flutuações da matéria ( $b = 1$ ) para  $\langle z \rangle = 0,025$  é  $\simeq 32^\circ$  [22, 23]. Assim considerando que fontes de HI tem um *bias* de 0,48 [67], a escala de transição para a homogeneidade esperada é  $\simeq 16^\circ$ . Os testes de consistência para os estimadores E1 e E2, utilizando catálogos fractais de dimensão 1,9, tiveram resultados consistentes, com um desvio em pequenas escalas. Além disso, para estudar a origem das flutuações que surgem em  $\mathcal{D}_2(\theta)$ , construímos catálogos com *voids* e aplicamos o estimador E1. Os resultados mostram que a presença de *voids* influenciam o comportamento de  $\mathcal{D}_2(\theta)$  e pode elevar a medida de  $\theta_H$ . Comportamento similar é observado ao removermos as fontes de HI pertencentes do aglomerado Virgo, que resulta em um  $\mathcal{D}_2(\theta)$  com menor amplitude na escala angular do aglomerado, enquanto que em grandes escalas, o catálogo fica mais homogêneo.

# Referências Bibliográficas

- [1] A. Einstein. The foundation of the generalised theory of relativity. *On a Heuristic Point of View about the Creation and Conversion of Light 1 On the Electrodynamics of Moving Bodies 10 The Development of Our Views on the Composition and Essence of Radiation 11 The Field Equations of Gravitation 19 The Foundation of the Generalised Theory of Relativity*, 22:22, 1916.
- [2] J.-C. Hwang. Modern Cosmology: Assumptions and Limits. *Journal of Korean Astronomical Society*, 45:65–69, June 2012.
- [3] P. Laurent, J.-M. Le Goff, E. Burtin, J.-C. Hamilton, D. W. Hogg, A. Myers, P. Ntelis, I. Pâris, J. Rich, E. Aubourg, J. Bautista, T. Delubac, H. du Mas des Bourboux, S. Eftekharzadeh, N. Palanque Delabrouille, P. Petitjean, G. Rossi, D. P. Schneider, and C. Yeche. A  $14 \text{ h}^{-3} \text{ gpc}^3$  study of cosmic homogeneity using boss dr12 quasar sample. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2016(11):060, 2016.
- [4] S. Weinberg. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*, volume 1. Wiley New York, 1972.
- [5] B. Pandey. Testing isotropy in the two micron all-sky redshift survey with information entropy. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 468(2):1953–1961, 2017.
- [6] B. Pandey. A new method for testing isotropy with shannon entropy. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 462(2):1630–1641, 2016.
- [7] C. A. Scharf, K. Jahoda, M. Treyer, O. Lahav, E. Boldt, and T. Piran. The 2-10 keV x-ray background dipole and its cosmological implications. *The Astrophysical Journal*, 544(1):49, 2000.
- [8] C. Blake and J. Wall. A velocity dipole in the distribution of radio galaxies. *Nature*, 416(6877):150, 2002.



- [9] A. Bernui, I. S. Ferreira, and C. A. Wuensche. On the large-scale angular distribution of short gamma-ray bursts. *The Astrophysical Journal*, 673(2):968, 2008.
- [10] G. A. Marques, C. P. Novaes, A. Bernui, and I. S. Ferreira. Isotropy analyses of the planck convergence map. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 473(1):165–172, 2018.
- [11] C. A. P. Bengaly Jr, A. Bernui, J. S. Alcaniz, H. S. Xavier, and C. P. Novaes. Is there evidence for anomalous dipole anisotropy in the large-scale structure? *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 464(1):768–774, 2016.
- [12] D. J. Fixsen, E. S. Cheng, J. M. Gales, J. C. Mather, R. A. Shafer, and E. L. Wright. The cosmic microwave background spectrum from the full coBE\* firas data set. *The Astrophysical Journal*, 473(2):576, 1996.
- [13] C. P. Novaes, A. Bernui, G. A. Marques, and I. S. Ferreira. Local analyses of planck maps with minkowski functionals. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 461(2):1363–1373, 2016.
- [14] H. Mo, F. Van den Bosch, and S. White. *Galaxy formation and evolution*. Cambridge University Press, 2010.
- [15] B. B. Mandelbrot. *The fractal geometry of nature*, volume 173. WH freeman New York, 1983.
- [16] P. H. Coleman and L. Pietronero. The fractal structure of the universe. *Physics Reports*, 213(6):311–389, 1992.
- [17] L. Guzzo. Is the universe homogeneous?(on large scales). *New Astronomy*, 2(6):517–532, 1997.
- [18] J. S. Bagla, J. Yadav, and T. R. Seshadri. Fractal dimensions of a weakly clustered distribution and the scale of homogeneity. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 390(2):829–838, 2008.
- [19] M. I. Scrimgeour, T. Davis, C. Blake, J. B. James, G. B. Poole, L. Staveley-Smith, S. Brough, M. Colless, C. Contreras, W. Couch, S. Croom, D. Croton, M. J. Drinkwater, K. Forster, D. Gilbank, M. Gladders, K. Glazebrook, B. Jelliffe, R. J. Jurek, I.-h. Li, B. Madore, D. C. Martin, K. Pimbblet, M. Pracy, R. Sharp, E. Wisnioski, D. Woods, T. K. Wyder, and

- H. K. C. Yee. The wiggles dark energy survey: the transition to large-scale cosmic homogeneity. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 425(1):116–134, 2012.
- [20] P. Ntelis, J.-C. Hamilton, J.-M. Le Goff, E. Burtin, P. Laurent, J. Rich, N. Guillermino Busca, J. Tinker, E. Aubourg, H. du Mas des Bourboux, J. Bautista, N. Palanque Delabrouille, T. Delubac, S. Eftekharzadeh, D. W. Hogg, A. Myers, M. Vargas-Magaña, I. Pâris, P. Petitjean, G. Rossi, D. P. Schneider, R. Tojeiro, and C. Yeche. Exploring cosmic homogeneity with the boss dr12 galaxy sample. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2017(06):019, 2017.
- [21] J. Yadav, S. Bharadwaj, B. Pandey, and T. R. Seshadri. Testing homogeneity on large scales in the sloan digital sky survey data release one. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 364(2):601–606, 2005.
- [22] D. Alonso, A. Bueno Belloso, F. J. Sánchez, J. García-Bellido, and E. Sánchez. Measuring the transition to homogeneity with photometric redshift surveys. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 440(1):10–23, 2014.
- [23] D. Alonso, A. I. Salvador, F. J. Sánchez, M. Bilicki, J. García-Bellido, and E. Sánchez. Homogeneity and isotropy in the two micron all sky survey photometric redshift catalogue. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 449(1):670–684, 2015.
- [24] R. S. Gonçalves, G. C. Carvalho, C. A. P. Bengaly Jr, J. C. Carvalho, A. Bernui, J. S. Alcaniz, and R. Maartens. Cosmic homogeneity: a spectroscopic and model-independent measurement. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 2017.
- [25] M. P. Hobson, G. Efstathiou, and A. N. Lasenby. *General relativity: an introduction for physicists*. Cambridge University Press, 2006.
- [26] V. B. Braginskii and V. I. Panov. Verification of the equivalence of inertial and gravitational mass. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 34:463, 1972.
- [27] E. Asmodelle. Tests of general relativity: A review. *arXiv preprint arXiv:1705.04397*, 2017.
- [28] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R. A. Knop, P. Nugent, P. G. Castro, S. Deustua, S. Fabbro, A. Goobar, D. E. Groom, I. M. Hook,

- A. G. Kim, M. Y. Kim, J. C. Lee, N. J. Nunes, R. Pain, C. R. Penny-  
 packer, R. Quimby, C. Lidman, R. S. Ellis, M. Irwin, R. G. McMahon,  
 P. Ruiz-Lapuente, N. Walton, B. Schaefer, B. J. Boyle, A. V. Filippenko,  
 T. Matheson, A. S. Fruchter, N. Panagia, H. J. M. Newberg, W. J. Couch,  
 and T. S. C. Project. Measurements of  $\omega$  and  $\lambda$  from 42 high-redshift su-  
 pernovae. *The Astrophysical Journal*, 517(2):565, 1999.
- [29] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P. M. Gar-  
 navich, R. L. Gilliland, C. J. Hogan, S. Jha, R. P. Kirshner, B. Leibundgut,  
 M. M. Phillips, D. Reiss, B. P. Schmidt, R. A. Schommer, R. C. Smith,  
 J. Spyromilio, C. Stubbs, N. B. Suntzeff, and J. Tonry. Observational  
 evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological  
 constant. *The Astronomical Journal*, 116(3):1009, 1998.
- [30] T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla, and C. Skordis. Modified gravity and  
 cosmology. *Physics reports*, 513(1-3):1–189, 2012.
- [31] A. Krasinski. Inhomogeneous cosmological models. *Inhomogeneous Cosmologi-  
 cal Models, by Andrzej Krasinski, Cambridge, UK: Cambridge University  
 Press, 2006*, 2006.
- [32] P. J. Peebles and B. Ratra. The cosmological constant and dark energy. *Reviews  
 of modern physics*, 75(2):559, 2003.
- [33] B. Ryden. *Introduction to cosmology*. Cambridge University Press, 2016.
- [34] Planck Collaboration, P. A. R. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud, M. Ashdown,  
 J. Aumont, C. Baccigalupi, A. J. Banday, R. B. Barreiro, J. G. Bartlett,  
 and et al. Planck 2015 results-xiii. cosmological parameters. *Astronomy  
 & Astrophysics*, 594:A13, 2016.
- [35] D. W. Hogg. Distance measures in cosmology. *arXiv preprint astro-ph/9905116*,  
 1999.
- [36] M. Visser. Cosmography: Cosmology without the einstein equations. *General  
 Relativity and Gravitation*, 37(9):1541–1548, 2005.
- [37] E. Hubble. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic  
 nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 15(3):168–173,  
 1929.
- [38] J. A. Peacock. *Cosmological physics*. Cambridge university press, 1999.

- [39] A. G. Riess, L. M. Macri, S. L. Hoffmann, D. Scolnic, S. Casertano, A. V. Filippenko, B. E. Tucker, M. J. Reid, D. O. Jones, J. M. Silverman, R. Chornock, P. Challis, W. Yuan, P. J. Brown, and R. J. Foley. A 2.4% determination of the local value of the hubble constant based on observations with the nasa/esa hubble space telescope, obtained at the space telescope science institute, which is operated by aura, inc., under nasa contract nas 5-26555. *The Astrophysical Journal*, 826(1):56, 2016.
- [40] K. Maeda and Y. Terada. Progenitors of type ia supernovae. *International Journal of Modern Physics D*, 25(10):1630024, 2016.
- [41] J. A. Frieman, M. S. Turner, and D. Huterer. Dark energy and the accelerating universe. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, 46:385–432, 2008.
- [42] K. Griest. The nature of the dark matter. In *Dark Matter in the Universe*, page 343, 1996.
- [43] F. Zwicky. The redshift of extragalactic nebulae. *Helv. Phys. Acta*, 6:110, 1933.
- [44] V. C. Rubin, W. K. Ford, Jr., and N. Thonnard. Rotational properties of 21 sc galaxies with a large range of luminosities and radii, from ngc 4605/ $r=4\text{kpc}$ /to ugc 2885/ $r=122\text{ kpc}$ . *The Astrophysical Journal*, 238:471–487, 1980.
- [45] R. P. van der Marel, G. Besla, T. J. Cox, S. T. Sohn, and J. Anderson. The m31 velocity vector. iii. future milky way m31–m33 orbital evolution, merging, and fate of the sun. *The Astrophysical Journal*, 753(1):9, 2012.
- [46] A. A. Penzias and R. W. Wilson. A measurement of excess antenna temperature at 4080 mc/s. *The Astrophysical Journal*, 142:419–421, 1965.
- [47] D.J. Fixsen. The temperature of the cosmic microwave background. *The Astrophysical Journal*, 707(2):916, 2009.
- [48] C. L. Bennett, A. J. Banday, K. M. Gorski, G. Hinshaw, P. Jackson, P. Keegstra, A. Kogut, G. F. Smoot, D. T. Wilkinson, and E. L. Wright. Four-year cobe\* dmr cosmic microwave background observations: maps and basic results. *The Astrophysical Journal Letters*, 464(1):L1, 1996.
- [49] V.H. Koch. *Sur une courbe continue sans tangente obtenue par une construction géométrique élémentaire*. Norstedt & soner, 1904.
- [50] S. Borgani. Scaling in the universe. *Physics Reports*, 251(1-2):1–152, 1995.

- [51] M. B. Ribeiro. Relativistic fractal cosmologies. In *Deterministic Chaos in General Relativity*, pages 269–296. Springer, 1994.
- [52] Y. Baryshev and P. Teerikorpi. Fractal approach to large-scale galaxy distribution. *arXiv preprint astro-ph/0505185*, 2005.
- [53] K. Falconer. *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*. John Wiley & Sons, 2004.
- [54] L. Pietronero and F. S. Labini. Statistical physics for cosmic structures. In *Complexity, Metastability and Nonextensivity*, pages 91–101. World Scientific, 2005.
- [55] T. R. Seshadri. Fractal analysis of galaxy surveys. *Bulletin of the Astronomical Society of India*, 33:1, 2005.
- [56] J. Pan and P. Coles. Boundary corrections in fractal analysis of galaxy surveys. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 330(3):719–730, 2002.
- [57] K. Abazajian, J. K. Adelman-McCarthy, M. A. Agüeros, S. S. Allam, S. F. Anderson, J. Annis, N. A. Bahcall, I. K. Baldry, S. Bastian, A. Berlind, et al. The first data release of the sloan digital sky survey. *The Astronomical Journal*, 126(4):2081, 2003.
- [58] P. Schneider. *Extragalactic astronomy and cosmology: an introduction*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [59] P. Sarkar, J. Yadav, B. Pandey, and S. Bharadwaj. The scale of homogeneity of the galaxy distribution in sdss dr6. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 399(1):L128–L131, 2009.
- [60] J. K. Adelman-McCarthy, M. A. Agüeros, S. S. Allam, C. Allende Prieto, K. S. J. Anderson, S. F. Anderson, J. Annis, N. A. Bahcall, C. A. L. Bailer-Jones, I. K. Baldry, et al. The sixth data release of the sloan digital sky survey. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 175(2):297, 2008.
- [61] P. J. E. Peebles. *The large-scale structure of the universe*. Princeton university press, 1980.
- [62] M. P. P. J. E. Davis and P. J. E. Peebles. A survey of galaxy redshifts. v-the two-point position and velocity correlations. *The Astrophysical Journal*, 267:465–482, 1983.
- [63] S. D. Landy and A. S. Szalay. Bias and variance of angular correlation functions. *The Astrophysical Journal*, 412:64–71, 1993.

- [64] M. Vargas-Magaña, J. E. Bautista, J.-C. Hamilton, N. G. Busca, É. Aubourg, A. Labatie, J.-M. Le Goff, S. Escoffier, M. Manera, C. K. McBride, D. P. Schneider, and C. N. A. Willmer. An optimized correlation function estimator for galaxy surveys. *Astronomy & Astrophysics*, 554:A131, 2013.
- [65] M. P. Haynes, R. Giovanelli, A. M. Martin, K. M. Hess, A. Saintonge, E. A. K. Adams, G. Hallenbeck, G. L. Hoffman, S. Huang, B. R. Kent, et al. The arecibo legacy fast alfa survey: the  $\alpha$ . 40 hi source catalog, its characteristics and their impact on the derivation of the hi mass function. *The astronomical journal*, 142(5):170, 2011.
- [66] S. Hatton. Approaching a homogeneous galaxy distribution: results from the stromlo-apm redshift survey. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 310(4):1128–1136, 1999.
- [67] S. Basilakos, M. Plionis, K. Kovač, and N. Voglis. Large scale structure in the hi parkes all-sky survey: Filling the voids with hi galaxies? *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 378(astro-ph/0703713):301–308, 2007.
- [68] S. S. Passmoor, C. M. Cress, and A. Faltenbacher. Clustering of hi galaxies in the hi parkes all sky survey and arecibo legacy fast alfa survey. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 412(1):L50–L54, 2011.
- [69] R. Giovanelli and M. P. Haynes. Extragalactic hi surveys. *The Astronomy and Astrophysics Review*, 24(1):1, 2016.
- [70] J. J. Salzer and M. P. Haynes. Hi redshift surveys and large scale structure. In *The Minnesota Lectures on Extragalactic Neutral Hydrogen*, volume 106, page 357, 1996.
- [71] M. H. Li and H. N. Lin. Testing the homogeneity of the universe using gamma-ray bursts. *Astronomy & Astrophysics*, 582:A111, 2015.
- [72] C. Castagnoli and A. Provenzale. From small-scale fractality to large-scale homogeneity—a family of cascading models for the distribution of galaxies. *Astronomy and Astrophysics*, 246:634–643, 1991.
- [73] B. Efron. Bootstrap methods: another look at the jackknife. In *Breakthroughs in statistics*, pages 569–593. Springer, 1992.
- [74] S. Kim, S.-C. Rey, H. Jerjen, T. Lisker, E.-C. Sung, Y. Lee, J. Chung, M. Pak, W. Yi, and W. Lee. The extended virgo cluster catalog. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 215(2):22, 2014.

- [75] R. Maartens. Is the universe homogeneous? *Phil. Trans. R. Soc. A*, 369(1957):5115–5137, 2011.
- [76] C. Clarkson. Establishing homogeneity of the universe in the shadow of dark energy. *Comptes Rendus Physique*, 13(6-7):682–718, 2012.
- [77] A. F. Heavens, R. Jimenez, and R. Maartens. Testing homogeneity with the fossil record of galaxies. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2011(09):035, 2011.

# Apêndice A

## Relação entre $\mathcal{N}(< \theta)$ e $\omega(\theta)$

A relação entre contagem em esferas e a função de correlação apresentada na seção 3.3 é redefinida para pontos projetados no céu como

$$N(< \theta) = \int dP = \int \bar{\sigma}[1 + \omega(\theta)]d\Omega, \quad (\text{A.1})$$

onde  $\bar{\sigma}$  é a densidade numérica média superficial da esfera unitária e  $d\Omega$  o elemento de angulo sólido. Resolvendo essa integral

$$N(< \theta) = \int_0^{2\pi} \int_0^\theta \bar{\sigma}[1 + \omega(\theta')]\text{sen } \theta' d\theta' d\phi = 2\pi\bar{\sigma} \int_0^\theta [1 + \omega(\theta')]\text{sen } \theta' d\theta'. \quad (\text{A.2})$$

A densidade média pode ser reescrita em termos das contagens em esferas de uma distribuição homogênea

$$\bar{\sigma} = \frac{N_{hom}(< \theta)}{2\pi(1 - \cos\theta)}, \quad (\text{A.3})$$

onde o denominador é a área superficial de uma calota esférica de raio angular  $\theta$ . Substituindo na equação A.2 e definindo  $\mathcal{N}(< \theta)$

$$\mathcal{N}(< \theta) = \frac{N(< \theta)}{N_{hom}(< \theta)} \quad (\text{A.4})$$

$$\mathcal{N}(< \theta) = \frac{1}{1 - \cos\theta} \int_0^\theta \text{sen } \theta' d\theta' + \frac{1}{1 - \cos\theta} \int_0^\theta \omega(\theta')\text{sen } \theta' d\theta'. \quad (\text{A.5})$$

O resultado da primeira integral é  $(1 - \cos\theta)$ , portanto temos

$$\mathcal{N}(< \theta) = 1 + \frac{1}{1 - \cos\theta} \int_0^\theta \omega(\theta')\text{sen } \theta' d\theta'. \quad (\text{A.6})$$



# Apêndice B

## Relação entre $\mathcal{N}(< \theta)$ e $\mathcal{D}_2(\theta)$

A definição de dimensão de correlação para medidas angulares é

$$D_2(\theta) = \frac{d \ln N(< \theta)}{d \ln \theta}, \quad (\text{B.1})$$

que reescrito em termos de

$$\mathcal{N}(< \theta) = \frac{N(< \theta)}{N_{hom}(< \theta)}, \quad (\text{B.2})$$

fica

$$\mathcal{D}_2(\theta) = \frac{d \ln \mathcal{N}(< \theta)}{d \ln \theta} + \frac{d \ln N_{hom}(< \theta)}{d \ln \theta}. \quad (\text{B.3})$$

A contagem em calotas esféricas com distribuição homogênea pode ser escrita como

$$N_{hom}(< \theta) = 2\pi\bar{\sigma}(1 - \cos \theta) = K(1 - \cos \theta), \quad (\text{B.4})$$

substituindo em  $\mathcal{D}_2(\theta)$

$$\mathcal{D}_2(\theta) = \frac{d \ln \mathcal{N}(< \theta)}{d \ln \theta} + \frac{d \ln K}{d \ln \theta} + \frac{d \ln (1 - \cos \theta)}{d \ln \theta}. \quad (\text{B.5})$$

A segunda derivada é igual a zero, pois  $K = 2\pi\bar{\sigma} = \text{constante}$ . A terceira derivada pode ser manipulada da seguinte maneira:

$$\frac{d \ln (1 - \cos \theta)}{d \theta} \frac{1}{d \ln \theta / d \theta} = \theta \frac{d \ln (1 - \cos \theta)}{d \theta}. \quad (\text{B.6})$$

Com a mudança de variável do tipo  $u = 1 - \cos \theta$ , obtemos

$$\theta \sin \theta \frac{d \ln u}{d u} = \frac{\theta \sin \theta}{1 - \cos \theta}. \quad (\text{B.7})$$

Assim, a dimensão de correlação  $\mathcal{D}_2(\theta)$  para pontos em uma superfície de calota esférica com ângulo  $\theta$  em termo de  $\mathcal{N}(< \theta)$  é

$$\mathcal{D}_2(\theta) = \frac{d \ln \mathcal{N}(< \theta)}{d \ln \theta} + \frac{\theta \operatorname{sen} \theta}{1 - \cos \theta}. \quad (\text{B.8})$$