



Observatório Nacional - ON
Programa de Pós-Graduação em
Astronomia



RECONSTRUÇÃO DA EVOLUÇÃO DA TEMPERATURA DA RADIAÇÃO CÓSMICA ATRAVÉS DE PROCESSOS GAUSSIANOS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

ALEXANDRE MASSON VICENTE

Rio de Janeiro - RJ
Julho de 2020

ALEXANDRE MASSON VICENTE

RECONSTRUÇÃO NÃO-PARAMÉTRICA DA
EVOLUÇÃO DA TEMPERATURA DA RADIAÇÃO
CÓSMICA ATRAVÉS DE PROCESSOS
GAUSSIANOS

Dissertação apresentada ao Programa
de Pós-graduação em Astronomia como
parte dos requisitos necessários à con-
clusão do mestrado.

Orientador: Professor Doutor Jailson de Sousa Alcaniz.

Rio de Janeiro - RJ
Julho / 2020

Folha de Aprovação

Dissertação defendida e aprovada em _____ de _____ de
20____, pela comissão avaliadora constituída pelos professores:

Professor Doutor Jailson de Sousa Alcaniz
Observatório Nacional
Orientador

Professor Doutor Raimundo Silva Jr.
Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Examinador

Doutor Rodrigo de Sousa Gonçalves
Observatório Nacional
Examinador

Agradecimentos

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela concessão da bolsa, ao Professor Jailson pela oportunidade de trabalhar em um problema de Física Aplicada, em Cosmologia, e a todos os trabalhadores do Observatório Nacional por terem propiciado recursos de trabalho adequados para a realização das atividades do mestrado.

Dedico este trabalho aos meus pais, Artur e Joana, pessoas fundamentais em minha vida e que fizeram parte deste processo com todo o apoio que sempre me conferiram.

Agradecimento especial a Domingos Rade, uma referência importantíssima enquanto pesquisador e pessoa no caminho que escolhi trilhar.

Resumo

Este trabalho visa obter uma reconstrução não-paramétrica da temperatura da radiação cósmica de fundo pela aplicação de Processos Gaussianos e definir vínculos a cosmologias que violam a Relação de Distância-Dualidade. Para estas últimas, os vínculos foram associados à taxa de produção de radiação, expressa por um parâmetro extra na relação temperatura-redshift, que marca possíveis desvios entre a reconstrução e a lei de evolução original prevista pelo Modelo Cosmológico Padrão. Com Processos Gaussianos, foram calculados perfis de temperatura para os conjuntos de dados disponíveis. Então, por meio de uma análise qui-quadrada, descartou-se os perfis incompatíveis com a relação temperatura-redshift padrão. Aqueles consistentes foram mapeados na taxa de produção de radiação. Cada perfil não-paramétrico de evolução desta taxa foi comparado a reconstruções paramétricas da mesma taxa, sendo estas últimas concebidas segundo um ajuste ótimo com os dados. As reconstruções não-paramétricas da taxa de criação de fótons em discrepância estatística com as paramétricas foram negligenciadas. Por fim, a partir dessas reconstruções selecionadas, foram calculados, também, vínculos tanto para o parâmetro de violação da relação de distância-dualidade quanto para a variação fracionária da constante de estrutura-fina, outros observáveis capazes de medir o quanto as teorias mencionadas se distanciam do Modelo Cosmológico Padrão.

PALAVRAS-CHAVE: Cosmologia – Radiação Cósmica de Fundo – Parâmetros Cosmológicos.

Abstract

This work aims to obtain a non-parametric reconstruction of the temperature evolution law of the cosmic microwave background by the application of Gaussian Processes and to set constraints on cosmologies that violate the duality-distance relation. The constraints obtained are on the photon production rate expressed by an extra parameter in the temperature-redshift relation that quantifies a possible deviation from standard evolution. With the application of Gaussian Processes to the available data temperature profiles were reconstructed and using a statistical criteria those which were too far from the standard model prediction were discarded. Each non-parametric evolution of this photon creation rate was compared with two best-fit parametric regression models. Non-parametric reconstructions in statistical discrepancy with the parametric ones were disregarded. The chosen reconstructions were then used to calculate constraints on both the distance-duality relation and variation of the fine-structure constant. A good agreement with the predictions of the standard cosmology was found.

KEY-WORDS: Cosmology – Cosmic Microwave Background – Cosmological Parameters.

"Você quer uma razão para lutar?
Por que você não aceita?!
Você é sedento por batalhas.
Você deseja poder.
Todo mundo que procura poder, sem exceção, procura por batalha!
Você luta pra se tornar mais poderoso? Ou você quer mais poder para lutar?
Eu ainda não sei a resposta.
Mas, certamente, nós nascemos assim!
Nós nascemos para lutar!
Seus instintos continuarão levando você a novas batalhas.
Lute!
É a única forma que você tem de viver.
É a única maneira de se tornar mais forte!
Se você quer que seu poder esfacele seus adversários, pegue essa espada e corte-os em pedaços!
Essa é sua única opção!
Esse é o trajeto disponível pra você!"

Jūichibantai Taichou, Zaraki Kenpachi - Bleach
Tite Kubo

Sumário

1	Introdução	2
2	Cosmologia	4
2.1	Cosmologia de Friedmann	4
2.1.1	Métrica FLRW	4
2.1.2	Redshift e medidas de distância em Cosmologia	6
2.1.3	Equações de Friedmann	11
2.2	Pilares Observacionais da Cosmologia	28
2.2.1	Expansão do Universo	28
2.2.2	Radiação Cósmica de Fundo de Microondas	30
2.2.3	Nucleossíntese Primordial	34
3	Lei de Evolução da Temperatura	41
3.1	Lei de Temperatura Padrão	41
3.2	Lei de Temperatura com Criação de Fótons	43
3.2.1	Termodinâmica da Criação de Partículas	43
3.2.2	Equações de Transporte	46
3.2.3	A Parametrização β para a Criação de Fótons	48
3.2.4	Efeitos de β na expansão cósmica e no transporte radiativo	49
3.3	Observáveis modificados pela produção de fótons	54
4	Observações e descrição dos dados	56
4.1	Efeito Sunyaev-Zel'dovich	56
4.2	Absorção Radiativa em Quasares	58
4.3	Organização dos dados	60
5	Processos Gaussianos	63
5.1	O Conceito	63
5.2	Reconstrução com Processos Gaussianos	64
5.2.1	Reconstrução dos dados	66
5.2.2	Predição	69
5.3	Aspectos computacionais da técnica	72
6	Metodologia e Resultados	75
6.1	Reconstrução da Temperatura	75
6.2	Cálculo da taxa de criação de fótons	81
7	Conclusão	91

Lista de Tabelas

4.1	Pontos de aglomerados de galáxias e quasares.	61
-----	---	----

Lista de Figuras

2.1	Fator de escala como grau de liberdade capaz de marcar a expansão cósmica.	5
2.2	Fóton sofrendo <i>redshift</i> ao longo da expansão. Fonte: https://www.pitt.edu/~jdnorton/teaching/HPS_0410/chapters/big_bang_FRW_spacetimes/cosm_red_shift.gif	7
2.3	Fonte astrofísica sob processo de irradiação. Fonte: https://www.phs-uv.com/wp-content/uploads/2020/04/image-22.png	8
2.4	Distância de diâmetro angular. Fonte: http://spiff.rit.edu/classes/phys443/lectures/classic/ang_diam_diagram.png	10
2.5	Densidades de energia na Era da Radiação.	22
2.6	Densidades de energia nas Eras da Matéria e da Constante Cosmológica.	22
2.7	Solução barotrópica confrontada com a solução numérica, esta última dotada de todas as componentes do fluido cósmico, atuantes em todo o período de integração: destaque para o ponto que representa o estado atual do Universo.	24
2.8	Evolução do parâmetro de desaceleração: destaque para os pontos de transição e o ponto que indica o estado atual do Universo.	27
2.9	Lei de Hubble ilustrada em um exemplo de duplicação da distância. Fonte: http://www.astronomy.ohio-state.edu/~pogge/Ast162/Unit5/Images/SystematicExpansion.png	29
2.10	Lei de Hubble. Fonte: http://www.astronomy.ohio-state.edu/~pogge/Ast162/Unit5/Images/Hubble1929.png	29
2.11	Desacoplamento da radiação com a matéria	31
2.12	Intensidade de radiação da RCF	31
2.13	Coordenadas para o campo de anisotropias	32
2.14	Espectro de $\Delta T(\theta, \phi)$	33
2.15	Aproximação multipolar	34
2.16	Espectro de potência da RCF	34
2.17	Cadeia das reações	36
2.18	Tempo de meia-vida do nêutron.	37
2.19	Captura de nêutrons e produção de Deutério/Hélio	39
2.20	Concordância entre predição e observação.	40
2.21	Processos da Nucleossíntese Primordial: regime transitório	40
3.1	Volume comóvel preenchido de fótons.	42
3.2	Síntese gráfica do efeito de β na diluição dos fótons a partir do instante cósmico atual. O valor n_o usado como condição inicial se associa à temperatura $T_o \approx 2,73K$.	53
4.1	<i>Interação radiação-nuvem que caracteriza o Efeito Sunyaev-Zel'dovich.</i>	57

4.2	NAG e seus jatos relativísticos.	59
5.1	Dados de um fenômeno físico e o problema da reconstrução: círculos vermelhos representam pontos coletados, enquanto círculos em vermelho escurecido são pontos nos quais o campo foi estimado.	65
5.2	campo escalar bidimensional com GP	72
5.3	Geometria do gradiente descendente.	73
6.1	Reconstrução dos dados originais	76
6.2	Reconstrução da atualização dos dados	79
6.3	Reconstrução não-paramétrica dos dados admissível na combinação $[c] + [k] + [l]$	80
6.4	Reconstrução não-paramétrica dos dados admissível na combinação $[g] + [j] + [l]$	81
6.5	Reconstrução não-paramétrica de β a partir da combinação $[c] + [k] + [l]$	82
6.6	Reconstrução não-paramétrica de β a partir da combinação $[g] + [j] + [l]$	83
6.7	Elipse de confiança associada aos parâmetros β_1 e β_2 no ajuste $[c] + [k] + [l]$	84
6.8	Função de discrepância entre a reconstrução não-paramétrica e o ajuste da função exponencial.	85
6.9	Função de discrepância entre a reconstrução não-paramétrica e o ajuste da constante β_0	86
6.10	Elipse de confiança associada aos parâmetros β_1 e β_2 no ajuste $[g] + [j] + [l]$	87
6.11	Função de discrepância entre a reconstrução não-paramétrica e o ajuste exponencial.	88
6.12	Reconstrução não-paramétrica comparada às paramétricas.	88

Nomenclatura

Álgebra Multilinear

\mathbf{x} quadrivetor caso suas componentes sejam indicadas por índices gregos (x^μ) ou vetor caso suas componentes sejam indicadas com índices latinos (x_i)

$[\mathcal{M}_{\mu\nu}]$ Representação matricial de um tensor \mathcal{M} por meio de suas componentes

$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ Produto diádico entre dois quadrivetores \mathbf{u} e \mathbf{v}

\mathbf{B} tensor caso suas componentes sejam indicadas por índices gregos ($B_{\mu\nu}$) ou matriz caso suas componentes sejam indicadas com índices latinos (B_{ij})

Sistemas Dinâmicos

$\langle f(t) \rangle$ valor médio de uma função temporal em regime estacionário: $\langle f(t) \rangle = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt$

f_∞ valor de regime estacionário de uma série temporal f convergente: $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$

$\frac{\delta J}{\delta y}$ Derivada funcional de $J[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx$ em relação à primitiva y , esta última como um dos argumentos da função composta denotada por f : $\frac{\delta J}{\delta y} = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial y''} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{d^n}{dx^n} \frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}$

Estatística

χ^2 Função qui-quadrado reduzido

\hat{y} Estimativa do valor de um observável y

\mathcal{N} Distribuição probabilística do tipo normal

Capítulo 1

Introdução

O Modelo Cosmológico Padrão (MCP) se fundamenta na Teoria da Relatividade Geral e no Princípio Cosmológico, este último descrito matematicamente pela métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. É o modelo mais aceito para descrever a evolução do Universo e explicar algumas de suas propriedades, já que ele faz diversas previsões confirmadas observacionalmente, por exemplo, a expansão acelerada do Universo, a existência da Radiação Cósmica de Fundo (RCF), o porcentual de matéria escura e o seu papel na formação de estruturas em larga escala, entre outras [1].

Segundo o MCP, durante a expansão (adiabática), o número de fótons se conserva e a temperatura da Radiação Cósmica de Fundo, T , evolui segundo uma reta que possui o redshift, z , como variável independente, $T \propto (1 + z)$. No entanto, se o número de fótons não se conserva, a lei de evolução original se converte em uma relação não-linear, tipicamente expressa por uma regra polinomial do tipo $T \propto (1 + z)^{1-\beta}$, onde β é um parâmetro associado à criação adiabática de fótons. Cosmologias com decaimento de vácuo, acoplamento fóton-áxion, entre outras, são exemplos de classes de teorias com mecanismos de criação de fótons [2]. Em geral, elas modificam o setor eletromagnético do Universo, fazendo com que a constante de estrutura-fina se torne variável. Adicionalmente, essa violação faz com que a Relação de Distância-Dualidade não valha mais na sua forma original, levando a razão de distâncias presente na referida relação a distoar do valor unitário e a variar no redshift ([3], [4], [5] e [6]). Uma discussão completa sobre a relação temperatura-redshift para cosmologias com criação adiabática de fótons pode ser encontrada em [7], [8] e [9].

Testes e estabelecimento de vínculos sobre teorias cosmológicas exigem análise de ba-

ses robustas de dados. E a descrição das amostras disponíveis exige um modelo para viabilizar a interpretação dos dados. Modelos derivados diretamente dos dados se dão, normalmente, por processos de regressão (também chamada de reconstrução), úteis, sobretudo, para obter capacidade de previsão das grandezas observadas também sobre pontos na vizinhança das amostras, já que o número de pontos é limitado. Entretanto, reconstruções paramétricas, ou seja, regressões que assumem um formato funcional específico para os dados, podem enviesar a análise das observações [10]. Por essa razão, regressões que não se valem de um modelo *a priori* são comumente empregados para a descrição dos dados. Entre as técnicas não-paramétricas existentes, Processos Gaussianos é uma opção de vasta utilização em Cosmologia. Exemplos de aplicações com esta última abordagem podem ser encontrados em [11], [12], [13] e [14].

Este trabalho visa obter uma reconstrução não-paramétrica da temperatura da RCF pela aplicação de Processos Gaussianos aos conjuntos de dados da CMB de aglomerados de galáxias e de quasares. Além disso, almeja-se, através das reconstruções obtidas, definir vínculos a cosmologias com criação adiabática de radiação.

Capítulo 2

Cosmologia

2.1 Cosmologia de Friedmann

O Modelo Cosmológico Padrão (MCP) se assenta sobre duas hipóteses básicas, a saber, o Princípio Cosmológico e a Relatividade Geral como teoria correta do campo gravitacional. A primeira hipótese, o Princípio Cosmológico, estabelece que, em escalas suficientemente grandes, o Universo é homogêneo, ou seja, que as mesmas medidas físicas são extraídas de localidades distintas, e isotrópico, isto é, não há uma direção preferida para executar observações. Matematicamente, este princípio se expressa na métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW).

A combinação dessa métrica com as Equações de Campo de Einstein culminam nas Equações de Friedmann, modelo que descreve a expansão do Universo.

2.1.1 Métrica FLRW

As medidas de distância em um universo homogêneo e isotrópico são geradas a partir da métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]. \quad (2.1)$$

onde c é o módulo da velocidade da luz no vácuo, k é uma constante que mede a curvatura e a é uma função crescente dependente apenas do tempo cósmico (homogeneidade). Desta forma, as coordenadas radial (r) e angulares (θ e φ) são escalonadas sem que nenhuma delas seja privilegiada (isotropia). Ou seja, o intervalo espaço-temporal possui uma dinâ-

mica: as medidas são escalonadas na expansão do Universo. As coordenadas originais, r , θ e φ , medidas por um observador que acompanha a própria expansão do universo, são levadas a valores amplificados pela função $a(t)$, medidos por outro observador capaz de observar a expansão.

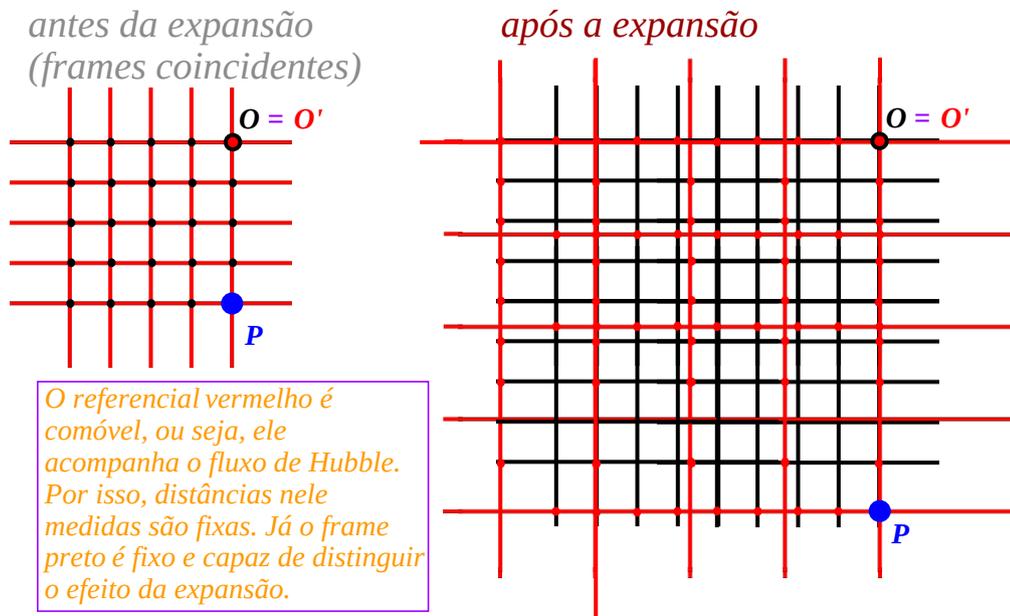


Figura 2.1: Fator de escala como grau de liberdade capaz de marcar a expansão cósmica.

Na Figura 2.1, verifica-se que o referencial vermelho (comóvel) estica, representando a expansão do Universo, enquanto o referencial preto é capaz de medir essa expansão, uma vez que é fixo (por hipótese). Por isso, o referencial comóvel, por se deformar junto com a expansão, não discrimina mudanças na posição de objetos astrofísicos que ocorram unicamente pelo fluxo de Hubble.

No referencial preto, após a expansão, o ponto P , que antes estava a apenas 4 unidades abaixo do ponto O , está a quase o dobro da mesma distância. Por outro lado, o referencial vermelho, que marcava P em quatro unidades abaixo de O' antes de se deformar, marca, após a expansão, as mesmas quatro unidades. E a razão entre a distância medida em um referencial fora do *Hubble flow* (frame preto, neste caso) e aquela medida no frame comóvel é a grandeza conhecida por fator de escala,

$$a = \frac{\overline{OP}}{\overline{O'P}}. \quad (2.2)$$

onde \overline{OP} mede a distância efetuada por um observador local e $\overline{O'P}$ é a distância invariante

medida por um observador comóvel. a é o fator de escala e as coordenadas r , θ e φ , por serem medidas por um observador solidário à expansão, são conhecidas como coordenadas comóveis. O instante atual do Universo é denotado por t_o e o valor correspondente de a atual é unitário, $a(t_o) = a_o = 1$. De posse do intervalo espaço-temporal no Universo homogêneo e isotrópico em expansão, pode-se, por inspeção, determinar as componentes do tensor métrico ao comparar a Equação (2.1) com a definição deste intervalo no espaço-tempo curvo,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.3)$$

$$d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} dt \\ dr \\ d\theta \\ d\varphi \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Por inspeção de (2.3) e (2.4), chega-se à métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker,

$$\mathbf{g} = [g_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-a^2}{1 - kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

2.1.2 Redshift e medidas de distância em Cosmologia

A partir da métrica, é possível calcular diversos tipos de distância em cosmologia. E medidas de distância, são, em grande parte dos casos, quantidades mais convenientes para a estimativa de parâmetros para teste de modelos cosmológicos. Testar a conservação do número de fótons do universo, por exemplo, requer medidas de distância de fontes luminosas feitas a partir de um observador e a separação angular entre elas. Outro exemplo é a distância própria entre uma galáxia do Universo local e um observador em outra, medida que, juntamente com a velocidade de recessão, é capaz de prover a determinação da constante de Hubble.

Porém, é importante mencionar que as distâncias e outros observáveis não são, via de

regra, dados em função do tempo cósmico, t , mas sim através do *redshift*, z . Este fator é uma parametrização de a capaz de mostrar o efeito da expansão do universo entre o instante da emissão de um fóton por uma fonte e de sua observação no instante cósmico atual, efetivamente pela variação percentual do seu comprimento de onda,

$$z = \frac{\lambda_o - \lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_o - a\lambda_o}{a\lambda_o} = \frac{1}{a} - 1. \quad (2.6)$$

onde λ é o comprimento de onda do fóton emitido por uma fonte no instante t e λ_o o comprimento de onda do mesmo fóton quando é detectado, assumindo a recepção deste sinal no instante atual, t_o . No instante atual do Universo, o fator de escala é $a_o = 1$. Consequentemente, seu correspondente em *redshift*, pela equação acima, é $z_o = 0$.

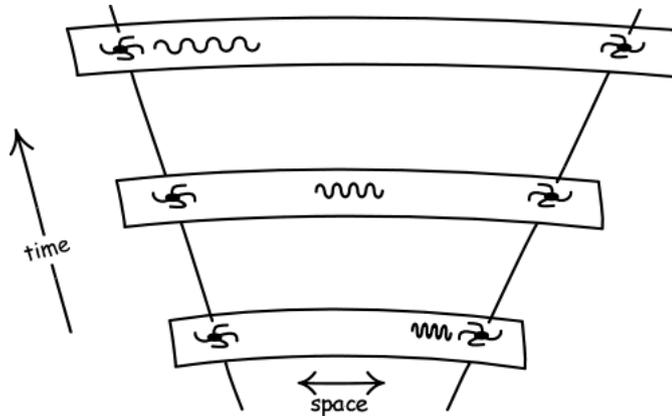


Figura 2.2: Fóton sofrendo *redshift* ao longo da expansão. Fonte: https://www.pitt.edu/~jdnorton/teaching/HPS_0410/chapters/big_bang_FRW_spacetimes/cosm_red_shift.gif

Para os propósitos desse trabalho, duas distâncias são particularmente interessantes: a distância de luminosidade e a distância de diâmetro angular.

A primeira diz respeito a distâncias estimadas a partir da intensidade do brilho de objetos de luminosidade conhecida (denotados por "velas padrão", cefeidas e supernovas do tipo IA são bons exemplos destes objetos). Considera-se uma fonte astrofísica que emite radiação eletromagnética no instante t e que será detectada em outra região no instante t_o . Para avaliar essa lei de conservação, é necessário contabilizar o efeito da expansão sobre a energia dos fótons emitidos pela fonte durante a expansão.

$$E_{emissão} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{hc}{\lambda_i}, \quad (2.7)$$

onde λ_i é o i -ésimo comprimento de onda contido no espectro eletromagnético, α_i é o

número de fótons da harmônica correspondente e h é a constante de Planck. Já energia no nosso instante atual, t_o , é dada por

$$E_{recepção} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{hc}{i \lambda_0}. \quad (2.8)$$

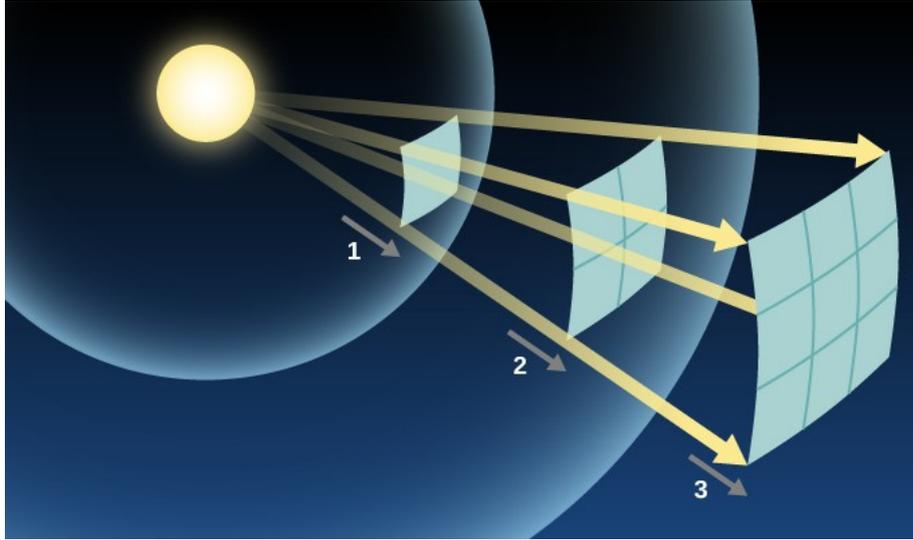


Figura 2.3: Fonte astrofísica sob processo de irradiação. Fonte: <https://www.phs-uv.com/wp-content/uploads/2020/04/image-22.png>

À medida que a expansão ocorre, o comprimento de onda da luz em uma determinada cor, λ , sofre um *redshift*, já que seu valor aumenta na taxa correspondente ao fator de escala, a . Por essa razão, o comprimento de onda da emissão, λ_i , também aumenta no tempo até seu valor correspondente no instante atual, ${}^i \lambda_0$, conforme a equação

$$\lambda_i = a^i \lambda_0. \quad (2.9)$$

Combinando (2.7), (2.8) e (2.9), chega-se à lei de conservação

$$E_{emissão} = \frac{E_{recepção}}{a}. \quad (2.10)$$

Contudo, para incorporar a luminosidade da fonte e o fluxo detectado neste processo, é conveniente expressar essa lei de conservação em termos das irradiâncias ao invés das energias, bastando expressar (2.10) em termos de variações locais com a área superficial onde os fótons incidem.

$$\partial_S E_{emissão} = \frac{\partial_S E_{recepção}}{a}, \quad (2.11)$$

onde S é a área superficial sobre a qual a radiação se distribui. A irradiância emitida é função da luminosidade, uma medida de potência radiativa da fonte. Levando em conta que a trajetória dos fótons se dá por geodésicas nulas ($ds^2 = 0$) e que seu percurso será apenas na direção radial ($d\Omega = 0$), em coordenadas comóveis, seu deslocamento pode ser derivado a partir de (2.1).

$$\ell_c = \int_t^{t_o} \frac{c dt}{a} = \int_r^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (2.12)$$

A irradiação calculada na emissão é função da luminosidade da fonte e da área da superfície esférica atravessada pelos feixes. Essa área é obtida pela distância comóvel descrita em (2.12), mas essa luminosidade deve ser integrada no tempo, uma vez que ela possui unidades de potência.

$$\langle \partial_S E_{emissão} \rangle = \frac{P_L \delta t}{4\pi \ell_c^2}, \quad (2.13)$$

onde δt é um pequeno intervalo finito de tempo transcorrido de pouco antes da emissão até o seu exato instante t e P_L a potência luminosa da fonte. Porém, um pequeno intervalo de tempo transcorrido para avaliar o valor médio da energia em um dado instante (t) difere do mesmo cálculo efetuado nas proximidades do instante atual (t_o) através do fator de escala, $\delta t = a \delta t_o$. Isso leva a última equação ao formato

$$\langle \partial_S E_{emissão} \rangle = \frac{a P_L \delta t_o}{4\pi \ell_c^2}, \quad (2.14)$$

Já o total de energia sobre área recebido é dado pela integração do fluxo observado no tempo, sendo seu valor médio dado pela equação

$$\langle \partial_S E_{recepção} \rangle = F_L \delta t_o, \quad (2.15)$$

onde F_L é o fluxo luminoso detectado pelo observador e δt_o é um pequeno intervalo finito de tempo transcorrido de pouco antes da recepção até o seu instante t_o . Sob a hipótese de que a potência luminosa da fonte foi integralmente recebida na forma desse fluxo, este último pode ser descrito pela relação

$$F_L = \frac{P_L}{4\pi D_L^2}, \quad (2.16)$$

onde D_L é chamada de distância de luminosidade, que se traduz em um raio de cobertura para a transmissão de radiação luminosa até observadores que distem essa medida da fonte.

Reescrevendo (2.11) segundo valores médios das irradiâncias,

$$\langle \partial_S E_{emissão} \rangle = \frac{\langle \partial_S E_{recepção} \rangle}{a}, \quad (2.17)$$

e substituindo seus termos segundo (2.14), (2.15) e (2.16), chega-se à expressão

$$D_L = a^{-1} \ell_c, \quad (2.18)$$

que, juntamente com (2.6), descreve a distância de luminosidade em função do *redshift*.

$$D_L = (1 + z) \ell_c. \quad (2.19)$$

A descrição do observável distância de luminosidade, realizada de (2.8) a (2.19), é a formalização, por argumentos termoestatísticos, da dedução explorada na Referência [15].

A segunda distância de interesse é a distância de diâmetro angular, D_A , que diz respeito à distância do observador às extremidades de um objeto astrofísico de comprimento $\delta \ell$ definido segundo uma separação angular $\delta \theta$,

$$D_A = \frac{\delta \ell}{\delta \theta}. \quad (2.20)$$

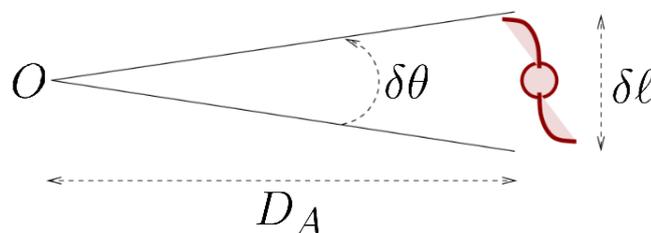


Figura 2.4: Distância de diâmetro angular. Fonte: http://spiff.rit.edu/classes/phys443/lectures/classic/ang_diam_diagram.png

$\delta \ell$ pode ser calculado pela multiplicação do fator de escala pelo comprimento comóvel de setor curvilíneo oriundo de uma geodésica nula ($ds^2 = 0$), porém, agora, com uma integração efetuada somente ao longo da separação angular,

$$\delta \ell_c = \int_{(t,r,\theta,\varphi)}^{(t,r,\theta+\delta\theta,\varphi)} \frac{d\ell}{a} = \int_{(t,r,\theta,\varphi)}^{(t,r,\theta+\delta\theta,\varphi)} \left[\sqrt{\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)} \right] = \ell_c \delta\theta, \quad (2.21)$$

$$\delta \ell = a \delta \ell_c. \quad (2.22)$$

(2.21) e (2.22) em (2.20) levam à expressão

$$D_A = a \ell_c, \quad (2.23)$$

que, em termos de *redshift*, assume a forma

$$D_A = \frac{\ell_c}{(1+z)}. \quad (2.24)$$

As distâncias de luminosidade e de diâmetro angular se combinam em uma relação apropriada para a execução de testes cosmológicos, a Relação de Distância-Dualidade, derivada a partir da combinação de (2.19) e (2.24), dada por

$$\eta = \frac{D_L}{(1+z)^2 D_A} = 1. \quad (2.25)$$

Esta relação é válida para cosmologias baseadas em teorias métricas de gravitação nas quais o número de fótons seja conservado, desde que, também, a trajetória destes últimos se dê por geodésicas nulas. Caso alguma destas condições seja violada, a fração $\frac{D_L}{(1+z)^2 D_A}$ se desviará da unidade, favorecendo modelos alternativos. Cosmologias com criação de fótons, por exemplo, modificam (2.25) de modo a fazer com que η assumam algum tipo de evolução $\eta(z)$ que divirja do valor unitário.

2.1.3 Equações de Friedmann

As equações de movimento para o Universo em expansão são denotadas *equações de Friedmann*. Para deduzí-las, é necessária a aplicação das Equações de Campo de Einstein derivadas diretamente do Princípio da Ação Estacionária. Sua aplicação em Cosmologia exige enunciar a ação do Universo,

$$S = \int \left[\frac{c^4}{16\pi G} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_M \right] \sqrt{-|\mathbf{g}|} d^4x, \quad (2.26)$$

onde \mathcal{L}_M é a densidade lagrangeana associada aos campos de matéria, R é o escalar de Ricci e Λ é a Constante Cosmológica. R é dependente do tensor métrico e pode ser encontrado nos passos de cálculo

$$\begin{aligned} R_{ikn}^m &= \Gamma_{ik;n}^m - \Gamma_{in;k}^m + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{ln}^m - \Gamma_{in}^l \Gamma_{lk}^m, \\ R_{\mu\nu} &= g^{\delta\rho} R_{\delta\mu\nu\rho} \equiv R_{\mu\nu}^\rho, \\ R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \equiv R_\mu^\mu, \\ \Gamma_{kl}^i &= \frac{1}{2} g^{im} (g_{mk,l} + g_{lm,k} - g_{kl,m}) = \Gamma_{lk}^i. \end{aligned} \quad (2.27)$$

O Princípio de Hamilton estabelece que as equações de movimento do sistema são aquelas que extremizam a ação. É equivalente a afirmação de que a derivada funcional da ação em relação à inversa da métrica é nula,

$$\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = 0. \quad (2.28)$$

O detalhamento de cálculo dessa extremização pode ser encontrado em [16]. Porém, dois termos são notáveis quanto ao seu aparecimento nas equações que resultam desse princípio, o *tensor energia-momento* e o *tensor de Ricci*,

$$\mathcal{T} = [\mathcal{T}_{\mu\nu}] := \frac{-2}{\sqrt{-|\mathbf{g}|}} \frac{\delta(\sqrt{-|\mathbf{g}|} \mathcal{L}_M)}{\delta(\mathbf{g}^{-1})} = \left[\frac{-2}{\sqrt{-|\mathbf{g}|}} \frac{\delta(\sqrt{-|\mathbf{g}|} \mathcal{L}_M)}{\delta g^{\mu\nu}} \right], \quad (2.29)$$

$$\mathbf{R} = [R_{\mu\nu}] = \frac{\delta R}{\delta(\mathbf{g}^{-1})} = \left[\frac{\delta R}{\delta g^{\mu\nu}} \right]. \quad (2.30)$$

Como resultado, chega-se às *Equações de Campo de Einstein*, enunciadas sob a forma compacta na equação matricial

$$\mathcal{G} = \frac{8\pi G}{c^4} \mathcal{T}, \quad (2.31)$$

onde

$$\mathcal{G} = \mathbf{R} - \frac{1}{2} \mathbf{g} R - \Lambda \mathbf{g}. \quad (2.32)$$

As equações de campo mostram o cerne da Teoria da Relatividade Geral: o espaço-tempo governa o movimento do conteúdo material/energético e este conteúdo dita a deformação deste espaço. Aproximando o Universo por um fluido perfeito, as componentes do tensor energia-momento assumem a forma

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}, \quad (2.33)$$

onde p é a pressão exercida pelo fluido sobre as vizinhanças, ρc^2 é sua densidade de energia e \mathbf{u} sua quadrivelocidade. Esta última, para o observador comóvel, possui apenas sua componente temporal não-nula, uma vez que o movimento do fluido acompanha a expansão,

$$\mathbf{u} = (c, 0, 0, 0). \quad (2.34)$$

Combinando (2.5), (??), (2.27) e (2.31) a (2.34), chega-se às Equações de Friedmann,

$$\frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho + \Lambda c^2}{3}, \quad (2.35)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) + \frac{\Lambda c^2}{3}. \quad (2.36)$$

A junção das duas equações acima permite derivar o princípio de conservação de energia do Universo, expresso em termos da densidade de energia, ρ . Porém, um modo mais direto de encontrá-la se dá a partir do quadridivergente do tensor energia-momento,

$$\nabla \cdot \mathcal{T} = \nabla_\mu \mathcal{T}_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{T}_\nu^\mu}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\mu \mathcal{T}_\nu^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \mathcal{T}_\lambda^\mu = 0. \quad (2.37)$$

Para $\nu = 0$, vale a lei de conservação

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0. \quad (2.38)$$

onde ρ se desdobra em duas componentes, uma para a radiação, ρ_r , e outra para a matéria (envolvendo a mistura de matéria bariônica com matéria escura), ρ_m , ou seja,

$$\rho = \rho_r + \rho_m, \quad (2.39)$$

$$\rho_m = \rho_b + \rho_d. \quad (2.40)$$

onde ρ_b é a densidade de energia bariônica e ρ_d é o conteúdo associado à chamada matéria escura, uma espécie que interage gravitacionalmente com a matéria luminosa.

A Equação (2.38) pode ser utilizada para avaliar a evolução de cada componente do Universo. Por exemplo, ao aplicá-la ao fluido de fótons, determina-se a lei de evolução da densidade de energia radiativa, ρ_r ,

$$\dot{\rho}_r + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho_r + \frac{p_r}{c^2}\right) = 0. \quad (2.41)$$

Para integrar a Equação (2.41), é necessário encontrar uma dependência de p_r com ρ_r . E para isso, a radiação deve ser tratada como um gás de fótons isotrópico, o qual possui energia interna equivalente à soma das energias de todos os fótons, calculada por uma integração ao longo do espaço de momento:

$$\rho_r c^2 = \int_0^\infty E(P)n(P)dP \quad (2.42)$$

e

$$E(P) = P c, \quad (2.43)$$

onde $E(P)$ é a energia para um dado valor de módulo do momento (denotado por P) da radiação eletromagnética no vácuo e n é o número de fótons por volume. É suficiente integrar ao longo do módulo do momento, uma vez que não há direção preferencial para este tipo de radiação.

A pressão pode ser definida como o fluxo de momento que atravessa uma dada área unitária, somado ao longo de todos os valores de P correspondentes aos fótons do fluido, em uma dada direção,

$$p_r = \int_0^\infty \langle v_X P_X \rangle n(P)dP, \quad (2.44)$$

onde $\langle v_X P_X \rangle$ é o valor médio do fluxo em uma direção X . A isotropia garante que se possa usar quaisquer componentes para avaliar o valor de P , uma vez que a média do produto escalar entre o momento e a velocidade coincide com a soma das médias de fluxo

em cada dimensão espacial (X , Y e Z), sem que haja um eixo privilegiado,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{P} = \langle v_X P_X \rangle + \langle v_Y P_Y \rangle + \langle v_Z P_Z \rangle = P v, \quad (2.45)$$

$$\langle v_X P_X \rangle = \langle v_Y P_Y \rangle = \langle v_Z P_Z \rangle \quad (2.46)$$

$$v = c; \quad (2.47)$$

onde \mathbf{v} e \mathbf{P} são os vetores velocidade e momento, respectivamente.

Considerando as Equações (2.45) a (2.46) junto à Equação (2.43), as integrais das Equações (2.42) e (2.44) se conectam, fazendo emergir a equação de estado

$$p_r = \frac{1}{3} \rho_r c^2. \quad (2.48)$$

Um tratamento matemático equivalente para encontrar a equação de estado da radiação pode ser encontrado em [17], porém, através da avaliação de um ângulo de espalhamento de fótons estacionários no interior de uma caixa refletora, recurso de cálculo que pôde ser evitado há pouco graças ao uso de valores médios na integração do fluxo na Equação (2.44).

Utilizando a Equação (2.48), integra-se (2.41) para a obtenção da lei de evolução de ρ_r ,

$$\rho_r(a) = \rho_r(a_o) a^{-4}. \quad (2.49)$$

Para determinar a densidade de energia da matéria não-relativística, ρ_m , recorre-se, mais uma vez, à lei de conservação da Equação (2.38) que, para este fluido assume a forma

$$\dot{\rho}_m + 3 \frac{\dot{a}}{a} \left(\rho_m + \frac{p_m}{c^2} \right) = 0. \quad (2.50)$$

Para integrar a Equação 2.50, é necessário estabelecer uma relação funcional entre p_m e ρ_m . Para isto, convém assumir a hipótese de um gás ideal para descrever tal fluido,

$$p_m V_m = N_m k_B T_m. \quad (2.51)$$

onde V_m é o volume, N_m o número de partículas, T_m a temperatura e k_B a constante de Boltzmann. E para encontrar a conexão entre a pressão e a densidade, é pertinente induzir o aparecimento de um termo de massa (denotado por m) do lado direito da Equação (2.51). Para isso, basta conectar a energia térmica do sistema à energia cinética média das partículas por meio do Teorema da Equipartição de Energia (Referência [18]), sintetizado da seguinte forma:

Um sistema termodinâmico em equilíbrio apresenta uma parcela de valor $\frac{1}{2}k_B T$ para cada grau de liberdade quadrático, em energia, presente em seus constituintes.

Para cada partícula, a energia cinética média (\bar{K}) possui três graus de liberdade em energia, associados às translações em cada direção, implicando, assim, em três parcelas de $\frac{1}{2}k_B T_m$,

$$\bar{K} = \frac{m \langle v_X^2 \rangle}{2} + \frac{m \langle v_Y^2 \rangle}{2} + \frac{m \langle v_Z^2 \rangle}{2} = 3 \times \frac{1}{2} k_B T_m \quad (2.52)$$

$\langle v_X^2 \rangle$, $\langle v_Y^2 \rangle$ e $\langle v_Z^2 \rangle$ são os valores médios do quadrado das componentes da velocidade de uma partícula do gás. Assumindo que eles coincidem em um valor denotado por $\langle v^2 \rangle$, chega-se à expressão (Referência [19])

$$\langle v_X^2 \rangle = \langle v_Y^2 \rangle = \langle v_Z^2 \rangle = \langle v^2 \rangle \quad \Rightarrow \quad m \langle v^2 \rangle = 3k_B T_m. \quad (2.53)$$

Considerando, ainda, que a densidade de bárions representa a energia interna deste gás, calculada segundo

$$\rho_m = \frac{N_m m}{V_m}, \quad (2.54)$$

e multiplicando o lado direito da Equação (2.51) por $\frac{c^2}{c^2}$, encontra-se uma expressão do tipo $p_m = p_m(\rho_m)$,

$$p_m = \left(\frac{\langle v^2 \rangle}{3c^2} \right) \rho_m c^2 \quad (2.55)$$

Como o fluido é do tipo não-relativístico, seu campo de velocidades apresenta valores muito pequenos, em módulo, quando comparados à velocidade da luz, fazendo com que a

pressão se aproxime de zero,

$$\langle v^2 \rangle \ll c^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\langle v^2 \rangle}{3c^2} \approx 0 \quad \Rightarrow \quad p_m \approx 0 \quad (2.56)$$

Ao combinar as Equações (2.50) e (2.56) e efetuar a integração, encontra-se a lei de evolução

$$\rho_m(a) = \rho_m(a_o) a^{-3}. \quad (2.57)$$

A síntese do que foi apresentado sobre a radiação e matéria não-coerente, com os resultados associados ao comportamento dessas componentes, é explorada com maiores detalhes em [20].

Além da radiação, dos bárions e da matéria escura, a constante cosmológica, Λ , também altera a dinâmica de expansão, conforme mostram as Equações (2.35) e (2.36). Nestas últimas, é possível observar que ρ e Λ são termos fontes para a geração de \dot{a} e \ddot{a} , o que possibilita interpretar a constante cosmológica também como uma componente do fluido cósmico e associá-la uma densidade de energia. E para isto, basta retomar as Equações de Campo de Einstein, (2.31) e (2.32), e construir um tensor energia-momento generalizado que absorva o termo $\Lambda \mathbf{g}$ como uma componente adicional ao tensor energia-momento original,

$$\mathcal{G}' = \frac{8\pi G}{c^4} \mathcal{T}', \quad (2.58)$$

onde

$$\mathcal{G}' = \mathbf{R} - \frac{1}{2} \mathbf{g} R, \quad (2.59)$$

$$\mathcal{T}' = \mathcal{T} + \mathcal{T}_\Lambda \quad (2.60)$$

e

$$\mathcal{T}_\Lambda = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \mathbf{g}. \quad (2.61)$$

Sob a hipótese de fluido perfeito também para a constante cosmológica, seu tensor energia-momento assume a forma

$$\mathcal{T}_\Lambda = \left(\rho_\Lambda + \frac{p_\Lambda}{c^2} \right) \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - p_\Lambda \mathbf{g}, \quad (2.62)$$

onde p_Λ e ρ_Λ são, respectivamente, a pressão e a densidade de energia associados à constante cosmológica.

Igualando as Equações (2.61) e (2.62), chega-se a uma descrição efetiva da constante cosmológica como um fluido em um estado $(\rho_\Lambda; p_\Lambda)$, cujas coordenadas são dadas por

$$\rho_\Lambda = \rho_\Lambda(t_o) = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} = \text{constante} \quad (2.63)$$

e

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda. \quad (2.64)$$

Um ponto que vale ressaltar é o fato de que cada componente do fluido cósmico é um fluido barotrópico, ou seja, um fluido que possui uma equação de estado do tipo $p = p(\rho)$ (Referência [21]). E inspecionando as Equações (2.48), (2.56) e (2.64), comprova-se que as relações de barotropia se dão por uma equação de reta do tipo

$$p = w \rho c^2, \quad (2.65)$$

uma vez que

$$p_\alpha = w_\alpha \rho_\alpha c^2, \quad (2.66)$$

onde

$$w_\alpha = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \alpha = r \\ 0, & \alpha = m. \\ -1, & \alpha = \Lambda \end{cases} \quad (2.67)$$

Caracterizar o fluido pela sua equação de estado e, conseqüentemente, determinar a pressão à qual ele se encontra é fundamental para entender o efeito de cada componente sobre a aceleração de expansão do Universo. Esta análise, entretanto, se dará ao final deste capítulo, logo após a integração da equação de movimento que descreve tal processo.

De posse destes resultados, a primeira das Equações de Friedmann assume a forma

$$H^2 + \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho_{\text{total}}}{3}, \quad (2.68)$$

onde

$$\rho_{\text{total}} = \rho_r + \rho_m + \rho_\Lambda, \quad (2.69)$$

$$\rho_{\text{total}}(a) = \rho_r(t_o) a^{-4} + \rho_m(t_o) a^{-3} + \rho_\Lambda(t_o), \quad (2.70)$$

e

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.71)$$

Portanto, o conteúdo em matéria-energia do Universo, ρ_{total} , governa a evolução do fator de escala, a . Todavia, essa dinâmica, descrita pelas Equações (2.68) e (2.70), pode ser expressa através das densidades de energia de cada componente do Universo em termos de valores percentuais, estes últimos calculados segundo a normalização definida pela Equação (2.72).

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad (2.72)$$

onde

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (2.73)$$

O fator de normalização, ρ_c , é denominado densidade crítica e representa a energia total contida em um Universo de curvatura desprezível ($k \approx 0$). Essa definição torna nítida a dependência da curvatura com o próprio conteúdo em matéria-energia do Universo. E para vizualizá-la, basta normalizar (2.68) com base nas relações (2.73) em (2.68),

$$\kappa = 1 - \Omega_{\text{total}}, \quad (2.74)$$

onde

$$\kappa = k \left(\frac{c}{Ha} \right)^2, \quad (2.75)$$

$$\Omega_{\text{total}} = \frac{\rho_{\text{total}}}{\rho_c}, \quad (2.76)$$

$$\Omega_{\text{total}} = \Omega_r + \Omega_m + \Omega_\Lambda = \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha}, \quad (2.77)$$

$$\Omega_{\alpha} = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_{\alpha}, \quad (2.78)$$

e

$$(\Omega_{\alpha})_o = \frac{8\pi G}{3H_o^2} \rho_{\alpha}(t_o), \quad (2.79)$$

para $\alpha = r, m$ e Λ , sendo κ o termo de curvatura normalizado, ou seja, o efeito dela em valor porcentual.

A densidade (normalizada) de cada componente do fluido cósmico pode ser expressa em função dos percentuais de cada tipo medidos atualmente,

$$\Omega_r = \frac{(\Omega_r)_o a^{-4}}{(\Omega_r)_o a^{-4} + (\Omega_m)_o a^{-3} + (\Omega_\Lambda)_o + \kappa_o a^{-2}}, \quad (2.80)$$

$$\Omega_m = \frac{(\Omega_m)_o a^{-3}}{(\Omega_r)_o a^{-4} + (\Omega_m)_o a^{-3} + (\Omega_\Lambda)_o + \kappa_o a^{-2}}, \quad (2.81)$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{(\Omega_\Lambda)_o}{(\Omega_r)_o a^{-4} + (\Omega_m)_o a^{-3} + (\Omega_\Lambda)_o + \kappa_o a^{-2}}, \quad (2.82)$$

As Equações (2.73) a (2.82), que lidam com a densidade do fluido cósmico normalizada, permitem a redefinição da Equação (2.68), que é uma das equações de Friedmann, especificamente a que descreve evolução da velocidade de expansão do Universo [22],

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_o^2 \left[(\Omega_r)_o a^{-4} + (\Omega_m)_o a^{-3} + (\Omega_\Lambda)_o + \kappa_o a^{-2} \right], \quad (2.83)$$

onde

$$\kappa_o = k \left(\frac{c}{H_o}\right)^2 = 1 - \sum_{\alpha} (\Omega_{\alpha})_o \quad (2.84)$$

Apesar da Equação (2.84) mostrar que o Universo em expansão é um sistema dinâmico autônomo e, conseqüentemente, de variáveis separáveis, ela não possui solução analítica. É necessário discretizar o sistema para resolvê-lo numericamente. No entanto, é possível encontrar uma solução aproximada para $a(t)$ sem recorrer a métodos numéricos para o caso de um Universo com curvatura desprezível ($\kappa_o \approx 0$). Essa última hipótese é plausível, já que as evidências favorecem um Universo Plano ($|\kappa_o| < 0,005$, segundo a Referência [23]). E ela permite que o radical do integrando advindo da separação das variáveis t e a , na Equação (2.83), se reduza a três termos,

$$H_o t = \int_0^a da \left[(\Omega_r)_o a^{-2} + (\Omega_m)_o a^{-1} + (\Omega_\Lambda)_o a^2 \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.85)$$

A integral da Equação (2.85) pode ser resolvida avaliando o comportamento de cada componente do fluido cósmico, ao analisar em quais intervalos de tempo uma componente domina em relação às outras. Essa análise, por sua vez, começa com a observação de que a densidade total normalizada assume valor unitário em um Universo Plano, fato verificado pela combinação das Equações (2.75) e (2.77) para $\kappa = 0$:

$$\Omega_{\text{total}} = \Omega_r + \Omega_m + \Omega_\Lambda = \sum_\alpha \Omega_\alpha = 1 \quad (2.86)$$

Tendo em vista que a soma dos percentuais de densidade atingem sempre valor unitário no processo de expansão de um Universo Plano (Equação (2.86)), o esboço do gráfico das densidades descritas pelas Equações (2.80) a (2.82) pode mostrar quando duas componentes possuem valor desprezível em relação à componente dominante. Graficando estas funções, de densidades no instante cósmico atual prescritas na Referência [24], $(\Omega_\Lambda)_o \approx 5 \times 10^{-5}$, $(\Omega_m)_o \approx 0,26$ e $(\Omega_r)_o \approx 0,73$, chega-se às evoluções temporais retratadas nas Figuras 2.5 e 2.6:

Nestas evoluções, o eixo das abcissas foi construído a partir da normalização do tempo cósmico com o inverso da constante de Hubble, este último no valor de $\frac{1}{H_0} = \frac{1}{70.4(\text{km/s})/\text{Mpc}} \approx 13.90$ bilhões de anos. Nota-se que cada densidade de energia é dominante em um período específico da História do Universo. O período onde a densidade de radiação sobrepassa os valores das demais é chamado de Era da Radiação. Analogamente, períodos de dominação da matéria e da constante cosmológica são chamados, respectivamente, de Era da Matéria e Era da Constante Cosmológica.

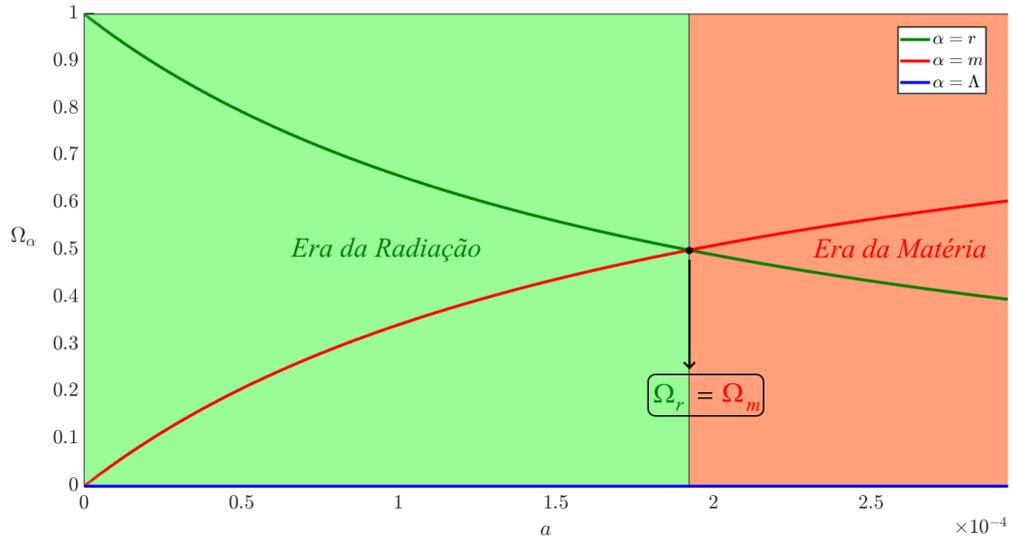


Figura 2.5: Densidades de energia na Era da Radiação.

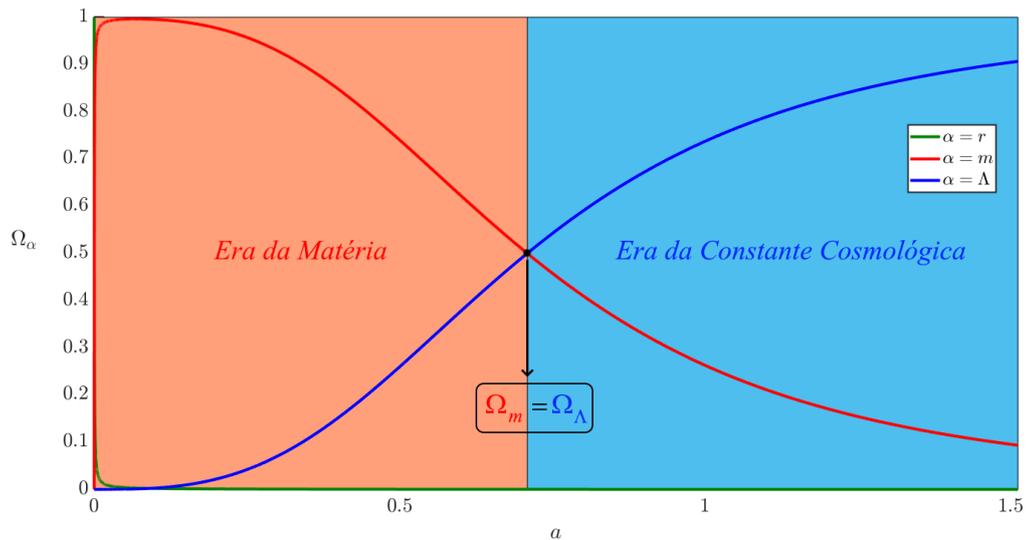


Figura 2.6: Densidades de energia nas Eras da Matéria e da Constante Cosmológica.

No começo da Era da Radiação, Ω_r possui valor unitário (Figura 2.5) e, apesar de manter sua dominância até o fim desse período, Ω_m atinge níveis já não negligenciáveis no balanço de energia ainda nessa época, fazendo com que Ω_r perca a importância que possuía no início. Porém, com o intuito de simplificar a integração da Equação (2.85), assume-se, sob aproximação grosseira, que a matéria e a constante cosmológica não farão efeito apreciável no total de energia nessa era. E por mais que os erros oriundos dessa abordagem sejam relevantes, é possível obter uma estimativa de $a(t)$ nesta época passível de ser calculada analiticamente e, ao menos qualitativamente, obter uma boa ideia do

comportamento dessa função. Da mesma forma, para a Era da Matéria, considera-se apenas Ω_m como a energia total e na Era da Constante Cosmológica Ω_Λ como o termo vigente, ambas as dominâncias expostas na Figura 2.6. Isso se traduz na seguinte aproximação para a Equação (2.85) :

$$H_o t = \begin{cases} \int_0^a da [(\Omega_r)_o a^{-2}]^{-\frac{1}{2}}, & 0 \leq a < \frac{(\Omega_r)_o}{(\Omega_m)_o} \\ H_o t_{\Omega_r=\Omega_m} + \int_{\frac{(\Omega_r)_o}{(\Omega_m)_o}}^a da [(\Omega_m)_o a^{-1}]^{-\frac{1}{2}}, & \frac{(\Omega_r)_o}{(\Omega_m)_o} \leq a < \left[\frac{(\Omega_m)_o}{(\Omega_\Lambda)_o} \right]^{\frac{1}{3}} \\ H_o t_{\Omega_m=\Omega_\Lambda} + \int_{\left[\frac{(\Omega_m)_o}{(\Omega_\Lambda)_o} \right]^{\frac{1}{3}}}^a da [(\Omega_\Lambda)_o a^2]^{-\frac{1}{2}}, & a \geq \left[\frac{(\Omega_m)_o}{(\Omega_\Lambda)_o} \right]^{\frac{1}{3}} \end{cases} \quad (2.87)$$

Ao resolver as integrais da Equação (2.87), trecho a trecho, tem-se que

$$a = \begin{cases} \left[2tH_o\sqrt{(\Omega_r)_o} \right]^{\frac{1}{2}}, & 0 \leq t < t_{\Omega_r=\Omega_m} \\ \left\{ \frac{3}{2} (t - t_{\Omega_r=\Omega_m}) H_o\sqrt{(\Omega_m)_o} + \left[\frac{(\Omega_r)_o}{(\Omega_m)_o} \right]^{\frac{3}{2}} \right\}^{\frac{2}{3}}, & t_{\Omega_r=\Omega_m} \leq t < t_{\Omega_m=\Omega_\Lambda} \\ H_o t_{\Omega_m=\Omega_\Lambda} + \left[\frac{(\Omega_m)_o}{(\Omega_\Lambda)_o} \right]^{\frac{1}{3}} e^{(t-t_{\Omega_m=\Omega_\Lambda})H_o\sqrt{(\Omega_\Lambda)_o}}, & t \geq t_{\Omega_m=\Omega_\Lambda} \end{cases} \quad (2.88)$$

onde $0 \leq t < t_{\Omega_r=\Omega_m}$ é a Era da Radiação¹, $t_{\Omega_r=\Omega_m} \leq t < t_{\Omega_m=\Omega_\Lambda}$ a Era da Matéria e $t \geq t_{\Omega_m=\Omega_\Lambda}$ a Era da Constante Cosmológica. A solução para o fator de escala, presente em (2.88), e o cálculo dos pontos (t, a) que marcam o fim de uma era e início de outra (que implicam nos limites de integração mostrados em (2.87)) são detalhados em [25].

A função $a(t)$ descrita pela Equação (2.88) pode ser chamada de solução barotrópica, uma vez que ela assume um tipo de fluido barotrópico em cada era da História do Universo. Porém, a solução que envolve o efeito de todas as componentes ao longo de todo o domínio do processo é $a(t)$ advinda da integração da Equação (2.85). E com o intuito de comparar ambas as funções, efetuou-se a quadratura, de forma numérica, da última equação mencionada através do Método Runge-Kutta (Referência [26]), confrontando a solução obtida com a solução barotrópica, conforme mostra a Figura 2.7.

¹A rigor, a Era da Radiação se inicia imediatamente após um período conhecido como Inflação Cósica, em um instante cósmico $t \approx 10^{-32}s$. Porém, os baixos valores deste instante e do fator de escala a ele associado justificam sua negligência na integração da dinâmica de expansão.

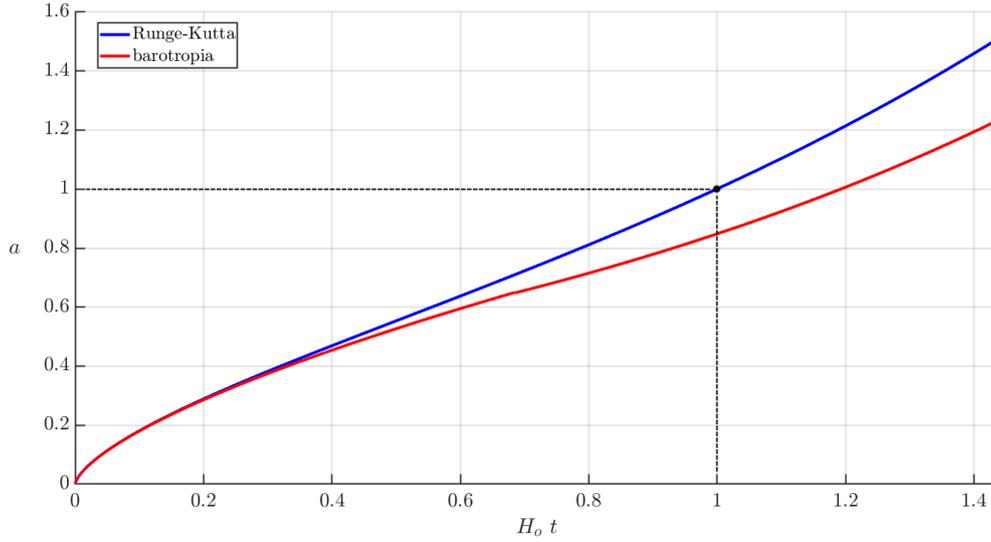


Figura 2.7: Solução barotrópica confrontada com a solução numérica, esta última dotada de todas as componentes do fluido cósmico, atuantes em todo o período de integração: destaque para o ponto que representa o estado atual do Universo.

Apesar da solução barotrópica distoar da solução numérica, ela possui um valor qualitativo notável, já que é possível, através da própria função $a(t)$ da Equação (2.88), avaliar os efeitos de cada fluido de forma direta na dinâmica, se contribuem para acelerar e/ou frenar a expansão do Universo. Este efeito é facilmente verificável na execução da derivada de segunda ordem sobre cada função constituinte da solução barotrópica, $\ddot{a} < 0$ na Era da Radiação e na Era da Matéria, enquanto $\ddot{a} > 0$ na Era da Constante Cosmológica, indicando que a Constante Cosmológica é a componente responsável por acelerar a expansão do Universo². Esta análise permite a seguinte interpretação sobre os valores de pressão associados a cada componente do fluido cósmico, descritos pelas Equações (2.66) e (2.67): valores positivos de pressão, apresentados pela radiação e pela matéria, indicam o efeito atrativo que estas constituintes apresentam, enquanto o valor negativo da pressão da constante cosmológica revela o efeito repulsivo que ela possui, fazendo desta última o candidato à energia escura do modelo Λ CDM Plano.

Vale destacar que, normalmente, a aceleração cósmica não é analisada em termos de \ddot{a} , mas sim por meio de outra função denotada parâmetro de desaceleração, q , definido a partir da aceleração pela expressão

²Em geral, o tempo de Hubble não coincide com a idade do Universo, mas, para esta simulação, o valor utilizado para a constante de Hubble fez com que estes valores fossem quase coincidentes (13,88 bilhões de anos = $t_o \approx H_o^{-1} = 13,90$ bilhões de anos). Isso fez com que o gráfico da Figura 2.7 mostrasse $H_o t = H_o t_o \approx 1$ (associado ao valor $a = a_o = 1$).

$$q = -\frac{1}{H} \frac{\ddot{a}}{\dot{a}}, \quad (2.89)$$

onde

$$\text{sgn}(q) = -\text{sgn}(\ddot{a}). \quad (2.90)$$

Ou seja, q mede a perda de velocidade de expansão do Universo, se a velocidade de expansão diminui no tempo, q apresenta valor positivo, mas quando a expansão é acelerada, q fica negativo. E medidas astrofísicas sugerem um valor negativo para o parâmetro de desaceleração no instante cósmico atual, $q_o = -0,6 \pm 0,06$ (Referência [27]). Mas a grande vantagem de expressar a aceleração de forma indireta, através deste parâmetro, reside no fato de ser possível deixar explícitos os percentuais em energia de cada componente do fluido cósmico na função q . Para isso, basta reescrever a Equação de Friedmann da aceleração, Equação (2.36), colocando ρ e o termo com Λ em função das frações Ω_α (para $\alpha = r, m$ e Λ) e utilizando o fator de barotropia, w_α , presente na Equação (2.66), tem-se que

$$q = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha} (1 + 3w_{\alpha}) \quad (2.91)$$

q é combinação linear dos percentuais em densidade de cada componente do fluido cósmico. E substituindo os valores de w_α presentes na Equação (2.67) à Equação (2.91), chega-se a

$$q = \frac{1}{2} [\Omega_m + 2(\Omega_r - \Omega_\Lambda)] \quad (2.92)$$

Com base nos valores de densidade utilizados na geração dos esboços gráficos anteriores (Figuras 2.5 a 2.7), $(\Omega_\Lambda)_o \approx 5 \times 10^{-5}$, $(\Omega_m)_o \approx 0,26$ e $(\Omega_r)_o \approx 0,73$, calcula-se o valor do parâmetro de desaceleração para o instante cósmico atual,

$$q_o = \frac{1}{2} \{(\Omega_m)_o + 2[(\Omega_r)_o - (\Omega_\Lambda)_o]\}, \quad (2.93)$$

$$q_o \approx \frac{(\Omega_m)_o}{2} - (\Omega_\Lambda)_o \approx -0,6. \quad (2.94)$$

Além do valor de q_o , outra informação importante para entender a evolução de q é o

instante cósmico no qual ele sofreu a transição de um Universo em processo de desaceleração para um Universo de regime acelerado, ou seja, o instante de passagem de $q > 0$ para $q < 0$. No período em que a radiação e matéria eram dominantes sobre a constante cosmológica, q atinge valores negativos, porém, a partir do momento em que a radiação decai ($\Omega_r \rightarrow 0$), a constante cosmológica começa a ganhar importância. E como esta última componente é a responsável por acelerar o Universo, é neste período de balanço entre matéria e constante cosmológica o intervalo no qual deverá ocorrer tal transição. Com a supressão da radiação, na faixa de tempo da Era da Matéria mostrada na Figura 2.6 em diante, o parâmetro de desaceleração assume a forma

$$q_{\Omega_r \rightarrow 0} = \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda, \quad (2.95)$$

onde $q_{\Omega_r \rightarrow 0}$ é a função q válida no período em que somente a matéria e a constante cosmológica importam para o balanço de energia do Universo. O ponto de transição tem ordenada nula, $q_{\Omega_r \rightarrow 0} = 0$, e esta condição associada às Equações (2.81) e (2.82) revela a relação entre as densidades que causa este equilíbrio

$$\Omega_m = 2\Omega_\Lambda \Rightarrow a_{\text{equilíbrio}} = \left[\frac{1 (\Omega_m)_o}{2 (\Omega_\Lambda)_o} \right]^{\frac{1}{3}}, \quad (2.96)$$

$$a_{\text{equilíbrio}} \approx 0,5984; \quad (2.97)$$

onde $a_{\text{equilíbrio}}$ é o valor do fator de escala que marca o ponto onde o efeito atrativo promovido pela matéria se equilibrou com o efeito repulsivo oriundo da constante cosmológica.

Com o valor do fator de escala que marca a transição, é possível calcular o instante cósmico correspondente através da solução barotrópica descrita pela Equação (2.88). Apesar desta função diferir do fator de escala calculado com todas as componentes do fluido cósmico, as duas curvas são bastante próximas até por volta de 60% da idade do Universo (Figura 2.7). E, considerando que o valor de $a_{\text{equilíbrio}}$ se encontra no intervalo associado à Era da Matéria, conforme mostra o segundo trecho de integração na Equação (2.87), o instante que marca o equilíbrio advém do uso da Equação (2.88) avaliada no fator de escala correspondente, $a_{\text{equilíbrio}}$, calculado na Equação (2.96), resultando, assim, no valor de tempo normalizado

$$H_o t_{\text{equilíbrio}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{(\Omega_\Lambda)_o}} + \frac{1}{6\sqrt{(\Omega_m)_o}} \left[\frac{(\Omega_r)_o}{(\Omega_m)_o} \right]^{\frac{3}{2}}. \quad (2.98)$$

Contudo, a densidade de radiação atual, comparada à densidade de matéria, possui um valor desprezível, $\frac{(\Omega_r)_o}{(\Omega_m)_o} \approx 0$. Portanto, eliminando os termos com essa densidade da Equação (2.98), chega-se à seguinte estimativa para o referido instante,

$$H_o t_{\text{equilíbrio}} \approx \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{(\Omega_\Lambda)_o}}. \quad (2.99)$$

Note que o valor do instante de transição entre um Universo em desaceleração para um Universo acelerado é inversamente proporcional à constante cosmológica. E, conforme mostra a Equação (2.99), quanto maior o valor da densidade Ω_Λ , menor será o tempo que levará para o Universo atingir o estado acelerado. Tomando esta equação com o valor $\Omega_\Lambda = 0,73$, chega-se ao valor numérico

$$H_o t_{\text{equilíbrio}} \approx 0,5517; \quad (2.100)$$

ou seja, por volta da metade da História do Universo ocorre a transição.

A síntese de toda a discussão realizada até aqui acerca da aceleração do Universo se encontra no gráfico do parâmetro de desaceleração presente na Figura 2.8.

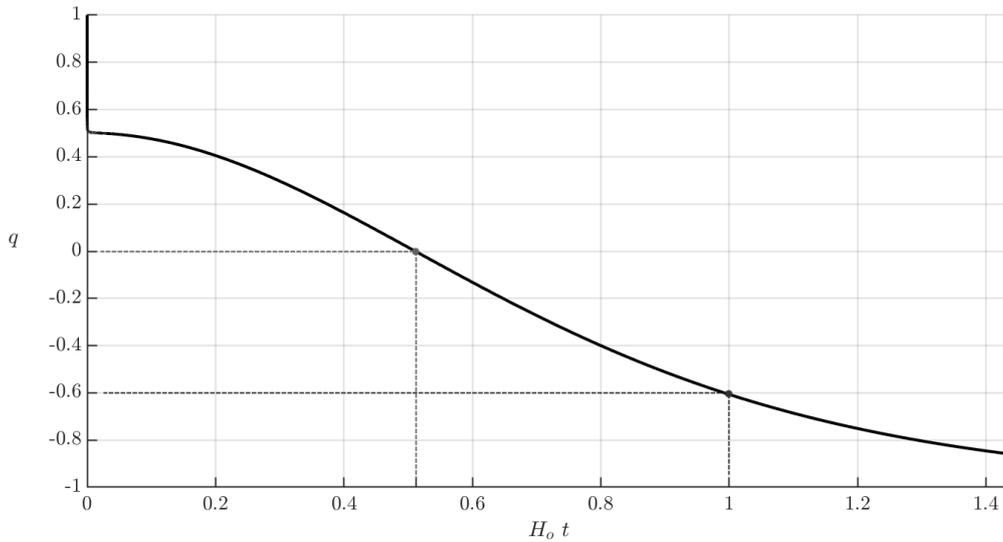


Figura 2.8: Evolução do parâmetro de desaceleração: destaque para os pontos de transição e o ponto que indica o estado atual do Universo.

2.2 Pilares Observacionais da Cosmologia

A Cosmologia Padrão, construída a partir da Teoria da Relatividade Geral combinada às hipóteses presentes no Princípio Cosmológico, é a Cosmologia mais robusta aos testes astrofísicos. E os dados observacionais que corroboram com elevada precisão suas previsões são oriundos de três fontes:

- Expansão do Universo
- Radiação Cósmica de Fundo de Microondas
- Nucleossíntese Primordial

Juntas, elas são conhecidas por *Pilares Observacionais do Modelo Padrão* e serão brevemente descritas nas subseções que seguem.

2.2.1 Expansão do Universo

Concebida empiricamente, a *lei de Hubble-Lemaître* prevê a proporcionalidade entre a velocidade de afastamento dos objetos em relação a quem faz a observação e a distância entre eles:

$$v \propto d, \tag{2.101}$$

onde v e d são, respectivamente, a velocidade e a distância radiais do objeto medida na galáxia de onde é feita a observação, ilustradas na Figura 2.9:

Inicialmente, essa lei foi derivada para pequenas distâncias ($d < 2$ Mpc). Para esferas celestes além do Universo local, o modelo descrito por (2.105) deve ser refinado para contabilizar a dinâmica de expansão segundo a Cosmologia de Friedmann. O refinamento passa por atribuir à distância a coordenada comóvel $r_{\text{comóvel}}$, cujo escalonamento pode ser medido por um observador fora do *Hubble flow* através da coordenada $r_{\text{expansão}}$ na expressão

$$r_{\text{expansão}} = a \times r_{\text{comóvel}}. \tag{2.102}$$

A velocidade, calculada pela derivada temporal, assume a forma

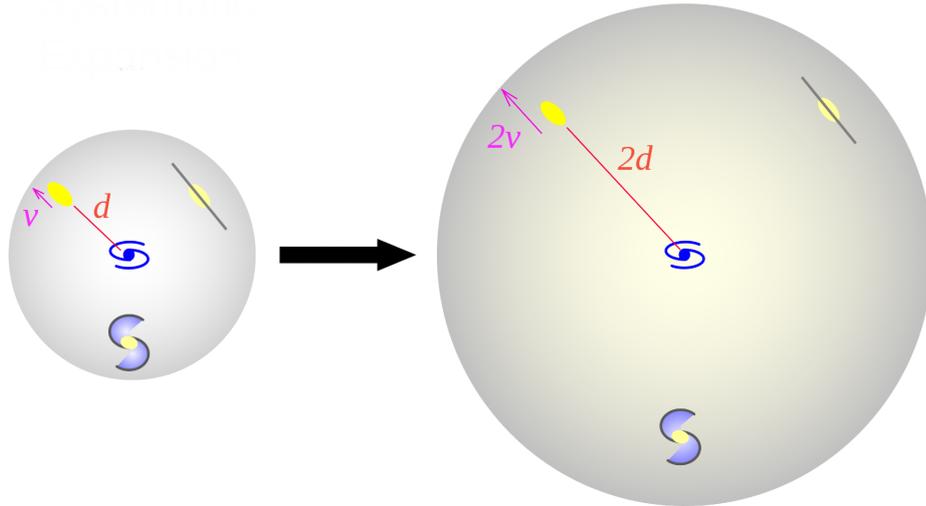


Figura 2.9: Lei de Hubble ilustrada em um exemplo de duplicação da distância. Fonte: <http://www.astronomy.ohio-state.edu/~pogge/Ast162/Unit5/Images/SystematicExpansion.png>

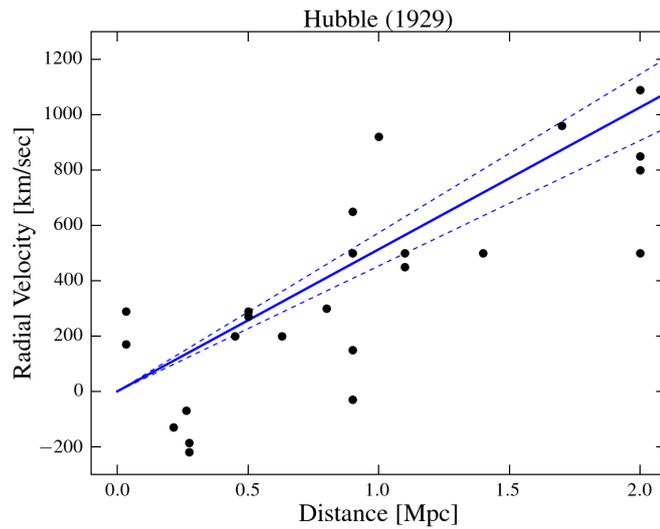


Figura 2.10: Lei de Hubble. Fonte: <http://www.astronomy.ohio-state.edu/~pogge/Ast162/Unit5/Images/Hubble1929.png>.

$$\dot{r}_{expans\tilde{a}o} = \dot{a} \times r_{com\acute{o}vel}. \quad (2.103)$$

Dividindo a (2.103) por (2.102), chega-se à verdadeira razão entre a velocidade e a distância

$$\frac{\dot{r}_{expans\tilde{a}o}}{r_{expans\tilde{a}o}} = \frac{\dot{a}}{a} = H. \quad (2.104)$$

Como mostrado na equação acima, a conexão entre distância e velocidade não é mais uma relação linear, já que $H = H(t)$ varia com o tempo cósmico. Porém, no Universo

local, seu valor não distoa muito da função calculada no nosso instante, $H_o = H(t_o)$, fato que permite recuperar a proporcionalidade de (2.105), expressa agora em termos do coeficiente angular da reta da Figura 2.10, também conhecido como constante de Hubble,

$$v = H_o d. \quad (2.105)$$

2.2.2 Radiação Cósmica de Fundo de Microondas

A Radiação Cósmica de Fundo de Microondas ou simplesmente Radiação Cósmica de Fundo (RCF) é o sinal remanescente, em radiação eletromagnética, do Universo primordial, da época em que os fótons se desacoplaram da matéria no que foi chamado de última superfície de espalhamento. Antes do desacoplamento, em condições de altíssima densidade e temperatura, a matéria incoerente estava ionizada. Seus elétrons livres trocavam momento com os fótons em elevadas taxas de colisão. Esse cenário, entretanto, se modificou com a expansão do Universo, uma vez que tal processo implicou na queda de temperatura da radiação, diminuindo a ocorrência de fotodissociação dos sistemas formados pelos átomos em interação com os elétrons (Figura 2.11). Estes sistemas ligados, por sua vez, se tornaram cada vez mais abundantes, já que os fótons não possuíam mais energia o bastante para desestabilizá-los. Nesta época, a RCF foi liberada à temperatura de $3000K \approx 0,26 \frac{eV}{k_B}$.

Mapeada pelo satélite COBE e, posteriormente, pelo WMAP, o espectro observado dos seus fótons é um espectro de corpo negro, retratado na Figura 2.12

A temperatura dos fótons da RCF, como dito anteriormente, diminui à medida que a expansão do Universo procede. E sua queda se dá com o inverso do fator de escala, $T \propto a^{-1}$. Atualmente, a sua temperatura possui um valor médio $T = T_o \approx 2,73K$ (pico perto de $2mm$). E, apesar de irradiar de forma isotrópica, algumas pequenas anisotropias no perfil espacial de temperatura da RCF se verificam e possuem um valor eficaz de $(\Delta T)_{eficaz} \approx 18\mu K$ [30]. Essas flutuações de temperatura variam na esfera celeste com a latitude e longitude, denotadas, respectivamente, por θ e ϕ . E importantes efeitos físicos, relacionados à formação de estruturas em larga escala, por exemplo, podem ser investigados a partir do seu mapeamento.

Como $\Delta T = \Delta T(\theta, \phi)$, seu valor eficaz pode ser calculado facilmente através de uma média quadrática simples ao longo de ciclos que ocorrem nos intervalos $\Delta\theta$ e $\Delta\phi$:

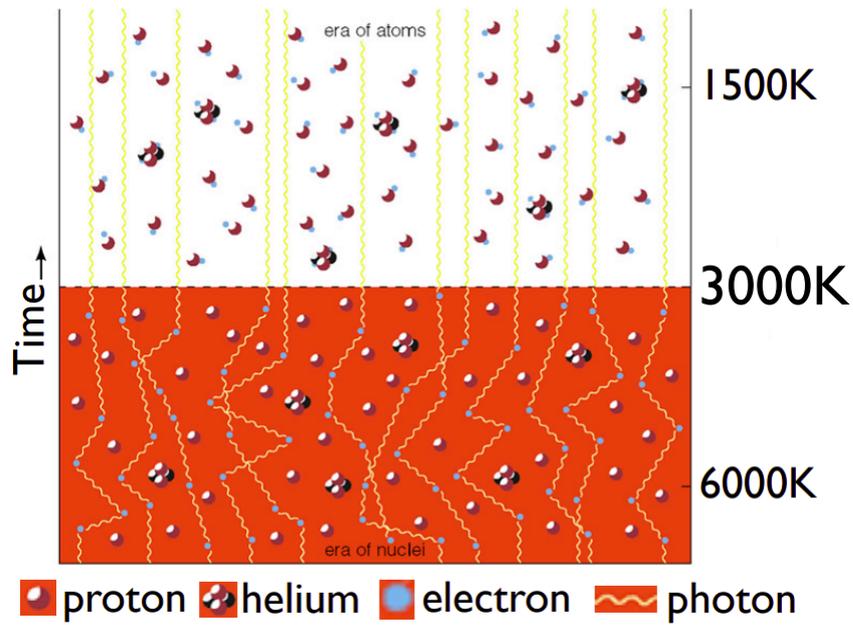


Figura 2.11: Desacoplamento da radiação com a matéria. Figura extraída de [28]

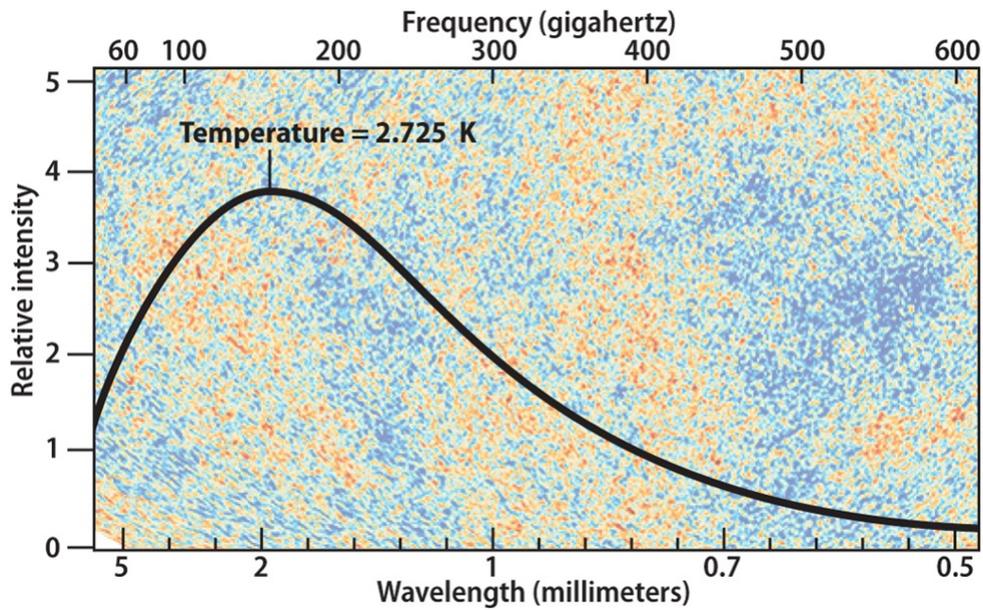


Figura 2.12: Potência radiativa da RCF: perfil de corpo negro. Figura extraída de [29]

$$(\Delta T)_{eficaz} = \left\{ \frac{1}{\Delta\phi} \frac{1}{\Delta\theta} \left[\iint_{\Delta\theta\Delta\phi} (\Delta T)^2 d\theta d\phi \right] \right\}^{-2}. \quad (2.106)$$

Campos cíclicos possuem propriedades não estimáveis por médias simples ou momentos estatísticos em primeira ordem (que comumente são nulos nestes casos). Essas características são rastreáveis somente por outras medidas, entre elas, o valor eficaz, também

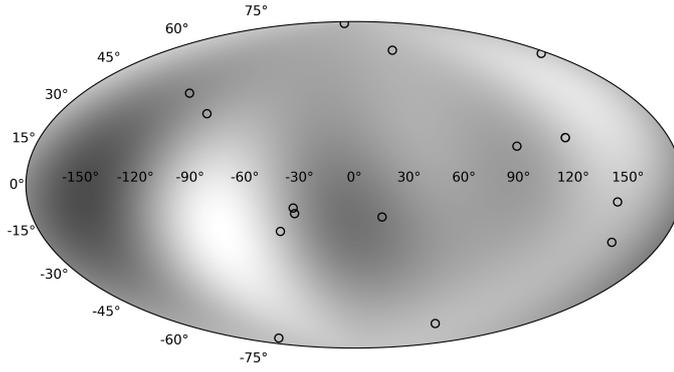


Figura 2.13: Coordenadas para o campo de anisotropias da RCF. Figura extraída de [31]

conhecido por *valor RMS* (do inglês "*Root Mean Square*"). O cálculo e aplicação dessa medida podem ser encontrados em [32].

Fenômenos físicos importantes são capazes de produzir anisotropias consideráveis na RCF. Entre eles está o redshift gravitacional, que ocorre devido a um poço da assimetria na distribuição de matéria. Outro causador de anisotropias são as flutuações quânticas do plasma existente no universo atuantes até o instante da recombinação de elétrons com prótons.

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{rg} = \frac{1}{3}\Psi, \quad (2.107)$$

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{rec} \propto \frac{\delta\rho_{plasma}}{\rho_{plasma}}, \quad (2.108)$$

onde ρ_{plasma} é a flutuação do fluido primordial até o momento do desacoplamento dos fótons e Ψ é o poço gravitacional citado. Esses são alguns exemplos que não serão explorados neste trabalho, mas podem ser revisados em [33]. Outro efeito importante impresso nas flutuações de temperatura é o efeito Sunyaev Zel'dovich, que decorre da interação dos fótons com os elétrons de aglomerados de galáxias, mas que será explicado adiante com maiores detalhes, uma vez que ele constitui uma fonte de parte dos dados coletados para o desenvolvimento deste trabalho.

O campo de anisotropias, $\Delta T(\theta, \phi)$, mapeado no sistema de coordenadas da Figura 2.13, apresenta o seguinte perfil de cores conforme mostra a Figura 2.14.

Entretanto, é muito difícil avaliar o comportamento global da função ΔT no domínio todo com a infinidade de valores que ela pode assumir. Por isso, convém aproximá-la

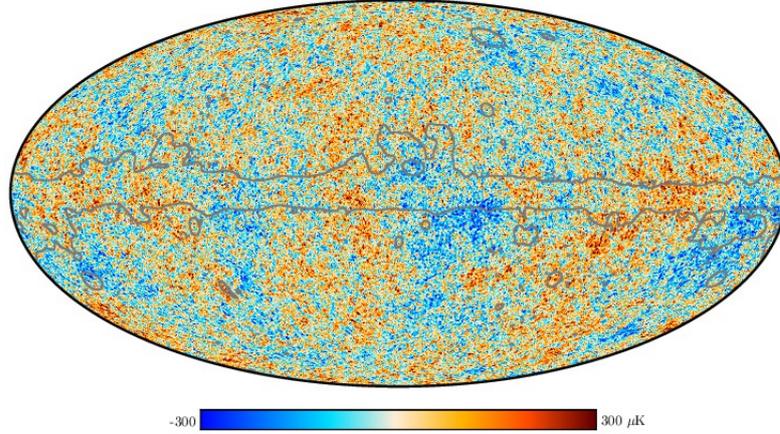


Figura 2.14: Esboço de $\Delta T(\theta, \phi)$ em um perfil de cores. Figura extraída de [34]

por um pacote de ondas, construído a partir de harmônicos esféricos. Nessa abordagem, quaisquer anisotropias podem ser estudadas dentro de um range diminuto de frequências.

Portanto, ao invés de lidar com o campo de anisotropias ΔT , com seus infinitos valores, é mais simples lidar com sua versão discretizada, $X_n(\theta, \phi)$, composta por n harmônicas, capaz de reproduzir a função original no limite de infinitas frequências angulares,

$$\frac{\Delta T}{T}(\theta, \phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\theta, \phi), \quad (2.109)$$

$$X_n(\theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^n X^{(\ell)}(\theta, \phi), \quad (2.110)$$

$$X^{(\ell)}(\theta, \phi) = \sum_{m=-\ell}^{m=\ell} a_{\ell,m} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) \longleftrightarrow a_{\ell,m} = \int_{\theta} \int_{\phi} Y_{\ell,m}(\theta, \phi) X(\theta, \phi), \quad (2.111)$$

$$Y_{\ell,m}(\theta, \phi) = e^{im\phi} P_{\ell,m}(\cos \theta), \quad (2.112)$$

$$C_{\ell} \equiv \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |a_{\ell m}|^2. \quad (2.113)$$

onde $P_{\ell,m}$ é um polinômio de Legendre e C_{ℓ} é a potência das flutuações de temperatura. O índice n , muitas vezes, é omitido, sendo o campo $X_n(\theta, \phi)$ substituído por $X(\theta, \phi)$, representado na Figura 2.15.

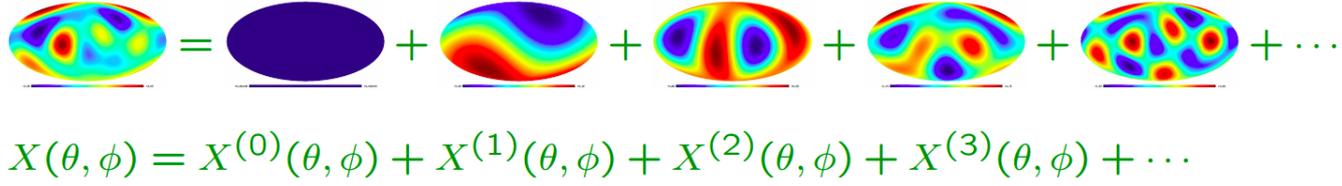


Figura 2.15: Aproximação multipolar. Figura extraída de [35]

Por fim, vale destacar que, na prática, as anisotropias são representadas pela quantidade $\ell(\ell + 1) \times C_\ell$. C_ℓ mostra a relevância da componente de frequência ℓ no mapa da RCF, enquanto o fator $\ell(\ell + 1)$ resalta os efeitos da harmônica correspondente em regiões de derivada não nula em um gráfico denotado por espectro de potência da RCF. Tal função é fortemente dependente do conteúdo em matéria-energia do Universo (parâmetros cosmológicos do modelo) e é capaz de mostrar assinaturas de vários fenômenos impressas no campo de anisotropias (Figura 2.16).

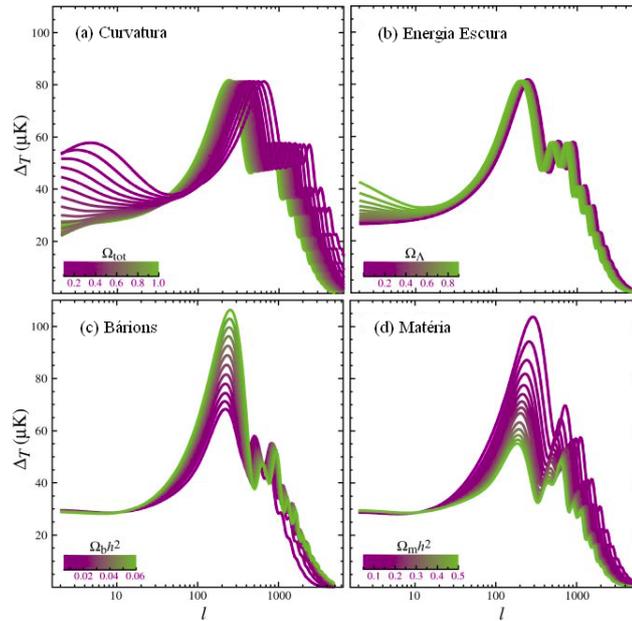


Figura 2.16: Espectro de potência da RCF: dependência das curvas com o modelo. Figura extraída de [36]

2.2.3 Nucleossíntese Primordial

Os elementos leves da Tabela Periódica (D, ^3He , ^4He , ^7Li e ^7Be) se formaram através de um mecanismo conhecido por Nucleossíntese Primordial, que consistiu, basicamente, na estabilização dos átomos das espécies mencionadas devida à diminuição da quebra de

suas reações químicas por fótons, já que eles perdiam energia com a queda de temperatura do fluido. Dois parâmetros são fundamentais para entender o funcionamento desta época: a razão bárion-fóton e a razão neutron-próton, dados, respectivamente, por

$$\eta = \frac{n_b}{n_\gamma} \quad (2.114)$$

e

$$\zeta = \frac{n_n}{n_p}. \quad (2.115)$$

η é uma medida da viabilidade de formação de átomos: quanto mais núcleos formados, mais tipos de átomos podem surgir, já que a fotodissociação diminuirá porcentualmente sobre os bárions. ζ , por sua vez, mede o número de nêutrons disponíveis para a evolução temporal da cadeia de reações dos elementos leves. À temperaturas da ordem $k_B T \sim 1 \text{ GeV}$, interações fracas governavam o interior do banho térmico, dado que partículas subatômicas como neutrinos, pósitrons, entre outras, estavam presentes nas reações

$$\begin{aligned} n + \nu_e &\leftrightarrow p + e^-, \\ n &\leftrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e, \\ n + e^+ &\leftrightarrow p + \bar{\nu}_e, \\ n + e^+ + \nu_e &\leftrightarrow p. \end{aligned} \quad (2.116)$$

O processo poderia ser descrito por uma teoria de Fermi (limite de baixas energias da interação fraca), viabilizando a aproximação da taxa de reação

$$\Gamma_\beta \simeq G_F^2 T^5. \quad (2.117)$$

O sistema se encontra em equilíbrio químico desde que a taxa de reação seja muito maior do que a taxa de expansão do Universo, $\Gamma_\beta \gg H$. E levando em conta que o Universo se encontra na era da radiação, a densidade de energia do fluido varia com a quarta potência da temperatura (radiação de corpo negro), conectada diretamente com a referida taxa de expansão por (2.36):

$$H^2 \propto \rho \propto g_* T^4. \quad (2.118)$$

onde g_* é o número de espécies relativísticas que constituem o fluido, totalizando 10 tipos

no plasma dessa época.

No decorrer da expansão, a temperatura cai mais ainda e a taxa de reação se aproxima da taxa de Hubble, o que implica no desacoplamento dos neutrinos do fluido. Da equivalência das taxas, extrai-se o valor da temperatura à qual o neutrino se desprende do plasma. Essa etapa eletrofraca que antecede a formação dos elementos leves é discutida com mais detalhes em [37].

$$\Gamma_\beta = H \implies k_B T \sim 1 \text{ MeV}. \quad (2.119)$$

Após o desacoplamento dos neutrinos, a cadeia principal de reações da nucleossíntese primordial se inicia, conforme mostra a Figura 2.17.

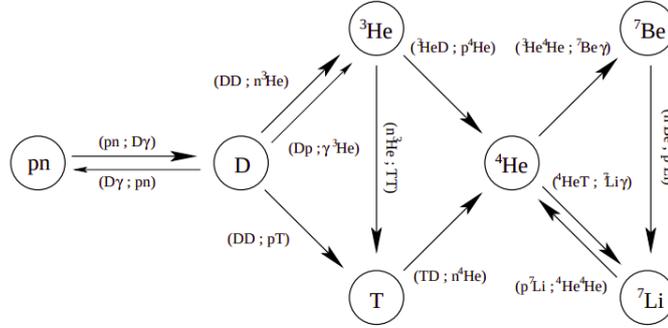


Figura 2.17: Cadeia das reações da Nucleossíntese Primordial. "T" representa ${}^3\text{H}$ neste diagrama extraído de [38].

A formação dos átomos de deutério depende da captura de nêutrons segundo a reação



E a disponibilidade de nêutrons depende da razão nêutron-próton, parâmetro que, agora, obedece uma dinâmica advinda de interações fracas que perderam eficiência com a queda de temperatura do plasma,

$$\frac{dX_n}{dt} = \lambda_{np} \{(1 - X_n) e^x - X_n\}, \quad (2.121)$$

$$\lambda_{np} = \frac{255}{\tau_n x^5} (12 + 6x + x^2), \quad (2.122)$$

$$x = \frac{(m_n - m_p)c^2}{k_B T}, \quad (2.123)$$

$$X_n = \frac{\zeta}{\zeta + 1}. \quad (2.124)$$

onde $(m_n - m_p)c^2 \approx 1,3 \text{ MeV}$ e quando $k_B T \sim (m_n - m_p)c^2$, ou seja, quando $x = 1$, a razão nêutron-próton vai para $\zeta \approx \frac{1}{6}$. Até este momento, o tempo transcorrido dos processos foi da ordem de 1 s.

Além dessa diminuição no número de núcleos devida à interação com prótons, o nêutron sofre decaimento β . A constante de tempo, τ_n , marca o tempo que leva para a densidade numérica de nêutrons cair para 37% do valor de sua condição inicial, já que obedece um processo linear invariante no tempo, livre, do tipo

$$\tau_n \dot{n}_n + n_n = 0. \quad (2.125)$$

Leva $\tau_n \approx 880 \text{ s}$ para que n_n se reduza a $n_n(\tau_n) = 0,37n_n$. Pouco mais de 600 s já é o bastante para marcar sua meia-vida. Detalhes sobre o processo de decaimento do nêutron no contexto da Nucleossíntese são encontrados em [39].

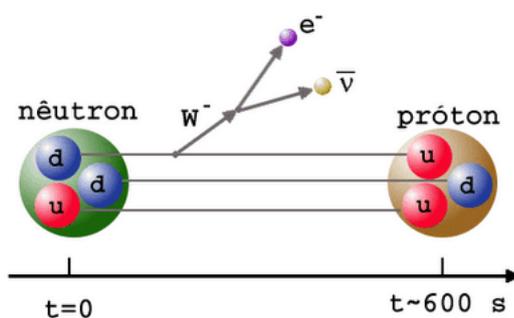


Figura 2.18: Tempo de meia-vida do nêutron.

A escala de tempo de formação do Deutério é praticamente a mesma do processo que caracteriza a disponibilidade de nêutrons (dinâmica de ζ),

$$\dot{Y}_D = f - \Gamma_D Y_D, \quad (2.126)$$

$$\tau_D = \frac{1}{\Gamma_D} \sim \lambda_{np}^{-1} \approx 0,2 \text{ s}. \quad (2.127)$$

onde Y_D representa a fração em massa de Deutério em relação à massa de Hidrogênio (ou abundância de Deutério), o inverso de Γ_D é o tempo característico do processo e f

é um termo forçante. Ambos f e Γ_D podem ser funções das abundâncias químicas das demais espécies presentes nas reações da cadeia ilustrada na Figura 2.17, uma vez que os processos são acoplados. O detalhe de cálculo da formação de todas as espécies pode ser encontrado em [40].

Considerando a duração diminuta da formação de Deutério, pode-se dizer que ela ocorre instantaneamente $\left(\frac{\tau_D}{\tau_n} \ll 1\right)$. Porém, o instante em que ocorre a processamento de nêutrons em Deutério é conhecido e se dá ainda a uma temperatura $k_B T \leq 1 \text{ MeV}$, especificamente quando a razão nêutron-próton se encontra em $\zeta_D = \frac{n_D}{n_b} = \frac{1}{7}$. E considerando do início da Nucleossíntese no instante em que essa razão assumia o valor de $\zeta_0 = \frac{n_0}{n_b} = \frac{1}{6}$, pode-se calcular o referido instante, denotado por t_D , através da solução de (2.125),

$$n_D = n_0 e^{\frac{t_D}{\tau_n}} \quad (2.128)$$

$$\downarrow$$

$$t_D = \left[\ln \left(\frac{\zeta_D}{\zeta_0} \right) \right] \tau_n \approx 2 \text{ min.}$$

Ou seja, decorridos 2 minutos do *Big Bang*, o Deutério é produzido e, quase que instantaneamente, ele é processado por completo em Hélio⁴. O processo é rápido o bastante para conseguir processar os nêutrons antes da extinção destes últimos por decaimento (que dura $\tau_n \approx 15$ minutos).

Deutério também é conhecido por *bariômetro do Universo* (Referência [41]). Ele possui alta energia de ligação ($B_D = 2,2 \text{ MeV}$), fato que faz sua abundância química depender fortemente da razão fóton-báron (η): enquanto as interações fracas eram eficientes, η era baixo (poucos núcleos se formando, muitos fótons disponíveis para fotodissociarem os átomos), mas à medida que essas interações ficavam ineficientes, léptons eram processados em núcleons, implicando no favorecimento da formação de outras espécies e aumento vertiginoso de η .

$$\ln(\eta) + \frac{3}{2} \ln \left[k_B T_{\text{nuc}} / (m_p c^2) \right] \sim -\frac{B_D}{k_B T_{\text{nuc}}} \quad (2.129)$$

Transcorrido um intervalo negligenciável do instante t_D , a temperatura atingiu o valor $k_B T_{\text{nuc}} \sim 0,07 \text{ MeV}$. Com tal energia, em média, os fótons já não eram capazes de quebrar os átomos de Deutério, cuja fração em massa se estabiliza logo após alimentar o ramo seguinte da cadeia de reações que ditará o valor final da abundância de ⁴He: $Y_{\text{He}} \approx 0,25$.

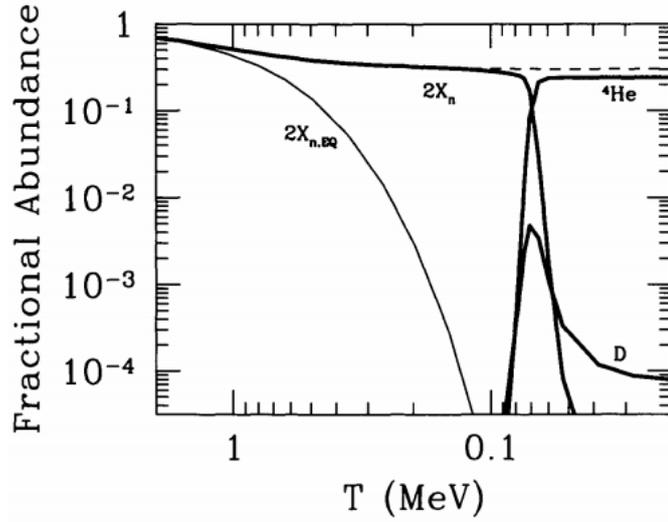


Figura 2.19: Rápida captura de nêutrons e produção de Deutério/Hélio. Figura extraída de [42].

Tem-se, portanto, um vínculo da razão bárion-fóton oriundo da dinâmica de formação do Deutério. Além disso, esse parâmetro é proporcional à densidade de bárions do Universo normalizada com a densidade crítica $\left(\eta \propto \frac{\rho_b}{\rho_c}\right)$, o que leva à determinação do valor médio

$$\frac{\rho_b(t_0)}{\rho_c(t_0)} \sim 4\%. \quad (2.130)$$

Em torno de 4% do conteúdo de matéria-energia do Universo é matéria bariônica. Essa previsão teórica, possível de ser feita com todas as abundâncias das espécies envolvidas na Nucleossíntese Primordial, coincide com medidas da RCF [43].

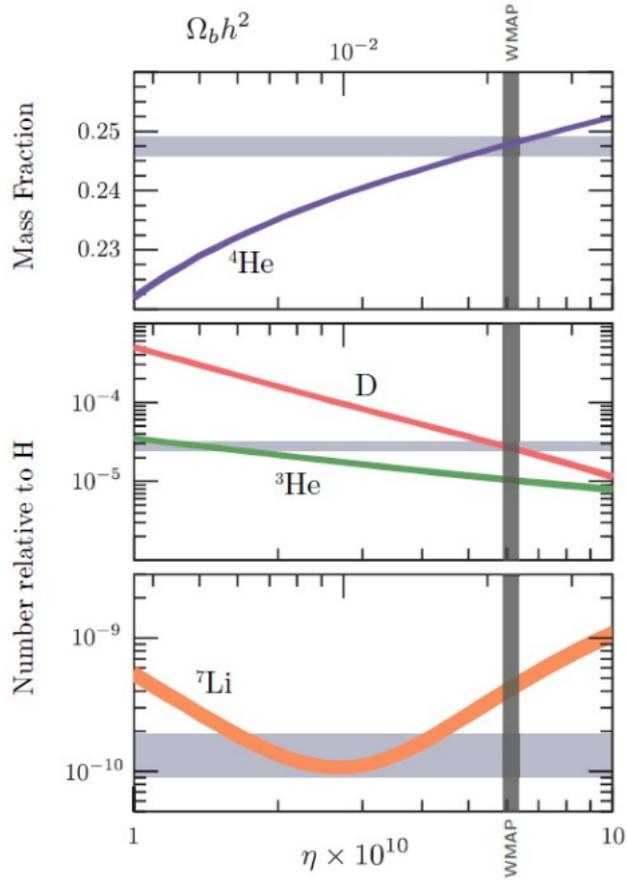


Figura 2.20: Concordância entre predição e observação.

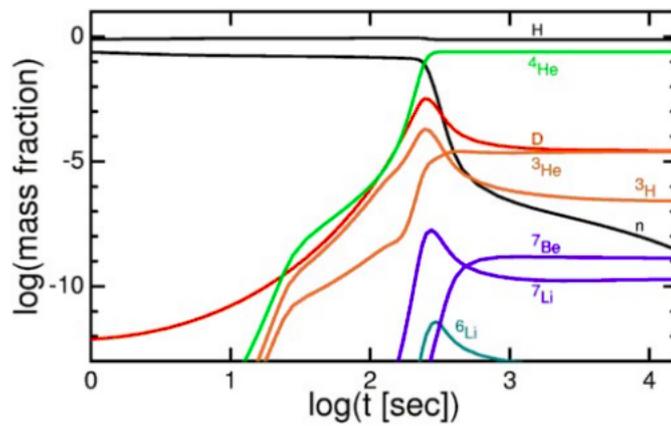


Figura 2.21: Processos da Nucleossíntese Primordial: regime transitório cessa em $t = 3$ minutos. Figura extraída de [44].

Capítulo 3

Lei de Evolução da Temperatura

Para a concepção da lei de evolução da temperatura da RCF na Cosmologia Padrão, é necessário avaliar a conservação da densidade de energia de um Universo predominantemente radiativo e combinar a dinâmica dessa densidade com o comportamento de corpo negro que ela exhibe. Por outro lado, em cosmologias nas quais há produção de fótons, a temperatura da RCF não corresponde àquela prevista pelo modelo padrão, exigindo, para sua representação matemática, termos extras nas equações de conservação originais.

3.1 Lei de Temperatura Padrão

A densidade de energia dos fótons obedece à lei contida em (2.49). Parametrizando-a segundo (2.6), chega-se a

$$\rho_r(z) = \rho_r(z_0) (1 + z)^4. \quad (3.1)$$

Mas, o brilho da RCF por unidade de frequência se dá pela distribuição radiativa de corpo negro,

$$B_\nu(T) = \frac{2h}{c^2} \frac{\nu^3}{\exp(h\nu/k_B T) - 1}, \quad (3.2)$$

onde T é a temperatura dos fótons e ν a frequência. Em termos da temperatura, a densidade de energia é proporcional à varredura do brilho ao longo de todo o espectro eletromagnético,

$$I = \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \frac{4\sigma}{c} T^4 \quad ; \quad \sigma \equiv \frac{2\pi^2}{15} k_B c \left(\frac{\pi k_B}{ch} \right)^3. \quad (3.3)$$

$$\rho_r = \frac{I}{c^2} = \frac{4\sigma T^4}{c^3}. \quad (3.4)$$

Combinando (3.4) e (3.1), chega-se à relação temperatura-redshift,

$$T = T_o(1 + z), \quad (3.5)$$

onde T_o é a temperatura da RCF no nosso *redshift*.

Outra forma de se chegar ao mesmo resultado se dá por avaliar o número de fótons da RCF existente em um volume comóvel.

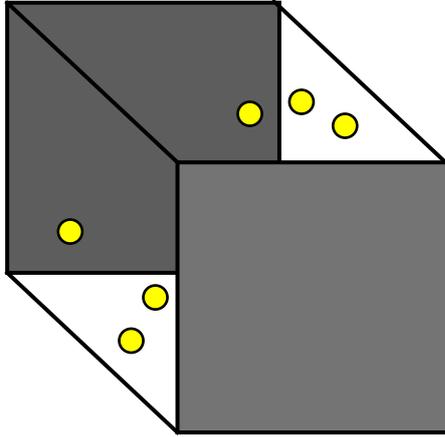


Figura 3.1: Volume comóvel preenchido de fótons.

Seja n a densidade numérica de fótons e V o volume do universo, representado pela caixa da Figura 3.1. O número total de fótons do Universo, $N = nV$, se conserva, ou seja, é uma constante de movimento,

$$\dot{N} = \dot{n}V + n\dot{V} = 0. \quad (3.6)$$

Cada distância varia com o fator de escala a , conforme mostrado na Figura 2.1. Como volume diz respeito ao produto de 3 dimensões, o seu valor será proporcional a a^3 , $V \propto a^3$. Isso fará com que (3.6) assumo o formato

$$\dot{n} + 3Hn = 0. \quad (3.7)$$

onde $n \propto T^3$. Ao integrar (3.7) sob tal consideração de um *redshift* arbitrário até o atual, chega-se ao mesmo resultado de (3.5).

3.2 Lei de Temperatura com Criação de Fótons

Para derivar um modelo fenomenológico de evolução da temperatura, alternativo àquele previsto pelo Modelo de Friedmann, é pertinente fazer uso das leis da Termodinâmica, já que esta permite inferir propriedades sobre o processo físico de interesse sem necessariamente assumir hipóteses sobre a sua natureza. No caso, o objetivo é descrever o processo de criação de fótons via entropia. Isso permitirá a construção fenomenológica de Equações de Friedmann modificadas, com termos adicionais que indicarão a produção de partículas [8]. A derivação dessa lei modificada requer três passos, em termos de formulação, sendo o primeiro encontrar equações de estado para conectar a energia, o número de partículas e a entropia, esta última advinda da criação destas partículas. A segunda etapa é a caracterização dinâmica do fluido através de suas equações de transporte, enquanto o último estágio se dá através da parametrização da taxa de produção de partículas, uma quantidade física avaliada após a combinação de propriedades termodinâmicas com grandezas dos fenômenos de transporte que envolvem o fluido cósmico, neste caso, o fluido de fótons.

3.2.1 Termodinâmica da Criação de Partículas

O balanço de energia de um sistema é dado pela Primeira Lei da Termodinâmica, que relaciona o quanto a energia interna de varia pelas trocas de energia entre calor e trabalho,

$$\Delta U = Q - W, \quad (3.8)$$

onde U é a energia interna, Q é o calor que atravessa as vizinhanças do sistema e W o trabalho realizado.

No entanto, a Primeira Lei possui um formato mais geral, infinitesimal, capaz de contabilizar acréscimos de energia interna devido a mudanças na composição do sistema,

$$dU = \delta Q - \delta W + \delta C, \quad (3.9)$$

onde δC é a variação de energia interna devida às mudanças de composição.

O processo de criação de partículas é irreversível, característica que se expressa, neste caso, através do aumento do número de partículas, dN , traduzido na variação δC . Contabilizar o grau de irreversibilidade somente em C permite expressar Q em sua versão reversível, através da entropia S . E como tudo ocorre ao mesmo tempo que a expansão do Universo, esta última se traduz no trabalho realizado pelo fluido, dependente apenas da pressão, p , e do volume, V ,

$$\delta Q = TdS, \quad (3.10)$$

$$\delta W = p dV \quad (3.11)$$

e

$$\delta C = \mu dN. \quad (3.12)$$

Além disso, variações no número de partículas contidas no volume de controle demandam um termo adicional no balanço,

$$dU = TdS - p dV + \mu dN, \quad (3.13)$$

onde μ é o potencial químico do sistema. A energia interna $U = U(\{X_j\})$ caracteriza o sistema termodinâmico de forma unívoca segundo a identidade

$$\chi_j = \frac{\partial U}{\partial X_j}, \quad (3.14)$$

onde os deslocamentos generalizados, $\{X_j\}$, formam o conjunto de variáveis extensivas (função das dimensões do sistema) $\{S, V, N\}$. χ_j , por sua vez, são as forças termodinâmicas generalizadas, em particular, o conjunto de variáveis intensivas (não se escalonam pelo tamanho) $\{T, -p, \mu\}$.

O Universo considerado é homogêneo, fato que permite a simplificação da estrutura algébrica de U através do conceito de função homogênea, sintetizado no quadro que segue:

$q = q(\{x_j\})$ é uma função de grau k se ela se preserva depois de ser avaliada no conjunto x_j escalonado por um parâmetro b e após este resultado ser multiplicado pela k -ésima potência do parâmetro b :

$$q(\{x_j\}) = b^k q(b\{x_j\}). \quad (3.15)$$

No caso, a função homogênea é a densidade de energia do universo, $q = \rho c^2 = \frac{U}{V}$, o parâmetro coincide com o volume, $b = V$, e o grau assume o valor $k = -1$. Essas afirmativas são verificáveis no novo enunciado da primeira lei, agora expressa com as variáveis normalizadas no volume:

$$\begin{aligned} \rho c^2 &= \frac{U(\frac{S}{V}, \frac{V}{V}, \frac{N}{V})}{V} = \frac{U(\frac{S}{V}, 1, \frac{N}{V})}{V} = c^2 \rho(s, n); \\ s &= \frac{S}{V}; \\ n &= \frac{N}{V}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

A homogeneidade de ρ , portanto, permite concluir que a densidade de energia é função apenas da entropia específica, s , e da densidade numérica de partículas, n . Reescrevendo, agora, a primeira lei com as as novas variáveis de estado, chega-se a

$$\begin{aligned} (\rho c^2) dV + V d(\rho c^2) &= -p dV + VT ds + Ts dV \\ &+ \mu V dn + \mu n dV, \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde ρc^2 não varia com o volume, V . Por essa razão, $d(\rho c^2)$ é combinação linear apenas de dn e de ds e o agrupamento dos termos que acompanham dV deve ser nulo, implicando, assim, na identidade

$$\mu = \frac{\rho c^2 + p}{n} - T \frac{s}{n} = \frac{\rho c^2 + p}{n} - T \sigma, \quad (3.18)$$

$$\sigma = \frac{s}{n}. \quad (3.19)$$

A simples retirada dos termos que acompanham dV simplifica a Equação (3.17). Adicionalmente, dividindo-a por dt , obtém-se

$$T\dot{s} = \dot{\rho}c^2 - \mu\dot{n}. \quad (3.20)$$

Combinando (3.20) com (3.19) e (3.18), chega-se a

$$\dot{\sigma} = \frac{\dot{\rho}c^2}{nT} - \frac{(p + \rho c^2)}{Tn^2}\dot{n}. \quad (3.21)$$

3.2.2 Equações de Transporte

Uma vez calculada a entropia por partícula e sua variação temporal, resta construir a dinâmica de expansão do Universo com criação de fótons para avaliar a fenomenologia de como o processo é gerado (fonte em densidade de energia) e calcular, por fim, a evolução cósmica da temperatura da RCF.

A fonte de energia para a produção de partículas está contida no tensor energia-momento modificado a partir de uma pressão efetiva,

$$\mathcal{T}^{\alpha\beta} = \left(\rho + \frac{p_{ef}}{c^2}\right) u^\alpha u^\beta - p_{ef} g^{\alpha\beta} \quad (3.22)$$

onde p_{ef} é a pressão efetiva, a soma da pressão original, p , uma pressão de criação, p_c , um termo fonte fenomenologicamente anexado para descrever a fonte de radiação,

$$p_{ef} = p + p_c \quad (3.23)$$

O princípio de conservação da densidade de energia do Universo ainda é válido por uma quadri-divergência nula, em uma componente, do tensor energia momento,

$$\nabla_\beta \mathcal{T}^{0\beta} = \dot{\rho} + 3H \left(\rho + \frac{p_{ef}}{c^2}\right) = 0. \quad (3.24)$$

A junção das duas últimas equações fornece uma equação de transporte que mostra o quanto a energia interna (sobre unidade de volume) varia com o termo fonte,

$$\dot{\rho} = -3H \left(\rho + \frac{p + p_c}{c^2}\right). \quad (3.25)$$

Restam, ainda, duas equações de transporte capazes de caracterizar mudanças no número de partículas e o crescimento da entropia,

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha N^\alpha &= (\nabla_\alpha n) u^\alpha + n \nabla_\alpha u^\alpha = (\partial_\alpha n) u^\alpha + n \nabla_\alpha u^\alpha \\ &= \dot{n} + 3Hn = \Gamma n;\end{aligned}\tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha S^\alpha &= \nabla_\alpha (\sigma n u^\alpha) = (\partial_\alpha \sigma) n u^\alpha + \sigma (\partial_\alpha n) u^\alpha + \sigma n \nabla_\alpha u^\alpha \\ &= \dot{\sigma} n + \sigma \dot{n} + 3H\sigma n = \dot{\sigma} n + \sigma(\dot{n} + 3Hn).\end{aligned}\tag{3.27}$$

$N^\alpha = n u^\alpha$ é o fluxo de partículas, enquanto $S^\alpha = n \sigma u^\alpha$ é o fluxo de entropia.

Reescrevendo (3.26) sem os cálculos intermediários e (3.27) a partir do resultado da equação de fluxo de partículas, chega-se às expressões

$$\dot{n} + 3Hn = \Gamma n\tag{3.28}$$

e

$$\nabla_\alpha S^\alpha = \dot{\sigma} n + \Gamma \sigma n.\tag{3.29}$$

onde Γ é a taxa de produção de fótons.

Na Equação (3.29), $\nabla_\alpha S^\alpha$ representa o crescimento da entropia do Universo, $\dot{\sigma} n$ a parcela deste acréscimo devido ao fluxo de calor que atravessa a vizinhança do sistema e $\Gamma \sigma n$ o aumento causado pela criação de partículas. Particularizando o processo como um escoamento adiabático ($\dot{\sigma} = 0$) e reescrevendo os termos da quadridivergência presente em (3.27) em termos da entropia específica, s , presente na Equação (3.19), conclui-se que

$$\sigma = \text{constante},\tag{3.30}$$

$$\dot{s} + 3Hs = \Gamma s\tag{3.31}$$

e

$$\frac{s}{n} = \text{constante}.\tag{3.32}$$

Estes resultados mostram que a produção adiabática de partículas é um processo que ocorre à mesma taxa associada à geração de entropia. E como s difere de n apenas por uma constante, o transporte de entropia específica e o transporte de densidade numérica

de partículas são processos equivalentes, a Equação (3.31) é a Equação (3.28) multiplicada pela constante σ .

A condição de adiabacidade implica em uma relação de proporcionalidade entre a pressão de criação, p_c , e a taxa de produção de partículas, Γ , como resultado da combinação das Equações (3.21), (3.25) e (3.28),

$$p_c = - \left(\frac{p + \rho c^2}{3H} \right) \Gamma. \quad (3.33)$$

Substituindo o resultado da pressão de criação, exibido na Equação (3.33), na Equação (3.25), tem-se que

$$\dot{\rho} + (3H - \Gamma) \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) = 0. \quad (3.34)$$

3.2.3 A Parametrização β para a Criação de Fótons

Ao restringir o modelo a um Universo permeado apenas por fótons em equilíbrio e que se comportam como uma radiação de corpo negro, tem-se que

$$p = \frac{1}{3} \rho c^2 \quad (3.35)$$

e

$$\rho \propto T^4. \quad (3.36)$$

Inserindo (3.35) e (3.36) em (3.34), chega-se à dinâmica da temperatura da RCF com criação de fótons,

$$\dot{T} + \frac{(3H - \Gamma)}{3} T = 0. \quad (3.37)$$

Para encontrar a evolução da temperatura da radiação, é necessário, antes, encontrar a taxa de produção de fótons, Γ . Sob a perspectiva da Física Teórica, ela deve ser determinada junto ao mecanismo microscópico de criação de fótons, por exemplo, às custas do campo gravitacional, demandando, portanto, o uso da Teoria Quântica de Campos em Espaço Curvo (Referência [45]) para o cálculo do seu valor. Mas, para testar, a partir dos dados, modelos que lidam com este fenômeno, é suficiente assumir um ansatz com

uma parametrização para Γ . Essa abordagem fenomenológica visa testar cosmologias com criação de fótons através dos parâmetros que constituem Γ . E o ansatz mais simples para esta taxa é $\Gamma \propto 3H$ tendo como fator de proporcionalidade um parâmetro detonado β ,

$$\Gamma = 3H\beta, \quad (3.38)$$

onde $\beta \in [0, 1]$.

Essa parametrização é discutida em [46], particularmente para β constante. Sob esta última hipótese, a relação (3.38) simplifica a Equação (3.37), que se reduz a

$$\dot{T} + (1 - \beta) T = 0, \quad (3.39)$$

cuja integração leva à lei de evolução

$$T = T_o \left(\frac{a_o}{a} \right)^{1-\beta}. \quad (3.40)$$

Visto que $a^{-1} = 1 + z$ e $a_o = 1$, a lei de evolução da temperatura da RCF em um Universo sob criação adiabática de fótons pode ser expressa em função do redshift,

$$T = T_o (1 + z)^{1-\beta}. \quad (3.41)$$

Comparada à lei de evolução original, $T = T_o (1 + z)$, a nova relação temperatura-redshift dada pela Equação (3.41) será utilizada, neste trabalho, para reconstruir o processo de criação de fótons via parâmetro β . Pelo uso de β no lugar de Γ para avaliar este processo de produção radiativa, neste trabalho, β também poderá ser chamado de taxa de criação de fótons. Vale observar que β não pode assumir valores maiores do que 1 para que a temperatura da RCF, neste modelo, continue a diminuir com o crescimento do fator de escala, a . Valores negativos para este parâmetro também são proibidos, uma vez que seriam um indicativo de um modelo que pressupusesse aniquilação de fótons ao invés de criação destas partículas.

3.2.4 Efeitos de β na expansão cósmica e no transporte radiativo

Neste momento, serão exploradas algumas consequências da criação de fótons sobre algumas características do fluido radiativo e sobre a dinâmica de expansão do Universo,

esta última somente Era da Radiação, já que o efeito densidade de fótons é irrelevante em épocas posteriores.

Criação de fótons durante a Era da Radiação

De início, para analisar a dinâmica de expansão cósmica na Era da Radiação, é necessário contabilizar o efeito de β sobre a densidade de energia. Para isso, insere-se a Equação (3.38) na Equação (3.34), o que implica na expressão

$$\dot{\rho} + 4H(1 - \beta)\rho = 0, \quad (3.42)$$

cuja integração leva a

$$\rho = (\rho_r)_o a^{-4(1-\beta)}. \quad (3.43)$$

O quadrado da taxa de Hubble é proporcional à densidade de energia, $H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \propto \rho$, relação passível de ser integrada após a substituição de ρ pelo resultado da Equação (3.43),

$$H_o t = \int_0^a da \left[(\Omega_r)_o a^{-4(1-\beta)+2} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.44)$$

Efetuada a integral da Equação (3.44), chega-se à relação

$$a \propto \begin{cases} t^{\frac{1}{2(1-\beta)}}, & 0 \leq \beta < 1 \\ e^t, & \beta = 1. \end{cases} \quad (3.45)$$

No limite inferior de β , quando $\beta = 0$, não há criação de fótons, o que implica nos resultados previstos pelo MCP, $a \propto t^{\frac{1}{2}}$ e $\rho \propto a^{-4}$. Por outro lado, na produção máxima de fótons ($\beta = 1$), a densidade se torna invariante, $\rho = (\rho_r)_o$, e o fator de escala cresce exponencialmente, $a \propto e^t$, o mesmo comportamento que um fluido de constante cosmológica possui (Referência [47]).

Implicações de β no transporte de radiação

Aproximado por um fluido perfeito e sob efeito da produção de fótons, o fluido radiativo obedece à lei de continuidade

$$\dot{\rho} + 3H \left(\rho + \frac{p_{ef}}{c^2} \right) \rho = 0, \quad (3.46)$$

onde p_{ef} é a pressão efetiva, já mencionada anteriormente na subseção 3.2.2.

Considerando a equivalência entre as Equações (3.43) e (3.46), chega-se à equação de estado

$$p_{ef} = w_{ef}(\beta) \rho, \quad (3.47)$$

onde

$$w_{ef}(\beta) = \frac{1}{3}(1 - 4\beta). \quad (3.48)$$

E conforme o esperado, a função w_{ef} assume valores típicos das componentes radiativa e de constante cosmológica quando avaliada, respectivamente, nos limites inferior e superior de β , ou seja, $w_{ef}(0) = w_r = \frac{1}{3}$ e $w_{ef}(1) = w_\Lambda = -1$.

Por fim, cabe analisar o efeito de β na densidade numérica de fótons, n . Para isso, o processo de diluição do fluido de radiação ao longo de toda a expansão do Universo deve ser analisado. E a equação diferencial que descreve a diluição com o efeito adicional da criação de fótons é concebida pela combinação das Equações (3.38) e (3.28),

$$\dot{n} + 3H(1 - \beta)n = 0, \quad (3.49)$$

que pode ser reescrita em termos de a ,

$$dn + 3\frac{da}{a}(1 - \beta)n = 0. \quad (3.50)$$

A solução desta equação elucidada o efeito da criação de fótons sobre o decaimento de n ,

$$n = a^{3\beta} \frac{n_o}{a^3}, \quad (3.51)$$

onde $n_o = 16\pi\zeta(3) \left(\frac{kT_o}{hc}\right)^3$ é a densidade numérica de fótons atual e $\zeta(3) \approx 1,21$ é a função zeta de Riemann, $\zeta(x)$, avaliada em $x = 3$. Além disso, se $N_o = n_o V_o$ é o número de fótons medido no instante cósmico atual, V_o o volume atual do Universo, pode-se reescrever a Equação (3.52) como

$$n = \frac{N_o a^{3\beta}}{V_o a^3} = \frac{N}{V}, \quad (3.52)$$

onde $V = V_o a^3$ é o volume do Universo e $N = N_o a^{3\beta}$ o número de fótons do Universo, sendo esta última, agora, uma grandeza que não se conserva mais, uma vez que a função $a^{3\beta}$ pondera o número de fótons originalmente previsto pelo MCP como efeito da produção de radiação.

Quando $\beta = 0$ (conservação do número de fótons), n decai segundo o que se espera no MCP, com a^{-3} . Porém, sob a máxima taxa de criação de fótons, $\beta = 1$, a diluição é compensada pela produção extrema de radiação, cessando, assim, o decaimento de n , que mantém, por sua vez, o valor constante $n = n_o$, conforme se verifica na Equação (3.52). Para valores intermediários, n é uma função decrescente, o que continua a caracterizar o processo de diluição, porém, como fótons são adicionados ao sistema, a taxa à qual ocorre seu decaimento é mais baixa. E para avaliar o efeito de β na velocidade do processo, é necessário observar o inverso do coeficiente que acompanha n na Equação (3.49), que pode ser reescrita na forma

$$\dot{n} = -\frac{n}{\tau}, \quad (3.53)$$

onde

$$\tau = \frac{1}{3H(1-\beta)}, \quad (3.54)$$

e

$$H = H_o \left[(\Omega_r)_o a^{-4(1-\beta)} + (\Omega_m)_o a^{-3} + (\Omega_\Lambda)_o \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.55)$$

τ , avaliado na Equação 3.54, representa a escala de tempo da diluição. Porém, esta quantidade é variável no tempo. Caso fosse constante, ela equivaleria ao tempo de relaxação do processo. Todavia, é possível estimar τ como uma constante na Era da Constante Cosmológica, uma vez que H atinge seu valor de regime permanente nesta época,

$$H_\infty = \lim_{a \rightarrow \infty} H = H_o \sqrt{(\Omega_\Lambda)_o}. \quad (3.56)$$

reduzindo, então, a Equação (3.53) a

$$\dot{n} = -\frac{n}{\tau_\infty}, \quad (3.57)$$

onde

$$\tau_\infty = \tau_\infty(\beta) = \frac{1}{(1-\beta)} \frac{1}{3H_o\sqrt{(\Omega_\Lambda)_o}}, \forall \beta \in [0, 1[. \quad (3.58)$$

Quando os fótons se conservam ($\beta = 0$), n leva um intervalo de tempo igual a $\tau_\infty(0) = \frac{1}{3H_o\sqrt{(\Omega_\Lambda)_o}}$ para atingir pouco menos de 40% do seu valor no instante inicial (denotado $t_{início}$), enquanto a criação de fótons ($\beta \neq 0$) retarda o processo, implicando em uma duração maior, de $\tau_\infty(\beta) = \frac{1}{(1-\beta)} \frac{1}{3H_o\sqrt{(\Omega_\Lambda)_o}}$, para que n atinja o mesmo valor,

$$n_{\beta=0}(\tau_\infty(0)) = n_{\beta \neq 0}(\tau_\infty(\beta)) = e^{-1} n_o. \quad (3.59)$$

Adicionalmente, a diferença entre os referidos tempos de relaxação pode ser calculada em função da constante de tempo original prevista pelo MCP,

$$\delta\tau = \left(\frac{\beta}{1-\beta} \right) \tau_\infty(0). \quad (3.60)$$

O efeito da criação de fótons no processo de diluição da radiação, em todas as suas nuances, é ilustrado na Figura 3.2.

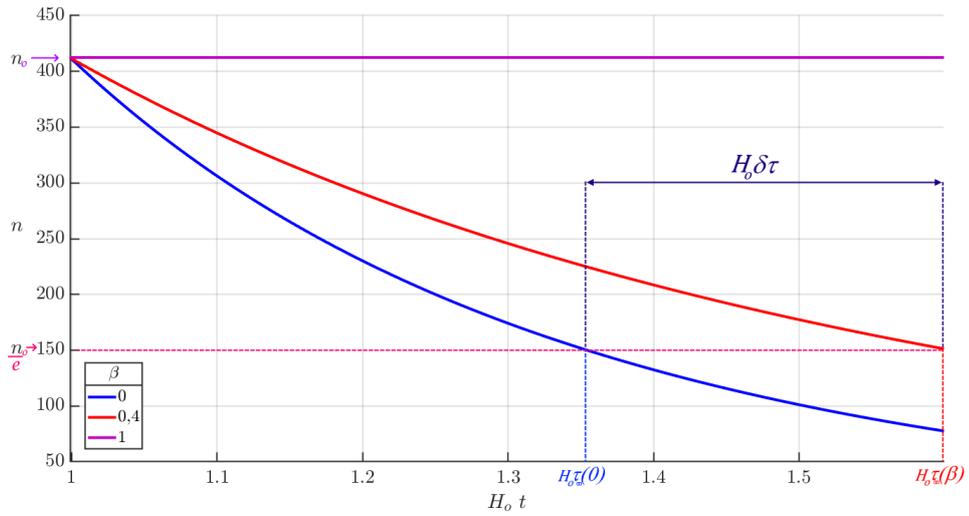


Figura 3.2: Síntese gráfica do efeito de β na diluição dos fótons a partir do instante cósmico atual. O valor n_o usado como condição inicial se associa à temperatura $T_o \approx 2,73K$.

3.3 Observáveis modificados pela produção de fótons

O processo de criação de fótons altera as medidas de uma série de observáveis que possuem relação com o setor eletromagnético do Universo.

Um deles é o parâmetro η , presente em (2.25), que, no referido cenário, passa a evoluir segundo uma função $\eta(z)$, violando, assim, o Teorema de Etherington. Para derivar isso diretamente da relação temperatura-redshift, com objetivo de avaliar o efeito de β , basta avaliar a conservação da potência luminosa de uma fonte astrofísica nos eventos emissão e recepção e se ater ao fluxo luminoso:

$$P_{medida} = P_{fonte}. \quad (3.61)$$

A potência da fonte é $P_{fonte} = F_{fonte} \times \int D_A^2 d\Omega$, enquanto a potência medida é $P_{medida} = F_{detectado} \times 4\pi D_L^2$. Ω é o ângulo sólido, F denota o fluxo luminoso, D_A a distância de diâmetro angular e D_L a distância de luminosidade (Referência [48]). Ao varrer um ângulo sólido de 4π , chega-se à equação:

$$\frac{D_L}{D_A} = \sqrt{\frac{F_{fonte}}{F_{detectado}}}. \quad (3.62)$$

Dentro de uma aproximação de corpo negro, o fluxo obedece a lei de Stephan-Boltzmann. Na detecção, a temperatura dos fótons é a atual, em redshift $z = 0$, $F_{detectado} \propto T_o^4$, enquanto o fluxo no evento emissão possuía fótons energéticos, $F_{fonte} \propto [T(z)]^4$. Como $T \propto (1+z)^{1-\beta}$, (3.62) assume a forma da relação de distância-luminosidade alterada pela produção de fótons:

$$\frac{D_L}{(1+z)^2 D_A} = \eta(z) = (1+z)^{-2\beta} \quad (3.63)$$

Outro observável é a variação fracionária da constante de estrutura fina. Essa constante, α_o , também denotada constante de Sommerfeld, é capaz de caracterizar o quão intensa é a interação eletromagnética entre duas partículas elementares carregadas.

$$\alpha_o = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e_0^2}{\hbar c}, \quad (3.64)$$

onde ϵ_0 é a permissividade elétrica do meio e e_0 é a carga do elétron.

Em uma classe de modelos conhecida por cosmologias BSBM (Bekenstein-Sandvik-

Barrow-Magueijo), o setor eletromagnético do universo se encontra a um campo escalar através de uma função exponencial na densidade lagrangeana, levando às equações de campo modificadas, particularizadas para a Era da Radiação (Referência [49]):

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = 8\pi\mathcal{G} \left(\mathcal{T}_{\mu\nu}^{\psi} + \mathcal{T}_{\mu\nu}^{em} e^{-2\psi} \right). \quad (3.65)$$

onde ψ é o campo escalar, $\mathcal{T}_{\mu\nu}^{\psi}$ é o conteúdo de matéria-energia presente no campo ψ e $\mathcal{T}_{\mu\nu}^{em}$ é o tensor energia-momento eletromagnético, acoplado ao campo escalar, conforme mostra (3.65).

ψ depende apenas do tempo cósmico, t , e sua ação é de transformar a constante de Sommerfeld em uma função do tempo, distoante do seu valor original, embora possa flutuar em torno do mesmo,

$$\frac{\alpha}{\alpha_o} = e^{2(\psi - \psi_o)}. \quad (3.66)$$

onde ψ_o é o valor atual do campo escalar no instante t_o e α é o valor da constante de Sommerfeld no instante t . A divergência nula do tensor de Einstein em (3.65) leva à dinâmica da densidade de energia radiativa, dada por

$$\dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 2\dot{\psi}\rho_r. \quad (3.67)$$

E, considerando o comportamento de corpo negro, $\rho \propto T^4$, chega-se à lei de temperatura

$$T = T_o(1+z) \left(1 + \frac{\Delta\alpha}{\alpha} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad (3.68)$$

onde $\frac{\Delta\alpha}{\alpha} = \frac{\alpha - \alpha_o}{\alpha_o}$. Adicionalmente, comparando (3.69) com (3.41), pode-se expressar a variação fracionária de α com o parâmetro β segundo a expressão

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} = (1+z)^{-4\beta} - 1. \quad (3.69)$$

Combinando o resultado de (3.63) e (3.69), obtém-se, ainda, uma relação entre os observáveis $\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$ e η ,

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} = \eta^2 - 1. \quad (3.70)$$

Capítulo 4

Observações e descrição dos dados

Para este trabalho, dois objetos astronômicos foram utilizados para a coleta dos dados de temperatura da RCF: aglomerados de galáxias e quasares. No primeiro, as medidas foram derivadas do Efeito Sunyaev-Zel'dovich (ESZ), enquanto as demais medidas eram estimadas a partir emissão das Linhas de Absorção de Quasares (*Quasi-Stellar Objects* ou QSO). Ambos os fenômenos serão discutidos aqui, porém, sem um detalhamento apurado, já que a coleta dos dados não foi o foco deste trabalho.

4.1 Efeito Sunyaev-Zel'dovich

O efeito Sunyaev-Zel'dovich consiste em uma anisotropia de temperatura da RCF devido ao espalhamento entre seus fótons com os elétrons de aglomerados de galáxias, especificamente no caso onde fótons menos energéticos ganham momento (em módulo) a partir dessa interação [50] (Figura 4.1):

O espalhamento do fóton por partículas carregadas é conhecido por efeito Compton quando o fóton aumenta seu comprimento de onda. Neste processo, o momentum do fóton diminui, já que o seu momento é inversamente proporcional ao comprimento de onda, $P \propto \lambda^{-1}$. Contudo, o efeito Sunyaev-Zel'dovich causa o oposto como resultado do espalhamento, ou seja, ele faz com que o momento do fóton aumente (diminuição do comprimento de onda). E por essa razão, outro nome associado a este fenômeno é efeito Compton inverso.

A medição desse efeito se dá de forma indireta, através de medidas da diferença de potência radiativa entre o centro do aglomerado e outra região sem fontes luminosas

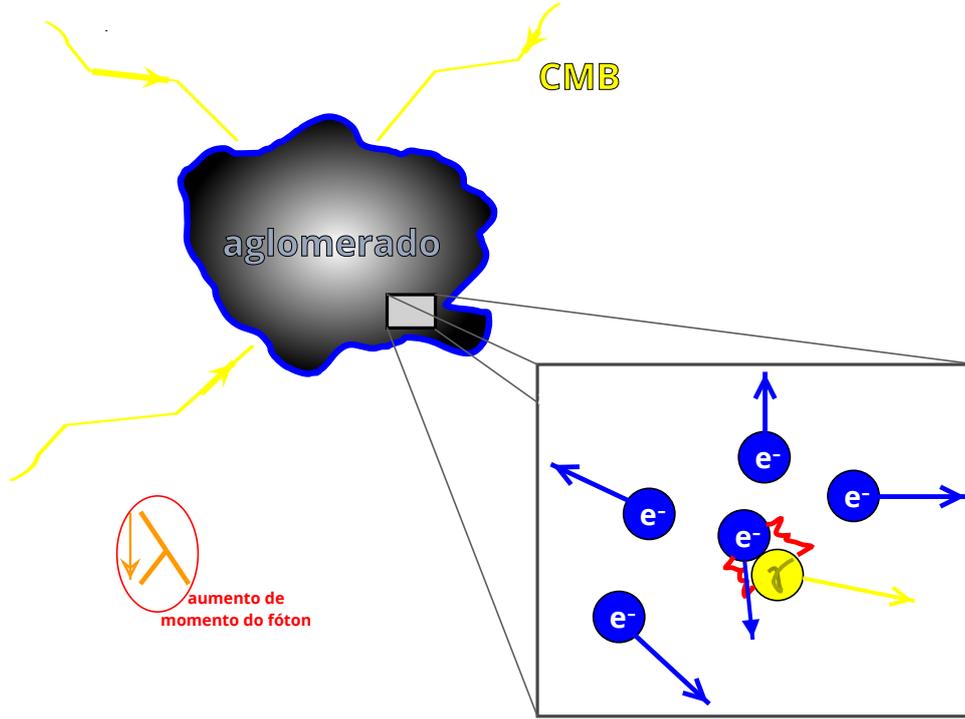


Figura 4.1: Interação radiação-nuvem que caracteriza o Efeito Sunyaev-Zel'dovich.

(região idealizada denominada *blank sky*). A temperatura se conecta a essa potência pela equação

$$\Delta I(z) = 2y \frac{k^3 T^3(z)}{h^2 c^2} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} \left[W(x) + \frac{kT_e}{m_e c^2} F(x) + \frac{v\tau}{cy} \right]. \quad (4.1)$$

onde x é um fator adimensional dependente da temperatura da RCF, dado por

$$x = \frac{h\nu}{k_B T}, \quad (4.2)$$

onde m_e é a massa do elétron $\left(\frac{k_B}{m_e c^2} = 1.686 \times 10^{-10}\right)$, T_e é a temperatura do gás de elétrons, ν é a frequência do fóton imediatamente antes de ser espalhado e T é a temperatura da RCF a qual se quer estimar com as observações. O parâmetro de comptonização, y , é uma medida da variação fracionária da energia do fóton após o espalhamento, calculado a partir de

$$y = \int_{\ell} \frac{kT_e}{m_e c^2} n_e \sigma_T d\ell, \quad (4.3)$$

onde n_e é a densidade eletrônica do meio e σ_T é a seção de choque do espalhamento Thompson ($\sigma_T = 0.665 \times 10^{-28} \text{m}^2$). Além disso, a linha de visada é tomada como caminho para o cálculo da integração e y possui um valor para cada aglomerado considerado.

Em (4.1), há uma soma de três parcelas entre colchetes. A primeira, a função W , diz respeito apenas ao deslocamento (ao longo do eixo das frequências) da curva do espectro de corpo negro dos fótons da RCF. Seu cálculo é feito ao assumir que os elétrons constituem um gás não-relativístico e que movimentos peculiares são negligenciáveis. A literatura denota seu efeito por efeito Sunyaev-Zel'dovich térmico.

$$W(x) = \left[\frac{x(e^x + 1)}{e^x - 1} - 4 \right] \quad (4.4)$$

A segunda função, F , é uma parcela que contabiliza o caráter relativístico do gás eletrônico do aglomerado, dada pela equação

$$F(x) = \frac{kT_e}{m_e c^2} \left[-10 + \frac{47}{2} \coth\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{42}{5} x^2 \coth^2\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{7}{10} x^3 \coth^3\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{7x^2}{5 \sinh^2(x/2)} \left(-3 + x \coth\left(\frac{x}{2}\right) \right) \right]. \quad (4.5)$$

A última parcela, $\frac{v\tau}{cy}$, leva em conta o movimento peculiar do aglomerado: τ é a profundidade óptica do meio e v a componente da velocidade do gás na direção da linha de visada. A construção teórica do modelo discutido nessa sessão pode ser encontrada em [51].

4.2 Absorção Radiativa em Quasares

Outro objeto astrofísico através do qual se pode extrair medidas de temperatura da RCF são os quasares. E as medidas são possíveis através das linhas de absorção das nuvens moleculares presentes nesses sistemas.

Um quasar é um caso limite de um Núcleo Ativo de Galáxia (NAG) em termos de alta luminosidade (correspondente a de 100 galáxias) e velocidade dos jatos relativísticos (em regime superluminal). NAG, por sua vez, é um buraco negro supermassivo capaz de produzir jatos de plasma relativísticos colimados a partir da acreção violenta de matéria

[52], representado na Figura 4.2.

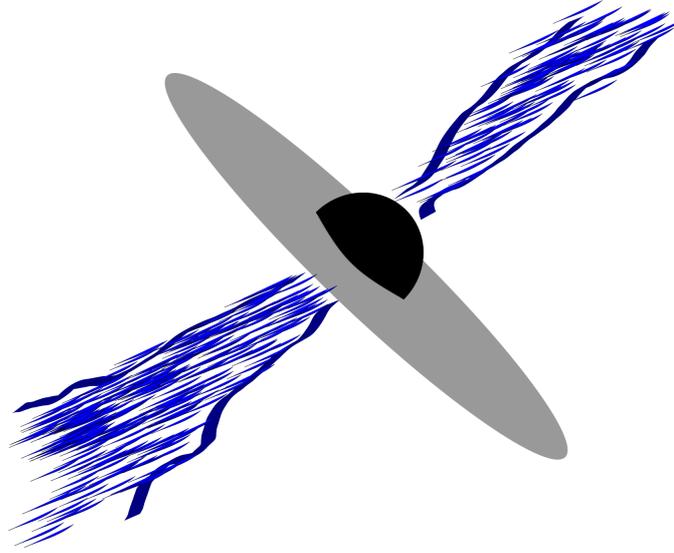


Figura 4.2: NAG e seus jatos relativísticos.

Na região translúcida do NAG, se encontram nuvens moleculares que sofrem transições eletrônicas ao interagirem com radiação eletromagnética. Ao considerar uma nuvem de uma molécula diatômica, monóxido de carbono (CO), por exemplo, e tratar somente seus níveis de transição rotacionais (problema do rotor rígido quântico), as equações que governam suas mudanças de estado na interação com a RCF são

$$\sum_{i \neq j} W_{ji} N_j - \sum_{j \neq i} W_{ij} N_i = 0. \quad (4.6)$$

Nelas, N_i é a densidade numérica da população do i -ésimo nível rotacional da molécula de CO , enquanto W_{ij} é a probabilidade da transição ocorrer entre o estado quântico i para outro estado j com acréscimo de energia $E_j - E_i = h\nu_{ij}$. Cada fator W pode ser calculado através da densidade de energia de um corpo negro, $u(\nu)$, e dos *coeficientes de frequência*, A_{ij} e dos *coeficientes de Einstein*, B_{ij} , conectados pelas relações [53]

$$W_{i,i+1}^{RCF} = B_{i,i+1} u(\nu_{i,i+1}); \quad W_{i+1,i}^{RCF} = A_{i+1,i} + B_{i+1,i} u(\nu_{i,i+1}). \quad (4.7)$$

Coefficientes do tipo A e do tipo B podem ser fixados através de bases de dados espectroscópicas, entre elas, a HITRAN¹. De posse dos fatores W , são encontradas soluções para as densidades populacionais, N , como autovetores do espaço nulo em (4.6).

¹<http://hitran.iao.ru/>

Por fim, na hipótese de que as transições se dão somente pela excitação da nuvem molecular através da RCF, as soluções N se conectam à temperatura dos fótons pela equação de equilíbrio

$$N_J^{eq}(T) = (2J + 1)e^{\left(-\frac{E_J}{kT}\right)}. \quad (4.8)$$

Nesta equação, o número quântico J pode assumir valores 0, 1 ou 2 e T , a temperatura da RCF, pode ser extraída como solução.

A rigor, o cálculo dos coeficientes W deve levar em conta a interação da nuvem de monóxido de carbono com outros gases, além de outros fatores não considerados nessa sequência de cálculos simplificados. Os detalhes em torno da consideração de um cenário mais realista, onde a RCF não é a única a provocar transições eletrônicas das moléculas de CO , podem ser encontrados em [54].

4.3 Organização dos dados

Os dados de temperatura da RCF utilizados são medidas oriundas de quasares, pelas suas linhas de absorção, e de aglomerados de galáxias, via efeito SZ. Os artigos que contém as principais medidas são listados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Pontos de aglomerados de galáxias e quasares. Tabela retirada de [55].

Method	Reference	z	N	T_{CMB} (K)	β	Label
SZ effect towards clusters	Saro et al. (2014) [56]	0.055 – 1.350	158	-	0.017 ± 0.030	[a]
		0.3 – 1.350		-	0.016 ± 0.031	[b]
	de Martino et al. (2015) [57]	< 0.3	481	-	-0.007 ± 0.013	[c]
	Luzzi et al. (2015) [58]	0.011 – 0.972	103	-	0.012 ± 0.016	[d]
		0.011 – 0.972	99	-	0.014 ± 0.016	[e]
		0.3 – 0.972	33	-	0.020 ± 0.017	[f]
	Luzzi et al. (2009) [59]	0.023 – 0.546	13	-	0.065 ± 0.080	[g]
		0.200 – 0.546	7	-	0.044 ± 0.087	[h]
		0.3 – 0.546	2	-	0.05 ± 0.14	[i]
		0 – 1	813	-	0.009 ± 0.017	[j]
		0.30 – 0.35	81	3.562 ± 0.050		
		0.35 – 0.40	50	3.717 ± 0.063		
		0.40 – 0.45	45	3.971 ± 0.071		
		0.45 – 0.50	26	3.943 ± 0.112		
	Hurier et al. (2014) [60]	0.50 – 0.55	20	4.380 ± 0.119		
		0.55 – 0.60	18	4.075 ± 0.156	-0.006 ± 0.022	[k]
		0.60 – 0.65	12	4.404 ± 0.194		
		0.65 – 0.70	6	4.779 ± 0.278		
		0.70 – 0.75	5	4.933 ± 0.371		
0.75 – 0.80		2	4.515 ± 0.621			
0.85 – 0.90		1	5.356 ± 0.617			
0.95 – 1.00		1	5.813 ± 1.025			
Muller et al. (2013) [61]	0.89	1	$5.0791^{+0.0993}_{-0.0994}$			
Noterdeame et al. (2011) [62]	1.7293	1	$7.5^{+1.6}_{-1.2}$			
	1.7738	1	$7.8^{+0.7}_{-0.6}$			
	2.0377	1	$8.6^{+1.1}_{-1.0}$			
Cui et al. (2005) [63]	1.77654	1	7.2 ± 0.8			
Ge et al. (2001) [64]	1.9731	1	7.9 ± 1.0			
Srianand et al. (2000) [65]	2.33771	1	6 – 14	0.005 ± 0.022	[l]	
Srianand (2008) [66]	2.4184	1	9.15 ± 0.72			
Noterdeame et al. (2010) [67]	2.6896	1	$10.5^{+0.8}_{-0.6}$			
Molaro et al. (2002) [68]	3.025	1	$12.1^{+1.7}_{-3.2}$			

A referência [55] contém também diretrizes para combinar dados das diferentes referências bibliográficas. Na Tabela 4.1, na extrema direita, as subtabelas são identificadas cada uma por uma letra minúscula. E as orientações no artigo são sobre quais tabelas podem compor maiores massas de dados, ou seja, quais conjuntos são independentes entre si.

Da referida tabela, este trabalho se utilizou das combinações $[a] + [j] + [l]$, $[c] + [k] + [l]$, $[d] + [l]$ e $[g] + [j] + [l]$. A lista $[l]$, entretanto, ganhou um ponto a mais advindo da descoberta de uma nuvem molecular de CO em *redshift* $z \approx 2,53$ [69].

No entanto, o trabalho de Maeder et. al ([70]) mostra correções em alguns dos pontos de medidas de quasares (tabela $[l]$), especificamente mudanças na abundância relativa de $\frac{[CO]}{[H_2]}$ (estimada a partir das linhas ultravioleta de CO) ocasionadas por efeitos de colisões de partículas, efeito da profundidade óptica do meio etc.

Capítulo 5

Processos Gaussianos

Para calcular a evolução de β é necessário encontrar a evolução da temperatura da RFC a partir dos dados, bem como em valores que se encontram entre pontos imediatamente próximos contidos nos dados. Esta operação caracteriza uma reconstrução e, para este trabalho, foi escolhida a abordagem não-paramétrica conhecida como Processos Gaussianos para executá-la.

A força desta ferramenta reside no fato de que a reconstrução do fenômeno com os dados não necessita, a princípio, de nenhum modelo assumido. Todavia, ela pode incorporar quaisquer bases de conhecimento para melhorar a capacidade preditiva do processo, evidenciando, portanto, o caráter bayesiano da técnica.

5.1 O Conceito

Um Processo Gaussiano é uma distribuição probabilística gaussiana, ponto a ponto, de um campo escalar, gerada por uma função média e um *kernel*. Matematicamente, este processo é representado da seguinte forma [71]:

$$f(P) \sim \mathcal{GP}[\mu(P), k(P, P')], \quad (5.1)$$

onde \mathcal{GP} denota a distribuição que atuará sobre o campo escalar média, μ , e sobre o *kernel*, k , para caracterizar um campo escalar u resultante do processamento $u = f(P)$. P , por sua vez, é um ponto do domínio de f :

$$P = (x, y, z, w, \dots), \quad (5.2)$$

onde $D = \{P \in \mathbb{R}^n\}$ é o domínio de f e n , neste contexto, é o número de variáveis independentes. $\mu(P)$ mostra o comportamento médio de $f(P)$, enquanto $k(P, P')$ é uma medida de distância, em termos de correlação, entre dois pontos de coordenadas (P, u) e (P', u') arbitrariamente escolhidos na hipersuperfície $u - f(P) = 0$.

Da própria definição de um Processo Gaussiano, nota-se que a função média e o *kernel* são, na realidade, momentos de primeira e segunda ordem, respectivamente, responsáveis por gerar uma distribuição Gaussiana em torno de $f(P)$:

$$\mu(P) = E[f(P)], \quad (5.3)$$

$$k(P, P') = E \{ [f(P) - \mu(P)] [f(P') - \mu(P')] \}, \quad (5.4)$$

onde $E(\cdot)$ é a *expectativa* ou *valor esperado* do argumento entre parênteses.

Em aplicações específicas, por exemplo, no problema de interpolação de pontos, é desejável que a função *kernel* seja bem comportada, que seja estável no domínio todo (no mínimo, C^1 diferenciável). E uma estrutura matemática que oferece derivabilidade em qualquer ordem é a do *kernel gaussiano*, dado pela expressão

$$k(P, P') = \sigma^2 e^{-\frac{\|P' - P\|^2}{2\ell^2}}. \quad (5.5)$$

onde σ e ℓ são os graus do *kernel*, constantes a serem determinadas segundo algum critério de otimização.

O *kernel* Gaussiano pode ser entendido como uma distribuição Gaussiana em torno do ponto P (região de máxima densidade probabilística), enquanto P' pertence à distribuição, mas já experimenta o decaimento gaussiano no valor de densidade a ele associado.

De um ponto de vista prático, para interpolar pontos, o grau de liberdade ℓ captura o comportamento de variações ao longo da distância $\|P' - P\|$ e σ é uma medida de correlação entre os pontos P e P' .

5.2 Reconstrução com Processos Gaussianos

Na subseção anterior, o conceito de Processo Gaussiano foi explorado no contexto em que o campo u possuía um domínio contínuo. No entanto, quando um campo é medido,

não se pode coletar seus valores associados a todos os pontos. Há limites inerentes às observações, portanto, u é conhecido somente em um subconjunto finito pertencente ao domínio original. Ademais, existem pontos fora do conjunto de dados (intermediários entre duas medidas ou além dos extremos do conjunto) que permitiriam uma melhoria na previsão do comportamento do campo. E a *regressão*, também chamada de *reconstrução*, cumpre este papel: estimar valores de campo em lacunas dos dados.

Seja \mathbf{u} o vetor de N medidas discretas do campo u associado ao vetor de N pontos \mathbf{P} (amostras do ponto P):

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}; \quad (5.6)$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_N \end{pmatrix}; \quad (5.7)$$

$$P_i = (x_i, y_i, z_i, w_i, \dots). \quad (5.8)$$

De posse dos dados $\{\mathbf{P}, \mathbf{u}\}$, a reconstrução consistirá em estimar o conjunto $\{\mathbf{P}^*, \mathbf{u}^*\}$, já que essa informação não é acessível pelas observações.

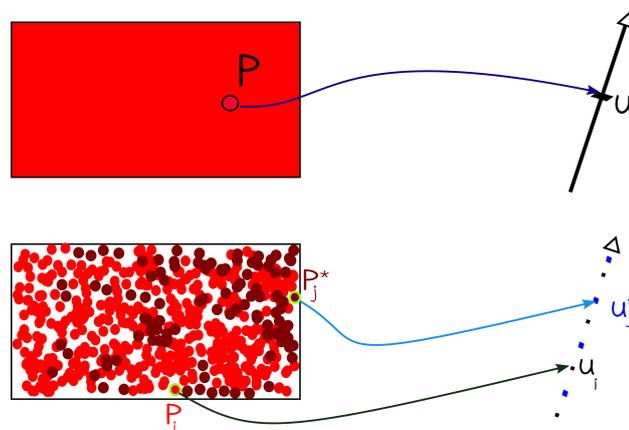


Figura 5.1: Dados de um fenômeno físico e o problema da reconstrução: círculos vermelhos representam pontos coletados, enquanto círculos em vermelho escurecido são pontos nos quais o campo foi estimado.

Para este tipo de reconstrução, deve-se, inicialmente, estimar os dados através de uma função oriunda de um Processo Gaussiano. Feito isso, os dados reconstituídos se conectarão ao campo nos pontos faltantes através de uma distribuição de probabilidade conjunta da qual serão extraídos os momentos gaussianos da função estimada.

As subseções que seguem descrevem detalhes destas duas etapas mencionadas e podem ser encontradas em [72].

5.2.1 Reconstrução dos dados

Para reproduzir os dados com um processo gaussiano, basta utilizá-los como entrada para gerá-lo, ou seja, assumir a hipótese de que eles se comportam, na média, em torno do processo calculado e marginalizar a distribuição em torno dele.

Os pontos da observação, \mathbf{P} , podem ser mapeados nos valores do campo, \mathbf{u} , através de uma família de funções geradas como processos gaussianos, contidas em um vetor \mathbf{f} ,

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}; \quad (5.9)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{P}) \sim \mathcal{GP}[\boldsymbol{\mu}(\mathbf{P}), k(\mathbf{P}, \mathbf{P}')]; \quad (5.10)$$

$$\mathbf{f} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{K}). \quad (5.11)$$

onde \mathbf{f} está representada por sua distribuição probabilística, no caso, por uma distribuição gaussiana, simbolizada por \mathcal{N} , detalhada a seguir:

$q \sim \mathcal{N}(\mu_q, \sigma_q^2)$ mostra que uma variável aleatória q segue uma distribuição normal dada pela seguinte equação:

$$p(q) = \frac{1}{\sigma_q} \varphi\left(\frac{q - \mu_q}{\sigma_q}\right) \quad (5.12)$$

A função φ é dada por:

$$\varphi(y) = \frac{e^{-y^2}}{\sqrt{\pi}} \quad (5.13)$$

Em (5.11), \mathbf{K} é a matriz de covariância que possui como componentes funções do tipo *kernel gaussiano* dos pontos contidos em \mathbf{P} ,

$$K_{ij} = k(P_i, P_j) = \sigma^2 e^{-\frac{\|P_j - P_i\|^2}{2l^2}}. \quad (5.14)$$

$\boldsymbol{\mu}$, por sua vez, é uma matriz de funções média associadas às funções contidas em \mathbf{f} . Esse vetor de médias exprime hipóteses formuladas sobre o comportamento dos valores do campo \mathbf{u} . E para que não seja assumido nenhum modelo, ou seja, para minimizar possíveis vieses inseridos no problema, tomam-se funções média nulas ($\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$).

$$\mathbf{f} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{K}). \quad (5.15)$$

Note que os graus de liberdade σ e l , presentes nas componentes da matriz \mathbf{K} (Equação 5.14), necessitam ser avaliados para a completa caracterização de \mathbf{f} . Contudo, por se tratar de um problema de otimização à parte, seu cálculo será efetuado ao final da reconstrução dos dados.

A hipótese básica em cima dos dados, a fim de que eles incorporem o processo gaussiano que originou \mathbf{f} , é a de que os valores do campo \mathbf{u} flutuam em torno do processo gaussiano definido em (5.15) segundo a relação

$$\mathbf{u} = \mathbf{f} + \boldsymbol{\epsilon}. \quad (5.16)$$

$\boldsymbol{\epsilon}$ é um ruído branco, um sinal governado pela lei

$$\boldsymbol{\epsilon} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{C}). \quad (5.17)$$

onde \mathbf{C} é a matriz de covariância das medidas alocadas no vetor \mathbf{u} . Em particular, quando os dados são independentes e de supostas distribuições normais, esta matriz é calculada a partir de desvios padrões das medidas alocados em um vetor $\boldsymbol{\sigma}_u$ da seguinte forma:

$$C_{ij} = \delta_{ij}\sigma_{u_i}. \quad (5.18)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker.

Portanto, os valores do campo que incorporam o processo gaussiano e o ruído das medidas pode ser representado na expressão

$$\mathbf{u}|\mathbf{f} \sim \mathcal{N}(\mathbf{f}, \mathbf{K}) = \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{K} + \mathbf{C}), \quad (5.19)$$

sendo que $\mathbf{u}|\mathbf{f}$ guarda os valores \mathbf{u} à luz da informação contida em \mathbf{f} .

E para recuperar os dados a partir de $\mathbf{u}|\mathbf{f}$, deve-se marginalizar sua distribuição de probabilidade sobre \mathbf{f} ,

$$p(\mathbf{u}) = \int p(\mathbf{u}|\mathbf{f})p(\mathbf{f})d\mathbf{f}. \quad (5.20)$$

Combinando (5.11), (5.19) com a descrição de uma distribuição normal presente em (5.12) e (5.13), chega-se à densidade probabilística de \mathbf{u} , porém, mostrada a seguir na versão logarítmica

$$\mathbf{u} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{K} + \mathbf{C}), \quad (5.21)$$

$$\ln p(\mathbf{u}) = -\frac{1}{2}\mathbf{u}^T(\mathbf{K} + \mathbf{C})^{-1}\mathbf{u} - \frac{1}{2}\ln|\mathbf{K} + \mathbf{C}| - \frac{N}{2}\ln 2\pi. \quad (5.22)$$

Apesar do campo ter sido reconstruído com um processo gaussiano que passa a representá-lo, para que ele esteja completamente determinado, ainda resta avaliar os valores dos graus de liberdade do *kernel gaussiano* da matriz \mathbf{K} . Para isso, basta encontrar o par ordenado de parâmetros (σ, l) que deixa as componentes de \mathbf{u} em seus valores mais prováveis.

As coordenadas paramétricas, portanto, devem atingir um ponto de máximo da função $\ln p(\mathbf{u})$,

$$Q = \arg \max_{Q \in \mathbb{R}^2} \ln p(\mathbf{u}), \quad (5.23)$$

$$Q = (\sigma, \ell). \quad (5.24)$$

Através da recuperação dos dados por um processo gaussiano, $p(\mathbf{u})$, a última etapa será uma inferência sobre o comportamento do campo em pontos não conhecidos, ou seja, a reconstrução propriamente dita.

5.2.2 Predição

A última etapa da reconstrução é a predição, consiste em escolher pontos fora dos dados, ou seja, escolher um vetor de pontos \mathbf{P}^* , e avaliar de que maneira, provavelmente, eles serão mapeados em valores do campo contidos no vetor \mathbf{u}^* .

O comportamento do campo nestes pontos será dado pelos valores da função que mapeia \mathbf{P}^* em \mathbf{u}^* obtidos à luz da informação dos dados reconstruídos na etapa anterior, $p(\mathbf{u})$. Então, o problema se resume a encontrar a função mencionada, denotada aqui por $\mathbf{f}^*|\mathbf{u}$ [73].

No entanto, o cálculo da função nos pontos de interpolação exigirão outro processo gaussiano para gerar seus valores *à priori*, considerando o caráter bayesiano dessa abordagem.

$$\mathbf{f}^* \sim \mathcal{GP}[\boldsymbol{\mu}^*, k(\mathbf{P}^*, \mathbf{P}^{*'})]. \quad (5.25)$$

Sem assumir nenhum modelo pra \mathbf{f}^* ($\boldsymbol{\mu}^* = \mathbf{0}$) e considerando um *kernel* Gaussiano (Equação 5.5), chega-se ao valor *à priori* da função:

$$\mathbf{f}^* \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{K}^{**}). \quad (5.26)$$

onde \mathbf{K}^{**} é a matrix de covariância cujos elementos são dados por

$$K_{ij}^{**} = k(P_i^*, P_j^*) = \sigma^2 e^{-\frac{\|P_j^* - P_i^*\|^2}{2l^2}}. \quad (5.27)$$

Para conectar a função *à priori* com os dados, é necessário construir uma distribuição probabilística conjunta entre ambos. Uma forma de fazer isso é considerar um vetor estendido de funções média, que guarda as médias de ambos, e uma matriz de covariância

que correlaciona todas as componentes de ambos em todas as combinações possíveis,

$$\mathbf{f}^*, \mathbf{u} \sim \mathcal{N}(\tilde{\boldsymbol{\mu}}, \tilde{\mathbf{K}}). \quad (5.28)$$

$\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ é o vetor de funções média, com as componentes de funções média associadas a \mathbf{f}^* nas primeiras linhas e com as funções média associadas aos dados \mathbf{u} nas demais. E como ambos possuem funções média nulas (*priors* nulos para evitar vieses na reconstrução), $\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ também será nulo,

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (5.29)$$

$\tilde{\mathbf{K}}$ é a matriz de covariância da distribuição conjunta. Ela se estrutura com as usuais matrizes de correlação associadas a \mathbf{f}^* e \mathbf{u} , \mathbf{K}^{**} e \mathbf{K} , respectivamente, mas também possui matrizes que acoplam, em termos de correlação, \mathbf{f}^* com \mathbf{u} (matrizes \mathbf{K}^{*o} e \mathbf{K}^{o*}),

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}^{**} & \mathbf{K}^{*o} \\ \mathbf{K}^{o*} & \mathbf{K} + \mathbf{C} \end{pmatrix}. \quad (5.30)$$

Para gerar as matrizes de correlação cruzada, basta usar o *kernel*

$$K_{ij}^{*o} = k(P_i^*, P_j) = \sigma^2 e^{-\frac{\|P_j^* - P_i\|^2}{2l^2}}, \quad (5.31)$$

$$K_{ij}^{o*} = K_{ji}^{*o}. \quad (5.32)$$

$\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ e $\tilde{\mathbf{K}}$ definem uma densidade de probabilidade conjunta $p(\mathbf{f}^*, \mathbf{u})$. E a partir dela, pode-se encontrar a informação de \mathbf{f}^* condicionada ao conhecimento existente sobre \mathbf{u} , ou seja, calcular a densidade $p(\mathbf{f}^*|\mathbf{u})$. Esta última pode ser obtida segundo as equações do seguinte teorema [74]:

Se \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 forem variáveis aleatórias, conectadas por uma distribuição normal conjunta $\mathcal{N}(\mathbf{m}, \mathbf{V})$, de momentos dados pelas relações que seguem,

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix}, \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} \\ \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{\Lambda} = \mathbf{V}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Lambda}_{11} & \mathbf{\Lambda}_{12} \\ \mathbf{\Lambda}_{21} & \mathbf{\Lambda}_{22} \end{pmatrix}, \quad (5.33)$$

Então, o conhecimento de \mathbf{x}_1 condicionado à informação obtida de \mathbf{x}_2 obedece a seguinte equação:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2) &= \mathcal{N}(\mathbf{m}_{1|2}, \mathbf{V}_{1|2}) \\ \mathbf{m}_{1|2} &= \mathbf{m}_1 + \mathbf{V}_{12}\mathbf{V}_{22}^{-1}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{m}_2) \\ &= \mathbf{m}_1 - \mathbf{\Lambda}_{11}^{-1}\mathbf{\Lambda}_{12}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{m}_2) \\ &= \mathbf{V}_{1|2}[\mathbf{\Lambda}_{11}\mathbf{m}_1 - \mathbf{\Lambda}_{12}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{m}_2)], \\ \mathbf{V}_{1|2} &= \mathbf{V}_{11} - \mathbf{V}_{12}\mathbf{V}_{22}^{-1}\mathbf{V}_{21} = \mathbf{\Lambda}_{11}^{-1} \end{aligned} \quad (5.34)$$

(5.33) e (5.34) combinadas com as equações (5.28), (5.29) e (5.30) permitem caracterizar $\mathbf{f}^*|\mathbf{u}$ segundo a equação

$$\mathbf{f}^*|\mathbf{u} \sim \mathcal{N}(\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{f}^*|\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{f}^*|\mathbf{u}}), \quad (5.35)$$

onde

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{\mathbf{f}^*|\mathbf{u}} = \mathbf{K}^{*o}(\mathbf{K} + \mathbf{C})^{-1}\mathbf{u} \quad (5.36)$$

e

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{f}^*|\mathbf{u}} = \mathbf{K}^{**} + \mathbf{K}^{*o}(\mathbf{K} + \mathbf{C})^{-1}\mathbf{K}^{o*}. \quad (5.37)$$

A título de ilustração, se o interesse for a reconstrução de uma superfície no espaço tridimensional euclidiano, de equação $z - f(x, y) = 0$, da qual só possuímos medidas discretas, pontos no espaço dados por \mathbf{P} , a reconstrução com processos gaussianos nos dará uma função média e uma família de funções que excursionarão entre os limites de uma barra de erro em termos de funções. Geometricamente, essas superfícies delimitam, especificamente neste caso, um volume de confiança (a 1σ).

Na Figura 5.2, os pontos brancos representam os dados coletados, a superfície de

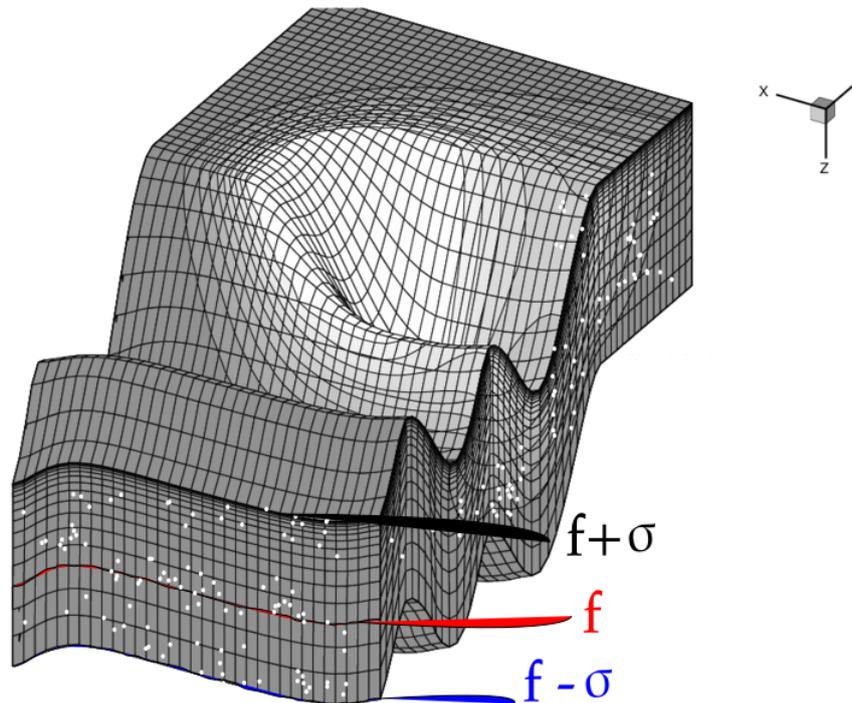


Figura 5.2: Reconstrução com Processos Gaussianos para estimar um campo escalar bi-dimensional. Figura adaptada de [75].

contorno vermelho é a função de média, resultante da regressão, enquanto as superfícies que vinculam a coordenada z do volume (contornos preto e azul) são deslocamentos da média nos limites da barra de erro.

5.3 Aspectos computacionais da técnica

O problema de otimização descrito por 5.23 pode ser resolvido por uma gama de técnicas em otimização não-linear. Porém, uma classe especial delas é preferível devida às implementações possíveis com baixo esforço computacional [76]: métodos baseados em gradiente.

Métodos baseados em gradiente são algoritmos de busca que perfazem uma trajetória orientada pelo vetor gradiente do funcional custo a ser minimizado. Sob a hipótese de convexidade da hipersuperfície que contém a congruência, a cada passo de cálculo, a distância percorrida é definida segundo uma regra que o associa ao vetor gradiente no ponto. O tipo de função que liga essa distância ao gradiente especifica o método a ser executado.

$$\left(\overrightarrow{GG'}\right)_k = \vec{d}_k, \quad (5.38)$$

onde $G = G_k$ é um ponto, na iteração k , contido na hipersuperfície do funcional, $G' = G_{k+1}$ é o próximo ponto a ser atingido e \vec{d}_k é a função vetorial que associará os pontos ao gradiente.

O exemplo mais simples dessa classe de métodos é o gradiente descendente, que consiste em orientar o caminho de minimização através do oposto do vetor gradiente do funcional em questão [77], ou seja, definir a função vetorial de distância

$$\vec{d}_k = -\alpha_k \left[\left(\vec{\nabla} J \right) \Big|_G \right]_k. \quad (5.39)$$

onde α é uma função que assume valores positivos, J é o funcional dependente dos parâmetros e, com o intuito de apresentar a ideia geométrica do método, o gráfico do funcional é apresentado abaixo, particularmente para o caso onde ele depende de apenas dois parâmetros, $J = J(\sigma, \ell)$.

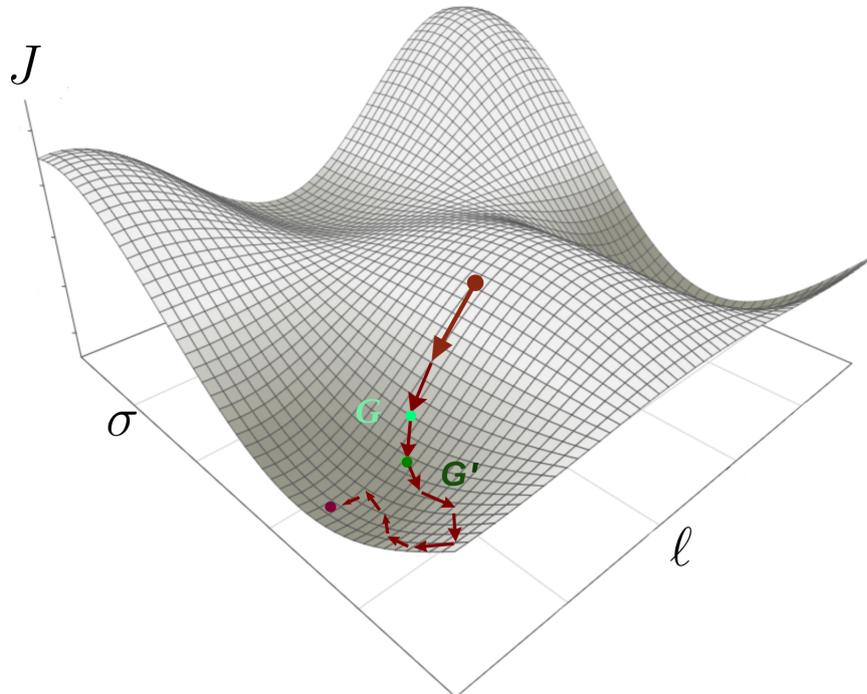


Figura 5.3: Geometria do gradiente descendente.

No que concerne este trabalho, foi utilizada uma biblioteca denotada *GaussianProc-*

cessRegression contida um pacote computacional em linguagem Python, o *Scikit Learn*¹. E dentre os métodos baseados em gradiente, aquele escolhido foi o *Broyden – Fletcher – Goldfarb – Shanno* [78], que implementa o vetor de distâncias a partir de uma dependência com fatores de segunda ordem do funcional J e de derivadas de segunda ordem deste último encapsuladas em uma matriz Hessiana [79].

A justificativa desse método se dá no contorno de problemas de algoritmos podem encontrar quando estacionam em uma região de gradiente nulo. Com derivadas de segunda ordem, pode-se determinar de forma unívoca se um vale é um ponto de equilíbrio global ou local. Além disso, como o algoritmo trata de minimização de funcionais, a função J é o oposto do logaritmo natural da verossimilhança, uma vez que a minimização deste último implica na maximização da própria verossimilhança,

$$J = -\ln \mathcal{L}. \tag{5.40}$$

¹https://scikit-learn.org/stable/modules/gaussian_process.html

Capítulo 6

Metodologia e Resultados

Neste capítulo, são descritos os passos executados para a reconstrução da temperatura e a imposição de vínculos a β . Cada reconstrução contou com cerca de 300 pontos avaliados entre os limites originais de cada tabela de dados. Na Subseção 6.1, a reconstrução de temperatura é executada com Processos Gaussianos a partir dos dados mencionados no Capítulo 4, enquanto o cálculo de $\beta(z)$, a partir das reconstruções anteriores, é detalhado na Subseção 6.2.

6.1 Reconstrução da Temperatura

Para a reconstrução da temperatura, basta executar o algoritmo sobre as medidas de temperatura, $\mathbf{u} = \mathbf{T}$, e de *redshift*, $\mathbf{P} = \mathbf{z}$, descritas na Sessão 4.3. Vale ressaltar que a matriz de covariância dos dados, \mathbf{C} , neste caso, é uma matriz diagonal construída segundo a Equação 5.18 a partir das componentes $u_i = T_i = (\mu_T)_i \pm (\sigma_T)_i$. Além disso, para a etapa de otimização foi assumida uma coordenada de inicialização no espaço de parâmetros: $(\sigma, \ell) = (0,01; 0,5)$.

Utilizando (5.10) a (5.37) aplicadas sobre os dados de temperatura mencionados, chega-se às reconstruções de temperatura da Figura 6.1.

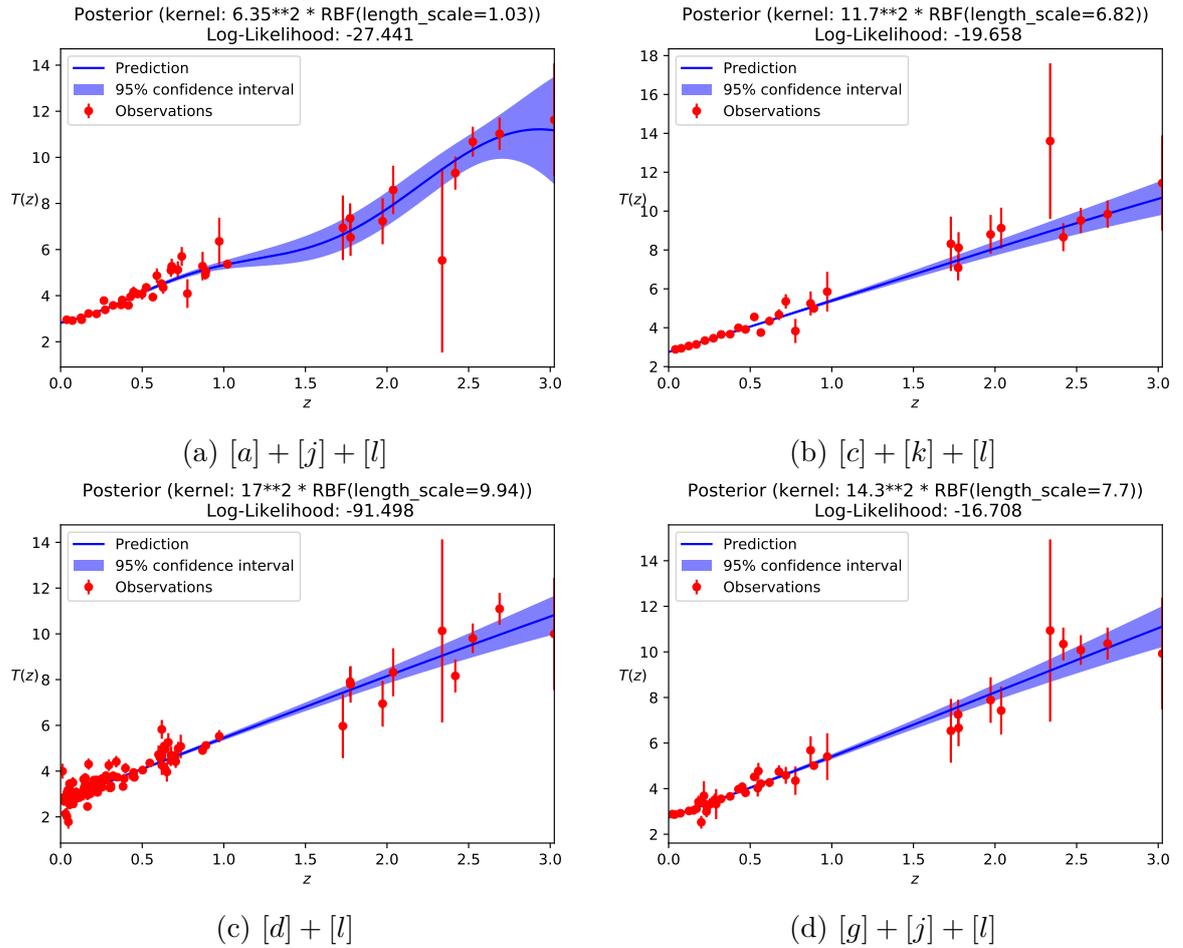


Figura 6.1: Reconstrução não-paramétrica dos dados descritos em [55].

Antes do cálculo de β , vale analisar a plausibilidade dos perfis de temperatura encontrados à luz do Modelo Padrão, já que a lei de temperatura por uma função afim (Equação 3.5) está muito bem estabelecida pelos dados [80].

Das reconstruções presentes na Figura 6.1, nota-se, graficamente, que a combinação $[a] + [j] + [l]$ (6.1a) distoa de uma reta. Porém, para analisar a concordância das reconstruções com o modelo padrão, é necessário quantificá-la de alguma forma. E uma medida de distância estatística útil para este tipo de avaliação é a função qui-quadrada reduzida:

Seja O uma grandeza física e w uma variável independente, ambas conectadas por um modelo funcional m . Seja $P_i = (w_i, O_i)$ o i -ésimo ponto de um conjunto de dados com n valores não-correlacionados observados de O , cuja amostra O_i obedece uma gaussiana de média $(\mu_O)_i$ e desvio padrão $(\sigma_O)_i$:

$$O = m(w), \quad (6.1)$$

$$O_i = (\mu_O)_i \pm (\sigma_O)_i. \quad (6.2)$$

O modelo m possui concordância razoável com os dados se o valor da função *qui-quadrada reduzida*, χ^2 , é da ordem da unidade, $\chi^2 \sim 1$.

Esta função, uma espécie de *distância estatística* entre o modelo e os dados, pode ser calculada da seguinte forma:

$$\chi^2 = \frac{r}{n}, \quad (6.3)$$

$$r = \sum_{k=1}^n \left[\frac{m(w_k) - (\mu_O)_k}{(\sigma_O)_k} \right]^2. \quad (6.4)$$

Somente reconstruções de temperatura que possuíam *qui-quadrada* próxima de 1, quando comparadas ao modelo padrão, foram consideradas válidas. Utilizando a *regra empírica* [81], essa proximidade foi verificada quando o valor da função caiu no intervalo 3σ da frequência probabilística *qui-quadrada* [82].

Os referidos pontos, munidos de ruído gaussiano, se distribuem em torno do modelo na mesma medida em que a função *qui-quadrada reduzida* assume valores de uma distribuição normal de média unitária e, simultaneamente, equivalente ao produto da metade do número de pontos pela variância.

$$\mu_{\chi^2} = \frac{n}{2} \sigma_{\chi^2}^2 = 1, \quad (6.5)$$

$$\chi^2 \sim \mathcal{N}(\mu_{\chi^2}, \sigma_{\chi^2}^2). \quad (6.6)$$

O número de pontos da reconstrução é $n = 300$, o que implica no valor $\sigma_{\chi^2} \approx 0,0816$ para o desvio padrão. Conseqüentemente, o intervalo a 3σ dentro do qual os valores da qui-quadrada reduzida de cada reconstrução deve cair é

$$\mathbb{I} = [\mu_{\chi^2} - 3\sigma_{\chi^2}; \mu_{\chi^2} + 3\sigma_{\chi^2}] \approx [0,7551; 1,2449]. \quad (6.7)$$

Para o cálculo de χ^2 de cada reconstrução, o valor $(\mu_O)_i$ estava alocado no i -ésimo ponto da função de média descrita pela curva "*Prediction*" das Figuras 6.1, enquanto $(\sigma_O)_i$ foi extraído a partir da metade do módulo da i -ésima barra de erro correspondente à mesma posição dessas mesmas figuras, especificamente no contorno denotado por "*confidence interval*".

A variável independente é o *redshift*, $w = z$, excursionado, agora, em 300 valores identificados nas Figuras já mencionadas da reconstrução, enquanto o modelo, $m(w) = m(z)$, é o modelo padrão descrito pela equação

$$m(z) = T_o(1 + z), \quad (6.8)$$

onde $T_o \approx 2,7260$ é o valor de temperatura da RCF atual extraído do experimento FIRAS (Referência [83]).

Ao calcular a concordância dos pontos μ_T e σ_T , associados às reconstruções da Figura 6.1 com a Equação 6.8, com o modelo $m(z)$, presente em (6.8), chega-se aos seguintes valores de qui-quadrada reduzida:

$$\left(\chi^2\right)_{[a]+[j]+[l]} \approx 3,14; \quad (6.9)$$

$$\left(\chi^2\right)_{[c]+[k]+[l]} \approx 0,94; \quad (6.10)$$

$$\left(\chi^2\right)_{[d]+[l]} \approx 0,06; \quad (6.11)$$

$$\left(\chi^2\right)_{[g]+[j]+[l]} \approx 0,89. \quad (6.12)$$

Das reconstruções apresentadas até aqui, somente as reconstruções com as combinações de dados $[c] + [k] + [l]$ e $[g] + [j] + [l]$ concordam com o modelo padrão, uma vez que

caem dentro do intervalo descrito por (6.7), enquanto as combinações $[d] + [l]$ e $[a] + [j] + [l]$ estão fora dos valores admissíveis.

Refazendo exatamente os mesmos passos para a reconstrução da temperatura com os dados corrigidos por Maeder et al ([70]), chega-se aos seguintes perfis de temperatura com 300 pontos graficados:

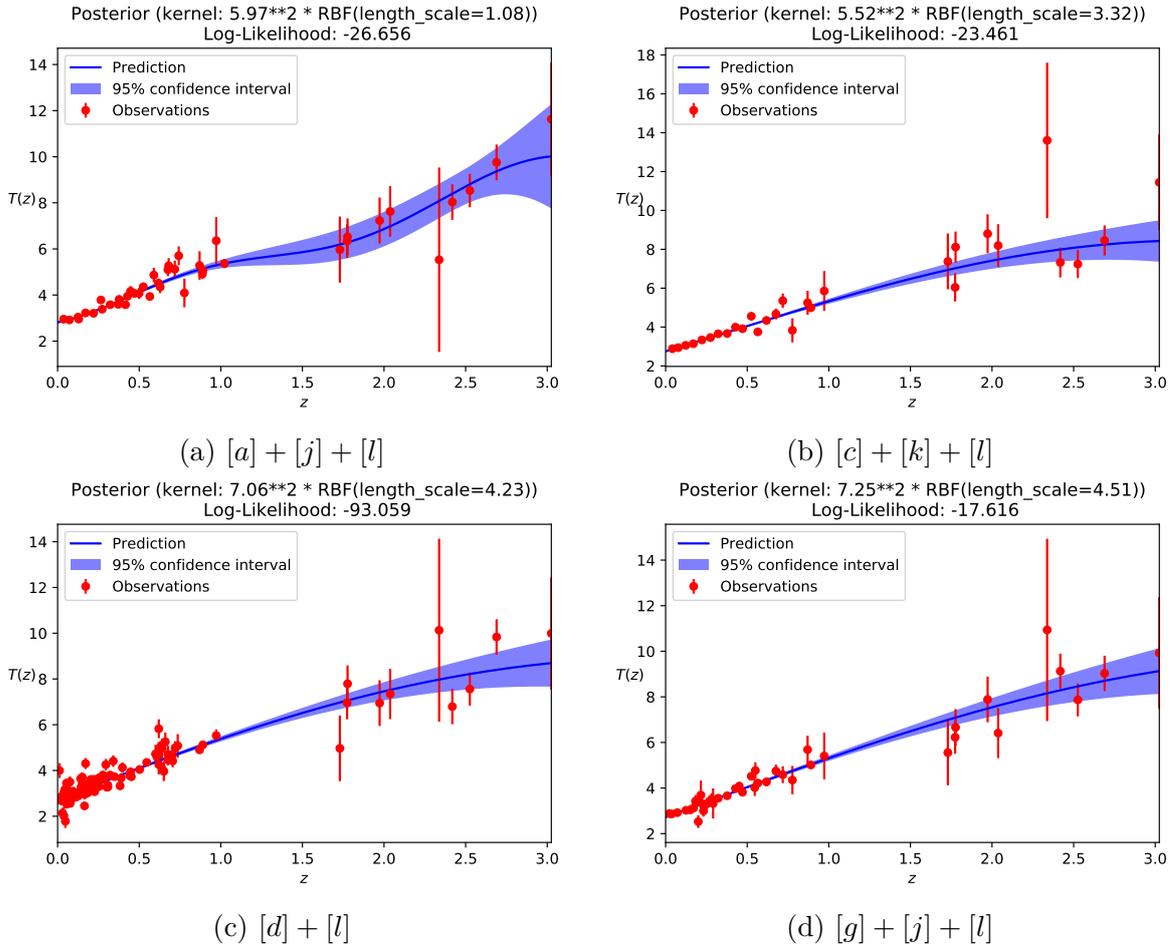


Figura 6.2: Reconstrução não-paramétrica dos dados descritos em [70].

Visualmente, os gráficos acima distoam de uma função afim. Por si só, isso indica que a correção efetuada por Maeder et. al possui problemas. Porém, é necessário quantificar a função *qui-quadrada* dos pontos da reconstrução com o modelo padrão para uma análise mais acertiva. Repetindo o cálculo da função *qui-quadrada* reduzida com as novas reconstruções e o modelo padrão, chega-se aos seguintes valores, agora denotados com o sobrescrito "*maeder*" para diferenciar das interpolações anteriores:

$$\left(\chi^2\right)_{[a]+[j]+[l]}^{maeder} \approx 5,84; \quad (6.13)$$

$$(\chi^2)_{[c]+[k]+[l]}^{maeder} \approx 9,35; \quad (6.14)$$

$$(\chi^2)_{[d]+[l]}^{maeder} \approx 7,91; \quad (6.15)$$

$$(\chi^2)_{[g]+[j]+[l]}^{maeder} \approx 7,45; \quad (6.16)$$

Conforme esperado, todas as reconstruções da Figura 6.2 distoaram do modelo padrão, já que os valores de *qui-quadrada* caíram fora do intervalo calculado em 6.7. Portanto, a partir do critério de concordância via função qui-quadrada, as únicas reconstruções de temperatura admissíveis para o cálculo de β são as descritas pelas Figuras 6.1b e 6.1d, geradas a partir das combinações de dados $[c] + [k] + [l]$ e $[g] + [j] + [l]$. Para destacar as regressões que satisfizeram este teste inicial, seus gráficos são apresentados separadamente nas Figuras 6.3 e 6.4.

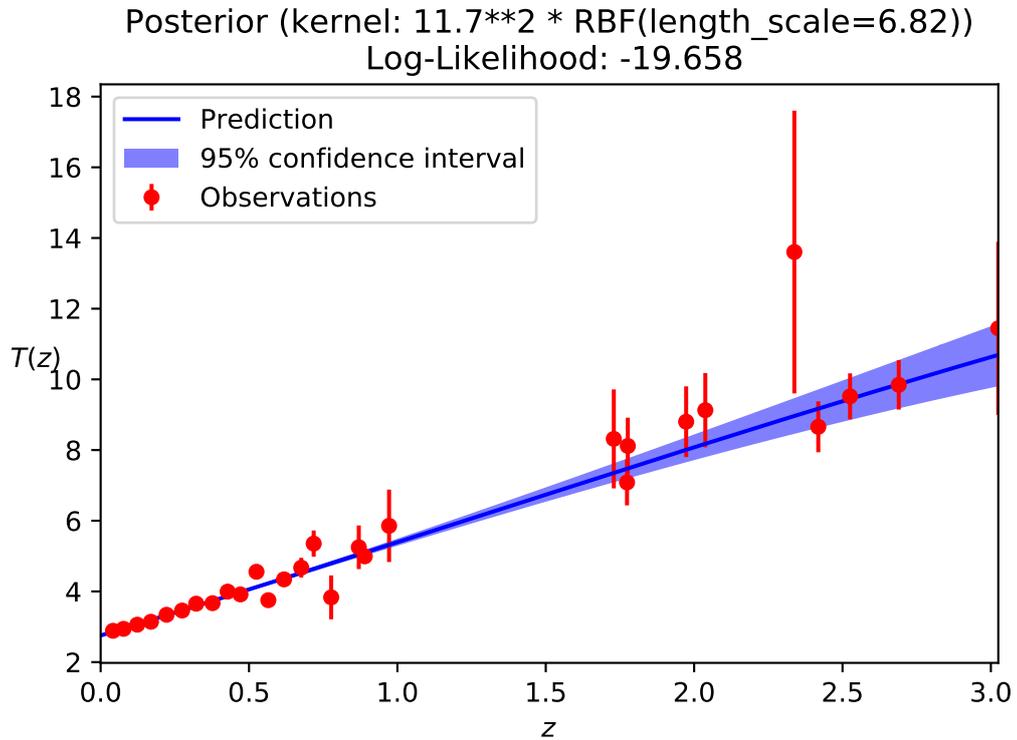


Figura 6.3: Reconstrução não-paramétrica dos dados admissível na combinação $[c] + [k] + [l]$.

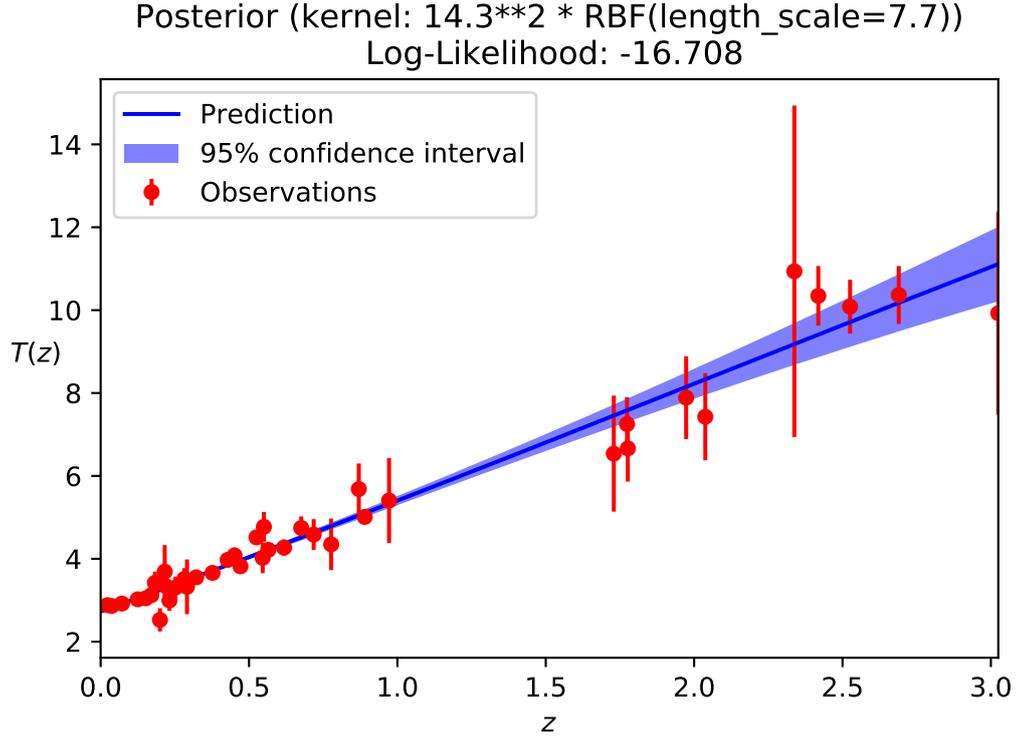


Figura 6.4: Reconstrução não-paramétrica dos dados admissível na combinação $[g] + [j] + [l]$.

6.2 Cálculo da taxa de criação de fótons

Com as reconstruções de temperatura prontas, basta processá-las como entradas da equação $T = T_o(1 + z)^{1-\beta}$ para encontrar, indiretamente, as reconstruções de β . Para isso, entretanto, é necessário propagar a barra de erro da temperatura, T , para a taxa de produção de radiação, β . E como a relação entre as duas funções é não-linear, convém utilizar uma aproximação perturbativa, em primeira ordem, para tratar a curva localmente como uma reta [84].

$$\beta = f(T) \simeq f(\mu_T) + \left. \frac{\partial f}{\partial T} \right|_{\mu_T} (T - \mu_T). \quad (6.17)$$

$$\mu_\beta = f(\mu_T), \quad \sigma_\beta^2 = \left(\left. \frac{\partial f}{\partial T} \right|_{\mu_T} \right)^2 \sigma_T^2, \quad (6.18)$$

onde

$$f(T) = \begin{cases} 1 - \frac{T'}{T}, & z = 0 \\ 1 + \frac{1}{\ln(1+z)} \ln\left(\frac{T_o}{T}\right), & z \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

(6.19)

Utilizando valores de μ_T da curva "Prediction" e σ_T da barra de erro do contorno "confidence interval", ambos advindos das reconstruções das Figuras 6.3 e 6.4, calcula-se μ_β e σ_β com 6.18, o que leva aos seguintes perfis de β :

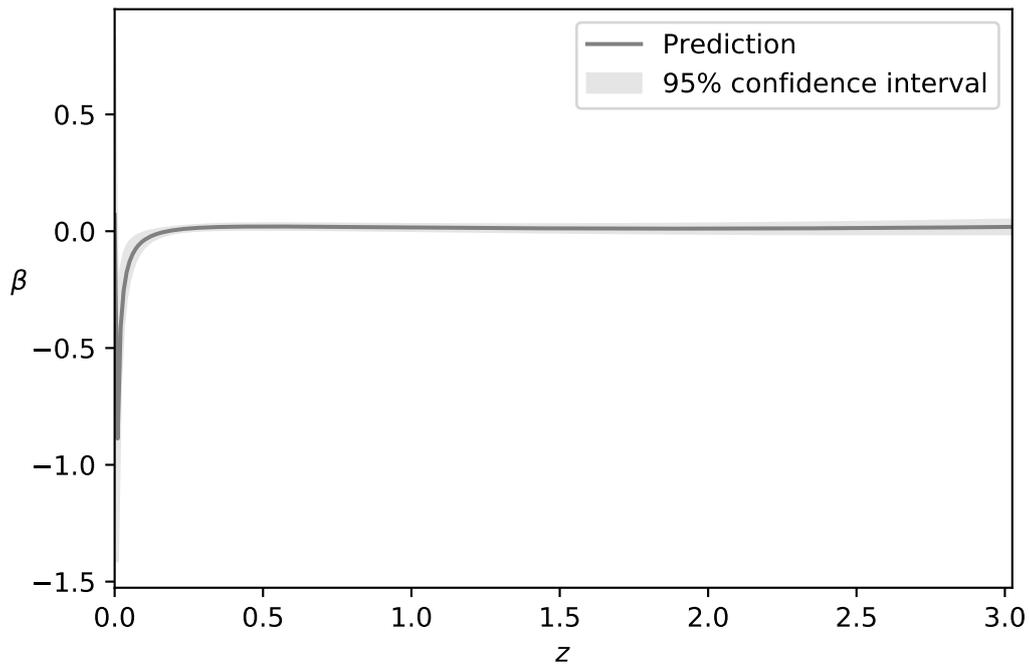


Figura 6.5: Reconstrução não-paramétrica de β a partir da combinação $[c] + [k] + [l]$.

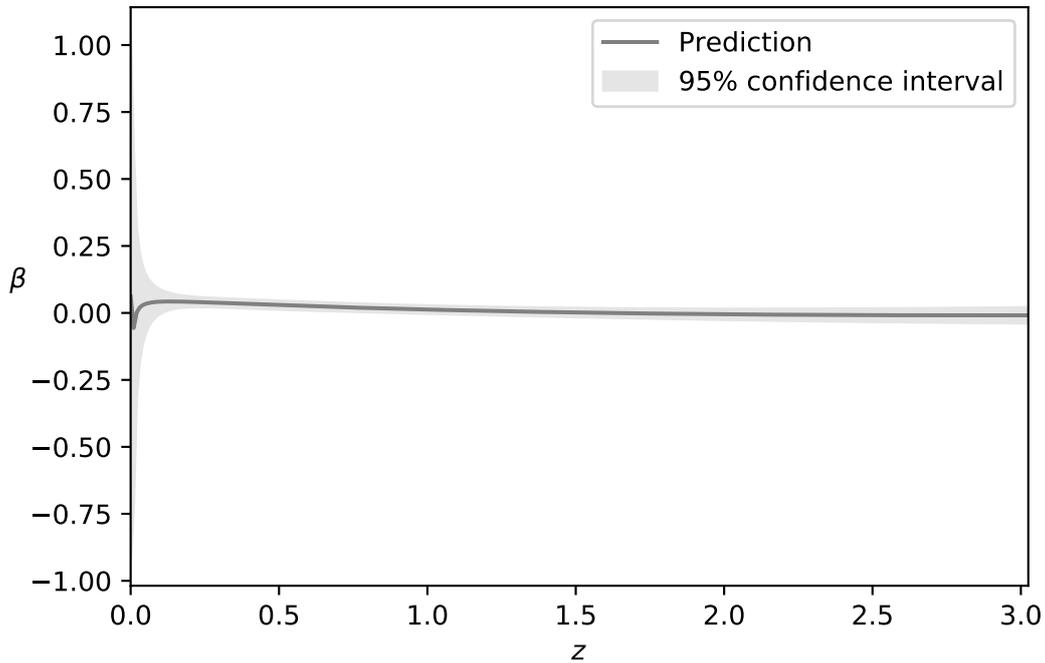


Figura 6.6: Reconstrução não-paramétrica de β a partir da combinação $[g] + [j] + [l]$.

Entretanto, essas reconstruções de β não devem diferir muito, estatisticamente, das reconstruções paramétricas usualmente tomadas como ajustes ótimos dos dados. Com os pontos da combinação $[c] + [k] + [l]$, que contém 29 pontos, não é possível obter um bom ajuste com uma constante, a qual retorna um qui-quadrado reduzido muito maior do que a unidade (em torno de 4), tampouco com um polinômio, que traz, via propagação de erros, desvios padrões muito altos para cada ponto. E o ajuste ótimo foi atingido apenas com uma função exponencial, formato funcional que viabilizou um valor de qui-quadrado reduzido $\chi^2 \approx 1,09$;

$$[\beta(z)]_{exp} = \beta_1 e^{z\beta_2}, \quad (6.20)$$

onde $\beta_1 = 0,86 \pm 0,12$ e $\beta_2 = -5,59 \pm 0,64$ formam o *best fit* nesta reconstrução. A componente transversal da matriz de covariância a eles associada é $C_{\beta_1\beta_2} = 0,07$ e a região de confiança no espaço de parâmetros é exibida na Figura 6.7.

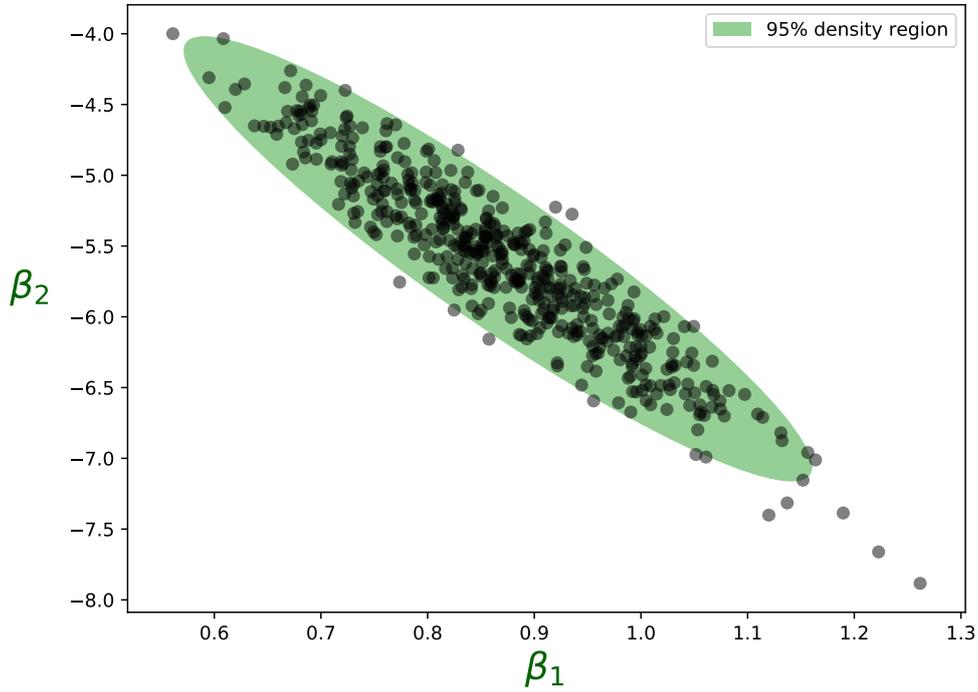


Figura 6.7: Elipse de confiança associada aos parâmetros β_1 e β_2 no ajuste $[c] + [k] + [l]$.

Para avaliar a compatibilidade entre o ajuste com a reconstrução com processos gaussianos da Figura 6.5 com a reconstrução paramétrica encontrada, foi realizada uma análise de discrepância com a função de discrepância,

$$D = \frac{|\mu_\Delta|}{\sigma_\Delta}, \quad (6.21)$$

onde $\mu_\Delta = \mu_{gp} - \mu_{fit}$ é a diferença entre as médias e $\sigma_\Delta = \sqrt{(\sigma_{gp}^2 + \sigma_{fit}^2)}$ é o desvio padrão associado à essa variação. Caso D assuma valores menores ou iguais a 2, as medidas concordam, mas, se atingir valores acima de 2, significa que são discrepantes, conforme mostra [85].

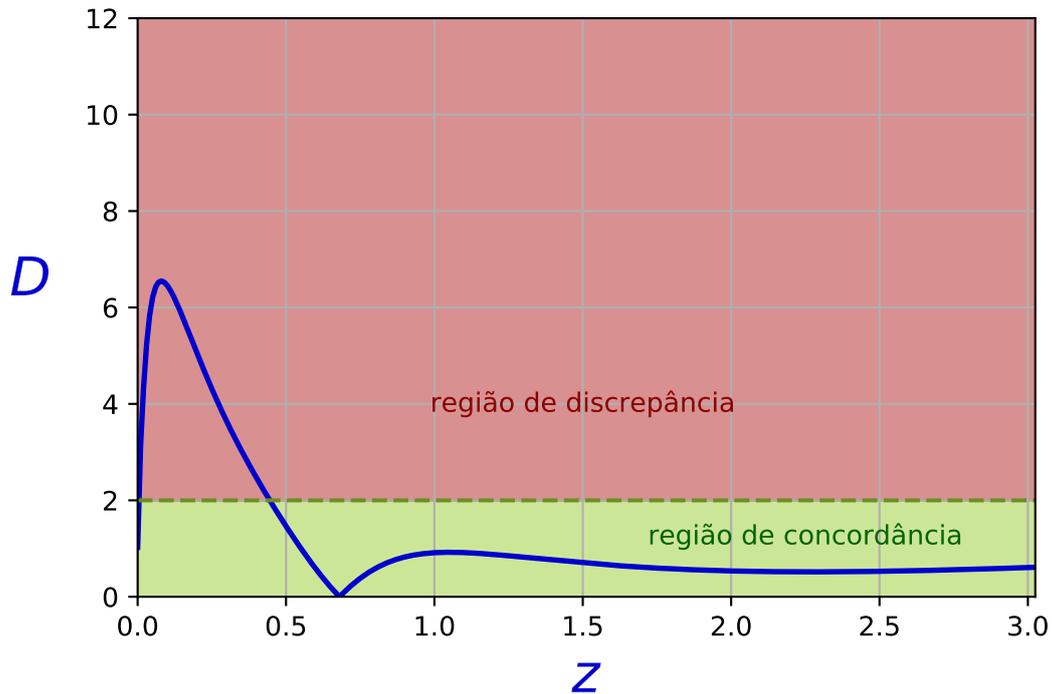


Figura 6.8: Função de discrepância entre a reconstrução não-paramétrica e o ajuste da função exponencial.

Como mostra a Figura 6.8, uma parcela dos pontos torna os conjuntos testados discrepantes. Por isso, a reconstrução com a combinação $[c] + [k] + [l]$ não é uma boa descrição em todo o domínio segundo este critério.

Para testar, agora, a combinação $[g] + [j] + [l]$, tentamos um ajuste com os pontos, inicialmente com $\beta(z) = \beta_0$, uma constante. Com qui-quadrado reduzido de 0,71, o ajuste ótimo é $\beta_0 = 0,0026 \pm 0,0131$. A função de discrepância que compara este ajuste com a reconstrução da Figura 6.6 indica compatibilidade entre os dois por todo o domínio, como mostra a Figura 6.9.

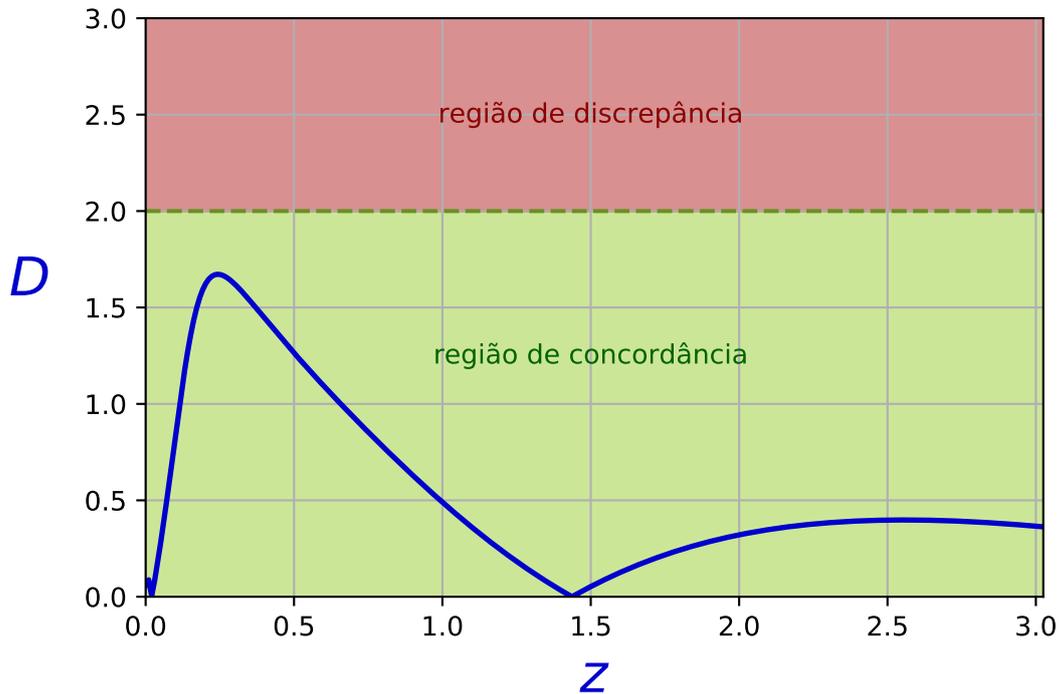


Figura 6.9: Função de discrepância entre a reconstrução não-paramétrica e o ajuste da constante β_0 .

Como o ajuste com uma função exponencial obteve melhor qui-quadrado reduzido no teste com o conjunto de dados $[c] + [k] + [l]$, ele foi repetido com a tabela $[g] + [j] + [l]$ com o intuito de obter um melhor desempenho do que o *fit* com apenas um parâmetro. O resultado foi um qui-quadrado reduzido praticamente igual ao anterior (cerca de 0,72), o melhor ajuste se deu nos valores $\beta_1 = 0,0146 \pm 0,0588$ e $\beta_2 = -1,7912 \pm 11,1640$, mas a função de discrepância apresentou uma melhor desempenho, uma vez que para todos os pontos atingiu valores ainda menores.

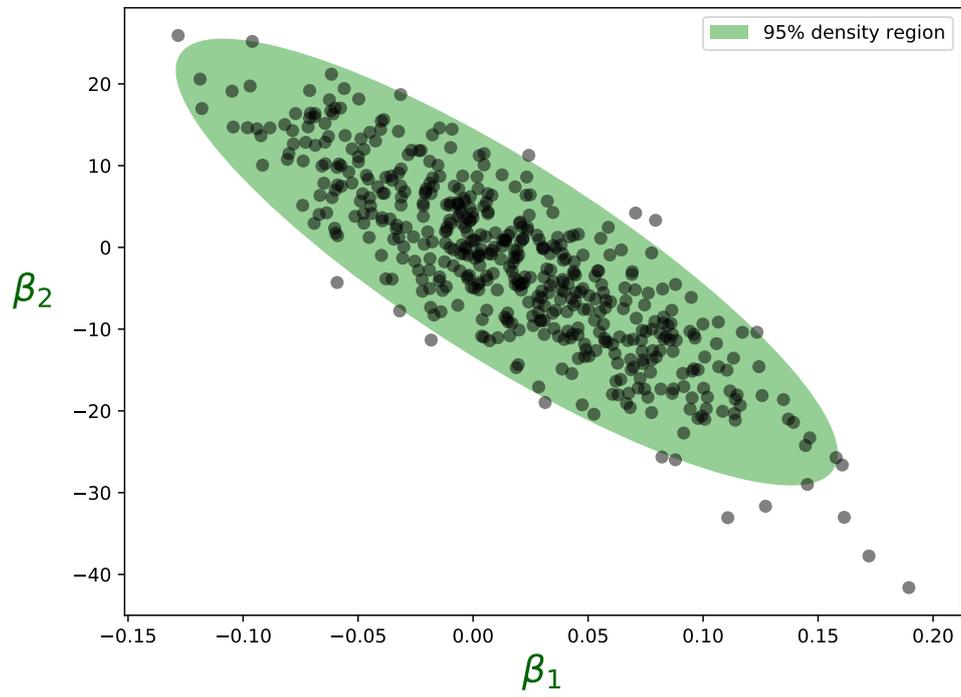


Figura 6.10: Elipse de confiança associada aos parâmetros β_1 e β_2 no ajuste $[g] + [j] + [l]$.

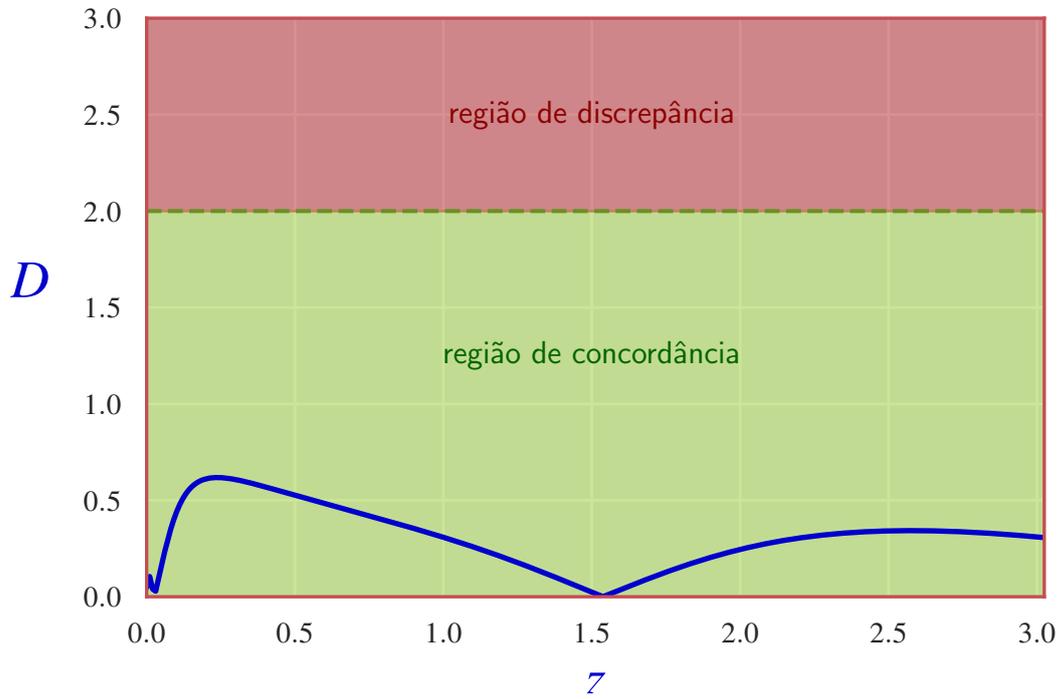


Figura 6.11: Função de discrepância entre a reconstrução não-paramétrica e o ajuste exponencial.

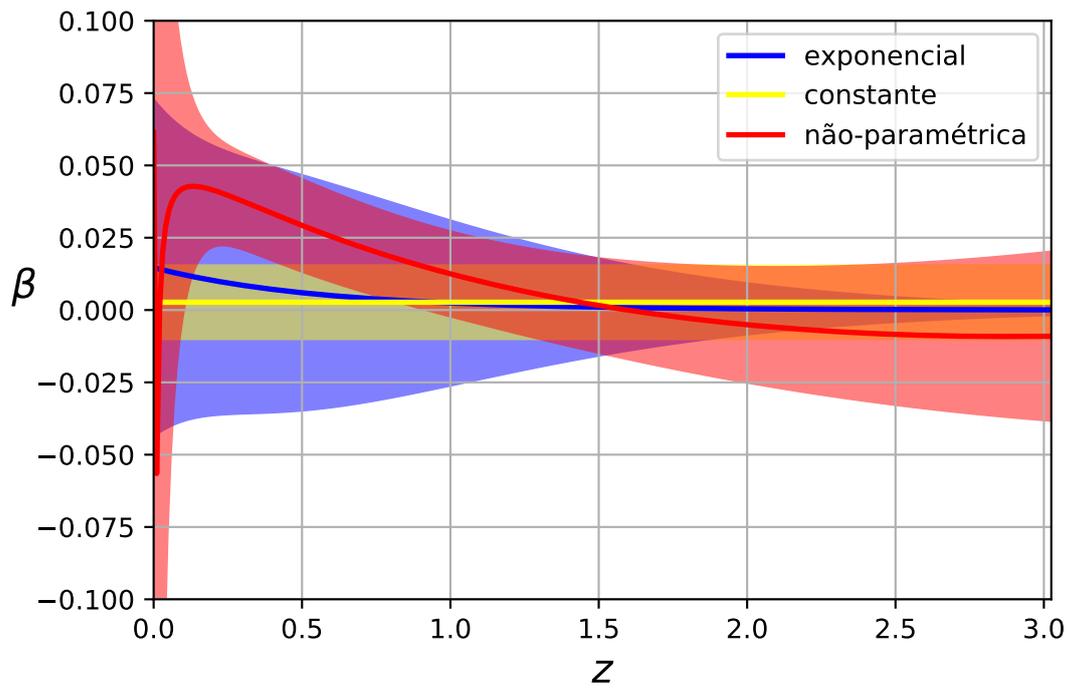


Figura 6.12: Reconstrução não-paramétrica comparada às paramétricas.

Dada a análise de discrepância, a reconstrução oriunda da combinação $[g] + [j] + [l]$ é preferível àquela gerada a partir do conjunto $[c] + [k] + [l]$. Por isso, pode-se, neste momento, extrair um valor de β que represente o conjunto inteiro de pontos da reconstrução selecionada,

$$\bar{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \mu_i}{\sum_{i=1}^n w_i}, \quad (6.22)$$

$$w_i = \sigma_i^{-2} \quad (6.23)$$

e

$$\bar{\sigma}_\beta = \left(\sum_{i=1}^n w_i \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (6.24)$$

onde $\mu_i + \sigma_i$ é o i -ésimo valor de β associado ao i -ésimo valor de redshift da reconstrução $[g] + [j] + [l]$ (Figura 6.6). $\bar{\beta}$ é o centróide estatístico de toda a reconstrução, construído a partir da ponderação de cada média, μ_i , por sua respectiva precisão, w_i . $\bar{\sigma}_\beta$, por sua vez, é a estimativa da incerteza, calculada a partir da precisão total do conjunto, $\sum_{i=1}^n w_i$. Efetuando os cálculos, a estimativa da taxa de criação de fótons, $\hat{\beta} = \bar{\beta} \pm \bar{\sigma}_\beta$, assume o valor

$$\hat{\beta} \approx 0,010 \pm 0,001. \quad (6.25)$$

$\hat{\beta}$ pode ser avaliado em relação a valores típicos de β que constam na literatura. Por exemplo, seu valor discrepa de $\beta = 0,020 \pm 0,018$ (Referência [55]) de $D \approx 0,573$. Além disso, a reconstrução $[g] + [j] + [l]$ de β pôde ser mapeada nas funções η e $\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$, conforme mostra as Equações (3.63) e (3.70). E repetindo o mesmo procedimento empregado sobre a função β para a obtenção da estimativa $\hat{\beta}$, mas agora sobre $\frac{\alpha}{\alpha_o} = \frac{\Delta\alpha}{\alpha} + 1$, estima-se esta última quantidade valor

$$\frac{\hat{\alpha}}{\alpha_o} \approx 0,971 \pm 0,002. \quad (6.26)$$

Este último resultado concorda com variações da constante de Sommerfeld encontrados na literatura. A título de comparação, a Referência [86] traz o valor $\frac{\alpha}{\alpha_o} \approx 0,987 \pm 0,012$,

do qual $\frac{\hat{\alpha}}{\alpha_o}$ apresenta discrepância $D \approx 1,315$. Já a violação da relação de distância-dualidade é comumente medida através de um parâmetro (ϵ), que deixa a equação sob a forma

$$\frac{D_L}{(1+z)^2 D_A} = \eta(z) = (1+z)^\epsilon \quad (6.27)$$

Considerando a Equação (3.63) avaliada em $\beta = \hat{\beta}$, da Equação (6.28), equiparada à Equação (6.27), chega-se à estimativa

$$\hat{\epsilon} \approx -0,019 \pm 0,002. \quad (6.28)$$

Comparando este último resultado com o valor encontrado na Referência [87], $\epsilon = 0,020 \pm 0,055$, verifica-se uma discrepância $D \approx 0,714$.

Note que os vínculos aqui estimados $\left(\hat{\beta}, \frac{\hat{\alpha}}{\alpha_o} \text{ e } \hat{\epsilon}\right)$ apresentam valores de discrepância menores do que 2 quando comparados a medidas encontradas na literatura. Isso mostra que não há nada nos dados de temperatura da RCF que possa favorecer cenários alternativos ao MCP $\left(\beta = 0, \frac{\alpha}{\alpha_o} = 1 \text{ e } \epsilon = 0\right)$.

Capítulo 7

Conclusão

Este trabalho se ateve à reconstrução não-paramétrica da evolução da temperatura da RCF via Processos Gaussianos e, através dela, à imposição de vínculos a cosmologias com produção adiabática de fótons, estes últimos expressos na evolução da taxa de produção de fótons, β . De início, foi obtida uma reconstrução não-paramétrica de temperatura para cada agrupamento de pontos sobre o qual Processos Gaussianos se aplicava. Em seguida, foi calculado um valor de qui-quadrado reduzido para confrontar cada reconstrução de temperatura com a relação temperatura-redshift prevista pelo MCP. Para 300 pontos de redshift contidos no intervalo $[0; 3,25]$, somente as reconstruções associadas às tabelas $[c] + [k] + [l]$ e $[g] + [j] + [l]$ apresentaram qui-quadrado reduzido em valores admissíveis, enquanto as restantes, por não atenderem a este critério, foram descartadas.

De posse das reconstruções selecionadas, a temperatura, T , em cada uma delas, foi mapeada na taxa de criação de fótons, β . E para escolher um dos dois modelos não-paramétricos, regressões paramétricas de β , concebidas por um ajuste ótimo com os dados, foram tomadas como referência: uma com uma constante e outra com uma função exponencial. Através de uma função de discrepância, verificou-se que β reconstruído a partir dos dados $[g] + [j] + [l]$ era preferível à reconstrução com a tabela $[c] + [k] + [l]$, uma vez que esta última apresentou discrepância estatística dos modelos paramétricos em alguns valores de redshift, enquanto a reconstrução de β associada a $[g] + [j] + [l]$ apresentou concordância em todos os valores.

Depois de selecionar $[g] + [j] + [l]$ como o conjunto de dados de maior preferência estatística e de reconstruir as evoluções de T e β , essa taxa de produção de radiação foi mapeada na variação fracionária da constante de estrutura fina, $\frac{\Delta\alpha}{\alpha}$. Para cada

função, $\beta(z)$ e $\frac{\Delta\alpha}{\alpha}(z)$, foi calculada uma média ponderada válida para o intervalo todo ($0 \leq z \leq 3,25$), sendo os pesos dados pelas precisões de cada medida, precisões estas que permitiram o cálculo de um desvio padrão também válido sobre todo o domínio. E da estimativa de β , calculou-se, também, o parâmetro de desvio da relação de distância-dualidade, ϵ .

As estimativas calculadas, $\hat{\beta}$, $\frac{\hat{\alpha}}{\alpha_o}$ e $\hat{\epsilon}$, foram submetidas ao teste de discrepância com respeito a valores destas quantidades encontrados na literatura, mas não apresentaram quaisquer diferenças significativas que pudessem implicar em desvios maiores do que 2σ .

Considerando, então, os resultados dos testes qui-quadrado e de discrepância, pode-se afirmar que os vínculos calculados para as medidas de criação de fótons, β , $\frac{\alpha}{\alpha_o}$ e ϵ , no intervalo $0 \leq z \leq 3,25$, são consistentes com o Modelo Cosmológico Padrão e com os dados.

Referências Bibliográficas

- [1] P. J. E. Peebles and Bharat Ratra. The cosmological constant and dark energy. *Reviews of Modern Physics*, 75(2):559–606, Apr 2003.
- [2] Luca Amendola, Stephen Appleby, Anastasios Avgoustidis, David Bacon, Tessa Baker, Marco Baldi, Nicola Bartolo, Alain Blanchard, Camille Bonvin, Stefano Borgani, et al. Cosmology and fundamental physics with the euclid satellite. *Living reviews in relativity*, 21(1):2, 2018.
- [3] Aurélien Hees, Olivier Minazzoli, and Julien Larena. Breaking of the equivalence principle in the electromagnetic sector and its cosmological signatures. *Physical Review D*, 90(12), Dec 2014.
- [4] R.F.L Holanda, R.S Gonçalves, and J.S Alcaniz. A test for cosmic distance duality. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2012(06):022–022, Jun 2012.
- [5] Rodrigo S. Gonçalves, Susana Landau, Jailson S. Alcaniz, and Rodrigo F. L. Holanda. Variation in the fine-structure constant, distance-duality relation and the next generation of high-resolution spectrograph, 2019.
- [6] Bruce A. Bassett and Martin Kunz. Cosmic distance-duality as a probe of exotic physics and acceleration. *Physical Review D*, 69(10), May 2004.
- [7] Ilya Prigogine. Thermodynamics and cosmology. *International journal of theoretical physics*, 28(9):927–933, 1989.
- [8] JAS Lima, AI Silva, and SM Viegas. Is the radiation temperature-redshift relation of the standard cosmology in accordance with the data? *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 312(4):747–752, 2000.
- [9] R. Silva, J. A. S. Lima, and M. O. Calvão. Temperature evolution law of imperfect relativistic fluids. *General Relativity and Gravitation*, 34(6):865–875, Jun 2002.
- [10] Rubén Arjona. Machine learning meets the redshift evolution of the cmb temperature, 2020.
- [11] Vinicius C. Busti, Chris Clarkson, and Marina Seikel. The value of h_0 from gaussian processes, 2014.
- [12] Zhengxiang Li, J. E. Gonzalez, Hongwei Yu, Zong-Hong Zhu, and J. S. Alcaniz. Constructing a cosmological model-independent hubble diagram of type ia supernovae with cosmic chronometers. *Physical Review D*, 93(4), Feb 2016.

- [13] J.E. González, J.S. Alcaniz, and J.C. Carvalho. Non-parametric reconstruction of cosmological matter perturbations. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2016(04):016–016, Apr 2016.
- [14] Ming-Jian Zhang and Hong Li. Gaussian processes reconstruction of dark energy from observational data. *The European Physical Journal C*, 78(6), Jun 2018.
- [15] Øystein Elgarøy. Ast4220: Cosmology i. *Institute for Theoretical Astrophysics, University of Oslo*, 2010.
- [16] Michael Paul Hobson, George P Efstathiou, and Anthony N Lasenby. *General relativity: an introduction for physicists*. Cambridge University Press, 2006.
- [17] Nick Kaiser. Elements of astrophysics. *Publisher: University of Hawaii*, 2002.
- [18] JAS Lima and AR Plastino. On the classical energy equipartition theorem. *Brazilian Journal of Physics*, 30(1):176–180, 2000.
- [19] Michael Fowler. Kinetic theory of gases: A brief review. *Physics of Fluid*, 152:1–13, 2008.
- [20] Subhajit Saha. *Elements of Cosmological Thermodynamics*. Springer, 2018.
- [21] Matt Visser and Carmen Molina-Paris. Acoustic geometry for general relativistic barotropic irrotational fluid flow. *New Journal of Physics*, 12(9):095014, 2010.
- [22] Oliver Piattella. Lecture notes in cosmology. *UNITEXT for Physics*, 2018.
- [23] P. A. R. Ade, N. Aghanim, M. Arnaud, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, A. J. Banday, R. B. Barreiro, J. G. Bartlett, and et al. Planck2015 results. *Astronomy Astrophysics*, 594:A13, Sep 2016.
- [24] Gary Hinshaw, D Larson, Eiichiro Komatsu, David N Spergel, CLaa Bennett, Joanna Dunkley, MR Nolta, M Halpern, RS Hill, N Odegard, et al. Nine-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: cosmological parameter results. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 208(2):19, 2013.
- [25] Barbara Ryden. *Introduction to cosmology*. Cambridge University Press, 2017.
- [26] John Charles Butcher and Nicolette Goodwin. *Numerical methods for ordinary differential equations*, volume 2. Wiley Online Library, 2008.
- [27] Diego Pavón, Ivan Duran, Sergio del Campo, and Ramón Herrera. Parameterizing the deceleration parameter, 2012.
- [28] Mario Livio. How do astronomers know that the cosmic microwave background is the result of the Big Bang? <http://www.astronomy.com/magazine/ask-astro/2014/04/remnant-radiation>, *Astronomy* (ISSN 0091-6358), 2014.
- [29] E Komatsu. Elements of cosmology. *Lecture notes on AST396C/PHY396T, Spring*, 2011.
- [30] Ofer Lahav. Cosmological parameters and hyper-parameters: the hubble constant from boomerang and maxima. In *Symposium-International Astronomical Union*, volume 201, pages 377–387. Cambridge University Press, 2005.

- [31] IG Edigaryev, DI Novikov, and SV Pilipenko. Anisotropic thermal sunyaev-zel'dovich effect and the possibility of an independent measurement of the cmb dipole, quadrupole, and octupole. *Physical Review D*, 98(12):123513, 2018.
- [32] Yoshimasa Kurihara. Classical information theoretic view of physical measurements and generalized uncertainty relations. *Journal of Theoretical and Applied Physics*, 7(1):28, 2013.
- [33] Donald H Perkins. *Particle astrophysics*. Number 10. Oxford University Press, 2009.
- [34] Y Akrami, F Arroja, M Ashdown, J Aumont, C Baccigalupi, M Ballardini, AJ Banday, RB Barreiro, N Bartolo, S Basak, et al. Planck 2018 results. i. overview and the cosmological legacy of planck. *arXiv preprint arXiv:1807.06205*, 2018.
- [35] Jean-François Cardoso. Big Bang et Big Data. <http://www.gretsi.fr/peyresq14/documents/6-Cardoso.pdf>, 9ème École d'Été de Peyresq en traitement du signal et des images, 2014.
- [36] Larissa Oliveira dos Santos. Anomalias na distribuição angular da radiação cósmica de fundo de microondas. http://www.inpe.br/posgraduacao/ast/arquivos/dissertacoes/dissertacao_final_larissa.pdf, Dissertação de Mestrado, INPE, 2009.
- [37] Jeremy Bernstein, Lowell S Brown, and Gerald Feinberg. Cosmological helium production simplified. *Reviews of Modern physics*, 61(1):25, 1989.
- [38] Henrique Scemes Xavier. *Tomografia do potencial gravitacional primordial através da polarização da radiação cósmica de fundo em aglomerados de galáxias*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2007.
- [39] AP Serebrov. Neutron β -decay, standard model and cosmology. *Physics Letters B*, 650(5-6):321–324, 2007.
- [40] Rahim Esmailzadeh, Glenn D Starkman, and Savas Dimopoulos. Primordial nucleosynthesis without a computer. *The Astrophysical Journal*, 378:504–518, 1991.
- [41] G. G. Raffelt. *Dark matter: Motivation, candidates and searches*, 1997.
- [42] Scott Dodelson. *Modern cosmology*. Elsevier, 2003.
- [43] Gary Steigman. Primordial nucleosynthesis in the precision cosmology era. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 57(1):463–491, Nov 2007.
- [44] Mounib F El Eid. Nucleosynthesis in relation to cosmology. *Physica Scripta*, 93(4):044001, 2018.
- [45] JAS Lima and I Baranov. Gravitationally induced particle production: Thermodynamics and kinetic theory. *Physical Review D*, 90(4):043515, 2014.
- [46] U.F. Wichoski and J.A.S. Lima. Big-bang cosmology with photon creation. *Physics Letters A*, 262(2-3):103–109, Nov 1999.
- [47] Winfried Zimdahl and Alexander Balakin. Conformal symmetry and cosmological entropy production. *Entropy*, 4(3):49–64, Mar 2002.

- [48] Akshay Rana, Deepak Jain, Shobhit Mahajan, and Amitabha Mukherjee. Revisiting the distance duality relation using a non-parametric regression method. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2016(07):026–026, Jul 2016.
- [49] Håvard Bunes Sandvik, John D. Barrow, and João Magueijo. A simple cosmology with a varying fine structure constant. *Physical Review Letters*, 88(3), Jan 2002.
- [50] Marina Trevisan. Estudo da possibilidade de observação do efeito sunyaev-zel’dovich nos mapas do wmap. *Master’s thesis, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos*, 2007.
- [51] Francesco Melchiorri and Yoel Rephaeli. *Background microwave radiation and intra-cluster cosmology*, volume 159. IOS Press, 2005.
- [52] Halton C Arp. *Quasars, redshifts and controversies*. Cambridge University Press, 1988.
- [53] TJ Rieger. Pure rotational emission from diatomic molecules in the quantum and classical limits. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 14(1):59–67, 1974.
- [54] AI Sobolev, AV Ivanchik, DA Varshalovich, and SA Balashev. Measurements of the cosmic microwave background temperature at high redshift by analysis of co excitation. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 661, page 012013. IOP Publishing, 2015.
- [55] A Avgoustidis, RT Génova-Santos, G Luzzi, and CJAP Martins. Subpercent constraints on the cosmological temperature evolution. *Physical Review D*, 93(4):043521, 2016.
- [56] Alexandro Saro, J Liu, JJ Mohr, KA Aird, MLN Ashby, M Bayliss, BA Benson, LE Bleem, S Bocquet, M Brodwin, et al. Constraints on the cmb temperature evolution using multiband measurements of the sunyaev–zel’dovich effect with the south pole telescope. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 440(3):2610–2615, 2014.
- [57] Ivan de Martino, R Génova-Santos, F Atrio-Barandela, H Ebeling, A Kashlinsky, D Kocevski, and CJAP Martins. Constraining the redshift evolution of the cosmic microwave background blackbody temperature with planck data. *The Astrophysical Journal*, 808(2):128, 2015.
- [58] G. Luzzi, R.T. Génova-Santos, C.J.A.P. Martins, M. De Petris, and L. Lamagna. Constraining the evolution of the cmb temperature with sz measurements from planck data. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2015(09):011–011, Sep 2015.
- [59] G. Luzzi, M. Shimon, L. Lamagna, Y. Rephaeli, M. De Petris, A. Conte, S. De Gregori, and E. S. Battistelli. Redshift dependence of the cosmic microwave background temperature from sunyaev-zeldovich measurements. *The Astrophysical Journal*, 705(2):1122–1128, Oct 2009.
- [60] G. Hurier, N. Aghanim, M. Douspis, and E. Pointecouteau. Measurement of the cmb evolution from the sunyaev-zel’dovich effect. *Astronomy Astrophysics*, 561:A143, Jan 2014.

- [61] S. Muller, A. Beelen, J. H. Black, S. J. Curran, C. Horellou, S. Aalto, F. Combes, M. Guélin, and C. Henkel. A precise and accurate determination of the cosmic microwave background temperature at $z = 0.89$. *Astronomy Astrophysics*, 551:A109, Mar 2013.
- [62] P. Noterdaeme, P. Petitjean, R. Srianand, C. Ledoux, and S. López. The evolution of the cosmic microwave background temperature. *Astronomy Astrophysics*, 526:L7, Jan 2011.
- [63] Jun Cui, Jill Bechtold, Jian Ge, and David M. Meyer. Molecular hydrogen in the damped Ly α absorber of q1331+170. *The Astrophysical Journal*, 633(2):649–663, Nov 2005.
- [64] Jian Ge, Jill Bechtold, and Varsha P Kulkarni. H₂, ci, metallicity, and dust depletion in the $z = 2.34$ damped Ly α absorption system toward qso 1232+ 0815. *The Astrophysical Journal Letters*, 547(1):L1, 2001.
- [65] R. Srianand, P. Petitjean, and C. Ledoux. The cosmic microwave background radiation temperature at a redshift of 2.34. *Nature*, 408(6815):931–935, Dec 2000.
- [66] R Srianand, P Noterdaeme, C Ledoux, and P Petitjean. First detection of co in a high-redshift damped Lyman- α system. *Astronomy & Astrophysics*, 482(3):L39–L42, 2008.
- [67] P. Noterdaeme, P. Petitjean, C. Ledoux, S. López, R. Srianand, and S. D. Vergani. A translucent interstellar cloud at $z = 2.69$. *Astronomy Astrophysics*, 523:A80, Nov 2010.
- [68] P. Molaro, S. A. Levshakov, M. Dessauges-Zavadsky, and S. D’Odorico. The cosmic microwave background radiation temperature at $z_{\text{abs}} = 3.025$ toward qso 0347–3819. *Astronomy Astrophysics*, 381(3):L64–L67, Jan 2002.
- [69] P Noterdaeme, J-K Krogager, S Balashev, J Ge, N Gupta, T Krühler, C Ledoux, MT Murphy, I Pâris, P Petitjean, et al. Discovery of a perseus-like cloud in the early universe-h i-to-h₂ transition, carbon monoxide and small dust grains at $z_{\text{abs}} \approx 2.53$ towards the quasar j0000+ 0048. *Astronomy & Astrophysics*, 597:A82, 2017.
- [70] Andre Maeder. Scale-invariant cosmology and cmb temperatures as a function of redshifts. *The Astrophysical Journal*, 847(1):65, 2017.
- [71] Kun Il Park and Park. *Fundamentals of Probability and Stochastic Processes with Applications to Communications*. Springer, 2018.
- [72] Eric Schulz, Maarten Speekenbrink, and Andreas Krause. A tutorial on gaussian process regression: Modelling, exploring, and exploiting functions. *Journal of Mathematical Psychology*, 85:1–16, 2018.
- [73] Marina Seikel, Chris Clarkson, and Mathew Smith. Reconstruction of dark energy and expansion dynamics using gaussian processes. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2012(06):036–036, Jun 2012.
- [74] Christian Robert. Machine learning, a probabilistic perspective, 2014.

- [75] Michael F Modest, Sriram Ramanathan, Armin Raiber, and Birgit Angstenberger. Laser machining of ablating materials—overlapped grooves and entrance/exit effects. *Journal of Laser Applications*, 7(4):210–218, 1995.
- [76] Christopher KI Williams and Carl Edward Rasmussen. *Gaussian processes for machine learning*, volume 2. MIT press Cambridge, MA, 2006.
- [77] Kartik Chandra, Erik Meijer, Samantha Andow, Emilio Arroyo-Fang, Irene Dea, Johann George, Melissa Grueter, Basil Hosmer, Steffi Stumpos, Alanna Tempest, and Shannon Yang. Gradient descent: The ultimate optimizer, 2019.
- [78] JA Ramirez, F Campelo, FG Guimarães, and RHC Takahashi. Notas de aula de otimização. Technical report, Tech. rep., Universidade Federal de Minas Gerais, 2009.
- [79] Joseph-Frédéric Bonnans, Jean Charles Gilbert, Claude Lemaréchal, and Claudia A Sagastizábal. *Numerical optimization: theoretical and practical aspects*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [80] Cathy Horellou, Martin Nord, Daniel Johansson, and Anna Lévy. Probing the cosmic microwave background temperature using the sunyaev-zeldovich effect. *Astronomy & Astrophysics*, 441(2):435–442, 2005.
- [81] Sheldon M Ross. *Introduction to probability and statistics for engineers and scientists*. Academic Press, 2014.
- [82] Rene Andrae, Tim Schulze-Hartung, and Peter Melchior. Dos and don'ts of reduced chi-squared. *arXiv preprint arXiv:1012.3754*, 2010.
- [83] D. J. Fixsen. The temperature of the cosmic microwave background. *The Astrophysical Journal*, 707(2):916–920, Nov 2009.
- [84] Kai O Arras. An introduction to error propagation: derivation, meaning and examples of equation $y = f(x)$. Technical report, ETH Zurich, 1998.
- [85] Gabriel L. A. de Sousa and George C. Cardoso. Further insights on measurement uncertainties, 2016.
- [86] Silvia Galli, Carlos JAP Martins, Alessandro Melchiorri, and Eloisa Menegoni. Testing the variation of fundamental constants with the cmb. In *From Varying Couplings to Fundamental Physics*, pages 59–67. Springer, 2011.
- [87] RFL Holanda and VC Busti. Probing cosmic opacity at high redshifts with gamma-ray bursts. *Physical Review D*, 89(10):103517, 2014.