



Observatório
Nacional

TESE DE DOUTORADO

O CRESCIMENTO DE ESTRUTURAS CÓSMICAS EM TEORIAS ALTERNATIVAS
AO MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO

FERNANDA ARAUJO DE OLIVEIRA

RIO DE JANEIRO

2026

Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações

Observatório Nacional

Programa de Pós-Graduação

Tese de Doutorado

O CRESCIMENTO DE ESTRUTURAS CÓSMICAS EM TEORIAS ALTERNATIVAS
AO MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO

por

Fernanda Araujo de Oliveira

Tese submetida ao Corpo Docente do
Programa de Pós-graduação em Astronomia
do Observatório Nacional, como parte dos
requisitos necessários para a obtenção do Grau
de Doutor em Astronomia.

Orientador: Dr. Armando Bernui

Co-orientador: Dr. Felipe da Silva Avila

Rio de Janeiro, RJ – Brasil

Agosto de 2026

A48

Araujo de Oliveira, Fernanda

O crescimento de estruturas cósmicas em teorias alternativas ao modelo cosmológico padrão [Rio de Janeiro] 2026.

xxiv, 111 p. 29,7 cm: graf. il. tab.

Tese (doutorado) - Observatório Nacional - Rio de Janeiro, 2026.

1. estruturas. 2. densidade. 3. flutuação. 4. crescimento.
I. Observatório Nacional. II. Título.

CDU 000.000.000

“O CRESCIMENTO DE ESTRUTURAS CÓSMICAS EM TEORIAS
ALTERNATIVAS AO MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO”

FERNANDA ARAUJO DE OLIVEIRA

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ASTRONOMIA DO OBSERVATÓRIO NACIONAL COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ASTRONOMIA.

Aprovada por:

Dr. Armando Bernui – Observatório Nacional
(Orientador)

Dr. Felipe da Silva Avila – Observatório Nacional
(Co-orientador)

Dr. Santiago Esteban Perez Bergliaffa – Universidade
do Estado do Rio de Janeiro

Dr. Sandro Dias Pinto Vitenti – Universidade
Estadual de Londrina

Dr. Fabio Cabral Carvalho – Universidade do Estado
do Rio Grande do Norte

Dr. Rogério Monteiro Oliveira – Observatório Nacional

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

21 DE AGOSTO DE 2026

*À Fernanda de 13 anos, que
sonhava em estudar o Universo.*

Agradecimentos

À minha mãe, por todo o suporte ao longo de toda a minha vida. Por ter me incentivado a estudar desde criança, a ser uma mulher independente, e por ter me fornecido os meios para tal.

Ao meu orientador Armando Bernui, por esses quatro anos de colaboração, aprendizado, ajuda e paciência. Ao meu co-orientador Felipe Avila, por toda ajuda e paciência com minhas dúvidas de Python, colaboração nos trabalhos que fizemos juntos e por ter se tornado um conselheiro.

Ao meu namorado Giuliano Margoti, pelo apoio emocional e paciência comigo. Obrigada por me ouvir, me aconselhar e me incentivar nessa trajetória e na vida. Obrigada por ser meu porto seguro, meu lugar de calma, onde sei que tenho colo para chorar de alegria ou tristeza. Obrigada pelos momentos em que você deixou tudo que estava fazendo de lado para me escutar e me ajudar. Tenho muito orgulho de nós dois.

Às minhas amigas Paula Sant'ana e Joice Brito, por estarem ao meu lado desde a época da escola. Obrigada pelos momentos de distração, desabafo, reclamação e (muitas) fofocas. Podemos falar as maiores atrocidades já proferidas pelo ser humano sem medo de julgamentos - afinal, quem somos nós para julgar? A vida é bem mais leve com vocês ao meu lado. Tenho muito orgulho de nossas trajetórias.

À minha cachorrinha Mel e meu cachorro Grande (in memoriam). A vida não tem a mesma graça sem termos um animalzinho ao nosso lado, fazendo festa quando chegamos em casa e dormindo na nossa cama enquanto trabalhamos.

A todos da Casa Branca pelos momentos de distração na hora do almoço. Em especial, Ellen Costa de Almeida e Jonatã Arcas, amigos que fiz aqui. Quero agradecer também à Dra. Tangerina - sim, doutora! - por ser nosso suporte emocional felino na pós-graduação.

Aos meus colegas do Grupo de Cosmologia Computacional e Observacional (CCOON): Amanda, Camila, Débora, Eduarda e Maria Vitória. Quero agradecer também aos ex-membros Bruno e Manoel, meus colegas de gravidade modificada e que colaboraram comigo.

Ao Colégio Pedro II e à Universidade do Estado do Rio de Janeiro, por terem colaborado ativamente na minha formação pessoal e profissional. Tenho muito orgulho de ter sido aluna dessas duas instituições públicas de alto nível. Se hoje estou aqui, me tornando doutora aos 28 anos, foi porque estas duas instituições fizeram parte da minha vida. Viva

a educação pública de qualidade!

Ao Observatório Nacional, por ter me recebido e me dado a chance de realizar o doutorado aqui, com bolsa. Quando paro para pensar que, na minha trajetória, passei por duas instituições quase bicentenárias, chego a ficar espantada com tamanha oportunidade. Agradeço também a todos os funcionários, terceirizados e concursados, pelo trabalho e esforço em nos oferecer as melhores condições possíveis para o nosso estudo e trabalho. Não esquecendo, agradeço também à CAPES pela bolsa e pela verba para ir à Reunião Anual da SAB.

*“É o que existe em você que o faz feliz
ou infeliz.”*

Agatha Christie

O CRESCIMENTO DE ESTRUTURAS CÓSMICAS EM TEORIAS ALTERNATIVAS
AO MODELO COSMOLÓGICO PADRÃO

RESUMO

Neste estudo, realizamos testes com o objetivo de investigar a viabilidade de teorias alternativas ao Modelo Cosmológico Padrão a partir do uso de duas importantes ferramentas: Processos Gaussianos e Markov Chain Monte Carlo. A partir de dados do Universo de fundo e perturbado, tais como $f(z)$, $[f\sigma_8](z)$, $\sigma_8(z)$, $H(z)$ e $D_L(z)$, foram feitos testes de consistência através da medição do índice de crescimento de estruturas γ e também comparações –tanto qualitativas quanto quantitativas– entre o modelo Λ CDM, extensões baseadas na Relatividade Geral e modelos de gravidade modificada das classes $F(R)$ e $F(Q)$. Encontramos que o modelo $\omega_o\omega_a$ CDM, com parâmetros obtidos pela colaboração DESI, e o modelo $F(Q)$ se mostraram alternativas competitivas para descrever a evolução cósmica. Entretanto, em todos os casos, o modelo Λ CDM se mostrou o mais favorecido pelas observações. Desta forma, nossos resultados indicam que um modelo substituto deve possuir pequenos desvios em relação à Relatividade Geral e também reproduzir com êxito os fenômenos cosmológicos do Universo de fundo e perturbado.

ABSTRACT

In this study, we perform tests aiming to investigate the viability of alternative theories to the Standard Cosmological Model by using two important tools: Gaussian Processes and Markov Chain Monte Carlo. Using data from the background and perturbed Universe, such as $f(z)$, $[f\sigma_8](z)$, $\sigma_8(z)$, $H(z)$, and $D_L(z)$, consistency tests were carried out by measuring the structure growth index γ , alongside both qualitative and quantitative comparisons between the Λ CDM model, extensions based on General Relativity, and modified gravity models of the $F(R)$ and $F(Q)$ classes. We find that the $\omega_o\omega_a$ CDM model, with parameters obtained by the DESI collaboration, and the $F(Q)$ model proved to be competitive alternatives for describing cosmic evolution. However, in all cases, the Λ CDM model remained the most favored by observations. Consequently, our results indicate that any substitute model must possess small deviations from General Relativity and successfully reproduce the cosmological phenomena of both the background and perturbed Universe.

Lista de Figuras

2.1	Casos possíveis de curvatura do 3-espço	9
2.2	Evolução de cada componente do Universo	11
2.3	Geometria associada à definição de distância de luminosidade	16
2.4	Geometria associada à definição de distância de diâmetro angular	18
2.5	Diagrama de Hubble	20
2.6	Espectro de potência de temperatura da RCF	25
3.1	Comportamento de $f(z)$ para três diferentes valores de γ	37
4.1	Reconstrução de $f(z)$, $f\sigma_8(z)$ e $H(z)$	47
4.2	Reconstrução de $\mathcal{F}(z)$ e $\mathcal{O}(z)$	48
4.3	Reconstrução de $\mathcal{S}(z)$ e $\mathcal{D}(z)$	48
4.4	Reconstrução de γ a partir dos dados de $f(z)$	49
4.5	Reconstrução de γ a partir dos dados de $f\sigma_8(z)$	50
5.1	Reconstrução dos dados de $\sigma_8(z)$	56
6.1	Reconstrução de $H(z)$, $D_L(z)$ e $f\sigma_8(z)$	73
6.2	Comparação entre os modelos para $H(z)$	74
6.3	Comparação entre os modelos para $D_L(z)$	75
6.4	Comparação entre os modelos para $f\sigma_8(z)$	76
A.1	Comparação entre kernels	83
B.1	Teste da função média	87

Lista de Tabelas

2.1	Componentes do Universo e seus respectivos valores para o parâmetro da equação de estado	10
2.2	Relação entre a evolução temporal do fator de escala e cada componente do Universo	12
4.1	Dados de $f(z)$	42
4.2	Dados de $f\sigma_8(z)$	43
4.3	Dados de $H(z)$	44
5.1	Dados de $\sigma_8(z)$	55
5.2	Análises estatísticas dos modelos Λ CDM e $\omega_0\omega_a$ CDM	57
6.1	Resultados do MCMC	68
6.2	Comparação estatística entre os modelos utilizando o AIC	70
6.3	Comparação estatística entre os modelos utilizando o BIC	71

Lista de Símbolos

H_0	Constante de Hubble, p. 12
K	Escalar de curvatura normalizado, p. 8
$P(k, z)$	Espectro de potência das flutuações de densidade, p. 38
Q	Escalar de não-metricidade, p. 60
R	Escalar de Ricci, p. 7
$R_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci, p. 7
$T_{\mu\nu}$	Tensor de energia-momento, p. 7
$\Gamma_{\mu\nu}^\beta$	Símbolo de Christoffel, p. 6
Λ	Constante cosmológica, p. 2
χ^2	Qui-quadrado, p. 56
χ^2_{min}	Qui-quadrado mínimo, p. 62
$\delta(\eta, x^i)$	Contraste de densidade, p. 31
η	Tempo conforme, p. 28
γ	Índice de crescimento de estruturas, p. 36
ω	Parâmetro da equação de estado, p. 10
$a(t)$	Fator de escala, p. 8
c_s	Velocidade do som no fluido, p. 34
$g_{\mu\nu}$	Tensor métrico, p. 6
t	Tempo cósmico, p. 8
z	redshift, p. 14
G	Constante de gravitação universal, p. 7

Lista de Abreviaturas

R^2 -AB	Appleby-Battye corrigido por um fator R^2 , p. 65
Λ CDM	Lambda Cold Dark Matter, p. 1
AIC	Critério de Informação de Akaike, p. 61
BIC	Critério de Informação Bayesiano, p. 61
CC	Cronômetros Cósmicos, p. 39
CPL	Chevallier-Polarski-Linder, p. 53
DGP	Dvali-Gabadadze-Porrati, p. 37
EH	Einstein-Hilbert, p. 59
FLRW	Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, p. 8
FLRW	Radiação Cósmica de Fundo, p. 22
GM	Gravidade Modificada, p. 37
MCMC	Markov Chain Monte Carlo, p. 60
MCP	Modelo Cosmológico Padrão, p. 5
OAB	Oscilações Acústicas de Bárions, p. 53
PC	Princípio Cosmológico, p. 5
PG	Processos Gaussianos, p. 39
RBF	Radial Basis Function, p. 45
RG	Relatividade Geral, p. 5
RR	Relatividade Restrita, p. 5
SE	Squared Exponential, p. 45
SN Ia	Supernovas do Tipo Ia, p. 8

SVT scalar-vector-tensor, p. [28](#)

Sumário

Lista de Figuras	xv
Lista de Tabelas	xvii
Lista de Símbolos	xix
Lista de Abreviaturas	xxi
1 Introdução	1
2 Modelo Cosmológico Padrão	5
2.1 A Teoria da Relatividade Geral	5
2.2 A métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	8
2.3 O redshift	13
2.4 Distâncias em Cosmologia	14
2.4.1 Distância própria	14
2.4.2 Esfera de Hubble	15
2.4.3 Distância comóvel	15
2.4.4 Distância de luminosidade	16
2.4.5 Distância de diâmetro angular	17
2.5 Observáveis Cosmológicos	19
2.5.1 Lei de Hubble-Lemaître	19
2.5.2 SNIa e a expansão acelerada do Universo	20
2.5.3 Radiação Cósmica de Fundo	22
3 Teoria de Perturbações Cosmológicas	27
3.1 Perturbações na métrica	28
3.2 Calibre Newtoniano	29
3.3 Perturbações no fluido	30
3.4 Limite Newtoniano	31
3.4.1 Análise para um Universo estático	31
3.4.2 Análise para um Universo em expansão	33
3.5 Observáveis Cosmológicos do Universo perturbado	36

4	Reconstrução do índice de crescimento	39
4.1	Conjuntos de dados	42
4.1.1	Taxa de crescimento de estruturas	42
4.1.2	Taxa normalizada de crescimento de estruturas	42
4.1.3	Cronômetros Cósmicos	42
4.2	Processos Gaussianos	44
4.3	Resultados	46
4.4	Resumo e Conclusões	49
5	O modelo $\omega_0\omega_a$CDM e o Universo perturbado	53
5.1	Reconstrução e dados de $\sigma_8(z)$	54
5.2	Análise estatística	54
5.3	Resumo e Conclusões	57
6	Viabilidade da RG e de modelos de GM	59
6.1	Cadeias de Markov Monte Carlo (MCMC)	61
6.2	Modelos Cosmológicos Alternativos	63
6.2.1	Modelos baseados na RG	63
6.2.2	Modelos $F(R)$	63
6.2.3	Modelo $F(Q)$	66
6.3	Resultados	67
6.4	Resumo e Conclusões	70
7	Conclusões	77
A	Teste de Kernel	81
B	Teste da função média	85
	Referências Bibliográficas	89

Capítulo 1

Introdução

Desde os primórdios de sua existência, o ser humano olha para o céu e tenta compreender aquilo que vê, formulando teorias que busquem explicar os fenômenos da natureza. Deste anseio, surge a Cosmologia, uma área de estudo das Ciências Naturais que busca explicar a história e a evolução do Universo. A partir do século XX, o estudo do cosmos avançou significativamente com o desenvolvimento de novas tecnologias capazes de obter, com precisão, dados observacionais que puderam ser contrastados com os modelos propostos. Desta forma, no final do século XX, o modelo Λ CDM-plano em que a sigla CDM corresponde a *Cold Dark Matter*, em português Matéria Escura Fria) emergiu como o modelo que melhor reproduz os fenômenos cosmológicos observados e se tornou o modelo padrão da cosmologia. Como todo modelo cosmológico, o Λ CDM se baseia em uma teoria gravitacional e uma forma de distribuição de matéria no espaço, que são a Relatividade Geral e o Princípio Cosmológico, respectivamente. Para a Relatividade Geral, o espaço e o tempo são entidades dependentes um do outro, denominados espaço-tempo, e a gravidade é descrita como uma manifestação da curvatura do espaço-tempo e não como uma força. Segundo o Princípio Cosmológico, a distribuição de matéria no Universo em escalas acima de 100 Mpc é estatisticamente homogênea e isotrópica (AVILA *et al.*, 2019; DIAS *et al.*, 2023). Desta forma, resolvendo as equações da Relatividade Geral a partir das condições previstas pelo Princípio Cosmológico, obtêm-se as equações fundamentais que descrevem o modelo padrão (BAUMANN, 2022; DODELSON *et al.*, 1996).

No contexto do modelo Λ CDM, o Universo teve seu início em uma fase quente e densa, e desde então se expande e esfria até os dias de hoje, e é composto atualmente por cerca de 69% de energia escura —componente com natureza desconhecida responsável pela fase atual de aceleração cósmica— e 31% de matéria, sendo 26% de matéria escura e o restante de matéria bariônica. Isso significa que apenas cerca de 5% do conteúdo total do Universo interage com a radiação eletromagnética e, portanto, é diretamente observável. Já a geometria do Universo, segundo o modelo Λ CDM, é considerada como euclidiana, hipótese essa reforçada através de observações recentes que demonstraram a pequena contribuição da densidade de energia de curvatura na composição do Universo (PLANCK

COLLABORATION *et al.*, 2020).

Entretanto, a natureza da matéria e energia escuras permanece sendo um mistério na Cosmologia Moderna, e são problemas em aberto do modelo Λ CDM. A primeira evidência de um conteúdo de matéria desconhecida foi obtida na década de 1930, por Fritz Zwicky, que observou que a massa luminosa do aglomerado de galáxias Coma não era suficiente para explicar os elevados valores observados para as velocidades radiais das galáxias (ZWICKY, 2009). Na década de 1980 veio outra forte evidência: as curvas de rotação de estrelas em galáxias espirais não decaíam como esperado pela Lei de Kepler, mas se mantinham constantes ou até cresciam ligeiramente após uma certa escala. Para descrever essas observações, seria necessário que as galáxias possuísem dez vezes mais massa do que a massa somada dos objetos luminosos (BOSMA, 1981; RUBIN *et al.*, 1985). Além destas evidências, no modelo padrão da cosmologia a matéria escura é um ingrediente necessário para a formação das estruturas observadas no Universo.

Com relação à energia escura, a proposta de sua existência surge devido à observação da expansão cósmica acelerada através de dados de Supernovas do Tipo Ia, através de análises reportadas no final do século XX (PERLMUTTER *et al.*, 1999; RIESS *et al.*, 1998). A energia escura é assumida como a densidade de energia do vácuo, dada pela constante cosmológica Λ , com equação de estado $\omega = -1$ e com efeito repulsivo devido à pressão negativa do fluido. Além de desconhecermos sua natureza, a constante cosmológica apresenta outro problema: o valor estimado pela física de partículas difere do valor obtido com as observações por 120 ordens de magnitude (PADILLA, 2015; WEINBERG, 1989). Em razão dessas questões, modelos cosmológicos alternativos surgiram com o objetivo de explicar a fase de expansão acelerada do Universo sem recorrer a Λ .

Há diversas classes de modelos alternativos na literatura atual. As alternativas mais simples buscam realizar pequenas modificações no modelo Λ CDM, como, por exemplo, parametrizações dependentes do tempo para a equação de estado da energia escura, mantendo a Relatividade Geral como teoria gravitacional. Os modelos mais conhecidos desta classe são as parametrizações: Chevallier-Polarski-Linder (CPL) (CHEVALLIER e POLARSKI, 2001; LINDER, 2002), logarítmica (EFSTATHIOU, 1999), Wetterich (WETTERICH, 2004), Hannestad-Mortsell (HANNESTAD e MÖRTSELL, 2004), Gong-Zhang (GONG e ZHANG, 2005), Jassal-Bagla-Padmanabhan (JASSAL *et al.*, 2005), Lee (LEE, 2005) e Barboza-Alcaniz (BARBOZA *et al.*, 2009).

Outra forma de abordar o problema da energia escura, muito presente na atualidade, consiste em modificar a gravidade. Existem diversas propostas na literatura, como: teorias que propõem um espaço-tempo com mais de quatro dimensões (BERTI *et al.*, 2015); teorias que sustentam que a gravidade é mediada por uma partícula, o gráviton massivo (BERTI *et al.*, 2015); teorias escalares-tensoriais (BERTI *et al.*, 2015; CLIFTON *et al.*, 2012); entre outras. Contudo, as mais estudadas têm sido as teorias escalares-tensoriais, sendo, em especial, a classe de teorias $F(R)$, que modificam o escalar de Ricci

na Lagrangiana de Einstein-Hilbert por uma função de R , as mais analisadas, devido à sua simplicidade relativa e por se reduzirem à Relatividade Geral nos regimes em que esta é bem testada.

Devido à diversidade de modelos alternativos ao Λ CDM existentes na literatura, torna-se necessário testar a viabilidade desses modelos através dos dados observacionais disponíveis e comparar seus desempenhos com os resultados obtidos pelo modelo cosmológico padrão. Nos últimos anos, o número de trabalhos nesta linha de investigação tem crescido devido aos surveys astronômicos que possibilitaram observar maiores volumes do Universo (AFROZ e MUKHERJEE, 2025; BARROS *et al.*, 2020; BASILAKOS e NESERIS, 2017; BESSA *et al.*, 2022; DE SOUZA *et al.*, 2026; DESI COLLABORATION *et al.*, 2025; KUMAR *et al.*, 2025; LUONGO e MUCCINO, 2024; MARTINELLI *et al.*, 2021; NUNES *et al.*, 2017; PLANCK COLLABORATION *et al.*, 2020; PLAZA e KRAISELBURD, 2025; RIBEIRO *et al.*, 2024, 2026). Entretanto, há uma degenerescência entre muitos modelos alternativos por descreverem igualmente a evolução do Universo em expansão. Logo, dados de aglomeração de matéria se mostram importantes para resolver este problema, pois os modelos alternativos descrevem de maneiras distintas a evolução do crescimento de estruturas em grandes escalas.

Nesta tese, realizamos análises de viabilidade de modelos cosmológicos alternativos e testes de consistência do modelo Λ CDM através de dados observacionais do Universo de fundo e do Universo perturbado, utilizando amostras de Cronômetros Cósmicos, $H(z)$; de Supernovas do Tipo Ia; da taxa de crescimento de estruturas, $f(z)$; da amplitude de flutuações de matéria na escala de $8 h^{-1}$ Mpc, $\sigma_8(z)$; e da taxa normalizada de crescimento, $[f\sigma_8](z)$. Desta forma, podemos estudar o modelo Λ CDM e modelos alternativos tanto pela evolução do Universo em expansão quanto pela evolução do crescimento de estruturas. Esta diversidade de dados nos permite estudar modelos cosmológicos de maneira apropriada, já que um possível candidato a substituir o Λ CDM – se houver – como modelo padrão deve ser capaz de descrever tanto os fenômenos do Universo de fundo quanto os do Universo perturbado.

No Capítulo 2, apresentamos o Modelo Cosmológico Padrão através de suas equações básicas e os principais observáveis cosmológicos que fundamentam a Cosmologia Moderna. No Capítulo 3, abordamos a Teoria de Perturbações Cosmológicas, responsável por descrever a aglomeração de matéria que gerou as grandes estruturas conhecidas hoje, e também apresentamos os observáveis cosmológicos do Universo de fundo. O primeiro teste de consistência do modelo Λ CDM é discutido no Capítulo 4, através do uso de Processos Gaussianos, uma importante ferramenta que possibilita a reconstrução de funções cosmológicas a partir de dados observacionais. No Capítulo 5, apresentamos uma análise –novamente através de Processos Gaussianos– da viabilidade do modelo de energia escura dinâmica $\omega_0\omega_a$ CDM, com parâmetros obtidos pela colaboração DESI, em descrever o Universo perturbado. No Capítulo 6, discutimos a viabilidade de modelos alternativos

ao Λ CDM oriundos de três diferentes classes de teorias em descrever dados do Universo de fundo e do Universo perturbado. Para isso, além dos Processos Gaussianos, utilizamos Cadeias de Markov Monte Carlo para inferir os parâmetros livres de cada modelo a partir de três conjuntos de dados. Para comparar os modelos analisados e discutir qual melhor descreve o Universo observável, utilizamos o Critério de Informação de Akaike e o Critério de Informação Bayesiano. Por fim, no Capítulo 7, apresentamos as conclusões dos estudos realizados.

Capítulo 2

Modelo Cosmológico Padrão

O Modelo Cosmológico Padrão (MCP), também conhecido como modelo Λ CDM-plano, tem sido testado exaustivamente nas últimas quase três décadas com dados observacionais e, com sucesso, reproduz fenômenos cosmológicos, como a Radiação Cósmica de Fundo e as Oscilações Acústicas Bariônicas, desde os primórdios do Universo até os dias de hoje (ALBRECHT e STEINHARDT, 1982; AVILA *et al.*, 2025a,b; BASILAKOS *et al.*, 2009; BOM *et al.*, 2026; FRIEMAN *et al.*, 2008; GAMOW, 1948; GUTH, 1981; KOMATSU *et al.*, 2009; LINDE, 1982; MARQUES *et al.*, 2019; PEEBLES, 1984; PLANCK COLLABORATION *et al.*, 2020; RIBEIRO *et al.*, 2025; SABOGAL *et al.*, 2025). Este modelo se baseia em dois pilares fundamentais: a Relatividade Geral (RG) como teoria gravitacional, que descreve a dinâmica e a evolução do Universo por meio das equações de Einstein; e o Princípio Cosmológico (PC) (ABRAMO *et al.*, 2006; AKRAMI *et al.*, 2020; AVILA *et al.*, 2019, 2021; BERNUI e HIPÓLITO-RICALDI, 2008; BERNUI *et al.*, 2014; BERNUI, 2008, 2009; BERNUI *et al.*, 2018; FRANCO *et al.*, 2024, 2025b; KESTER *et al.*, 2024; LOPES *et al.*, 2025; MAARTENS, 2011; MARQUES *et al.*, 2018; MOKEDDEM *et al.*, 2023, 2026; SCRIMGEOUR *et al.*, 2012), segundo o qual a distribuição de matéria no Universo é homogênea em escalas acima de 100 Mpc (DIAS *et al.*, 2023), e isotrópica para áreas na esfera celeste de no mínimo $\sim 20^\circ \times 20^\circ$ (AVILA *et al.*, 2019, 2018). Isso significa que, a tempo cósmico t , a distribuição de matéria apresenta as mesmas propriedades estatísticas em quaisquer posição e direção do 3-espço.

Desta forma, a partir do estudo da Relatividade Geral e da aplicação do PC às suas equações, podemos derivar os principais pilares teóricos e observacionais do MCP, que, consequentemente, permitem uma compreensão mais aprofundada do Universo.

2.1 A Teoria da Relatividade Geral

Em 1915, uma década após publicar a Teoria da Relatividade Restrita (RR) (EINSTEIN, 1905), Albert Einstein publicou a Teoria da Relatividade Geral (RG), apresentando, por meio da geometria diferencial e do cálculo tensorial, uma descrição mate-

mática da interação entre a geometria do espaço-tempo e o seu conteúdo de matéria-energia (EINSTEIN, 1915). Nesta teoria, a gravidade é inerente à própria estrutura do espaço-tempo, ou seja, na RG, a gravidade é uma manifestação da curvatura do espaço-tempo. Com isso, Einstein se opôs a um dos pilares da Mecânica Newtoniana, segundo a qual o espaço e o tempo são entidades independentes e a gravidade é uma força de ação à distância.

Essa unificação entre espaço e tempo foi desenvolvida em 1905 no trabalho de Einstein sobre a RR. Neste trabalho, são estabelecidos dois postulados: o princípio da relatividade, segundo o qual as leis da Física são as mesmas independentemente do referencial inercial; e a constância da velocidade da luz no vácuo, igual a $c \simeq 3 \times 10^5$ km/s (EINSTEIN, 1905). Na RG, Einstein estende o primeiro postulado para referenciais arbitrários (EINSTEIN, 1915).

Para a compreensão da geometria do Universo a partir da RG, é necessário introduzirmos o conceito de métrica, definida como a quantidade que descreve a distância física entre dois pontos vizinhos no espaço-tempo. Na RR, o elemento de linha é escrito a partir da métrica do espaço-tempo de Minkowski (BAUMANN, 2022)

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.1)$$

em que ds^2 é o quadrado do intervalo espaço-temporal entre dois pontos vizinhos separados por dx^μ , sendo uma quantidade invariante para quaisquer sistemas de coordenadas. Nessa expressão, c é a velocidade da luz no vácuo, $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ é a métrica de Minkowski e x^μ são as coordenadas do espaço-tempo, com $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$. A coordenada temporal corresponde ao índice zero e as coordenadas espaciais correspondem aos índices 1, 2 e 3.

Na RG, é necessário introduzir uma métrica que descreva apropriadamente o espaço-tempo curvo de acordo com a geometria riemanniana. Desta forma, generaliza-se a equação (2.1), de modo que o elemento de linha do espaço-tempo curvo toma a seguinte forma (CATTANI, 1998)

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.2)$$

em que $g_{\mu\nu}$ representa as componentes do tensor métrico e $\mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}$.

A curvatura do espaço-tempo é descrita por meio do chamado tensor de Riemann, $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$, escrito como

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} \equiv \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\beta\mu} + \Gamma^\alpha_{\tau\mu} \Gamma^\tau_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\tau\nu} \Gamma^\tau_{\beta\mu}, \quad (2.3)$$

em que $\Gamma^\beta_{\mu\nu}$ é o símbolo de Christoffel, definido a partir do tensor métrico e de suas derivadas

$$\Gamma^\beta_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} g^{\beta\alpha} (\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}). \quad (2.4)$$

Por fim, temos as equações de Einstein, responsáveis por descrever a dinâmica e a evolução do Universo dentro da RG, escritas como

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

em que $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, R é o escalar de Ricci, $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento e $\kappa \equiv 8\pi G/c^4$, sendo G a constante de gravitação universal. O lado esquerdo da equação (2.5) descreve a geometria do espaço-tempo, enquanto o lado direito corresponde ao conteúdo de matéria-energia descrito por $T_{\mu\nu}$. Portanto, para obtermos uma solução para a equação (2.5), precisamos assumir uma geometria para o espaço tempo –no caso, assumimos a riemanniana– e definir o tensor de energia-momento.

No MCP, consideramos que o conteúdo de matéria do Universo é distribuído de forma homogênea e isotrópica pelo espaço-tempo e é representado por um fluido ideal com pressão P , densidade ρ e quadrivetor velocidade u^μ , como (BAUMANN, 2022; HOBSON *et al.*, 2006; WEINBERG, 2008)

$$T_{\mu\nu} = P g_{\mu\nu} + \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u_\mu u_\nu. \quad (2.6)$$

O quadrivetor velocidade u^μ é definido como

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (2.7)$$

em que τ é o tempo próprio, ou seja, o tempo medido pelas partículas ao longo de suas próprias linhas de mundo. O tensor de energia-momento obedece à lei de conservação

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.8)$$

em que o operador ∇_μ é a derivada covariante (BAUMANN, 2022)

A partir de suas equações e do PC, Einstein obteve um modelo em que o Universo não poderia ser considerado estático (EINSTEIN, 1917). Entretanto, à época, como não havia evidências observacionais que sustentassem a hipótese de um Universo em evolução, Einstein adicionou às suas equações um termo com ação oposta à gravidade: a constante cosmológica Λ . Sendo $\Lambda \neq 0$, o Universo poderia conter matéria e apresentar soluções estáticas (DELBEM, 2010). Desta forma, a equação (2.5) tomou a seguinte forma (WALD, 1984; WEINBERG, 1972)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.9)$$

Entretanto, no final da década de 1920, Edwin Hubble observou uma relação entre a velocidade de afastamento de nebulosas e suas distâncias. Assim, em 1929, Hubble

publicou uma correlação entre o *redshift* –deslocamento para o vermelho no espectro de um objeto em relação ao espectro de referência medido em laboratório¹– e a respectiva distância de uma galáxia (HUBBLE, 1929; KIRSHNER, 2004). Esta foi a primeira evidência observacional de que o Universo não era estático, mas estava em expansão. Poucos anos antes, Georges Lemaître havia publicado um resultado similar, em que sugeria que o Universo estava em expansão a partir de soluções dinâmicas das equações de Einstein (LEMAÎTRE, 1927). Este resultado ficou conhecido como a Lei de Hubble-Lemaître, que será abordada com mais detalhes na seção 2.5.1.

A evidência observacional de que o Universo estava em expansão levou ao abandono da constante cosmológica nas equações de Einstein (WEINBERG, 2008). Porém, no final do século XX, a observação de Supernovas do Tipo Ia (SNIa) pelos grupos *Supernova Cosmology Project* (PERLMUTTER *et al.*, 1999) e *High-Z Supernova Search* (RIESS *et al.*, 1998) mostrou que o Universo não estava apenas em expansão, mas que esta expansão era acelerada (abordaremos este tópico com maior detalhamento na seção 2.5.2). Esta descoberta trouxe de volta o uso da constante cosmológica às equações de Einstein, porém com outro significado. Segundo as equações de Friedmann, que serão apresentadas adiante, para haver expansão acelerada é necessário que haja uma componente com pressão negativa, denominada energia escura. Contudo, a natureza desta componente ainda é desconhecida para a cosmologia moderna, e a constante cosmológica surge, então, como uma representação dessa componente do Universo (BOUSSO, 2008).

2.2 A métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Ao formularmos as equações de Einstein para um espaço-tempo homogêneo e isotrópico, obtemos a chamada métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), escrita como (BAUMANN, 2022; FRIEDMANN, 1924; HARTLE, 2003; HOBSON *et al.*, 2006; PADMANABHAN, 1993)

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2/R_0^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right], \quad (2.10)$$

em que t é o tempo cósmico, $a(t)$ é o fator de escala, (r, θ, φ) são as coordenadas esféricas e K/R_0^2 é a curvatura gaussiana do espaço tridimensional. As coordenadas (r, θ, φ) são também denominadas coordenadas comoventes, pois os objetos que compõem o fluido perfeito cosmológico possuem coordenadas constantes, ou seja, a distância coordenada entre eles é constante. O responsável pelo aumento da distância física entre os objetos no Universo em expansão é o fator de escala. O parâmetro K corresponde ao escalar de

¹Abordaremos mais sobre o *redshift* na seção 2.3.

curvatura normalizado e pode assumir três valores, a depender da curvatura do Universo, a saber: $K = -1$ para geometria hiperbólica, $K = 0$ para geometria euclidiana e $K = +1$ para geometria esférica. Na figura 2.1, apresentamos uma ilustração bidimensional desses três possíveis casos para a curvatura cósmica.

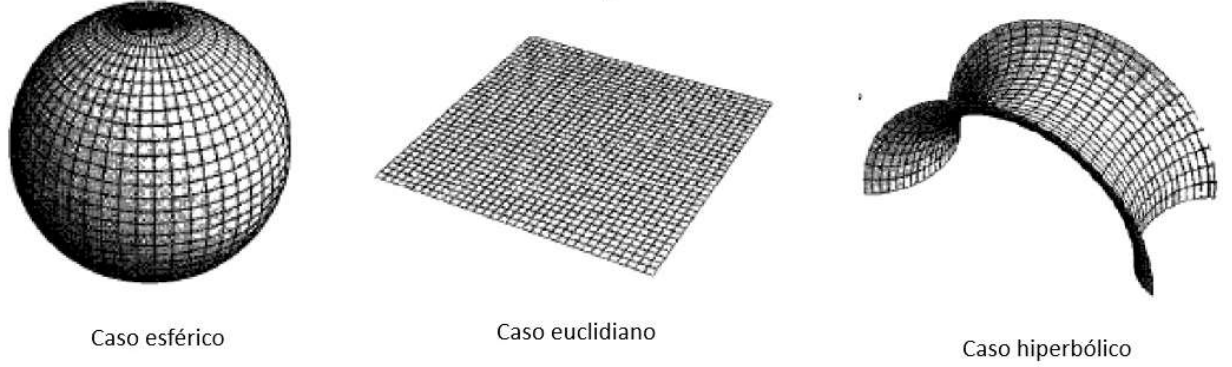


Figura 2.1: Imagem ilustrativa dos três casos possíveis de curvatura do espaço-tempo. À esquerda, temos o caso esférico, com $K = +1$. No centro, vemos o caso euclidiano, com $K = 0$. À direita, temos o caso hiperbólico, com $K = -1$. Estas figuras representam os casos bidimensionais, logo são ilustrativas dos casos tridimensionais. Fonte: Adaptado de HOBSON *et al.* (2006).

Os três casos possíveis para a geometria do Universo podem ser descritos por uma única expressão introduzindo a função $S_K(\chi)$, em que χ é uma nova coordenada radial – que será melhor descrita na subseção 2.4.3 –, dada por (BAUMANN, 2022; HOBSON *et al.*, 2006)

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t)[d\chi^2 + S^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)], \quad (2.11)$$

em que a função $S(\chi)$ pode assumir três formas: $S_K(\chi) = \sin\chi$ para $K = +1$, $S_K(\chi) = \chi$ para $K = 0$ e $S_K(\chi) = \sinh\chi$ para $K = -1$.

A partir das equações de Einstein, e considerando o PC e a descrição do Universo como um fluido perfeito, podemos derivar as equações de Friedmann (BAUMANN, 2022; HOBSON *et al.*, 2006)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2 R_0^2} + \frac{c^2\Lambda}{3}, \quad (2.12)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) + \frac{c^2\Lambda}{3}, \quad (2.13)$$

em que um ponto sobre uma quantidade denota sua derivada em relação ao tempo cósmico, i.e., $\dot{a} \equiv da/dt$. Se derivarmos a equação (2.13) com relação ao tempo e substituirmos em (2.12), encontramos a equação de continuidade, que expressa a conservação da energia-matéria para um fluido cosmológico

$$\dot{\rho} + \frac{3\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = 0. \quad (2.14)$$

Este sistema de equações possui três funções incógnitas: $a(t)$, $P(t)$ e $\rho(t)$. Entretanto, essas equações não são independentes. Para fechar o sistema, é necessário assumir uma equação de estado, que vincula a pressão e a densidade. Por termos assumido o conteúdo do Universo como um fluido perfeito, podemos considerar que esta relação é linear, do tipo (BAUMANN, 2022)

$$P = \omega c^2 \rho, \quad (2.15)$$

em que ω é o parâmetro da equação de estado, considerado constante dentro do MCP e característico de cada componente do Universo ². Portanto, a partir da equação (2.14), temos

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\frac{3\dot{a}}{a}(1 + \omega). \quad (2.16)$$

Integrando esta equação e definindo $a(t_0) \equiv 1$, ou seja, o valor do fator de escala avaliado hoje é igual a 1, obtemos

$$\int_{\rho}^{\rho_0} \frac{d\rho'}{\rho'} = 3(1 + \omega) \int_a^{a_0} \frac{da'}{a'}, \quad (2.17)$$

$$\ln\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right) = 3(1 + \omega) \ln(a), \quad (2.18)$$

o que nos leva a

$$\rho(a) = \rho_0 a^{-3(1+\omega)}, \quad (2.19)$$

em que ρ_0 é a densidade avaliada hoje. Esta equação nos diz que a densidade de energia de cada componente cai com $a^{-3(1+\omega)}$ a medida que o Universo se expande.

Dentro do MCP, consideramos três componentes para descrever a composição do Universo, a saber: radiação, matéria não-relativística e energia escura. Os respectivos valores do parâmetro ω para cada componente são descritos na tabela 2.1. Portanto, aplicando

Matéria	$\omega = 0$
Radiação	$\omega = 1/3$
Energia escura	$\omega = -1$

Tabela 2.1: Componentes do Universo e seus respectivos valores para o parâmetro da equação de estado. Fonte: (RYDEN, 2003).

esses valores de ω na equação (2.19), obtemos as seguintes relações

$$\rho_m(a) = \rho_{m,0} a^{-3}, \quad (2.20)$$

$$\rho_r(a) = \rho_{r,0} a^{-4}, \quad (2.21)$$

$$\rho_\Lambda(a) = \rho_{\Lambda,0}. \quad (2.22)$$

Essas relações entre a densidade de energia e o fator de escala para cada componente

²Em alguns modelos do tipo Λ CDM, considera-se $\omega = \omega(t)$ para a energia escura.

mostram que o Universo atravessou diferentes fases de evolução, em que cada componente dominou em relação às demais, começando pela radiação, seguindo para a matéria e, por fim, a energia escura.

A densidade total de energia $\rho(a)$ pode ser escrita como a soma das densidades de cada componente

$$\rho(a) = \rho_{m,0} a^{-3} + \rho_{r,0} a^{-4} + \rho_{\Lambda,0}. \quad (2.23)$$

Na figura 2.2, observamos a evolução temporal das componentes do Universo. Inicialmente, houve domínio da radiação, até o momento da equipartição com a matéria, quando o Universo tinha pouco mais de 10^4 anos. Por fim, a densidade de matéria decaiu o suficiente para a energia escura passar a ser a componente dominante, quando o Universo tinha quase 10^{10} anos. A partir desse ponto, a energia escura passou a prevalecer frente às outras. Pouco antes disso acontecer, o Universo mudou sua dinâmica evolutiva: a expansão cósmica passou a ser acelerada. Ao aplicarmos cada uma dessas relações na

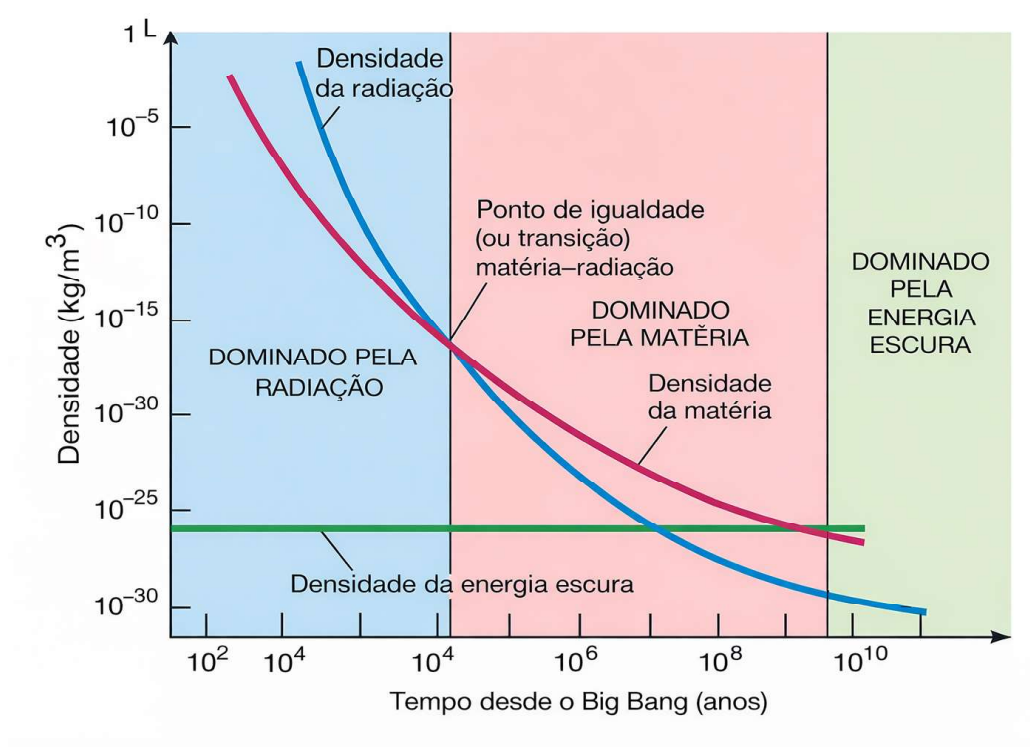


Figura 2.2: Evolução de cada componente do Universo. Fonte: DE SOUZA (2026).

equação (2.12) – considerando $K = 0$ para um Universo euclidiano – podemos descrever a evolução do fator de escala em função do tempo para cada era do Universo. Obtemos, então, as relações descritas na tabela 2.2.

Contudo, os dados observacionais disponíveis não conseguem inferir valores para a densidade de energia, mas para os parâmetros de densidade de cada componente, que são

Matéria	$a(t) = (t/t_0)^{2/3}$
Radiação	$a(t) = (t/t_0)^{1/2}$
Energia escura	$a(t) = e^{H_0(t-t_0)}$

Tabela 2.2: Relação entre a evolução temporal do fator de escala e cada componente do Universo.

adimensionais. Esses são definidos como

$$\Omega_i(t) \equiv \frac{8\pi G \rho_i}{3H^2(t)}, \quad (2.24)$$

em que ρ_i é a densidade de energia, com $i = r, m, \Lambda$, e $H(t)$ é o parâmetro de Hubble, definido como

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (2.25)$$

o qual caracteriza a taxa de variação do fator de escala. Seu valor atual é a chamada constante de Hubble

$$H_0 \equiv H(t_0) = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}. \quad (2.26)$$

A constante de Hubble, dada em unidades de $\text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$, mede a taxa de expansão atual do Universo; contudo, a determinação precisa de seu valor constitui um dos problemas em aberto na cosmologia moderna (BERNUI *et al.*, 2023; CARDONA e SABOGAL, 2023; CHEN *et al.*, 2017; DI VALENTINO, 2021; FREEDMAN *et al.*, 2019; HAGSTOTZ *et al.*, 2022; HU e WANG, 2022; KHADKA e RATRA, 2020; MOKEDDEM *et al.*, 2026; NUNES e BERNUI, 2020; Ó. COLGÁIN *et al.*, 2025; PERIVOLAROPOULOS e SKARA, 2022; RIESS *et al.*, 2022; SHAH *et al.*, 2021).

A partir desse parâmetro, podemos reescrever a equação (2.12) como

$$H^2(t) = \frac{8\pi G \rho(t)}{3} - \frac{c^2 K}{a^2(t) R_0^2}. \quad (2.27)$$

Definimos, então, a densidade crítica, válida para o caso do Universo euclidiano, como

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2(t)}{8\pi G}, \quad (2.28)$$

e seu valor atual é

$$\rho_{c,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1,878 \times 10^{-29} h^2 \text{ g cm}^{-3}, \quad (2.29)$$

em que h é o parâmetro de Hubble adimensional, definido por $H_0 = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$.

Logo, podemos reescrever o parâmetro de densidade como

$$\Omega_i(t) \equiv \frac{\rho_i(t)}{\rho_c(t)}. \quad (2.30)$$

Dividindo a equação (2.27) por $H^2(t)$, temos

$$1 = \Omega_{\text{tot}}(t) - \frac{c^2 K}{a^2(t) R_0^2 H^2(t)}, \quad (2.31)$$

o que nos permite definir o parâmetro de densidade de curvatura

$$\Omega_k(t) \equiv \frac{c^2 K}{a^2(t) R_0^2 H^2(t)}. \quad (2.32)$$

Consequentemente, avaliando a equação (2.31) hoje e considerando a equação (2.32), obtemos a seguinte relação

$$\Omega_0 + \Omega_{k,0} = 1, \quad (2.33)$$

em que $\Omega_0 = \Omega_{m,0} + \Omega_{r,0} + \Omega_{\Lambda,0}$. O parâmetro Ω_0 pode ser maior, igual ou menor do que um, o que corresponde a um Universo esférico, euclidiano e hiperbólico, respectivamente. A partir dessas novas definições e quantidades, podemos reescrever a equação (2.27) como

$$H^2(t) = H_0^2 [\Omega_{m,0} a^{-3}(t) + \Omega_{r,0} a^{-4}(t) + \Omega_{k,0} a^{-2}(t) + \Omega_{\Lambda,0}]. \quad (2.34)$$

No MCP, considera-se que o Universo possui geometria euclidiana – o que implica que $\Omega_{k,0} = 0$ – e que a contribuição da radiação atualmente é pouco relevante em comparação com as contribuições da matéria e da energia escura. Desta forma, a equação acima toma a seguinte forma dentro do Λ CDM-plano

$$H^2(t) = H_0^2 [\Omega_{m,0} a^{-3} + \Omega_{\Lambda,0}]. \quad (2.35)$$

Essa equação é particularmente útil para obtermos valores para os parâmetros cosmológicos apresentados; porém, o fator de escala não é um observável cosmológico. Na próxima seção, abordaremos um observável que torna possível utilizar essa equação para a obtenção de parâmetros cosmológicos, o chamado redshift.

2.3 O redshift

No final da década de 1920, Hubble percebeu que o espectro observado das linhas de emissão de um dado elemento que constituía uma galáxia possuía um desvio para o vermelho em relação ao espectro desse elemento medido em laboratório (HUBBLE, 1929). Ou seja, o comprimento de onda observado λ_0 era maior do que o emitido pela fonte em repouso. Esse fenômeno é conhecido como redshift e é definido como a razão entre a diferença dos comprimentos de onda observado e emitido e o comprimento de onda emitido, isto é,

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e}, \quad (2.36)$$

em que λ_e é o comprimento de onda emitido pela fonte.

A importância do redshift deve-se à sua relação com o fator de escala. Os comprimentos de onda são diretamente proporcionais ao fator de escala,

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}. \quad (2.37)$$

Portanto, substituindo (2.37) em (2.36), obtemos a relação entre o redshift e o fator de escala em um dado tempo t ,

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t)}, \quad (2.38)$$

em que $a(t_0) \equiv 1$, como já definido anteriormente.

Desta forma, temos que $z = 0$ corresponde aos dias atuais. Como o redshift é um observável cosmológico, podemos inferir seu valor por meio de observações e, consequentemente, obter o valor correspondente do fator de escala. A partir da relação dada pela equação (2.38), podemos reescrever a equação de Friedmann da seguinte forma

$$H(z) = H_0 [\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda,0}]^{1/2}. \quad (2.39)$$

No contexto da cosmologia atual, a equação (2.39) possui grande importância para a obtenção de parâmetros cosmológicos, como a constante de Hubble e os parâmetros de densidade de energia. Modificações nessa equação nos permitem testar modelos alternativos ao MCP, como veremos no Capítulo 6.

2.4 Distâncias em Cosmologia

Para realizar análises e obter valores de importantes parâmetros cosmológicos, muitas vezes é necessário conhecer a distância de um determinado objeto ao observador. Porém, devido à expansão do Universo, as distâncias mudam com o tempo, o que impede a medição direta da distância física entre objetos. Por isso, precisamos de quantidades observáveis que nos ajudem a inferir a distância a um dado objeto. Nesta seção, discutiremos as principais equações para o cálculo de distâncias em cosmologia.

2.4.1 Distância própria

A partir da métrica FLRW, podemos obter a distância entre dois eventos em um tempo fixo t , sendo conhecidos o fator de escala nesse mesmo instante e o parâmetro K . Seja um observador na origem das coordenadas espaciais e o evento cuja distância se deseja medir localizado em (r, θ, φ) ; obtemos a distância própria $D_p(t)$ a partir da integração de

ds (WEINBERG, 1972)

$$D_p^K(t) = \int_0^r ds = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - Kr'^2/R_0^2}}, \quad (2.40)$$

assumindo que $dt = d\theta = d\varphi = 0$. Não é possível medir diretamente a distância própria de um objeto ao observador; contudo, é possível relacioná-la com outras quantidades que podem ser inferidas por meio de observações, como a distância de luminosidade e a distância de diâmetro angular, que serão abordadas nas subseções 2.4.4 e 2.4.5.

2.4.2 Esfera de Hubble

Segundo a Lei de Hubble-Lemaître – como veremos mais detalhadamente na subseção 2.5.1 – objetos distantes se afastam com uma velocidade de recessão diretamente proporcional à distância ao observador. Desta forma, a esfera de Hubble é descrita como a distância na qual os objetos possuem velocidade de recessão igual à velocidade da luz, e é definida como

$$R_H(t) \equiv \frac{c}{H(t)}, \quad (2.41)$$

em que $R_H(t)$ é também conhecido como horizonte de Hubble. Entretanto, a esfera de Hubble não é um horizonte verdadeiro, pois as estruturas que a adentraram durante o período inflacionário do Universo podem reentrar após o seu fim ³.

A relação entre $R_H(t)$ e $D_p^K(t)$ nos indica se um evento será ou não observado por nós. Se $D_p^K(t) < R_H(t)$, o evento está dentro da esfera de Hubble e será observado. Já se $D_p^K(t) > R_H(t)$, o evento está fora da esfera de Hubble e a luz emitida nunca nos alcançará enquanto esta condição for mantida e, portanto, não será observado.

Além disso, usamos $R_H(t)$ para classificar as perturbações cosmológicas, necessárias para descrever como as flutuações de densidade de matéria se comportam, conforme veremos com mais detalhes no Capítulo 3. Para isso, imaginemos que a perturbação é descrita por uma onda com comprimento de onda λ . Quando $\lambda \gg R_H(t)$, temos o regime de escalas Super-Hubble e o tratamento das perturbações cosmológicas deve ser relativística. Já $\lambda \ll R_H(t)$ corresponde ao regime de escalas Sub-Hubble e seu tratamento é feito através da descrição Newtoniana.

2.4.3 Distância comóvel

O parâmetro χ , apresentado inicialmente na equação (2.11), é uma coordenada comóvel também chamada de distância comóvel. Ela corresponde à distância entre dois

³A fase inflacionária corresponde a uma breve etapa de expansão exponencial quando o Universo tinha $\sim 10^{-34}$ segundos de idade, enquanto a esfera de Hubble se mantinha praticamente constante. Essa fase foi incorporada ao modelo Λ CDM com o objetivo de explicar problemas em aberto, como os problemas do horizonte e da planaridade. Para mais detalhes acerca do período inflacionário, ver (BAUMANN, 2022).

eventos medida por um observador comóvel com a expansão do Universo. A distância comóvel é dada por (BAUMANN, 2022; HOBSON *et al.*, 2006)

$$\chi^K \equiv \frac{D_p^K(t)}{a(t)} = c \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (2.42)$$

Conforme o Universo se expande, a distância física entre os objetos aumenta, enquanto a distância comóvel permanece a mesma, pois é determinada pelas coordenadas comoventes dos objetos.

2.4.4 Distância de luminosidade

Dado um fluxo F emitido por uma fonte de luz com luminosidade L , definimos a distância de luminosidade D_L como (BAUMANN, 2022; HOBSON *et al.*, 2006)

$$D_L \equiv \left(\frac{L}{4\pi F} \right)^{1/2}, \quad (2.43)$$

válida para o caso do Universo com geometria euclidiana. Na figura 2.3, há dois cortes

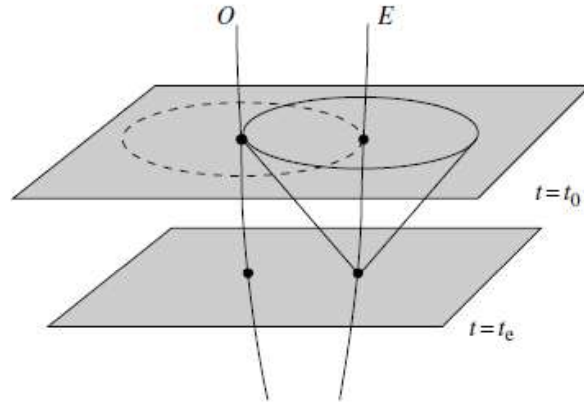


Figura 2.3: Geometria associada à definição de distância de luminosidade. Fonte: HOBSON *et al.* (2006).

temporais: o inferior no tempo de emissão t_e da luz pela fonte e o superior no tempo de observação atual t_0 . Os fótons emitidos pela fonte são distribuídos por uma esfera – que corresponde à circunferência pontilhada, em que uma dimensão foi suprimida – de área $4\pi D_L^2$. No espaço-tempo de FLRW, a área dessa esfera é igual a (BAUMANN, 2022; HOBSON *et al.*, 2006)

$$A(t_0) = 4\pi a^2(t_0) S_K^2(\chi). \quad (2.44)$$

A partir dessa expressão, podemos reescrever a distância de luminosidade em termos de $S(\chi)$. O fluxo F é definido como a razão entre a luminosidade e a área; logo, obtemos

$$F = \frac{L}{4\pi a^2(t_0) S_K^2(\chi)}. \quad (2.45)$$

Os fótons observados pelo observador O na figura 2.3 sofrem um desvio para o vermelho em seu espectro, o que significa que sua frequência observada será

$$\nu_0 = \frac{\nu_e}{1+z}, \quad (2.46)$$

o que também afeta a energia do fóton

$$E_0 = \frac{E_e}{1+z}, \quad (2.47)$$

em que E_0 e E_e são as energias observada e emitida dos fótons, respectivamente. Logo, o fluxo observado é

$$F = \frac{L}{4\pi S_K^2(\chi)(1+z)^2}, \quad (2.48)$$

em que usamos $a(t_0) \equiv 1$.

Combinando a equação (2.43) com a expressão acima, obtemos a relação entre a distância de luminosidade e $S(\chi)$

$$D_L^K = S_K(\chi)(1+z). \quad (2.49)$$

Essa equação é válida para todas as geometrias. Para um Universo euclidiano, $D_L \equiv D_L^0$, temos

$$D_L = c(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (2.50)$$

A partir dessa equação, podemos utilizar dados de D_L para inferir os parâmetros cosmológicos e testar teorias alternativas ao MCP, como veremos no Capítulo 6.

2.4.5 Distância de diâmetro angular

Dado um objeto com diâmetro próprio l e diâmetro angular $\Delta\theta$, definimos a distância de diâmetro angular D_A como (BAUMANN, 2022; HOBSON *et al.*, 2006)

$$D_A \equiv \frac{l}{\Delta\theta}, \quad (2.51)$$

válida para ângulos pequenos, expressos em radianos, e no contexto da geometria euclidiana.

De forma análoga ao que foi feito com a distância de luminosidade, podemos escrever

a distância de diâmetro angular em função de $S_K(\chi)$, ou seja, podemos encontrar uma expressão válida para todas as geometrias possíveis. Consideremos duas geodésicas nulas que se encontram em um observador no tempo atual t_0 com uma separação angular $\Delta\theta$, emitidas em um tempo t_e por uma fonte com diâmetro próprio l em uma coordenada comovente fixa χ , como é possível ver na figura 2.4. Por simplicidade, assume-se que os eixos espaciais estão orientados de forma que φ é constante ao longo do caminho percorrido pelos fótons. Da parte angular da métrica FLRW, temos que (HOBSON *et al.*, 2006)

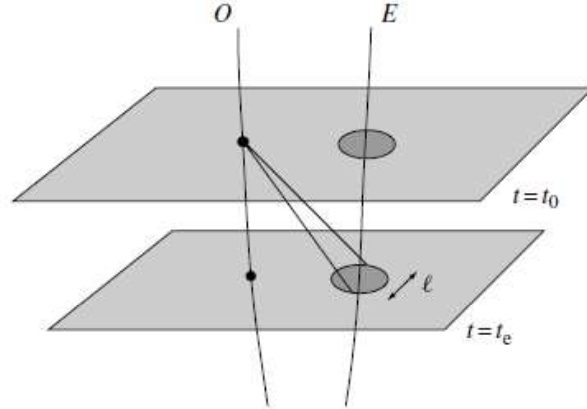


Figura 2.4: Geometria associada à definição de distância de diâmetro angular. Fonte: HOBSON *et al.* (2006).

$$l = a(t_e) S_K(\chi) \Delta\theta, \quad (2.52)$$

e substituindo a expressão acima em (2.51), obtemos

$$D_A^K = a(t_e) S_K(\chi), \quad (2.53)$$

o que nos leva a

$$D_A^K = \frac{S_K(\chi)}{1+z}. \quad (2.54)$$

Essa expressão é válida para todas as geometrias. Para um Universo com geometria euclidiana, $D_A \equiv D_A^0$, temos

$$D_A = \frac{c}{1+z} \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (2.55)$$

É a partir dessa equação que se torna possível utilizar dados de D_A para inferir parâmetros cosmológicos e para outras aplicações na Cosmologia Moderna.

A partir das equações (2.49) e (2.54), podemos encontrar uma relação entre as distâncias de luminosidade e de diâmetro angular, dada por

$$D_A = \frac{D_L}{(1+z)^2}, \quad (2.56)$$

conhecida como a relação de dualidade de distância cósmica de Etherington (ELLIS, 2007; ETHERINGTON, 1933). Essa relação é válida para todos os modelos cosmológicos baseados na geometria riemanniana e é útil para realizar testes cosmológicos (AVILA *et al.*, 2025b; HOLANDA *et al.*, 2010; MUKHERJEE e MUKHERJEE, 2021; RÄSÄNEN *et al.*, 2016; RENZI *et al.*, 2022).

2.5 Observáveis Cosmológicos

Para relacionarmos todo o arcabouço teórico abordado até aqui com a realidade cósmica, são necessárias quantidades observáveis que nos permitam realizar testes teóricos. Nesta seção, faremos um resumo de alguns dos principais observáveis da Cosmologia: a Lei de Hubble-Lemaître; as Supernovas do Tipo Ia (SNIa) e a expansão cósmica acelerada; e a Radiação Cósmica de Fundo.

2.5.1 Lei de Hubble-Lemaître

A relação obtida por Hubble entre o *redshift* e a distância de uma dada galáxia, publicada no final da década de 1920, mostrou à comunidade científica da época que o Universo se expandia e que essa expansão ocorria a uma taxa constante, chamada de constante de Hubble (HUBBLE, 1929). Essa relação é matematicamente descrita como

$$z = \frac{H_0 r}{c}, \quad (2.57)$$

em que r é a distância do observador à galáxia. Para baixos *redshifts* ($z \ll 1$), podemos considerar a seguinte relação não-relativística

$$v = cz, \quad (2.58)$$

em que v é a velocidade de recessão das galáxias. Desta forma, no regime de baixos *redshifts*, obtemos a equação conhecida como a Lei de Hubble-Lemaître

$$v = H_0 r, \quad (2.59)$$

que mostra que, quanto maior a distância de uma galáxia ao observador, maior será sua velocidade de recessão, como podemos observar na figura 2.5.

Se as galáxias estão se afastando umas das outras, então, no passado, elas estavam mais próximas. Portanto, é possível concluir que, em algum momento no passado, o Universo era denso, quente e ocupava um volume muito menor do que o atual. Podemos

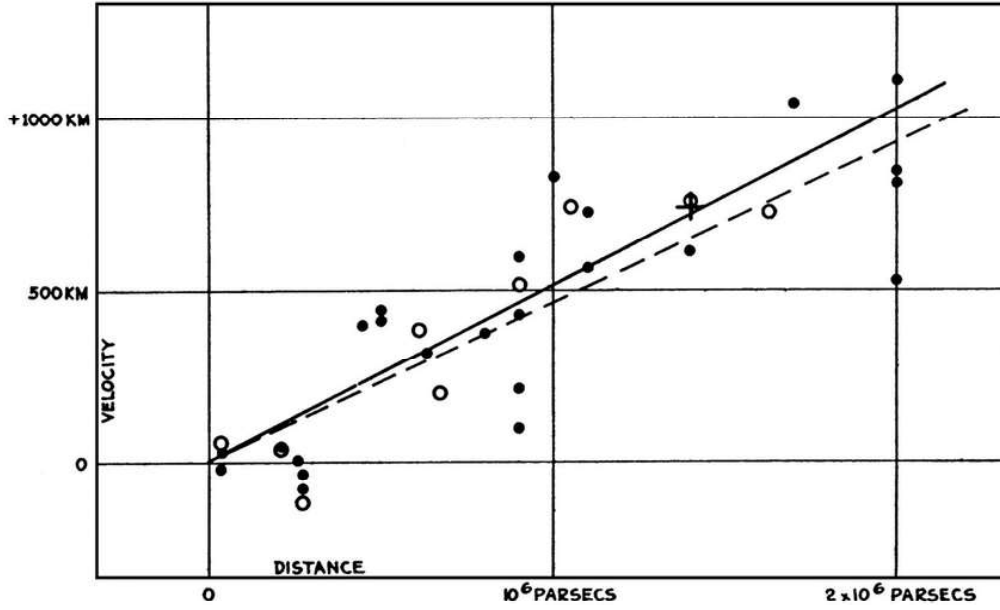


Figura 2.5: Gráfico da velocidade em função da distância do artigo original de Hubble de 1929. No eixo vertical, a unidade apresentada é km, porém deveria ser km/s. Fonte: HUBBLE (1929).

estimar de forma aproximada a idade do Universo pelo inverso da constante de Hubble

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \simeq 13,8 \text{ bilhões de anos}, \quad (2.60)$$

em que, para este resultado, consideramos $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

2.5.2 SNIa e a expansão acelerada do Universo

Em 1998, dois grupos, de forma independente, verificaram que a expansão do Universo, demonstrada por Hubble, era acelerada, por meio da observação de Supernovas do Tipo Ia (SNIa) (PERLMUTTER *et al.*, 1999; RIESS *et al.*, 1998). Supernovas são explosões extremamente luminosas que marcam o estágio final de evolução de certos tipos de estrelas. Elas podem ser classificadas de acordo com as linhas de absorção de seus elementos químicos observados na análise espectral. As do Tipo Ia não possuem a linha de absorção do hidrogênio, mas possuem a do silício ionizado (AMENDOLA e TSUJIKAWA, 2010).

A importância desses objetos para a Cosmologia deve-se ao fato de suas explosões serem semelhantes entre si, o que permite calibrar suas curvas de luz e, consequentemente, calcular suas distâncias sem a necessidade de assumir um modelo cosmológico fiducial (FRIEMAN *et al.*, 2008). Feita essa calibração, as SNIa são utilizadas como velas padrão para medir distâncias, inferir parâmetros e realizar testes cosmológicos (BOM *et al.*, 2026; DESI COLLABORATION *et al.*, 2025; LOPES *et al.*, 2024; MOKEDDEM *et al.*, 2026; RIBEIRO *et al.*, 2024, 2026; VARGAS DOS SANTOS *et al.*, 2016).

No caso das SNIa, a distância obtida pelos catálogos disponíveis é a do módulo de

distância, definido como a diferença entre a magnitude aparente m e a magnitude absoluta M de uma fonte. A maior parte do nosso conhecimento do Universo é oriundo de fótons emitidos por fontes astrofísicas (estrelas, galáxias, nuvens de gás, etc.) e da análise de seus respectivos espectros eletromagnéticos (CARROLL e OSTLIE, 2017). A partir de um fluxo de luz F ⁴ de uma fonte, podemos definir a magnitude, a qual descreve o brilho dos objetos.

O sistema de magnitudes é descrito por uma escala logarítmica, em que o brilho aparente é escrito em termos do fluxo de luz medido pelo observador. Para uma fonte com fluxo de luz F , sua magnitude aparente é dada por

$$m = -2,5 \log_{10} \left(\frac{F}{F_0} \right), \quad (2.61)$$

em que F_0 é o fluxo na origem da escala adotada, na qual $m_0 = 0$ (OKE e GUNN, 1983).

Nesse sistema, quanto menor o valor numérico da magnitude, maior é o brilho da fonte. Porém, o valor numérico da magnitude aparente não se relaciona diretamente com a distância à fonte, já que um objeto pode parecer mais brilhante simplesmente devido à sua maior proximidade do observador em comparação com outros objetos. Para isso, precisamos de outra quantidade: a magnitude absoluta M .

A magnitude absoluta é definida como a magnitude aparente que uma fonte teria se estivesse localizada a 10 pc de distância e em $z = 0$. Substituindo $D_L = 10$ pc na equação (2.43), obtemos

$$M = -2,5 \log_{10} \left(\frac{L}{L_0} \right), \quad (2.62)$$

em que L ⁵ é a luminosidade da fonte, e L_0 é a luminosidade de referência correspondente ao fluxo F_0 .

Entretanto, para o estudo de distâncias na Cosmologia utilizando SNIa, precisamos transformar o módulo de distância na chamada distância de luminosidade, já abordada na subseção 2.4.4. As SNIa, por serem velas padrão, possuem luminosidade praticamente idêntica, emitindo fótons em todas as direções. Relacionando as magnitudes aparente e absoluta como

$$M - m = -2,5 \log_{10} \left(\frac{L F_0}{L_0 F} \right), \quad (2.63)$$

chegamos a

$$\frac{L}{F} = \frac{L_0}{F_0} 10^{(m-M)/2,5}. \quad (2.64)$$

Sabendo que $10 \text{ pc} = (L_0/4\pi F_0)^{1/2}$ e $D_L^2 = L/(4\pi F)$, obtemos

$$m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{D_L}{1 \text{ pc}} \right) - 5. \quad (2.65)$$

⁴Energia por unidade de tempo por unidade de área.

⁵Energia total emitida por uma fonte por unidade de tempo em todas as direções.

Logo, a relação entre o módulo de distância e a distância de luminosidade é dada por

$$\mu \equiv m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{D_L}{1 \text{ Mpc}} \right) + 25, \quad (2.66)$$

em que convertemos as unidades de pc para Mpc ($1 \text{ pc} = 10^{-6} \text{ Mpc}$). Portanto, os dados de módulo de distância disponíveis nos catálogos de SNIa podem ser convertidos em distância de luminosidade por meio da equação (2.66), o que nos permite inferir parâmetros cosmológicos e estudar modelos alternativos ao MCP, como veremos no Capítulo 6.

2.5.3 Radiação Cósmica de Fundo

Em 1965, Arno Penzias e Robert Wilson observaram por acaso em seu radiotelescópio um sinal que não conseguiram atribuir a nenhuma fonte conhecida. Esse sinal vinha de todas as direções com a mesma intensidade, o que sugeria uma origem extragaláctica e isotrópica. Na verdade, esse sinal era oriundo da Radiação Cósmica de Fundo (RCF), uma das principais evidências observacionais de que o Universo era, no passado, denso e quente o suficiente para manter os bárions ionizados, de tal forma que os elétrons livres tornavam o Universo opaco (DICKE *et al.*, 1965; PEEBLES *et al.*, 2010; PENZIAS e WILSON, 1965).

A RCF possui um espectro de radiação de corpo negro, com origem no forte acoplamento entre os fótons e os elétrons livres no Universo primordial, época em que a temperatura do Universo era $T \gtrsim 1 \text{ eV}$. Quando a temperatura caiu abaixo de $0,3 \text{ eV}$, núcleos e elétrons se combinaram para formar os primeiros átomos neutros, o que levou a uma queda na densidade de elétrons livres. Consequentemente, o caminho livre médio dos fótons cresceu, levando ao seu desacoplamento em relação aos elétrons livres. Esse evento marca a interação final entre os fótons e os elétrons livres e é conhecido como a superfície de último espalhamento. Desde então, esses fótons têm viajado livremente, sendo observados hoje como a RCF.

Na década de 1990, o satélite COBE determinou que o espectro de corpo negro da RCF possui temperatura atual $T_0 = 2,725 \pm 0,001 \text{ K}$ (BOGGESESS *et al.*, 1992; SMOOT, 1999). O COBE também descobriu pequenas flutuações na distribuição espacial de temperatura da RCF, da ordem de 10^{-5} , necessárias para a formação de estruturas em grande escala (FIXSEN *et al.*, 1997). Após o COBE, outros satélites também investigaram o espectro da RCF, como o WMAP (BERNUI e REBOUÇAS, 2009, 2010; BERNUI *et al.*, 2006a, 2007a,b, 2006b; KOMATSU *et al.*, 2009; SPERGEL *et al.*, 2003, 2007) e o Planck (AKRAMI *et al.*, 2020; KESTER *et al.*, 2024; NOVAES *et al.*, 2015, 2016; PLANCK COLLABORATION *et al.*, 2016, 2020). Este último produziu mapas da RCF com resolução superior à de seus antecessores e obteve medidas mais precisas, estabelecendo restrições rigorosas para os parâmetros cosmológicos.

Desde então, os dados da RCF têm sido amplamente utilizados na literatura para o estudo do Universo primordial (AVILA *et al.*, 2025c; BERNUI e HIPÓLITO-RICALDI, 2008; BERNUI *et al.*, 2006a, 2007a,b, 2014; BERNUI, 2008; MARQUES *et al.*, 2018; MARQUES e BERNUI, 2020; MOKEDDEM *et al.*, 2023; NOVAES *et al.*, 2015, 2016) e, em conjunto com outros conjuntos de dados, para testar a viabilidade de modelos alternativos ao MCP (BOM *et al.*, 2026; DESI COLLABORATION *et al.*, 2025; OLIVEIRA *et al.*, 2026; SABOGAL *et al.*, 2025; SCHERER *et al.*, 2025).

Sendo o Universo quente e denso em sua fase primordial e possuindo atualmente uma temperatura de $T_0 = 2,725 \pm 0,001$ K, podemos concluir que, conforme foi expandindo, o Universo também foi esfriando. Para obtermos a relação entre a sua temperatura e o fator de escala, precisamos considerar primeiro que, para um corpo negro, a densidade de energia dos fótons com frequência entre ν e $\nu + d\nu$ é escrita como

$$\rho(\nu) d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3 d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}, \quad (2.67)$$

em que k é a constante de Boltzmann e h é a constante de Planck. Integrando essa equação sobre todo o espectro, obtemos a densidade de energia total, dada por

$$\rho_r = \frac{8\pi^5 k^4}{15h^3 c^3} T^4. \quad (2.68)$$

Como a densidade de energia de radiação dos fótons é proporcional a a^{-4} (BAUMANN, 2022), obtemos a relação entre a temperatura do Universo e o fator de escala

$$T(t) = \frac{T_0}{a(t)}. \quad (2.69)$$

Logo, a temperatura do Universo é inversamente proporcional ao fator de escala, o que confirma que, conforme se expande, o Universo esfria.

Além da determinação de T_0 , o satélite COBE, assim como os satélites WMAP e Planck, investigou as flutuações na distribuição espacial de temperatura da RCF. Seja $T(\hat{n}) \equiv T_0 [1 + \Theta(\hat{n})]$ a temperatura da RCF na direção $\hat{n}$, em que

$$\Theta(\hat{n}) = \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \quad (2.70)$$

corresponde às flutuações de temperatura na direção $\hat{n}$. O valor quadrático médio das flutuações de temperatura obtido pelos satélites é da ordem de 10^{-5} . Como a superfície de último espalhamento é uma superfície esférica e as flutuações são observadas nessa superfície, é útil expandir $\Theta(\hat{n})$ em harmônicos esféricos

$$\Theta(\hat{n}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \Theta_{lm} Y_{lm}(\hat{n}), \quad (2.71)$$

em que Θ_{lm} são os momentos de multipolo e Y_{lm} são os harmônicos esféricos.

A propriedade estatística mais importante das flutuações de temperatura da RCF reside na comparação entre temperaturas em dois diferentes pontos ($\hat{n}$ e $\hat{n}'$), descrita pela função de correlação de dois pontos (BAUMANN, 2022)

$$C(\theta) = \langle \Theta(\hat{n}) \Theta(\hat{n}') \rangle. \quad (2.72)$$

Em um campo de flutuações estatisticamente isotrópico, a média do *ensemble* é determinada pelo espectro de potência angular, dado por

$$\langle \Theta_{lm} \Theta_{l'm'}^* \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l, \quad (2.73)$$

em que C_l são os coeficientes do espectro de potência angular. O espectro de potência angular é a transformada de Fourier da função de correlação de dois pontos. Substituindo (2.71) em (2.72), chegamos a

$$C(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{4\pi} C_l P_l(\cos \theta), \quad (2.74)$$

em que $P_l(\cos \theta)$ são os polinômios de Legendre. Levando em conta a propriedade de ortogonalidade de $P_l(\cos \theta)$, temos que

$$C_l = 2\pi \int_{-1}^1 C(\theta) P_l(\cos \theta) d\cos \theta. \quad (2.75)$$

A informação contida nos C_l é complementar a contida em $C(\theta)$. Logo, a variância do campo de anisotropia é escrita como

$$C(0) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{4\pi} C_l \approx \int_0^{\infty} \frac{l(l+1)C_l}{2\pi} d\ln l, \quad (2.76)$$

que está relacionada ao espectro de potências da RCF, definido como

$$\Delta_T^2 \equiv \frac{l(l+1)C_l}{2\pi} T_0^2, \quad (2.77)$$

em que Δ_T^2 é a função que descreve as flutuações de temperatura da RCF.

A equação (2.77) é independente de l se as flutuações forem invariantes de escala. Para a Cosmologia, os momentos de maior interesse são os que possuem $l \geq 2$, pois é a partir desse valor que se observam os padrões angulares das flutuações de temperatura na superfície de último espalhamento. O termo de monopolo, $l = 0$, se anula quando a temperatura média é corretamente definida, enquanto o termo de dipolo, $l = 1$, é, ao que tudo indica, resultado do efeito Doppler devido ao nosso movimento em relação ao

referencial de repouso da RCF (RYDEN, 2003).

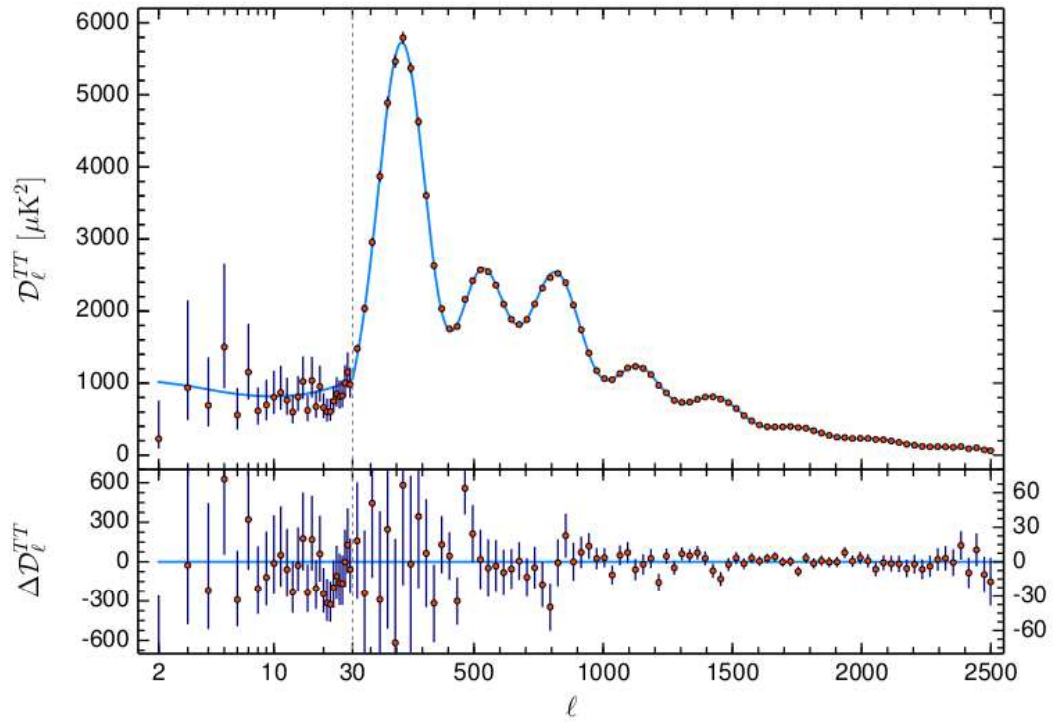


Figura 2.6: Painel superior: Espectro de potência de temperatura do Planck 2018. Os pontos vermelhos correspondem aos dados da RCF a partir das flutuações de temperatura e a curva azul representa o ajuste baseado no modelo Λ CDM. Painel inferior: Diferença entre os dados observados e o modelo. Fonte: PLANCK COLLABORATION *et al.* (2020).

Na figura 2.6, as flutuações de temperatura ΔT são denominadas D_l . Essa figura mostra o espectro de potência de temperatura a partir dos dados obtidos pela colaboração Planck em 2018 e compara esses dados com o ajuste obtido com base no modelo Λ CDM. A partir dos dados da RCF apresentados na figura 2.6, são inferidos os seis principais parâmetros cosmológicos que definem o MCP: a densidade física de matéria bariônica, $\Omega_b h^2$; a densidade física de matéria escura, $\Omega_{cdm} h^2$; a escala angular acústica na época do desacoplamento, θ_s ; a profundidade óptica na reionização, τ_{reio} ; a amplitude espectral das flutuações primordiais, A_s ; e o índice espectral escalar, n_s . Todos os outros parâmetros cosmológicos obtidos pela colaboração Planck são derivados desses utilizando dados de outros observáveis cosmológicos e, conseqüentemente, são denominados parâmetros secundários.

Capítulo 3

Teoria de Perturbações Cosmológicas

O MCP considera que, em escalas acima de 100 Mpc (DIAS *et al.*, 2023), o Universo é estatisticamente descrito como homogêneo e isotrópico, que chamamos de Universo de fundo. Entretanto, as estruturas em grande escala observadas hoje mostram que, em algum momento do passado remoto, existiram inomogeneidades, em menores escalas, necessárias para que essas estruturas começassem a ser formadas. A origem dessas inomogeneidades está no período inflacionário, e sua evolução ao longo do tempo deu origem às galáxias e aglomerados de galáxias que observamos hoje (PLANCK COLLABORATION *et al.*, 2020; TEGMARK *et al.*, 1997).

A compreensão da evolução do crescimento das estruturas em grande escala é um problema amplamente estudado na literatura atual (AKARSU *et al.*, 2025b; AVILA *et al.*, 2018; DE CARVALHO *et al.*, 2020, 2021; DI VALENTINO, 2021; DIAS *et al.*, 2023; FRANCO *et al.*, 2024, 2025a; LOPES *et al.*, 2024, 2025). Para estudarmos as flutuações necessárias para a formação dessas estruturas, consideramos que essas perturbações são muito pequenas, o que nos permite adotar a teoria linear de perturbações cosmológicas (BAUMANN, 2022).

Durante boa parte da história do Universo, o crescimento de estruturas foi dominado pela evolução da matéria escura. Apesar de não conhecermos a natureza física dessa componente cósmica, é possível estudá-la a partir de uma equação de estado e assumir que suas flutuações obedecem às equações da mecânica dos fluidos. Dessa forma, partiremos da métrica FLRW – em que o Universo é descrito por um fluido perfeito homogêneo e isotrópico – e introduziremos pequenas perturbações na métrica e no tensor de energia-momento.

Primeiramente trataremos das perturbações relativísticas na métrica e no fluido cosmológico, em que usa-se o tempo conforme η com o objetivo de facilitar as contas. Depois, abordaremos o limite Newtoniano das perturbações cosmológicas, voltando a utilizar o tempo cósmico t nas equações para que possamos realizar o confronto com os dados observacionais.

3.1 Perturbações na métrica

Para tratarmos das perturbações cosmológicas segundo a RG, devemos introduzir pequenas flutuações na métrica e no tensor de energia-momento da seguinte forma

$$g_{\mu\nu}(\eta, x^i) = \bar{g}_{\mu\nu}(\eta) + \delta g_{\mu\nu}(\eta, x^i), \quad (3.1)$$

e

$$T_{\mu\nu}(\eta, x^i) = \bar{T}_{\mu\nu}(\eta) + \delta T_{\mu\nu}(\eta, x^i), \quad (3.2)$$

em que η é o tempo conforme, definido como

$$\eta \equiv \int \frac{dt}{a(t)}. \quad (3.3)$$

As perturbações podem ser decompostas em modos escalares, vetoriais e tensoriais, em que cada um é responsável por diferentes fenômenos. O primeiro está relacionado às flutuações de matéria-radiação, o segundo à geração de campos magnéticos primordiais e o último à origem das ondas gravitacionais primordiais. Além disso, no regime linear, esses modos são desacoplados. Abordaremos somente as perturbações de modo escalar, pois são essas que estão relacionadas com o crescimento de estruturas em grande escala (BAUMANN, 2022).

Consideremos, então, pequenas perturbações na métrica de FLRW (BAUMANN, 2022)

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[-(1 + 2A) d\eta^2 + 2B_i dx^i d\eta + (\delta_{ij} + 2E_{ij}) dx^i dx^j \right], \quad (3.4)$$

em que A , B_i e E_{ij} são funções do espaço e do tempo conforme e representam, respectivamente, as perturbações escalares, vetoriais e tensoriais. Consideramos a métrica FLRW no caso euclidiano, $K = 0$.

Devemos, então, realizar a decomposição escalar-vetor-tensor (em inglês, *scalar-vector-tensor*, sigla SVT) das perturbações. Para a perturbação vetorial, temos

$$B_i = \underbrace{\partial_i B}_{\text{escalar}} + \underbrace{\hat{B}_i}_{\text{vetor}}, \quad (3.5)$$

em que $\partial^i \hat{B}_i = 0$.

Para a perturbação tensorial, temos

$$E_{ij} = \underbrace{C\delta_{ij} + \partial_{\langle i}\partial_{j\rangle} E}_{\text{escalar}} + \underbrace{\partial_{\langle i}\hat{E}_{j\rangle}}_{\text{vetor}} + \underbrace{\hat{E}_{ij}}_{\text{tensor}}, \quad (3.6)$$

em que

$$\partial_{\langle i}\partial_{j\rangle} E \equiv \left(\partial_i\partial_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2 \right) E, \quad (3.7)$$

e

$$\partial_{(i}\hat{E}_{j)} \equiv \frac{1}{2}(\partial_i\hat{E}_j + \partial_j\hat{E}_i), \quad (3.8)$$

em que $\partial^i\hat{E}_i = \partial^i\hat{E}_{ij} = \hat{E}^i_i = 0$.

No total, temos 10 graus de liberdade (MUKHANOV *et al.*, 1992; SASAKI, 1986):

- Escalar: A, B, C, E
- Vetorial: $\hat{B}_i, \hat{E}_i$
- Tensorial: $\hat{E}_{ij}$

Portanto, ao aplicarmos a decomposição SVT, reduzimos o número de graus de liberdade na métrica perturbada FLRW, e essa simplificação nos permite isolar os modos físicos relevantes para nossa análise, que são os escalares.

3.2 Calibre Newtoniano

As perturbações na métrica (3.4) não são definidas de forma única, mas dependem da escolha de coordenadas, o que nos permite escolher uma relação entre as variáveis, relação esta conhecida como calibre. De fato, ao introduzirmos perturbações na métrica FLRW, introduzimos de forma implícita uma fatiagem temporal específica do espaço-tempo e definimos coordenadas espaciais específicas nessas fatias de tempo. Uma escolha diferente de coordenadas pode alterar os valores das variáveis de perturbação ou introduzir as chamadas perturbações fictícias, oriundas de uma escolha inconveniente de coordenadas. Dessa forma, as perturbações tanto na métrica quanto na matéria não são únicas, pois dependem da escolha de coordenadas. Uma solução para este problema é fixar o calibre e acompanhar as perturbações na métrica e na matéria. Uma escolha conveniente do calibre pode simplificar a análise e, assim, diferentes calibres são usados de acordo com o seu propósito.

No estudo da formação de estruturas em grande escala, o calibre mais apropriado é o calibre Newtoniano, em que fixamos $B = E = 0$. Dessa forma, a métrica (3.4) toma a forma

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[-(1 + 2\Psi) d\eta^2 + (1 - 2\Phi) \delta_{ij} dx^i dx^j \right], \quad (3.9)$$

em que definimos $\Psi \equiv A$ e $\Phi \equiv C$ para relacioná-los com o potencial de Bardeen (BAUMANN, 2022).

Uma vantagem do calibre Newtoniano é que a métrica se torna diagonal, o que simplifica os cálculos e torna a física mais transparente. Isso ocorre pois as hipersuperfícies de tempo constante são ortogonais à linha de mundo dos observadores em repouso e a geometria induzida dessas hipersuperfícies é isotrópica. Além disso, a métrica coincide

com a obtida no limite Newtoniano, em que Ψ representa o potencial gravitacional Newtoniano. No contexto da RG, e considerando que não há *stress* anisotrópico, obtemos $\Psi = \Phi$ (BAUMANN, 2022).

3.3 Perturbações no fluido

Consideremos as perturbações no tensor de energia-momento, sendo o Universo descrito como um fluido perfeito em expansão e com geometria euclidiana. As perturbações são dadas por (BAUMANN, 2022)

$$T^0_0 \equiv -(\bar{\rho} + \delta\rho), \quad (3.10)$$

$$T^0_i \equiv (\bar{\rho} + \bar{P})v_i = -T^i_0, \quad (3.11)$$

e

$$T^i_j \equiv -(\bar{P} + \delta P)\delta^i_j + \Pi^i_j, \quad (3.12)$$

em que v_i representam as componentes das velocidades peculiares e Π^i_j é o tensor de anisotropia. A densidade, a pressão e a velocidade são funções do espaço e do tempo conforme.

De forma análoga ao caso das perturbações na métrica FLRW, realizaremos a decomposição SVT para as perturbações no tensor de energia-momento. Porém, $\delta\rho$ e δP possuem apenas parte escalar, enquanto v_i possui partes escalar e vetorial e Π^i_j possui partes escalar, vetorial e tensorial. Assim, temos

$$v_i = \partial_i v + \hat{v}_i, \quad (3.13)$$

e

$$\Pi_{ij} = \partial_{\langle i} \partial_{j \rangle} \Pi + \partial_{\langle i} \hat{\Pi}_{j \rangle} + \hat{\Pi}_{ij}, \quad (3.14)$$

em que foram impostas as seguintes condições para desacoplarmos as perturbações de diferentes ordens: $\partial^i \hat{v}_i = \partial^i \Pi_{ij} = \Pi^i_i = 0$.

Devido às diversas contribuições ao tensor de energia-momento –tais como fótons, bárions, matéria escura, neutrinos, etc.–, ele é escrito como a soma de cada uma dessas componentes

$$T_{\mu\nu} = \sum_a T^a_{\mu\nu}, \quad (3.15)$$

em que

$$\delta\rho = \sum_a \delta\rho_a, \quad \delta P = \sum_a \delta P_a, \quad \Pi_{ij} = \sum_a \Pi^a_{ij}, \quad (\bar{\rho} + \bar{P})v_i = \sum_a (\bar{\rho}_a + \bar{P}_a)v^a_i, \quad (3.16)$$

em que o subíndice a representa cada contribuição para o tensor de energia-momento. Assim como no caso das perturbações na métrica, as perturbações no fluido também

dependem da escolha de coordenadas.

Por fim, é conveniente escrever as perturbações de densidade em termos de uma variável adimensional, chamada de contraste de densidade, $\delta(\eta, x^i)$, definida como (COLES, 1996)

$$\delta(\eta, x^i) \equiv \frac{\rho(\eta, x^i) - \bar{\rho}(\eta)}{\bar{\rho}(\eta)}, \quad (3.17)$$

em que a teoria de perturbações cosmológicas lineares é válida sempre que $|\delta| \ll 1$. Essa equação compara a densidade em cada posição com seu valor médio em um dado volume. O contraste de densidade é limitado inferiormente por $\delta = -1$ (regiões de grande vazio, com densidade nula) e não possui limite superior, podendo atingir valores muito maiores que 1 em regiões de alta densidade, como em aglomerados de galáxias.

3.4 Limite Newtoniano

Em escalas sub-horizonte, ou seja, quando o comprimento de onda das perturbações é menor do que o tamanho do horizonte de Hubble, podemos utilizar o limite Newtoniano para obter uma equação que descreva a evolução do contraste de densidade da matéria. Estudaremos somente as perturbações de matéria pois são as únicas significativas para a formação de estruturas em grande escala (BAUMANN, 2022; DODELSON, 2003; PADMANABHAN, 1993).

3.4.1 Análise para um Universo estático

Inicialmente, estudaremos a evolução das perturbações adiabáticas de densidade em um Universo estático. Para isso, adotaremos a teoria de Jeans (JEANS, 1902). Assim, descrevemos um fluido perfeito pelas equações

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_r + \nabla_r \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (3.18)$$

$$\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)_r + (\vec{v} \cdot \nabla_r) \vec{u} + \frac{\nabla_r P}{\rho} + \nabla_r \phi = 0, \quad (3.19)$$

$$\nabla_r^2 \phi = 4\pi G \rho - \Lambda, \quad (3.20)$$

que correspondem, respectivamente, às equações de continuidade, de Euler e de Poisson. As quantidades físicas ρ , $\vec{u}$, P e ϕ dependem das coordenadas espaciais e temporais.

Para esse Universo estático, ou seja, para um fluido inicialmente em repouso, consideremos $\rho(\vec{r}) = \bar{\rho}$, $P(\vec{r}) = \bar{P}$ e $\vec{u}(\vec{r}) = \vec{0}$. Perturbando a distribuição de matéria, temos

$$\rho(t, \vec{r}) = \bar{\rho} + \delta\rho(t, \vec{r}), \quad (3.21)$$

$$P(t, \vec{r}) = \bar{P} + \delta P(t, \vec{r}), \quad (3.22)$$

$$\phi(t, \vec{r}) = \bar{\phi} + \delta\phi(t, \vec{r}), \quad (3.23)$$

$$\vec{u}(t, \vec{r}) = \vec{v}(t, \vec{r}), \quad (3.24)$$

em que as quantidades médias são indicadas pela barra.

Logo, podemos obter as equações de perturbações do fluido em primeira ordem

$$\left(\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} \right)_r + \bar{\rho} \nabla_r \cdot (\delta \vec{u}) = 0, \quad (3.25)$$

$$\left(\frac{\partial \delta \vec{u}}{\partial t} \right)_r + \frac{c_s^2}{\bar{\rho}} \nabla_r \delta \rho + \nabla_r \delta \phi = 0, \quad (3.26)$$

$$\nabla_r^2 \delta \phi = 4\pi G \delta \rho, \quad (3.27)$$

em que $c_s^2 \equiv \partial P / \partial \rho$ é o quadrado da velocidade do som no fluido.

Tomando a derivada temporal da equação de continuidade perturbada (3.25), a divergência da equação de Euler perturbada (3.26) e usando a equação de Poisson perturbada (3.27), obtemos

$$(\partial_t^2 - c_s^2 \nabla_r^2) \delta \rho = 4\pi G \bar{\rho} \delta \rho. \quad (3.28)$$

Para resolver essa equação, escrevemos $\delta \rho$ como uma expansão de Fourier

$$\delta \rho(\vec{r}, t) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \delta \rho(\vec{k}, t). \quad (3.29)$$

Substituindo (3.29) em (3.28) e sabendo que $\nabla^2 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = -k^2 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$, transformamos a equação de evolução em um conjunto de equações diferenciais ordinárias, dadas por

$$(\partial_t^2 + c_s^2 k^2 - 4\pi G \bar{\rho}) \delta \rho(\vec{k}, t) = 0. \quad (3.30)$$

A solução para a equação (3.30) é dada pela solução de um oscilador harmônico com $\omega^2(k, t) = c_s^2 k^2 - 4\pi G \bar{\rho}$, escrita como

$$\delta \rho(t) = A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t}, \quad (3.31)$$

em que A e B são constantes determinadas pelas condições iniciais.

Observa-se que há um número de onda crítico, no qual a frequência das oscilações é zero, definido como

$$k_J \equiv \frac{\sqrt{4\pi G \bar{\rho}}}{c_s}. \quad (3.32)$$

A natureza da solução depende da relação entre k e k_J . Para pequenas escalas ($k \gg k_J$), a pressão domina, ω é real e as flutuações oscilam com amplitude constante. Para

grandes escalas ($k \ll k_J$), a gravidade é dominante, ω é imaginário e as flutuações crescem exponencialmente, levando a um colapso gravitacional conhecido como instabilidade de Jeans. Podemos, então, determinar uma escala limite na qual o fluido deixará de oscilar e passará a colapsar ao ultrapassá-la. Essa escala é conhecida como escala de Jeans, definida como

$$\lambda_J \equiv c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\bar{\rho}}}. \quad (3.33)$$

Essa análise, apesar de útil para o estudo da evolução estelar, não pode ser aplicada à cosmologia por não considerar a expansão do Universo. Na próxima subseção, adicionaremos os termos necessários para obtermos uma equação para o contraste de densidade em um Universo em expansão.

3.4.2 Análise para um Universo em expansão

Nesta subseção, estenderemos a análise da subseção anterior para um Universo em expansão. As equações de decomposição das quantidades físicas em valores de fundo e perturbados são as mesmas apresentadas anteriormente, com a velocidade total dada por $\vec{u}(t, \vec{r}) = H(t)\vec{r}(t) + \vec{v}(t, \vec{r})$, em que $\vec{v}$ é a derivada temporal da coordenada comóvel – representando a velocidade peculiar – e $H(t)\vec{r}(t)$ é o fluxo de Hubble. Assume-se novamente que as perturbações de matéria são adiabáticas.

Obtemos, então, as equações de continuidade, de Euler e de Poisson perturbadas, respectivamente, dadas por

$$\frac{\partial \delta_m(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{1}{a} \nabla \cdot \vec{v}(t) = 0, \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial \vec{v}(t)}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} \vec{v}(t) = -\frac{1}{a} \nabla \delta \phi(t, \vec{x}) - \frac{1}{a\bar{\rho}} \nabla \delta P(t, \vec{x}), \quad (3.35)$$

$$\nabla^2 \delta \phi(t, \vec{x}) = 4\pi G \bar{\rho}(t) a^2 \delta_m(\vec{x}, t), \quad (3.36)$$

em que o operador ∇ foi redefinido em termos da coordenada comóvel $\vec{x}$ como

$$\nabla_r \equiv \frac{\nabla_x}{a}, \quad (3.37)$$

e a derivada temporal é reescrita como

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_r = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_x - H \vec{x} \cdot \nabla_x. \quad (3.38)$$

Por fim, tomamos a derivada temporal da equação (3.34), a divergência da equação (3.35) e, combinando seus resultados com a equação (3.36), chegamos à equação do

contraste de densidade de matéria, dada por (BAUMANN, 2022)

$$\ddot{\delta}_m(\vec{x}, t) + 2H\dot{\delta}_m(\vec{x}, t) - \frac{c_s^2}{a^2}\nabla^2\delta_m(\vec{x}, t) - 4\pi G\bar{\rho}(t)\delta_m(\vec{x}, t) = 0, \quad (3.39)$$

em que $c_s^2 \equiv \partial P / \partial \rho$ é o quadrado da velocidade do som no fluido. Nessa equação diferencial, o segundo termo representa o termo de fricção, enquanto os terceiro e quarto termos representam os efeitos devido à pressão de radiação e a atração gravitacional de matéria, respectivamente.

Para resolver a equação (3.39), buscamos soluções do tipo

$$\delta_m(\vec{x}, t) = \delta_+(\vec{x}) D_+(t) + \delta_-(\vec{x}) D_-(t), \quad (3.40)$$

em que $\delta_{\pm}(\vec{x})$ são os modos de Fourier do campo de densidades inicial e $D_{\pm}(t)$ descrevem a evolução linear, sendo chamados de modos de crescimento e decrescimento. O modo $D_-(t)$ costuma ser desprezado por não contribuir para a formação de estruturas. O modo de crescimento $D_+(t)$ é comumente chamado de função de crescimento linear, com a convenção $D_+(t_0) \equiv 1$. A forma funcional de $D_+(t)$ depende da época do Universo. Logo, podemos resolver a equação (3.39) e obter uma relação entre o contraste de densidade de matéria e o fator de escala para cada era de dominância do Universo (BAUMANN, 2022).

Para o caso da matéria dominante, época em que as estruturas em grande escala começaram a se formar, a equação (3.39) se reduz a

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m - 4\pi G\bar{\rho}_m\delta_m = 0. \quad (3.41)$$

Na época de dominação da matéria, temos $a(t) \propto t^{2/3}$, o que leva a equação anterior à forma

$$\ddot{D}(t) + \frac{4}{3t}\dot{D}(t) - \frac{2}{3t^2}D(t) = 0. \quad (3.42)$$

Assumindo, então, o *ansatz* $D(t) \propto t^p$, temos

$$D_{\pm}(t) \propto \begin{cases} t^{2/3} & \propto a \\ t^{-1} & \propto a^{-3/2} \end{cases}. \quad (3.43)$$

Ou seja, na época em que a componente dominante do Universo era a matéria, o crescimento das perturbações de densidade era diretamente proporcional ao fator de escala.

Para a época da radiação dominante, devemos modificar a equação (3.39) para incluir as perturbações no fluido composto de radiação na equação de Poisson. Logo, a equação (3.39) toma a forma

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m - 4\pi G \sum_I \bar{\rho}_I \delta_I = 0, \quad (3.44)$$

em que $I = m, r$, sendo r correspondente ao fluido de radiação composto de bárions e fótons acoplados. Como nesse fluido o som possui alta velocidade, suas flutuações oscilam em escalas menores do que o horizonte, o que implica que a média temporal do contraste de densidade de radiação desapareça. Dessa forma, somente a matéria se aglomera.

Como $a(t) \propto t^{1/2}$ na era da radiação, obtemos

$$\ddot{\delta}_m + \frac{1}{t}\dot{\delta}_m - 4\pi G\bar{\rho}_m\delta_m \approx 0. \quad (3.45)$$

Visto que as flutuações de matéria evoluem na escala de tempo de Hubble, temos que $\ddot{\delta}_m \sim H\dot{\delta}_m$ e

$$H^2\delta_m \sim \frac{8\pi G\bar{\rho}_r\delta_m}{3} \gg 4\pi G\bar{\rho}_m\delta_m, \quad (3.46)$$

porque $\bar{\rho}_r \gg \bar{\rho}_m$. Ignora-se, então, o último termo de (3.45)

$$\ddot{D}(t) + \frac{1}{t}\dot{D}(t) = 0. \quad (3.47)$$

Propondo novamente o *ansatz* $D(t) \propto t^p$, temos

$$D_{\pm}(t) \propto \begin{cases} \ln t & \propto \ln a \\ \text{cte.} \end{cases}. \quad (3.48)$$

Esse resultado demonstra que, na época de dominação da radiação, as perturbações de matéria cresciam proporcionalmente a $\ln(a)$, ou seja, o crescimento de estruturas era suprimido, se comparado à posterior época da prevalência da matéria, devido ao acoplamento entre bárions e fótons.

Por fim, para a época da energia escura dominante, a equação (3.39) é reduzida a

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m - 4\pi G \sum_I \bar{\rho}_I \delta_I = 0, \quad (3.49)$$

sendo $I = m, \Lambda$.

Como no MCP a energia escura não se aglomera, ou seja, não contribui para a formação de estruturas, podemos desprezar sua contribuição na equação de Poisson. Logo, a equação acima toma a forma

$$\ddot{\delta}_m + 2H\dot{\delta}_m - 4\pi G\bar{\rho}_m\delta_m = 0. \quad (3.50)$$

Na era de dominação da energia escura, $a(t) \propto e^{H(t-t_0)}$, de modo que

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \Rightarrow H \approx \text{cte}, \quad (3.51)$$

e

$$\bar{\rho}_m = \rho_{0m} a^{-3} \Rightarrow \bar{\rho}_m \propto e^{-3H(t-t_0)} \Rightarrow H^2 \gg 4\pi G \bar{\rho}_m. \quad (3.52)$$

Logo,

$$\ddot{D}(t) + 2H\dot{D}(t) \approx 0. \quad (3.53)$$

Integrando (3.53), temos

$$D_{\pm}(t) \propto \begin{cases} \text{cte.} \\ e^{-2Ht} \propto a^{-2} \end{cases} \quad (3.54)$$

Ou seja, na era de dominação da energia escura, o contraste de densidade permanece aproximadamente constante, o que significa que a formação de estruturas nessa era é drasticamente suprimida após o tempo da equipartição entre matéria e energia escura.

Após essas análises, podemos afirmar que o crescimento de estruturas em grande escala foi mais significativo durante a era de dominação da matéria, pois as flutuações cresciam proporcionalmente ao fator de escala, enquanto na época da radiação o crescimento era suprimido devido ao acoplamento entre fótons e bárions. Por fim, na era de dominação da energia escura, correspondente ao período atual, o crescimento de estruturas é drasticamente suprimido devido à fase de aceleração cósmica.

3.5 Observáveis Cosmológicos do Universo perturbado

Na seção anterior, obtivemos a equação que descreve a evolução do contraste de densidade de matéria e analisamos como as flutuações de matéria se desenvolveram em cada era de dominância do Universo. De forma análoga ao que foi feito para o Universo de fundo, para estudarmos o Universo perturbado precisamos de observáveis cosmológicos que nos permitam testar as teorias a partir de dados observacionais. Entretanto, o contraste de densidade não é um observável cosmológico, o que implica que precisamos de quantidades observáveis que se relacionem com ele para estudarmos o Universo perturbado.

Para quantificar a rapidez com que as estruturas se formam, definimos a taxa de crescimento de estruturas $f(a)$ da seguinte forma

$$f(a) \equiv \frac{d \ln D}{d \ln a}. \quad (3.55)$$

Uma parametrização encontrada na literatura para a taxa de crescimento é dada por (AMENDOLA e QUERCELLINI, 2004; LINDER, 2005; WANG e STEINHARDT, 1998)

$$f(a) = \Omega_m^\gamma(a), \quad (3.56)$$

em que γ é o índice de crescimento de estruturas. No MCP, e em modelos cosmológicos baseados na RG, seu valor é constante e corresponde a $\gamma = 0,55$. Seu valor pode diferir

em teorias de gravidade modificada (GM), podendo inclusive variar com o tempo (BASILAKOS, 2012; LINDER e CAHN, 2007). Na figura 3.1, observamos a diferença no comportamento de $f(z)$ para três valores de γ . A curva vermelha representa o valor assumido para o MCP ($\gamma = 0,55$), enquanto as curvas verde e azul correspondem aos valores assumidos para as teorias Dvali-Gabadadze-Porrati (DGP) – $\gamma = 0,6875$ – e as teorias escalares-tensoriais ($\gamma = 0,564$), respectivamente (LINDER e CAHN, 2007). Observa-se, então, que a taxa com que as estruturas crescem varia de acordo com a teoria gravitacional considerada. Por isso, estudar o comportamento de γ por meio de dados observacionais constitui um caminho interessante para testar cenários alternativos ao MCP, como veremos no Capítulo 3.

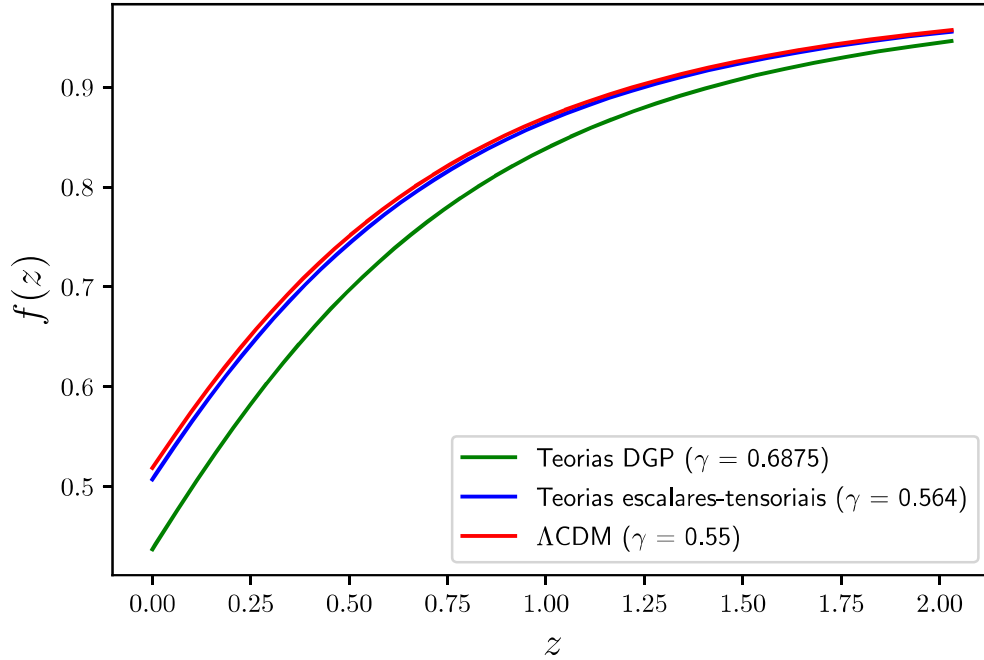


Figura 3.1: Comportamento de $f(z)$ para três diferentes valores de γ . Fonte: A autora.

Em teorias alternativas à RG, especialmente em teorias $F(R)$, a taxa de crescimento de estruturas pode depender da escala de perturbações k , levando a modificações em seu comportamento ao longo do tempo cósmico. Dessa forma, essa quantidade constitui um caminho útil para testar cenários alternativos ao MCP (CAPOZZIELLO e DE LAURENTIS, 2011; D’AGOSTINO e NUNES, 2022; DE SOUZA *et al.*, 2026).

Outro observável importante do Universo perturbado é a variância das flutuações de matéria na escala física R (DIEMER, 2018; FRANCO *et al.*, 2025c)

$$\sigma^2(R, z) = \frac{1}{2\pi^2} \int P(k, z) W_R^2(k) k^2 dk, \quad (3.57)$$

em que $W_R(k)$ é uma função janela *top-hat* com simetria esférica e $P(k, z) = D^2(z)P(k, 0)$ é o espectro de potência das flutuações de densidade.

As observações cosmológicas, por razões históricas, costumam ser feitas na escala $R = 8 h^{-1}$ Mpc. A raiz quadrada da equação (3.57) nessa escala é chamada de amplitude das flutuações de matéria e é denotada por $\sigma_8(z)$. Sua relação com a função de crescimento é dada por (NESSERIS *et al.*, 2017)

$$\sigma_8(z) = \sigma_{8,0} \frac{D(z)}{D(0)}, \quad (3.58)$$

em que $\sigma_{8,0} = \sigma_8(z = 0)$ (COLES, 1996; FRANCO *et al.*, 2025c). De forma similar a $f(z)$, a amplitude de flutuações de matéria também pode ser utilizada para testar modelos alternativos ao Λ CDM (DE SOUZA *et al.*, 2026; OLIVEIRA *et al.*, 2025a). A partir desta quantidade, podemos definir um parâmetro conhecido como S_8 , dado por (PERIVOLAROPOULOS e SKARA, 2022)

$$S_8 \equiv \sigma_{8,0} \left(\frac{\Omega_{m,0}}{0.3} \right)^{1/2}. \quad (3.59)$$

Assim como ocorre no caso da constante de Hubble H_0 , o valor de S_8 é um dos problemas em aberto na cosmologia moderna, com discrepâncias observadas em mais de 3σ entre os valores inferidos a partir dos dados do Planck e dos dados de estruturas em grande escala (ABBOTT *et al.*, 2023; ADIL *et al.*, 2024; AKARSU *et al.*, 2025a; DI VALENTINO, 2021; NUNES e SUNNY, 2021; PERIVOLAROPOULOS e SKARA, 2022; PLANCK COLLABORATION *et al.*, 2020; SABOGAL *et al.*, 2024).

O observável cosmológico do Universo perturbado com maior quantidade de dados disponíveis atualmente corresponde à taxa normalizada de crescimento de estruturas, denotada como $[f\sigma_8](a)$. Essa quantidade é definida como o produto de $f(z)$ e $\sigma_8(z)$, dada por

$$[f\sigma_8](a) = \frac{\sigma_{8,0}}{D(1)} \left[\frac{dD(a)}{d \ln(a)} \right], \quad (3.60)$$

em que $\delta_m(1)$ é o contraste de densidade avaliado hoje ($a_0 = 1$). Assim como os observáveis discutidos anteriormente nessa seção, $[f\sigma_8](a)$ também pode ser utilizado para discriminar teorias alternativas ao MCP (BESSA *et al.*, 2022; OLIVEIRA *et al.*, 2025b; RIBEIRO *et al.*, 2024).

Capítulo 4

Reconstruindo o índice de crescimento com processos gaussianos

Nas últimas décadas, com o avanço da tecnologia na Astronomia Observacional que possibilitou o aumento da quantidade de dados disponíveis, o modelo Λ CDM tem sido colocado à prova constantemente e, devido às questões que este modelo ainda não consegue responder, a busca por teorias alternativas se intensificou. Para auxiliar nesses testes, os dados provenientes dos observáveis cosmológicos do Universo perturbado têm se mostrado bastante úteis, pois mostram-se sensíveis às modificações da equação de estado (da energia escura) e da própria RG.

Desta forma, o índice de crescimento, apresentado na equação (3.56), possui potencial para distinguir entre a RG e modelos alternativos por assumir valores diferentes de acordo com a teoria estudada. Além disso, uma possível evidência da evolução temporal do índice de crescimento e suas implicações cosmológicas tem sido discutida recentemente na literatura (NGUYEN *et al.*, 2023; SPECOGNA *et al.*, 2024; WEN *et al.*, 2023).

Atualmente, existem duas maneiras de se obter γ : (i) coletando medidas de $f(z)$ ou $[f\sigma_8](z)$ e fazendo um ajuste à equação (3.56); e (ii) utilizando um método não paramétrico, reconstruindo γ para um determinado intervalo de z (AVILA *et al.*, 2022a; GONZÁLEZ *et al.*, 2016; MU *et al.*, 2023; YIN e WEI, 2019).

Neste capítulo, introduzimos uma nova metodologia para determinar o índice de crescimento γ . Nossa abordagem combina diversos dados cósmicos de forma independente de modelo, utilizando uma técnica não paramétrica: Processos Gaussianos ¹ (PG) (JESUS *et al.*, 2020; SEIKEL *et al.*, 2012). Especificamente, utilizamos medidas do crescimento de estruturas cósmicas, em especial $f(z)$ e $[f\sigma_8](z)$, juntamente com um conjunto de dados relacionado à expansão do universo, $H(z)$, derivado de Cronômetros Cósmicos (CC) (JIMENEZ e LOEB, 2002; NIU *et al.*, 2023; STERN *et al.*, 2010). Fundamentalmente, esta metodologia opera de forma independente da fixação de parâmetros cosmológicos (AVILA

¹Discutiremos mais detalhadamente os Processos Gaussianos na seção 4.2.

et al., 2022a; MU *et al.*, 2023; YIN e WEI, 2019). Desta forma, acaba se tornando um novo teste de consistência para verificar se γ é uma constante. Ao utilizar derivadas em relação ao redshift dessas quantidades, eliminamos a necessidade de fixar ou medir parâmetros cosmológicos em $z = 0$ para obter γ . Nossa metodologia dá origem, naturalmente, a um teste de consistência para o modelo Λ CDM. Além disso, como $[f\sigma_8](z)$ atinge um valor máximo em um redshift z específico (ZHENG *et al.*, 2022), as equações aqui desenvolvidas podem fornecer uma medida de γ nesse redshift, expressa apenas em termos de $H(z)$ e $dH(z)/dz$.

Assumimos a validade da RG, expressa na equação (3.39), e a métrica de FLRW, ou seja, um Universo estatisticamente homogêneo e isotrópico. Para um Universo com matéria, $\Omega_{m,0}$, energia escura, Ω_Λ , e um termo de curvatura diferente de zero, $\Omega_{k,0} \neq 0$, a solução de (3.39) pode ser escrita como (MARTINEZ e SAAR, 2001)

$$D(z) \equiv E(z) \int_z^\infty \frac{(1+z') dz'}{E^3(z')}, \quad (4.1)$$

em que

$$E(z) \equiv \frac{H(z)}{H_0} = \sqrt{\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{k,0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda,0}}. \quad (4.2)$$

Podemos trabalhar com a equação (3.56) considerando γ constante ou não. Considerar $\gamma = \gamma(z)$ requer que fixemos alguns parâmetros, como $\Omega_{m,0}$. Por isso, considerando que γ é constante na equação (3.56), podemos reconstruí-lo por meio de PG e, portanto, estimar seu valor a partir dos dados de $f(z)$, $[f\sigma_8](z)$ e $H(z)$.

As medições de $f(z)$ e $[f\sigma_8](z)$ são obtidos através da observação de um fenômeno chamado distorções no espaço de redshift (em inglês, *Redshift Space Distortions*, sigla RSD), em que calcula-se o agrupamento de pares de galáxias dividindo a separação entre elas nas direções transversal e paralela à linha de visada através da função de correlação de dois pontos anisotrópica, $\xi(\sigma, \pi)$. Esta função é então modelada em função de um espectro de potência anisotrópico teórico a partir do parâmetro β , definido como $\beta \equiv f/b$, em que f é a função taxa de crescimento de estruturas e b é o viés do traçador que informa como a aglomeração dos objetos cósmicos analisados traça a distribuição da matéria escura (LOPES *et al.*, 2026). A partir desta modelagem, então, os dados observados são ajustados usando simulações de N -corpos, obtendo, por fim, as medidas de $f(z)$ e $[f\sigma_8](z)$ (CONTRERAS *et al.*, 2013; CROCCE *et al.*, 2011).

Alguns modelos de gravidade modificada assumem $\gamma = \gamma(z, k)$, ou seja, o índice de crescimento mostra dependência com a escala em análise (CLIFTON *et al.*, 2012; JOYCE *et al.*, 2015). Como queremos manter nosso estudo dentro da teoria linear de perturbações cosmológicas e dentro do limite da aproximação Newtoniana, desconsideramos esta dependência.

No nosso caso, consideramos γ constante. Desta forma, enfatizamos que nossa meto-

dologia é, de fato, um teste de consistência para um valor constante de γ sem a necessidade de fixar qualquer parâmetro cosmológico.

Para realizar o nosso teste, definiremos equações para γ a partir de $f(z)$, $[f\sigma_8](z)$, $H(z)$ e suas respectivas primeiras derivadas com relação ao redshift. As equações são

$$\mathcal{F}(z) \equiv \frac{f'(z)}{f(z)}, \quad (4.3)$$

$$\mathcal{H}(z) \equiv \frac{H'(z)}{H(z)} = \frac{E'(z)}{E(z)}, \quad (4.4)$$

$$\mathcal{O}(z) \equiv \frac{\Omega'_m(z)}{\Omega_m(z)} \equiv \frac{3}{1+z} - 2\mathcal{H}(z), \quad (4.5)$$

$$\mathcal{D}(z) \equiv \frac{D'(z)}{D(z)} \equiv \frac{E'(z)}{E(z)} - \frac{1+z}{E^3(z)} \frac{1}{\left[1 - \int_0^z \frac{1+z'}{E^3(z')} dz'\right]}, \quad (4.6)$$

e

$$\mathcal{S}(z) \equiv \frac{[f\sigma_8]'(z)}{[f\sigma_8](z)}, \quad (4.7)$$

em que $f'(z)$, $H'(z)$, $\Omega'_m(z)$, $D'(z)$ e $[f\sigma_8]'(z)$ são as derivadas com respeito ao redshift de $f(z)$, $H(z)$, $\Omega_m(z)$, $D(z)$ e $[f\sigma_8](z)$, respectivamente.

Após definir as grandezas acima, obtemos o índice de crescimento γ derivando primeiro a equação (3.56) em relação a z e, em seguida, dividindo-a pela equação (3.56)

$$\gamma \equiv \frac{\mathcal{F}(z)}{\mathcal{O}(z)}. \quad (4.8)$$

Também podemos obter γ a partir dos dados de $[f\sigma_8](z)$. Para isso, partimos da seguinte definição

$$[f\sigma_8](z) = f(z) \sigma_8(z) \equiv f(z) \sigma_{8,0} D(z). \quad (4.9)$$

Considerando $f(z)$ dado pela equação (3.56) e derivando (4.9) com respeito a z , temos

$$\mathcal{S}(z) = \gamma \mathcal{O}(z) + \mathcal{D}(z). \quad (4.10)$$

Logo, da equação acima, obtemos a seguinte equação para o índice de crescimento

$$\gamma \equiv \frac{\mathcal{S}(z) - \mathcal{D}(z)}{\mathcal{O}(z)}. \quad (4.11)$$

Desta forma, utilizaremos as equações (4.8) e (4.11) para reconstruirmos γ por meio de PG com dados de $f(z)$, $[f\sigma_8](z)$ e $H(z)$, que serão apresentados na seção 4.1.

4.1 Conjuntos de dados

Nesta seção, apresentaremos os conjuntos de dados de $f(z)$, $[f\sigma_8](z)$ e $H(z)$, listados nas tabelas 4.1, 4.2 e 4.3, respectivamente. Entretanto, ressaltamos que as reconstruções destas quantidades foram feitas somente no intervalo de redshift $z \in [0.0, 1.0]$ para obtermos um melhor vínculo.

4.1.1 Taxa de crescimento de estruturas

Utilizamos um conjunto de dados composto por 11 medidas de $f(z)$, compiladas em AVILA *et al.* (2022a). Estas medidas estão apresentadas na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Compilação de 11 medidas de $f(z)$ feita por AVILA *et al.* (2022a).

z	$f(z)$	z	$f(z)$
0.013	0.56 ± 0.07	0.41	0.70 ± 0.07
0.15	0.49 ± 0.14	0.55	0.75 ± 0.18
0.18	0.49 ± 0.12	0.60	0.73 ± 0.07
0.22	0.60 ± 0.10	0.77	0.91 ± 0.36
0.35	0.70 ± 0.18	1.40	0.90 ± 0.24
0.38	0.66 ± 0.09		

4.1.2 Taxa normalizada de crescimento de estruturas

Com relação a $[f\sigma_8](z)$, compilamos 35 dados não correlacionados oriundos de SKARA e PERIVOLAROPOULOS (2020), detalhados na tabela 4.2.

4.1.3 Cronômetros Cósmicos

Consideramos 31 dados de Cronômetros Cósmicos (CC), uma metodologia poderosa para medir $H(z)$ sem assumir um modelo cosmológico (para detalhes sobre estas medidas, ver NIU *et al.* (2023)). Essa abordagem permite medir $H(z)$ através da relação

$$H(z) = -\frac{1}{(1+z)} \frac{dz}{dt} \simeq -\frac{1}{(1+z)} \frac{\Delta z}{\Delta t}, \quad (4.12)$$

em que esta equação é obtida a partir da definição $H(t) \equiv \dot{a}(t)/a(t)$ e o termo da derivada é determinado a partir de duas galáxias em evolução passiva — isto é, galáxias com populações estelares antigas e baixas taxas de formação estelar. Seus redshifts devem diferir ligeiramente, suas idades devem ser bem conhecidas e a diferença de idade entre

Tabela 4.2: Compilação de 35 medidas de $[f\sigma_8](z)$ oriundas de SKARA e PERIVOLAROUPOULOS (2020).

z	$[f\sigma_8](z)$	z	$[f\sigma_8](z)$
0.02	0.314 ± 0.048	1.05	0.280 ± 0.08
0.25	0.3512 ± 0.0583	0.32	0.427 ± 0.056
0.44	0.413 ± 0.08	0.727	0.296 ± 0.0765
0.60	0.390 ± 0.063	0.02	0.428 ± 0.0465
0.73	0.437 ± 0.072	0.48	0.458 ± 0.063
0.15	0.490 ± 0.145	0.001	0.505 ± 0.085
0.10	0.370 ± 0.13	0.52	0.483 ± 0.075
1.40	0.482 ± 0.116	0.31	0.384 ± 0.083
0.38	0.497 ± 0.045	0.36	0.409 ± 0.098
0.51	0.458 ± 0.038	0.40	0.461 ± 0.086
0.61	0.436 ± 0.034	0.44	0.426 ± 0.062
0.56	0.472 ± 0.063	0.59	0.452 ± 0.061
0.64	0.379 ± 0.054	0.978	0.379 ± 0.176
1.23	0.385 ± 0.099	1.526	0.342 ± 0.07
1.944	0.364 ± 0.106	0.60	0.49 ± 0.12
0.86	0.46 ± 0.09	0.57	0.501 ± 0.051
0.03	0.404 ± 0.0815	0.72	0.454 ± 0.139
0.18	0.360 ± 0.09		

elas deve ser menor que o tempo de evolução passiva das galáxias escolhidas. É necessário assumir um modelo de síntese de população estelar para estimar suas idades.

Na tabela 4.3, apresentamos as 31 medidas de $H(z)$ obtidas pela metodologia de CC utilizada em nosso estudo, extraídas de NIU *et al.* (2023). Para $z = 0$, adotamos $H_0 = 67.27 \pm 0.60 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. Escolhemos esta medida, proveniente da colaboração Planck 2018, pois pesquisas sugerem que o H_0 derivado de CC apresenta boa concordância com a medida do Planck (GÓMEZ-VALENT e AMENDOLA, 2018; JALILVAND e MEHRABI, 2022).

Ressaltamos que o conjunto de medidas de CC envolve incertezas sistemáticas decorrentes de diversos fatores astrofísicos, incluindo a escolha da função de massa inicial, da biblioteca estelar e da metalicidade. Essas incertezas sistemáticas são quantificadas em JIMENEZ *et al.* (2023); MORESCO (2023); MORESCO *et al.* (2020). Compreender e tratar essas fontes de incerteza é essencial para sua utilização precisa em estudos astrofísicos. Apesar dessas incertezas, é amplamente aceito que as medidas permanecem robustas e adequadas para estudos cosmológicos.

Tabela 4.3: Compilação de 31 dados de CC $H(z)$ obtidos de NIU *et al.* (2023), mais o valor de H_0 do Planck 2018 (PLANCK COLLABORATION *et al.*, 2020).

z	$H(z)$ [km/s/Mpc]	z	$H(z)$ [km/s/Mpc]
0.07	69.0 ± 19.6	0.4783	80.9 ± 9.0
0.09	69.0 ± 12.0	0.48	97.0 ± 62.0
0.12	68.6 ± 26.2	0.593	104.0 ± 13.0
0.17	83.0 ± 8.0	0.68	92.0 ± 8.0
0.179	75.0 ± 4.0	0.781	105.0 ± 12.0
0.199	75.0 ± 5.0	0.875	125.0 ± 17.0
0.2	72.9 ± 29.6	0.88	90.0 ± 40.0
0.27	77.0 ± 14.0	0.9	117.0 ± 23.0
0.28	88.8 ± 36.6	1.037	154.0 ± 20.0
0.352	83.0 ± 14.0	1.3	168.0 ± 17.0
0.3802	83.0 ± 13.5	1.363	160.0 ± 33.6
0.4	95.0 ± 17.0	1.43	177.0 ± 18.0
0.4004	77.0 ± 10.2	1.53	140.0 ± 14.0
0.4247	87.1 ± 11.2	1.75	202.0 ± 40.0
0.4497	92.8 ± 12.9	1.965	186.5 ± 50.4
0.47	89.0 ± 49.6	0.0	67.27 ± 0.60
0.8	113.1 ± 15.2		

4.2 Processos Gaussianos

Os Processos Gaussianos (PG) se tornaram a principal ferramenta estatística para reconstruir parâmetros cosmológicos de forma não paramétrica (GÓMEZ-VALENT e AMENDOLA, 2018; SEIKEL e CLARKSON, 2013; SEIKEL *et al.*, 2012; YANG *et al.*, 2015). Eles nos permitem estudar diversos problemas independentemente de um modelo cosmológico subjacente. Os PG têm sido amplamente aplicados na cosmologia moderna para reconstruir diversas quantidades cosmológicas, como a equação de estado da energia escura, $\omega(z)$ (BONILLA *et al.*, 2021, 2022; SEIKEL *et al.*, 2012; ZHANG e LI, 2018); o parâmetro de desaceleração, $q(z)$ (JESUS *et al.*, 2020; MUKHERJEE e BANERJEE, 2020); a escala de homogeneidade, R_H (AVILA *et al.*, 2022b); entre muitas outras aplicações na cosmologia moderna (AVILA *et al.*, 2022a; COLGÁIN e SHEIKH-JABBARI, 2021; DINDA e BANERJEE, 2023; GHOSH e BENGALY, 2024; PERENON *et al.*, 2021; RENZI e SILVESTRI, 2020; RUIZ-ZAPATERO *et al.*, 2022).

Empregaremos uma abordagem de regressão por aprendizado supervisionado para reconstruir a função $\gamma(z)$ de maneira não paramétrica utilizando PG. Os PG são uma generalização de distribuições gaussianas e caracterizam as propriedades de funções (RASMUSSEN e WILLIAMS, 2006). Eles são totalmente definidos por sua função de média e

sua função de covariância, $m(\mathbf{x})$ e $k(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$

$$\begin{aligned} m(\mathbf{x}) &= \mathbb{E}[f(\mathbf{x})], \\ k(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \mathbb{E}[(f(\mathbf{x}) - m(\mathbf{x}))(f(\mathbf{x}') - m(\mathbf{x}'))]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Assim, escrevemos os PG como

$$f(\mathbf{x}) \sim \mathcal{GP}(m(\mathbf{x}), k(\mathbf{x}, \mathbf{x}')). \quad (4.14)$$

Embora sejam independentes de um modelo cosmológico fiducial, os PG precisam de um kernel específico para reconstruir $f(x)$. Há diversas maneiras de construir um kernel. Em geral, dada a qualidade dos dados —como o número de pontos e o tamanho do intervalo entre eles— selecionam-se alguns kernels para verificar se existem diferenças significativas entre eles. Recentemente, estudos têm sido realizados para verificar o impacto do kernel nas reconstruções (HWANG *et al.*, 2023; ZHANG *et al.*, 2023).

Como nossa metodologia envolve derivadas, usaremos o kernel padrão para o PG: a Função de Base Radial (em inglês *Radial Basis Function*, sigla RBF), também conhecida como Exponencial Quadrada (em inglês *Squared Exponential*, sigla SE), definida como

$$k(x, x') \equiv \sigma_f^2 \exp\left(-\frac{(x - x')^2}{2l^2}\right), \quad (4.15)$$

em que σ_f e l são hiperparâmetros, otimizados durante a reconstrução. A principal vantagem do kernel SE é a sua propriedade de ser infinitamente diferenciável, e aplicada exaustivamente na literatura.

Para realizar os PG, utilizamos o código GaPP², desenvolvido em SEIKEL *et al.* (2012). Este código usa o algoritmo de RASMUSSEN e WILLIAMS (2006) e é robusto na realização das derivadas das reconstruções, necessárias para os nossos objetivos.

Para estimar os erros nas grandezas definidas a fim de obter as equações de γ , realizamos o seguinte procedimento: seja $F(z)$ uma função que representa uma quantidade cosmológica. As funções $F_R(z)$ e $F'_R(z)$ representam as reconstruções das medidas observadas de $F(z)$, com a linha indicando a primeira derivada com respeito ao redshift e o subíndice R indicando que se trata da função reconstruída. Combinando $F_R(z)$ e $F'_R(z)$, podemos derivar outras grandezas cosmológicas, conforme já descrito.

Se uma função $G(z)$ representa a combinação das reconstruções $F_R(z)$ e $F'_R(z)$, denotada como $G[z, F_R(z), F'_R(z)]$, é essencial propagar os erros associados a essas reconstruções. Para isso, empregamos o método de Monte Carlo. Sejam $\sigma_{F_R}(z)$ e $\sigma_{F'_R}(z)$ os erros associados às reconstruções $F_R(z)$ e $F'_R(z)$, respectivamente. Determinamos o erro

²<https://github.com/JCGoran/GaPP>

de $G(z)$ da seguinte forma

$$\sigma_G(z) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [G_i(z) - \bar{G}(z)]^2}, \quad (4.16)$$

em que

$$\bar{G}(z) \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G_i(z), \quad (4.17)$$

sendo $G_i(z) \equiv G[z, F_{R,i}(z), F'_{R,i}(z)]$. Consideramos apropriado $N = 10.000$ realizações. O subíndice i indica cada realização de Monte Carlo obtida a partir de uma distribuição normal das funções $F_R(z)$ e $F'_R(z)$ utilizando os erros associados, $\sigma_{F_R}(z)$ e $\sigma_{F'_R}(z)$, como desvios padrão. Desta forma, temos a relação em que $F_{R,i}(z)$ é da ordem de $\mathcal{N}$

$$F_{R,i}(z) \sim \mathcal{N}(F_R(z), \sigma_{F_R}(z)), \quad (4.18)$$

e

$$F'_{R,i}(z) \sim \mathcal{N}(F'_R(z), \sigma_{F'_R}(z)). \quad (4.19)$$

4.3 Resultados

Na figura 4.1, apresentamos as reconstruções dos três conjuntos de dados utilizados em nossa análise, $f(z)$, $[f\sigma_8](z)$ e $H(z)$, apresentados nas tabelas 4.1, 4.2 e 4.3, de cima para baixo, respectivamente, no intervalo $z \in [0.0, 1.0]$. Em todas as figuras a serem apresentadas, a curva verde sólida corresponde à predição da reconstrução dos dados e as áreas sombreadas representam as regiões de 1σ (verde escuro) e 2σ (verde claro) de confiança. A curva vermelha corresponde ao resultado esperado pelo modelo Λ CDM.

A figura 4.2 mostra as reconstruções das quantidades $\mathcal{F}(z)$ à esquerda e $\mathcal{O}(z)$ à direita, enquanto a figura 4.3 apresenta as quantidades $\mathcal{S}(z)$ à esquerda e $\mathcal{D}(z)$ à direita, no intervalo $z \in [0.0, 1.0]$. Essas grandezas são essenciais e constituem a base para reconstruirmos γ . Como podemos observar, todas essas funções são compatíveis com as previsões do Λ CDM — curva em vermelho — em um nível de confiança de aproximadamente 1σ .

Com relação às reconstruções de $[f\sigma_8](z)$ e $\mathcal{S}(z)$, devido à pouca quantidade de dados disponíveis de $[f\sigma_8](z)$, assim como a distribuição não-uniforme deles em função de z , os PG não conseguem reconstruir corretamente a função $[f\sigma_8](z)$ no intervalo analisado. Para tentar contornar isso, é comum limitar o valor que o hiperparâmetro l pode assumir (AVILA *et al.*, 2022a; PERENON *et al.*, 2021). Utilizamos uma prior no hiperparâmetro l , cujo tamanho corresponde ao intervalo de redshift dos dados, ou seja, $0 < l < 1$. Como observamos na figura 4.3, em todo o intervalo de redshift, a reconstrução de $\mathcal{S}(z)$ é compatível com o Λ CDM. No entanto, como pode ser visto no painel central da figura 4.1,

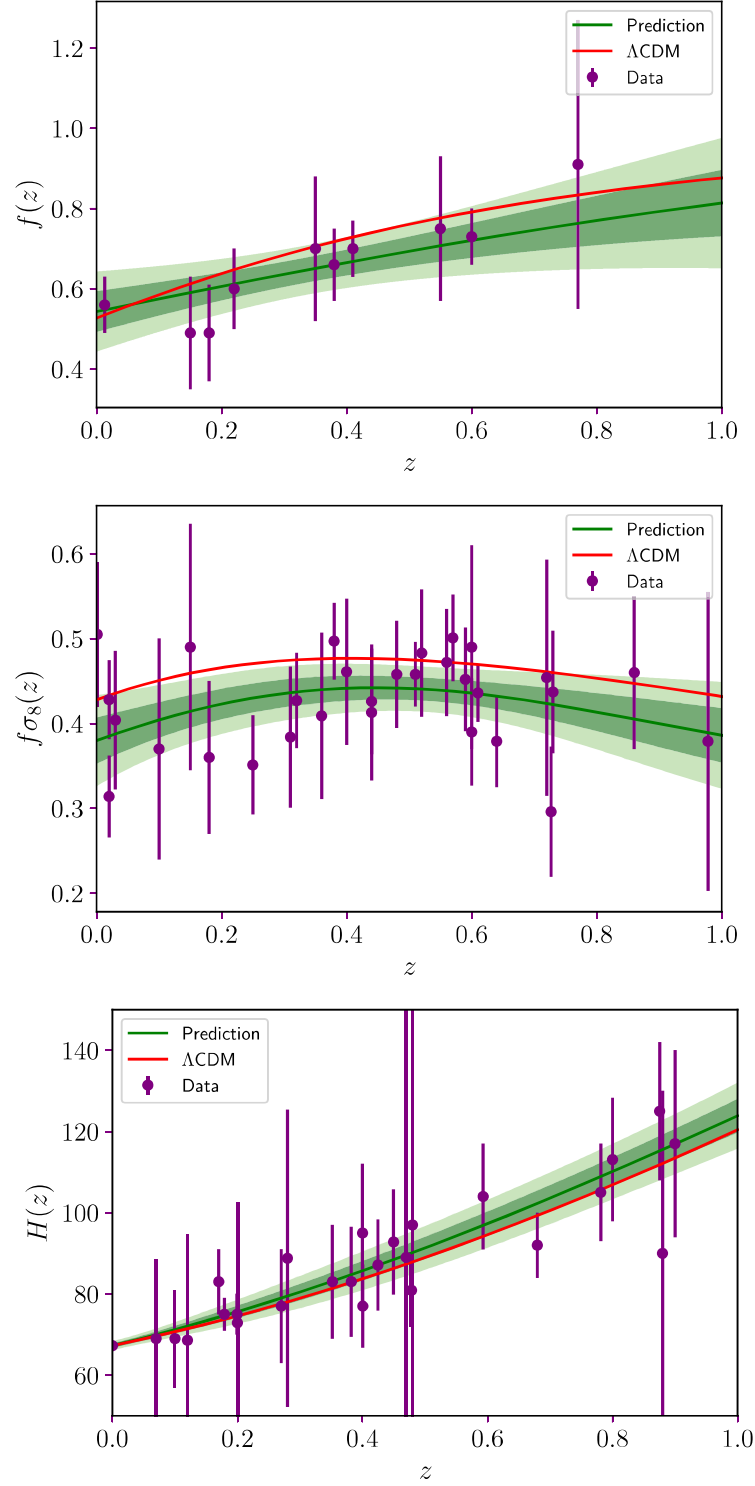


Figura 4.1: Painel superior: Reconstrução de $f(z)$ a partir dos dados de $f(z)$. Painel do meio: Reconstrução de $[f\sigma_8](z)$ a partir dos dados de $[f\sigma_8](z)$. Painel inferior: Reconstrução de $H(z)$ a partir dos dados de $H(z)$. Em todos os painéis, as áreas sombreadas representam as regiões de confiança de 1σ (verde escuro) e 2σ (verde claro). A curva vermelha corresponde ao modelo Λ CDM e os pontos roxos aos dados e suas respectivas incertezas. Fonte: A autora (ver em OLIVEIRA *et al.* (2024)).

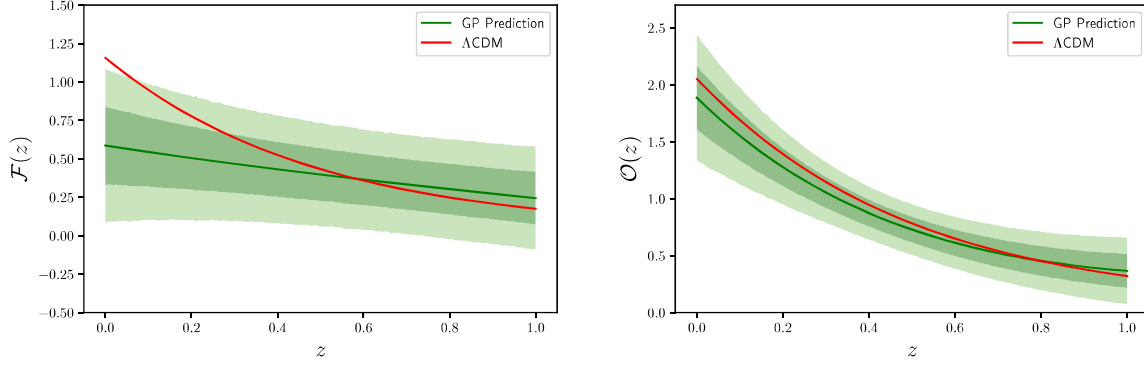


Figura 4.2: Painel à esquerda: Reconstrução de $\mathcal{F}(z)$ a partir dos dados de $f(z)$. Painel à direita: Reconstrução de $\mathcal{O}(z)$ a partir dos dados de $H(z)$. Nos dois painéis, as áreas sombreadas representam as regiões de confiança de 1σ (verde escuro) e 2σ (verde claro). A curva vermelha corresponde ao esperado pelo modelo Λ CDM. Fonte: A autora (ver em OLIVEIRA *et al.* (2024)).

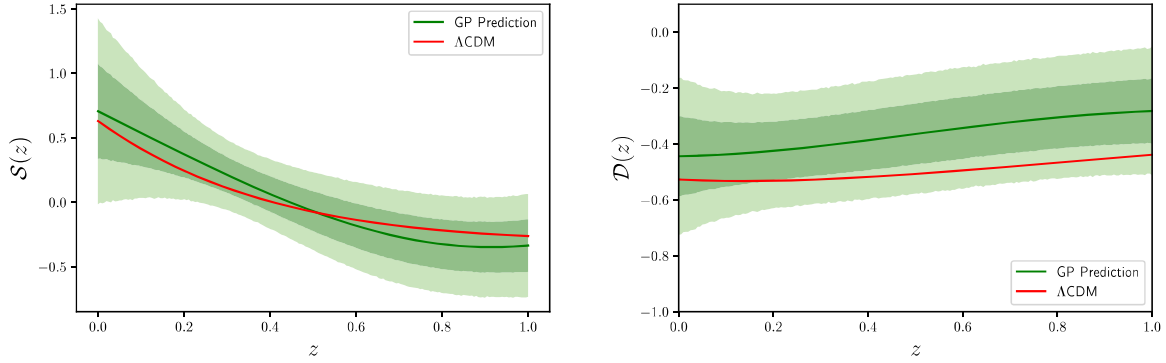


Figura 4.3: Painel à esquerda: Reconstrução de $\mathcal{S}(z)$ a partir dos dados de $[f\sigma_8](z)$. Painel à direita: Reconstrução de $\mathcal{D}(z)$ a partir dos dados de $H(z)$. Nos dois painéis, as áreas sombreadas representam as regiões de confiança de 1σ (verde escuro) e 2σ (verde claro). A curva vermelha corresponde ao esperado pelo modelo Λ CDM. Fonte: A autora (ver em OLIVEIRA *et al.* (2024)).

há uma amplitude reduzida na reconstrução de $[f\sigma_8](z)$, uma supressão no crescimento de estruturas já discutida na literatura (NGUYEN *et al.*, 2023).

Além disso, devido às limitações na quantidade e dispersão dos dados, os PG não reconstróem com precisão o valor máximo de $[f\sigma_8](z)$, o que leva a uma transição indistinta em $\mathcal{S}(z = \bar{z}) = 0$. Consequentemente, à medida que mais dados estiverem disponíveis no futuro, a grandeza $\mathcal{S}(z)$ pode servir não apenas para determinar γ , mas também para avaliar a qualidade da reconstrução de $[f\sigma_8](z)$.

Por fim, utilizando nossa metodologia por meio das equações (4.8) e (4.11), reconstruímos γ no intervalo de redshift $z \in [0.0, 1.0]$ com 1σ e 2σ de confiança, conforme podemos observar nas figuras 4.4 e 4.5. A curva vermelha representa o resultado esperado pelo Λ CDM, em que $\gamma = 0.55$.

Avaliando γ em $z = 0$, encontramos $\gamma(z = 0) = 0.311 \pm 0.144$ com 1σ de confiança para

a reconstrução com os dados de $f(z)$, como observado na figura 4.4. Para a reconstrução com os dados de $[f\sigma_8](z)$, obtemos $\gamma(z=0) = 0.609 \pm 0.200$. Assim, concluímos que nossos resultados estão em bom acordo com o modelo Λ CDM em 2σ . Entretanto –na reconstrução com os dados de $[f\sigma_8](z)$, como observado na figura 4.5– a partir de $z \approx 0.4$, o índice de crescimento deixa de ser uma constante, tornando-se zero e admitindo valores negativos. Dada a nossa definição de γ , o índice de crescimento pode assumir tanto valores positivos quanto negativos, e diverge se $\mathcal{O}(z)$ tender a zero. À medida que z cresce, a reconstrução de $\mathcal{D}(z)$ aumenta lentamente e $\mathcal{S}(z)$ decresce mais rapidamente do que o previsto pelo Λ CDM, fazendo com que γ diminua. Próximo a $z \simeq 0.8$, o erro começa a crescer rapidamente e diverge em algumas iterações de Monte Carlo. Isso se deve ao fato de a reconstrução de $\mathcal{O}(z)$ se aproximar de zero. Para obter um erro mais realista, mantemos apenas as realizações de γ no intervalo $-1 < \gamma < 1$.

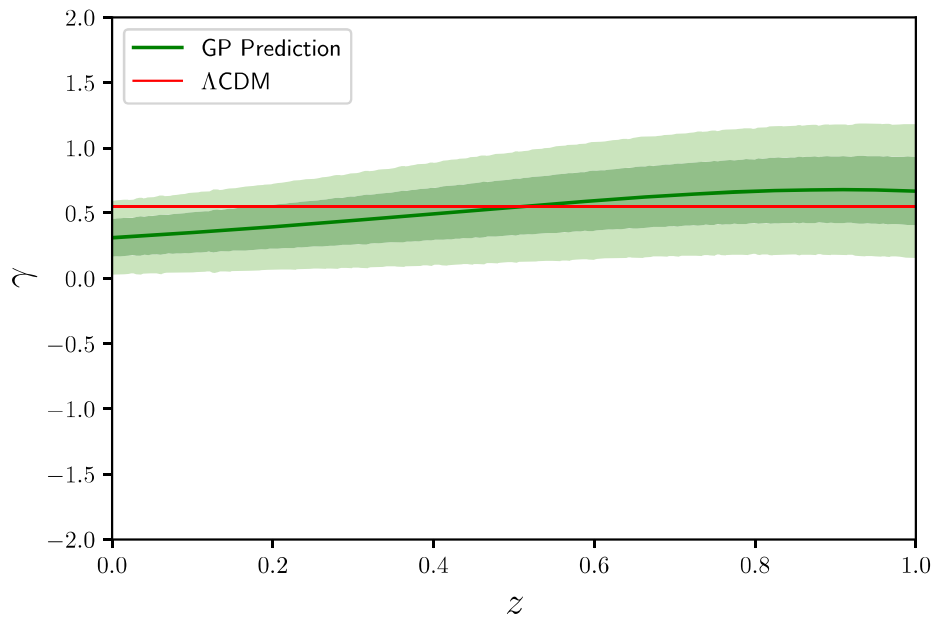


Figura 4.4: Reconstrução de γ a partir dos dados de $f(z)$. As áreas sombreadas representam as regiões de confiança de 1σ (verde escuro) e 2σ (verde claro). A curva vermelha corresponde ao modelo Λ CDM, em que $\gamma = 0.55$. Nossa reconstrução é compatível em 2σ de confiança com o Λ CDM. Fonte: A autora (ver em OLIVEIRA *et al.* (2024)).

4.4 Resumo e Conclusões

O modelo Λ CDM reproduz com sucesso muitos fenômenos cosmológicos observados. No entanto, provavelmente não é o modelo cosmológico final, pois ainda não consegue explicar a natureza física da energia escura, entre outras questões. Uma delas é a compreensão da evolução da aglomeração de matéria, desde as flutuações de densidade primordiais até o Universo observado atualmente (FRANCO *et al.*, 2024; MARQUES *et al.*, 2018;

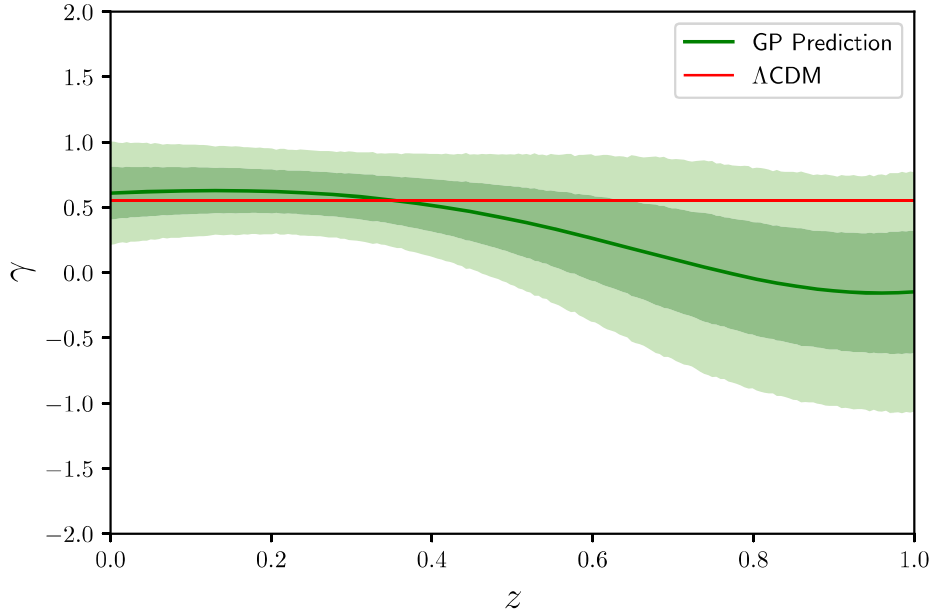


Figura 4.5: Reconstrução de γ a partir dos dados de $[f\sigma_8](z)$. As áreas sombreadas representam as regiões de confiança de 1σ (verde escuro) e 2σ (verde claro). A curva vermelha corresponde ao modelo Λ CDM, em que $\gamma = 0.55$. Nossa reconstrução é compatível em 2σ de confiança com o Λ CDM. Fonte: A autora (ver em OLIVEIRA *et al.* (2024)).

MARQUES e BERNUI, 2020; PLANCK COLLABORATION *et al.*, 2020; WEINBERG *et al.*, 2013). A informação contida na função de crescimento $f(z)$ é fundamental para descrevê-la e uma parametrização importante para este observável é dada pela equação (3.56).

Estudar o comportamento do índice de crescimento é essencial para compreender a história da formação de estruturas em larga escala. Medi-lo com precisão tem o potencial de diferenciar entre a RG e teorias de GM, além de permitir avaliar se o Λ CDM é o melhor modelo para descrever a evolução do crescimento de estruturas.

Neste estudo, propomos e estudamos um novo teste de consistência para γ utilizando PG sem fixar qualquer parâmetro cosmológico nas equações. Integramos diversos conjuntos de dados cósmicos usando derivadas de três quantidades cosmológicas: $f(z)$, $[f\sigma_8](z)$ e $H(z)$, para reconstruir o índice de crescimento. Avaliamos o valor de γ em $z = 0$ a partir de nossas reconstruções e obtemos $\gamma^f(z = 0) = 0.311 \pm 0.144$ e $\gamma^{f\sigma_8}(z = 0) = 0.609 \pm 0.200$. Ambos os valores são consistentes com o valor esperado dentro do modelo Λ CDM em um nível de confiança de 2σ . Nos apêndices A e B, apresentamos testes de consistência do kernel e da função média das reconstruções.

No futuro, é esperado que as amostras de dados de $f(z)$, $[f\sigma_8](z)$ e $H(z)$ tenham muito mais medições provenientes dos atuais e futuros levantamentos astronômicos, tais como o Euclid (AMENDOLA *et al.*, 2018) e o LSST (ZHAN e TYSON, 2018). Sem dúvida, será importante testar nossa metodologia proposta à luz dos dados futuros.

Os resultados destas análises aparecem no artigo *Reconstructing the growth index γ with Gaussian Processes*, publicado na revista *European Physical Journal C* (OLIVEIRA *et al.*, 2024).

Capítulo 5

O modelo $\omega_0\omega_a$ CDM e o Universo perturbado

Análises de medições bastante precisas do fenômeno das Oscilações Acústicas de Bárions (OAB), obtidas recentemente pela colaboração do Dark Energy Spectroscopic Instrument (DESI) (DESI COLLABORATION *et al.*, 2025), sugerem um ponto de virada na determinação do MCP. Considerando a parametrização de Chevallier-Polarski-Linder (CPL) (CHEVALLIER e POLARSKI, 2001; LINDER, 2002) para a equação de estado da energia escura dependente do tempo,

$$\omega(a) = \omega_0 + \omega_a (1 - a), \quad (5.1)$$

em que a é o fator de escala, as análises da colaboração DESI combinaram dados de OAB, RCF e SNIa para encontrar uma preferência em mais de 4σ pelo modelo CPL em comparação com o modelo Λ CDM.

Este resultado, ao demonstrar que tal modelo descreve adequadamente a expansão acelerada do Universo de fundo, levanta a questão de se o modelo $\omega_0\omega_a$ CDM também explica satisfatoriamente os dados do Universo perturbado. De fato, modelos cosmológicos alternativos ao MCP também devem descrever corretamente as propriedades do crescimento de estruturas tão bem quanto o Λ CDM (AVILA *et al.*, 2021; LIU *et al.*, 2025; MARQUES e BERNUI, 2020; NOVAES *et al.*, 2025; SAHLU *et al.*, 2024a; VANETTI *et al.*, 2025).

Atualmente, modelos alternativos têm sido testados em nível perturbativo, medindo-se sua capacidade de reproduzir os dados do crescimento de estruturas cósmicas. Embora os dados do Universo perturbado não sejam tão precisos quanto seria desejável, ainda são adequados para testar a viabilidade desses modelos (BASILAKOS e NESSERIS, 2017; NESSERIS *et al.*, 2017; PERENON *et al.*, 2019; SAHLU *et al.*, 2024a).

Nossa metodologia se baseia em investigar se o modelo $\omega_0\omega_a$ CDM descreve adequadamente os dados do Universo perturbado em duas etapas. Primeiramente, utilizaremos PG

para reconstruir, de forma independente de modelo, a função $\sigma_8(z)$, que denominaremos $\sigma_8^{\text{rec}}(z)$, a partir de uma amostra de 15 medidas de $\{\sigma_8(z_i)\}$. Depois, analisaremos se o modelo $\omega_0\omega_a$ CDM obtido das análises do DESI ajusta-se adequadamente à função $\sigma_8^{\text{rec}}(z)$. Esta avaliação estatística inclui a comparação de $\sigma_8^{\text{rec}}(z)$ com o modelo Λ CDM obtido considerando os parâmetros de melhor ajuste encontrados pelas análises das colaborações Planck (PLANCK COLLABORATION *et al.*, 2020) e DESI (DESI COLLABORATION *et al.*, 2025).

5.1 Reconstrução e dados de $\sigma_8(z)$

Consideramos a amostra de 14 dados de $\sigma_8(z)$ de PICCIRILLI *et al.* (2024), mais uma medida em baixo redshift de FRANCO *et al.* (2025c). Estes 15 dados de $\sigma_8(z)$ foram obtidos analisando diferentes traçadores cósmicos no intervalo de redshift $z \in [0.013, 3.80]$. Estas medidas são obtidas combinando o agrupamento espacial do traçador com o efeito de lenteamento da RCF. Isso é devido ao fato que uma análise combinada do sinal de agrupamento do traçador e da sua correlação cruzada com o lenteamento da RCF quebra a degenerescência entre b e σ_8 , o que torna esses dados independentes do viés b do traçador. Entretanto, as medições dependem de um modelo teórico para o espectro de potência da matéria, pois sua expressão aparece na integral da correlação cruzada. A lista com estes dados é apresentada na tabela 5.1.

Na figura 5.1, temos a reconstrução via PG dos 15 dados de $\sigma_8(z)$ no intervalo $z \in [0, 4]$. A curva azul pontilhada corresponde à função reconstruída $\sigma_8^{\text{rec}}(z)$, com suas respectivas incertezas de 1σ e 2σ representadas pelas áreas sombreadas em azul-escuro e azul-claro. Para realizar a reconstrução, utilizamos o código GaPP (SEIKEL *et al.*, 2012). A linha vermelha tracejada e a linha verde contínua representam os modelos Λ CDM e $\omega_0\omega_a$ CDM com os parâmetros cosmológicos obtidos pela colaboração DESI, respectivamente. Para estes modelos, assumimos $\sigma_8(z=0) = 0.8120$ (PLANCK COLLABORATION *et al.*, 2020)¹. Na próxima seção, abordamos a obtenção das curvas teóricas dos modelos Λ CDM e $\omega_0\omega_a$ CDM.

5.2 Análise estatística

Para obter $\sigma_8(z)$, precisamos resolver a equação que descreve a evolução do contraste de densidade da matéria. Neste caso, considerando a aproximação Newtoniana e que o Universo é basicamente constituído de matéria e energia escura, temos

$$\ddot{\delta}_m(t) + 2H(t)\dot{\delta}_m(t) - 4\pi G_{\text{eff}}\bar{\rho}_m(t)\delta_m(t) = 0, \quad (5.2)$$

¹Assumimos o valor de $\sigma_{8,0}$ da Colaboração Planck para os modelos analisados pois, até o momento, a Colaboração DESI não divulgou seu valor para este parâmetro.

Tabela 5.1: O dado de σ_8 em $z = 0.013^*$ foi medido na escala de 8 Mpc. Para convertê-lo para unidades de Mpc/h , é necessário assumir um valor para h . Desta forma, o valor que aparece na primeira linha desta tabela foi obtido assumindo $h = 0.6727$, de PLANCK COLLABORATION *et al.* (2020).

z	$\sigma_8(z)$	Incerteza
0.013*	0.78	0.04
0.24	0.67	0.04
0.47	0.58	0.04
0.53	0.59	0.03
0.60	0.59	0.02
0.63	0.53	0.04
0.69	0.66	0.10
0.80	0.47	0.04
0.83	0.58	0.04
0.92	0.44	0.06
1.10	0.48	0.01
1.50	0.46	0.05
1.59	0.39	0.06
2.72	0.22	0.06
3.80	0.12	0.06

em que $G_{\text{eff}} \equiv G_N Q(t)$. Nesta equação, G_N é a constante gravitacional de Newton e $Q(t)$ é a função que codifica desvios da RG.

Como não estamos trabalhando com modelos de GM, temos $G_{\text{eff}} = G_N \equiv G$. Para resolver a equação (5.2), precisamos assumir um modelo cosmológico. Logo, para obter sua solução para os modelos ΛCDM e $\omega_0\omega_a\text{CDM}$, consideramos as seguintes expressões para o parâmetro de Hubble, respectivamente:

$$H(a) = H_0 \sqrt{\Omega_{m,0} a^{-3} + \Omega_{\Lambda,0}}, \quad (5.3)$$

e

$$H(a) = H_0 \sqrt{\Omega_{m,0} a^{-3} + \Omega_{\Lambda,0} a^{-3(1+\omega_0+\omega_a)} e^{-3\omega_a(1-a)}}, \quad (5.4)$$

em que $\Omega_{\Lambda,0} = 1 - \Omega_{m,0}$ para um Universo euclidiano composto somente de matéria e energia escura. Portanto, considerando as expressões acima e que $\delta_m(z) \propto D(z)$, podemos resolver a equação (5.2) para os modelos ΛCDM e $\omega_0\omega_a\text{CDM}$ e obter $\sigma_8(z)$ por meio da equação (3.58).

Para realizar uma comparação estatística entre a função teórica $\sigma_8^{\text{mod}}(z)$, proveniente de um modelo cosmológico em estudo, e a função reconstruída σ_8^{rec} — ou seja, medir o

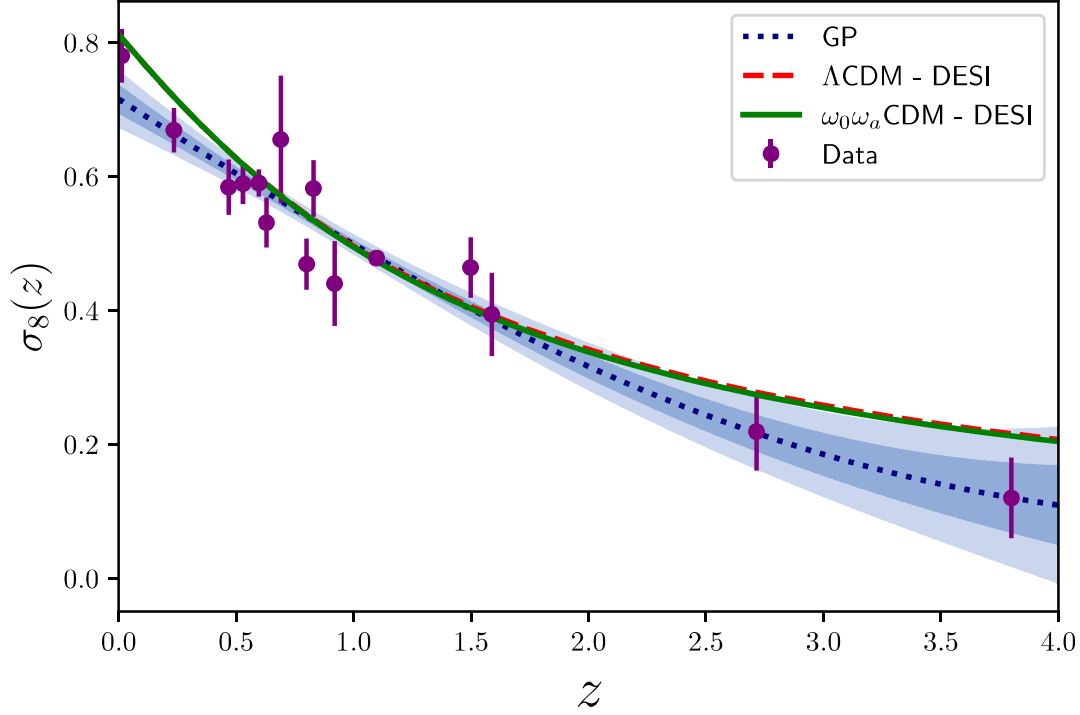


Figura 5.1: Reconstrução dos dados de $\sigma_8(z)$. As áreas sombreadas representam as regiões de confiança de 1σ (azul escuro) e 2σ (azul claro). A linha tracejada em vermelho e a linha contínua em verde representam os modelos Λ CDM e $\omega_0\omega_a$ CDM, respectivamente. Os pontos roxos correspondem aos dados e suas respectivas incertezas. Fonte: A autora (ver em OLIVEIRA *et al.* (2025a)).

quão bem $\sigma_8^{\text{mod}}(z)$ se ajusta a σ_8^{rec} — definimos

$$\chi_{\text{mod/rec}}^2 \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{[\sigma_8^{\text{mod}}(z_i) - \sigma_8^{\text{rec}}(z_i)]^2}{\sigma_{\sigma_8^{\text{mod}}}^2(z_i) + \sigma_{\sigma_8^{\text{rec}}}^2(z_i)}, \quad (5.5)$$

em que **mod** e **rec** se referem ao modelo cosmológico em estudo e à função reconstruída por PG, respectivamente. Em nossa análise, adotamos $N = 1000$ bins². Valores menores para $\chi_{\text{mod/rec}}^2$ indicam uma melhor concordância com os dados³.

Não estamos ajustando parâmetros cosmológicos de um dado modelo para se adequarem aos dados. Em vez disso, comparamos o desempenho de modelos cosmológicos em descrever a evolução temporal do observável reconstruído σ_8^{rec} . Por esta razão, utilizamos os parâmetros de melhor ajuste de cada modelo, incluindo seus erros, conforme relatado na literatura pelas colaborações Planck e DESI (DESI COLLABORATION *et al.*, 2025; PLANCK COLLABORATION *et al.*, 2020). Os conjuntos de dados combinados pelo

² N é o número de bins utilizados na reconstrução por PG. Por consistência, verificamos que o resultado final é independente de N , para $N > 100$.

³Não estamos utilizando o Critério de Informação de Akaike (AKAIKE, 1974) porque os parâmetros cosmológicos dos modelos estudados foram submetidos à regressão utilizando vários conjuntos de dados (por exemplo, OAB, RCF, SNIa, etc.).

DESI foram RCF+OAB+SNia e seus resultados estão resumidos na tabela V de DESI COLLABORATION *et al.* (2025); o conjunto de dados de SNia utilizado provém de DESY5 (ABBOTT *et al.*, 2024). Os parâmetros cosmológicos de melhor ajuste para os modelos investigados pelas colaborações Planck e DESI que estamos considerando em nossa análise estão presentes na tabela 5.2.

Observamos na figura 5.1 que os modelos cosmológicos analisados pelo DESI são competitivos em reproduzir nossa função reconstruída por PG. Utilizando a equação (5.5), quantificamos a análise de melhor ajuste dos três modelos cosmológicos para descrever os dados do Universo perturbado, e os resultados desta comparação estatística estão resumidos na tabela 5.2. Nossa análise mostra que o modelo $\omega_0\omega_a$ CDM se ajusta melhor aos dados de σ_8^{rec} do que os modelos $\Lambda\text{CDM}^{\text{Planck}}$ e $\Lambda\text{CDM}^{\text{DESI}}$.

Tabela 5.2: Análises estatísticas dos modelos ΛCDM e $\omega_0\omega_a\text{CDM}$. O parâmetro cosmológico na 2ª coluna foi extraído de PLANCK COLLABORATION *et al.* (2020), enquanto os dados nas 3ª e 4ª colunas são oriundos de DESI COLLABORATION *et al.* (2025). Nossas análises comparativas, exibidas na última linha, mostram o desempenho desses três modelos em ajustar os dados de σ_8^{rec} .

Parâmetros / Modelo	$\Lambda\text{CDM}^{\text{Planck}}$	$\Lambda\text{CDM}^{\text{DESI}}$	$\omega_0\omega_a\text{CDM}^{\text{DESI}}$
ω_0	-1	-1	-0.752 ± 0.057
ω_a	0	0	$-0.86^{+0.23}_{-0.20}$
Ω_m	0.315 ± 0.0073	0.3027 ± 0.0036	0.3191 ± 0.0056
$\chi^2_{\text{mod/rec}}$	3.475	3.784	3.257

5.3 Resumo e Conclusões

É importante realizar análises de modelos cosmológicos tanto no nível do Universo de fundo quanto no perturbativo, uma vez que alguns modelos podem reproduzir bem o Universo de fundo, mas não o Universo perturbado, ou vice-versa.

Neste estudo, realizamos análises estatísticas para comparar modelos utilizando um conjunto de 15 medições de $\{\sigma_8(z_i)\}$ (FRANCO *et al.*, 2025c; PICCIRILLI *et al.*, 2024). Especificamente, nosso principal objetivo foi estudar a viabilidade de o modelo $\omega_0\omega_a\text{CDM}^{\text{DESI}}$ — o modelo preferido para explicar a dinâmica do Universo de acordo com as recentes análises da colaboração DESI (DESI COLLABORATION *et al.*, 2025) — reproduzir as medições do Universo perturbado.

O resultado final de nossa análise é apresentado na última linha da tabela 5.2, em que quantificamos o desempenho de três modelos cosmológicos — $\Lambda\text{CDM}^{\text{Planck}}$, $\Lambda\text{CDM}^{\text{DESI}}$ e $\omega_0\omega_a\text{CDM}^{\text{DESI}}$ — em termos do melhor ajuste dos dados de σ_8^{rec} . Observa-se que o modelo $\omega_0\omega_a\text{CDM}^{\text{DESI}}$ apresenta um valor menor de $\chi^2_{\text{mod/rec}}$ em comparação com seus

concorrentes. Logo, concluimos que o modelo $\omega_0\omega_a$ CDM^{DESI} se ajusta melhor aos dados de σ_8^{rec} do que os outros dois modelos analisados. Portanto, é possível afirmar que este modelo se mostra competitivo para reproduzir os dados de $\{\sigma_8(z_i)\}$ do Universo perturbado.

Nos apêndices A e B, apresentamos testes de consistência do kernel e da função média das reconstruções relativas ao Capítulo 4, também válidas para a discussão deste capítulo.

Os resultados destas análises aparecem no artigo *Is $\omega_0\omega_a$ CDM a good model for the clumpy Universe?*, publicado na revista *Physics of the Dark Universe* (OLIVEIRA *et al.*, 2025a).

Capítulo 6

Viabilidade da RG e de modelos de GM com dados de alto redshift

Nos últimos anos, diversos modelos cosmológicos têm sido propostos com o objetivo de abordar os problemas do modelo Λ CDM, em especial aquele relacionado à energia escura. Sua natureza física desconhecida motiva a busca por soluções dentro de cenários fisicamente possíveis. O cenário mais promissor é considerar que a RG não é a teoria final da gravitação, dando origem à hipótese de que teorias de gravidade modificada (GM) poderiam explicar a fase recente de expansão acelerada do Universo (CAPOZZIELLO e FANG, 2002; CLIFTON *et al.*, 2012; TSUJIKAWA, 2008).

Por um lado, essas propostas incluem extensões do modelo Λ CDM, bem como modelos de energia escura dinâmica baseados na RG. Como já apresentado, resultados recentes sugerem que modelos baseados na RG com uma equação de estado em evolução constituem alternativas competitivas ao modelo Λ CDM (DESI COLLABORATION *et al.*, 2025). Por outro lado, existem teorias de GM, como $F(R)$ (CLIFTON *et al.*, 2012) e $F(Q)$ (JIMÉNEZ *et al.*, 2020), que estão sendo testadas atualmente ¹. Entre o conjunto de teorias de GM relatadas, comumente denominadas $F(R)$ ou $F(Q)$, decidimos investigar o subconjunto de teorias viáveis, ou seja, aquelas que surgem de uma modificação adequada da teoria da RG. Isso ocorre porque, na escala do Sistema Solar e também no passado distante $z \gg 1$, a RG foi amplamente confirmada por um conjunto de observações astrofísicas que atestam sua validade (AMENDOLA *et al.*, 2007; DE FELICE e TSUJIKAWA, 2010; RIBEIRO *et al.*, 2024).

As teorias $F(R)$ são extensões da teoria da RG, obtidas ao substituir o termo $R - 2\Lambda$ na Lagrangiana de Einstein-Hilbert (EH) por uma função genérica do escalar de Ricci R , denotada $F(R)$. Os modelos $F(R)$ oferecem cenários alternativos onde a recente

¹Outras abordagens também têm sido exploradas, incluindo, por exemplo, modelos de setor escuro unificado, quintessência, modelos de interação matéria escura-energia escura, outras formulações alternativas de teorias de gravidade, etc. (veja, por exemplo, BERTINI *et al.* (2020); CAI *et al.* (2016); HIPÓLITO-RICALDI *et al.* (2025); OKS (2021); ROMERO FUÑO *et al.* (2016); TSUJIKAWA (2013); WANG *et al.* (2024); ZUÑIGA VARGAS *et al.* (2012)).

aceleração cósmica é um efeito da geometria do espaço-tempo, tornando desnecessária a presença da desconhecida, e exótica, energia escura. No entanto, a maioria deles foi descartada por razões teóricas, sobrevivendo aqueles que se reduzem à RG em algum limite, sendo, por isso, chamados de modelos viáveis (AMENDOLA *et al.*, 2007). O primeiro modelo $F(R)$ bem-sucedido foi proposto por Starobinsky para analisar a era inflacionária, com a forma genérica $R + \epsilon R^2$, $\epsilon > 0$ (STAROBINSKY, 1980). Desde então, diversos modelos $F(R)$ têm sido propostos, considerando desde leis polinomiais simples até funções mais complicadas do escalar de Ricci.

Já as teorias $F(Q)$ são generalizações da formulação teleparalela simétrica da RG, que se caracteriza por uma conexão na qual tanto a curvatura quanto a torção desaparecem; em vez disso, a gravidade é descrita por um escalar de não-metricidade Q (CAPOZZIELLO e D’AGOSTINO, 2022; D’AGOSTINO e NUNES, 2022; JIMÉNEZ *et al.*, 2020; KHYLLEP *et al.*, 2021; LAZKOZ *et al.*, 2019; PALIATHANASIS, 2025; SAHLU *et al.*, 2024b, 2025). O modelo $F(Q)$ considerado é um cenário cosmológico alternativo com a propriedade interessante de preservar o Universo de fundo do modelo Λ CDM, mas modificando-o em nível perturbativo por meio do parâmetro M , que aparece na equação de evolução do contraste de densidade de matéria. Logo, trata-se de um modelo viável que pode ser estudado para descrever dados observacionais tanto para a fase recente de expansão acelerada do Universo quanto para o setor perturbado.

Nosso objetivo é analisar a viabilidade de modelos cosmológicos alternativos e buscar indícios observacionais que possam elucidar a natureza da energia escura ou revelar uma preferência pela RG ou por suas possíveis modificações. Consideramos tanto modelos baseados na RG quanto teorias de GM, como $F(R)$ e $F(Q)$, utilizando dados cosmológicos que incluem CC e SNIa no nível do Universo de fundo e $[f\sigma_8](z)$, no nível perturbativo. Nossa abordagem emprega dois métodos bem conhecidos para análise estatística: as Cadeias de Markov Monte Carlo (em inglês, *Markov Chain Monte Carlo*, sigla MCMC) e PG.

Utilizamos dados observacionais —sendo 31 dados de $H(z)$ de CC e 35 dados de $[f\sigma_8](z)$, apresentados respectivamente nas tabelas 4.3 e 4.2, e dados de $D_L(z)$ oriundos de 1701 curvas de luz de SNIa do catálogo Pantheon+ (BROUT *et al.*, 2024)— e realizamos a análise das MCMC para obter os valores de melhor ajuste dos parâmetros cosmológicos para os modelos estudados. Esses resultados são então comparados com reconstruções independentes de modelo via PG, permitindo-nos testar a consistência e a robustez dos ajustes de MCMC sem assumir modelo algum. Essa comparação pode revelar discrepâncias que sugerem tensões entre o modelo e os dados. Se o modelo de melhor ajuste do MCMC falhar em reproduzir as reconstruções de PG, isso pode indicar que ele carece de flexibilidade para capturar todas as características dos dados ou, de forma equivalente, que os dados contêm informações não explicadas pelo modelo. A partir das informações obtidas com essa comparação, utilizamos os resultados do MCMC juntamente com

o Critério de Informação de Akaike (AIC) (AKAIKE, 1974) e o Critério de Informação Bayesiano (BIC) (SCHWARZ, 1978) para comparar diferentes modelos baseados na RG e em teorias de GM.

Os modelos a serem estudados incluem os baseados na RG: ω CDM (BARBOZA, 2010); o modelo $\omega_0\omega_a$ CDM com a parametrização CPL; e o Λ CDM estendido com curvatura espacial, Ω_k -CDM. Também consideramos modelos viáveis de gravidade modificada $F(R)$, tais como o de Starobinsky (STAROBINSKY, 2007), Hu-Sawicki (HU e SAWICKI, 2007) e o de Appleby-Battye corrigido por R^2 (APPLEBY e BATTYE, 2007; APPLEBY *et al.*, 2010). Além disso, estudamos um modelo $F(Q)$ que possui uma evolução do Universo de fundo idêntica à da RG (JIMÉNEZ *et al.*, 2020). Todos esses modelos são comparados ao Λ CDM e se baseiam nas simetrias de FLRW. Abordaremos esses modelos mais detalhadamente na seção 6.2.

Do ponto de vista observacional, diversos estudos recentes impuseram restrições aos parâmetros desses modelos cosmológicos alternativos utilizando diferentes conjuntos de dados. Modelos baseados na RG foram analisados em, por exemplo, ABBOTT *et al.* (2024); AFROZ e MUKHERJEE (2025); DESI COLLABORATION *et al.* (2025); LUONGO e MUCCINO (2024); MARTINELLI *et al.* (2021); PLANCK COLLABORATION *et al.* (2020); XIE *et al.* (2025); modelos $F(R)$ foram estudados em BASILAKOS e NESSERIS (2017); BASILAKOS *et al.* (2013); BESSA *et al.* (2022); CARDONA *et al.* (2021); KUMAR *et al.* (2025, 2023); MARTINELLI (2009); NUNES *et al.* (2017); PLAZA e KRAISELBURD (2025); RIBEIRO *et al.* (2024); e o modelo $F(Q)$ foi analisado em BARROS *et al.* (2020).

Entretanto, alguns desses estudos concentram-se exclusivamente em uma classe de modelos, por vezes utilizando apenas dados do Universo de fundo. Mesmo quando análises com dados do Universo perturbado são incluídas, não é comum encontrar trabalhos que abranjam as três classes de teorias em um quadro comparativo unificado. Nesse sentido, nossa contribuição é fornecer uma análise consistente e atualizada, comparando em conjunto modelos baseados na RG, $F(R)$ e $F(Q)$, tanto com dados do Universo de fundo quanto com dados do Universo perturbado, permitindo uma avaliação mais abrangente da viabilidade desses cenários gravitacionais concorrentes.

6.1 Cadeias de Markov Monte Carlo (MCMC)

O método das Cadeias de Markov Monte Carlo (MCMC) é uma ferramenta estatística utilizada para construir uma sequência de pontos de dados, chamada de cadeia, no espaço de parâmetros para avaliar a probabilidade posterior de um modelo (GELMAN *et al.*, 2013; GILKS *et al.*, 1995; PADILLA *et al.*, 2019). O MCMC combina Cadeias de Markov, que descrevem uma sequência de estados com probabilidades que dependem apenas do estado anterior, e a amostragem de Monte Carlo, que utiliza a aleatoriedade para amos-

trar distribuições de probabilidade. Conforme observado na literatura, o MCMC possui diversas aplicações na cosmologia (BESSA *et al.*, 2022; RIBEIRO *et al.*, 2024, 2026; SABOGAL e NUNES, 2025; SABOGAL *et al.*, 2025). Neste estudo, o utilizamos tanto para estimativa de parâmetros quanto para comparação de modelos. Sabe-se que o número de pontos de dados necessários para obter estimativas confiáveis com o MCMC aumenta linearmente com o número de parâmetros, tornando este método significativamente mais eficiente do que abordagens baseadas em redes à medida que a dimensionalidade aumenta.

De acordo com o Teorema de Bayes, a distribuição a posteriori depende da verossimilhança (em inglês, *likelihood*) $\mathcal{L}(D|\vartheta, \alpha)$ e do prior $p(\vartheta, \alpha)$ a partir de

$$P(\vartheta|D, \alpha) \propto \mathcal{L}(D|\vartheta, \alpha) p(\vartheta, \alpha), \quad (6.1)$$

em que ϑ representa o conjunto de parâmetros do modelo, D denota o conjunto de dados e α codifica a informação a priori. Em nossas análises, utilizamos um prior plano e a verossimilhança é computada por meio de

$$\mathcal{L} \propto \exp(-\chi^2(D, \vartheta)/2), \quad (6.2)$$

em que o chi-quadrado, χ^2 , é dado por

$$\chi^2 = \sum_{ij} \Delta E_i^T C_{ij}^{-1} \Delta E_j, \quad (6.3)$$

sendo

$$\Delta E_i \equiv E_i(\vartheta|\alpha) - D_i. \quad (6.4)$$

Nesta equação, $E_i(\vartheta|\alpha)$ representa o i -ésimo valor esperado com base no modelo, enquanto C_{ij} é a matriz de covariância que codifica as incertezas estatísticas e sistemáticas associadas ao conjunto de dados D_i .

Realizamos uma análise de verossimilhança conjunta (SNIa+CC+[$f\sigma_8$](z)) para impor vínculos mais restritos aos modelos ao longo do intervalo de redshift dos conjuntos de dados. Assim, o χ^2 total é dado por

$$\chi^2 = \chi_{\text{SNIa}}^2 + \chi_{\text{CC}}^2 + \chi_{f\sigma_8}^2, \quad (6.5)$$

que resulta na likelihood total

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{SNIa}} \times \mathcal{L}_{\text{CC}} \times \mathcal{L}_{f\sigma_8}. \quad (6.6)$$

Utilizaremos esta análise para estimar o valor do melhor ajuste dos parâmetros cosmológicos de cada modelo analisado e para obter a máxima verossimilhança, utilizada para derivar o $\chi_{\min}^2$ e, conseqüentemente, o AIC e o BIC.

6.2 Modelos Cosmológicos Alternativos

Nesta seção, apresentamos os modelos cosmológicos alternativos analisados neste estudo. Esses modelos incluem: quatro baseados na RG, três pertencentes à classe das teorias $F(R)$ e um baseado na teoria $F(Q)$. Todos são comparados com o modelo Λ CDM. Discutimos brevemente cada um deles nas subseções seguintes.

6.2.1 Modelos baseados na RG

Examinamos modelos caracterizados ou por uma equação de estado diferente para a energia escura ou por uma geometria não euclidiana do Universo. Esses modelos se baseiam na RG, de modo que a fase de expansão acelerada ainda é atribuída à presença da energia escura.

No modelo ω CDM, a equação de estado da energia escura — assumida como $\omega = -1$ para o modelo Λ CDM — ainda assume um valor constante, porém é tratada como um parâmetro livre, ou seja, é permitido que seu valor seja diferente de -1 . Neste caso, o parâmetro de Hubble é dado por

$$H(a) = H_0 \sqrt{\Omega_{m,0} a^{-3} + \Omega_{\Lambda,0} a^{-3(1+\omega)}}. \quad (6.7)$$

Já para o modelo $\omega_0\omega_a$ CDM, assumimos a parametrização CPL, em que a equação de estado da energia escura é dada por (5.1) e o parâmetro de Hubble é dado por (5.4).

O último modelo baseado na RG é o Ω_k -CDM. Neste caso, a geometria do Universo não é mais assumida como euclidiana. Logo, temos

$$H(a) = H_0 \sqrt{\Omega_{m,0} a^{-3} + \Omega_{k,0} a^{-2} + \Omega_{\Lambda,0}}, \quad (6.8)$$

em que $\Omega_{k,0}$ é o parâmetro de densidade de curvatura avaliado hoje.

6.2.2 Modelos $F(R)$

As teorias $F(R)$ são, provavelmente, os modelos alternativos de gravidade mais investigados na literatura. Estas teorias correspondem a uma modificação da RG na qual o termo $R - 2\Lambda$ na Lagrangiana de Einstein-Hilbert (EH) é substituído por uma função do escalar de Ricci, R . Tal modificação nos permite explicar a aceleração atual como um efeito da geometria do espaço-tempo, sem recorrer à energia escura. Por outro lado, um grau de liberdade extra é introduzido no setor gravitacional: o scalaron, um campo escalar canônico cujo potencial é determinado por $F(R)$ (DE FELICE e TSUJIKAWA, 2010; NOJIRI *et al.*, 2017; NOJIRI e ODINTSOV, 2011; SOTIRIOU e FARAONI, 2010). A ação para a gravidade $F(R)$ é escrita como (CAPOZZIELLO e DE LAURENTIS, 2011; CLIFTON *et al.*, 2012; DE FELICE e TSUJIKAWA, 2010; RIBEIRO *et al.*, 2024; SOTIRIOU

e FARAONI, 2010)

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_P^2}{2} F(R) + \mathcal{L}_M \right], \quad (6.9)$$

em que $\mathcal{L}_M$ é a Lagrangiana de matéria e $M_P^2 \equiv (8\pi G)^{-1}$ é a massa de Planck.

Nessas teorias, G_{eff} é modificado pela presença de um grau de liberdade escalar e, como mostrado em trabalhos anteriores (DE FELICE e TSUJIKAWA, 2010; TSUJIKAWA, 2007), pode ser expresso como

$$G_{\text{eff}} \equiv \frac{G}{F'(R)} \frac{1 + 4p(k^2/a^2 R)}{1 + 3p(k^2/a^2 R)}, \quad (6.10)$$

em que

$$p \equiv \frac{RF''(R)}{F'(R)}, \quad (6.11)$$

sendo $F'(R) \equiv dF(R)/dR$ e k denota a dependência escalar. Essa expressão decorre da análise de perturbação escalar no limite sub-horizonte. Para garantir a compatibilidade com o intervalo de escalas sondado pelos dados de $[f\sigma_8](z)$ e permanecer dentro do regime linear, fixamos a escala em $k = 0.1 \text{ Mpc}^{-1}$, como também adotado em outros trabalhos na literatura (BASILAKOS *et al.*, 2013; KUMAR *et al.*, 2023; RIBEIRO *et al.*, 2024; TSUJIKAWA, 2007).

Analizamos três modelos da teoria $F(R)$. O primeiro é o modelo de Starobinsky, dado por (STAROBINSKY, 2007):

$$F_S(R) \equiv R + \lambda R_s \left[\left(1 + \frac{R^2}{R_s^2} \right)^{-n} - 1 \right], \quad (6.12)$$

em que R_s , λ e $n > 0$ são os parâmetros do modelo. No regime de alta curvatura, $R \gg R_s$, o modelo produz uma constante cosmológica efetiva, $\Lambda \equiv \lambda R_s/2$. Por outro lado, a escala de curvatura atual R_s está relacionada a λ por

$$R_s = \frac{6H_0^2(1 - \Omega_{m,0})}{\lambda}. \quad (6.13)$$

O parâmetro n também está relacionado a λ , o que leva aos seguintes limites inferiores: $\{n, \lambda_{\min}\} = \{1, 1.54\}, \{2, 1.27\}, \{3, 1.04\}, \{4, 0.90\}$ (MOTOHASHI *et al.*, 2010). Geralmente, o parâmetro n é fixo. Consideramos $n = 1$ e $n = 2$, que são os casos mais estudados na literatura (KOPP *et al.*, 2013; MOTOHASHI *et al.*, 2009; NUNES *et al.*, 2017), deixando λ como o único parâmetro livre. Essas escolhas garantem um mecanismo camaleão (em inglês, *chameleon screening*) eficiente e evitam tensões com os testes do Sistema Solar, além de simplificar o espaço de parâmetros ao reduzir degenerescências com outros parâmetros (BESSA *et al.*, 2022; NUNES *et al.*, 2017).

O segundo modelo $F(R)$ pertence à classe de teorias de potência comumente estudadas,

conhecido como modelo de Hu-Sawicki, e é dado por (HU e SAWICKI, 2007):

$$F_{\text{HS}}(R) \equiv R - m_0^2 \frac{c_1 (R/m_0^2)^n}{c_2 (R/m_0^2)^n + 1}, \quad (6.14)$$

sendo $n > 0$, e c_1 e c_2 parâmetros adimensionais. A escala de curvatura atual, m_0 , é definida como

$$m_0^2 \equiv \frac{8\pi G \rho_0}{3} = H_0^2 \Omega_{m,0}. \quad (6.15)$$

O caso limite da RG, em que $c_1/c_2^2 \rightarrow 0$ com c_1/c_2 fixo, corresponde a uma constante cosmológica efetiva dada por $\Lambda \equiv m_0^2 c_1/(2c_2)$. Como $\Lambda = 3H_0^2(1 - \Omega_{m,0})$, temos

$$c_1 = 6c_2 \frac{1 - \Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}}, \quad (6.16)$$

vinculando os parâmetros c_1 e c_2 , o que implica que o modelo possui dois parâmetros livres: n e c_2 .

De maneira alternativa, o modelo de Hu-Sawicki pode ser reescrito da seguinte forma:

$$F_{\text{HS}}(R) = R - 2\Lambda \frac{R^n}{R^n + \mu^{2n}}, \quad (6.17)$$

redefinindo

$$\mu^2 \equiv m_0^2 c_2^{-1/n}. \quad (6.18)$$

Essa forma preserva o número de parâmetros livres, agora representados por n e μ . Note que, como μ aparece ao quadrado, apenas seu valor absoluto $|\mu|$ é fisicamente relevante. Assim como no caso de Starobinsky, n costuma ser fixado no modelo de Hu-Sawicki, deixando μ como o único parâmetro livre. Essas escolhas também preservam a eficiência do mecanismo camaleão e permanecem consistentes com os vínculos da gravidade local (BESSA *et al.*, 2022; NUNES *et al.*, 2017).

O último modelo $F(R)$ é o de Appleby-Battye corrigido por um fator R^2 (R^2 -AB), dado por (APPLEBY *et al.*, 2010):

$$F_{\text{AB}}(R) \equiv \frac{R}{2} + \frac{\epsilon_{AB}}{2} \ln \left[\frac{\cosh(R/\epsilon_{AB} - b)}{\cosh b} \right] + \frac{R^2}{6M^2}, \quad (6.19)$$

em que ϵ_{AB} e b são os parâmetros do modelo, relacionados pela equação

$$\epsilon_{AB} = \frac{R_{vac}}{b + \ln(2 \cosh b)}, \quad (6.20)$$

sendo $R_{vac} \equiv 12H_0^2$ a curvatura escalar no vácuo. Para reproduzir a aceleração cósmica recente, é necessária a condição $b \geq 1.6$ (APPLEBY *et al.*, 2010; MOTOHASHI e NISHIZAWA, 2012; RIBEIRO *et al.*, 2024). O parâmetro M corresponde à escala de massa

do scalaron, que é determinada a partir da amplitude do espectro de potência primordial como $M \approx 1.2 \times 10^{-5} M_P$ na época da inflação (MOTOHASHI e NISHIZAWA, 2012).

6.2.3 Modelo $F(Q)$

Nos modelos $F(Q)$, a conexão não é mais compatível com a métrica. O tensor de não-metricidade, definido como $Q_{\alpha\mu\nu} = \nabla_\alpha g_{\mu\nu}$ — em que $g_{\mu\nu}$ é a métrica — é o objeto fundamental e a gravidade é descrita pelo escalar de não-metricidade Q (CAPOZZIELLO e D’AGOSTINO, 2022; D’AGOSTINO e NUNES, 2022; JIMÉNEZ *et al.*, 2020; KHYLLEP *et al.*, 2021; LAZKOZ *et al.*, 2019; PALIATHANASIS, 2025; SAHLU *et al.*, 2024a, 2025):

$$Q = -Q_{\alpha\mu\nu} P^{\alpha\mu\nu}, \quad (6.21)$$

em que $P^{\alpha\mu\nu}$ é o conjugado de não-metricidade definido como

$$P_{\mu\nu}^\alpha \equiv -\frac{1}{2}L_{\mu\nu}^\alpha + \frac{1}{4}(Q^\alpha - \tilde{Q}^\alpha)g_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\delta_{(\mu}^\alpha Q_{\nu)}, \quad (6.22)$$

e $L_{\mu\nu}^\alpha$ é a distorção

$$L_{\mu\nu}^\alpha \equiv \frac{1}{2}Q_{\mu\nu}^\alpha - Q_{(\mu\nu)}^\alpha, \quad (6.23)$$

em que $Q_\alpha = g^{\mu\nu}Q_{\alpha\mu\nu}$ e $\tilde{Q}_\alpha = g^{\mu\nu}Q_{\mu\alpha\nu}$.

Logo, a ação para as teorias $F(Q)$ é escrita como (JIMÉNEZ *et al.*, 2020; KHYLLEP *et al.*, 2021):

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{16\pi G} F(Q) + \mathcal{L}_M \right], \quad (6.24)$$

em que $\mathcal{L}_M$ é a Lagrangiana de matéria. Quando $F(Q) = Q$, recupera-se a RG.

Para estas teorias, o G_{eff} toma a seguinte forma (BARROS *et al.*, 2020; JIMÉNEZ *et al.*, 2020):

$$G_{\text{eff}} \equiv \frac{G}{F'(Q)}, \quad (6.25)$$

em que $F'(Q) \equiv dF(Q)/dQ$.

Estudaremos apenas um modelo de teoria $F(Q)$: um modelo que reproduz a evolução do Universo de fundo da RG, mas possui uma modificação no nível perturbativo. Esse modelo é escrito como (BARROS *et al.*, 2020):

$$F(Q) = Q + M\sqrt{Q}, \quad (6.26)$$

em que M é dado em unidades de H_0 e está relacionado a uma determinada escala de massa. Este parâmetro livre aparece apenas no nível perturbativo, o que significa que seu valor só pode ser determinado com dados de crescimento de estruturas.

6.3 Resultados

Na figura 6.1, apresentamos as reconstruções dos três conjuntos de dados usados em nossa análise, $H(z)$, $D_L(z)$ e $[f\sigma_8](z)$, de cima para baixo, respectivamente, no intervalo de redshift dos dados. Nas três figuras, a curva azul pontilhada corresponde à predição da reconstrução dos dados e as áreas sombreadas representam as regiões de 1σ (azul-escuro) e 2σ (azul-claro) de confiança. A curva azul tracejada corresponde ao modelo Λ CDM. Em todos os casos, o Λ CDM se encontra dentro da região de 1σ . O aumento das incertezas em regiões com dados esparsos pode causar os desvios aparentes observados nessas regiões. Para realizar as reconstruções, utilizamos o código GaPP (SEIKEL *et al.*, 2012).

Em seguida, computamos as funções cosmológicas necessárias para a comparação com os dados observacionais. Para modelos baseados na RG, o parâmetro de Hubble admite uma expressão analítica — por meio das equações (6.7), (5.4) e (6.8). Por outro lado, para teorias de GM, $H(z)$ deve ser determinado numericamente. Uma vez que $H(z)$ é obtido, $D_L(z)$ é calculado utilizando a equação (2.50), e o contraste de densidade da matéria é obtido a partir da equação (5.2) para cada um dos modelos alternativos discutidos, com as condições iniciais fixadas em $z = 5$. Como os modelos devem reproduzir a era dominada pela matéria, necessária para a formação de estruturas no Universo primordial ($z \gg 1$), eles não devem se desviar significativamente do MCP.

Em seguida, realizamos uma análise conjunta de MCMC utilizando três conjuntos de dados cosmológicos, abrangendo tanto o Universo de fundo quanto o Universo perturbado: $H(z)$, $D_L(z)$ e $[f\sigma_8](z)$. Os priors adotados foram: $54 < H_0 < 76$, $0.1 < \Omega_{m,0} < 0.5$, $0.6 < \sigma_{8,0} < 0.9$ e $-20.2 < M_B < -19$ para todos os modelos. Para os modelos baseados na RG, usamos: $-5 < \omega < 0$ para o ω CDM; $-1.5 < \omega_0 < 1.5$ e $-1.5 < \omega_a < 1.5$ para o $\omega_0\omega_a$ CDM; e $-1 < \Omega_{k,0} < 1$ para o Ω_k -CDM. Para os modelos de GM, os priors são: $0.0004 < \mu < 0.65$ para Starobinsky ($n = 1$); $0.0001 < \mu < 1.06$ para Starobinsky ($n = 2$); $0 < \mu < 300$ para Hu-Sawicki ($n = 1$); $0 < \mu < 150$ para Hu-Sawicki ($n = 2$); $1.6 < b < 12$ para R^2 -AB; e $-3 < M < 3$ para o modelo $F(Q)$.

Nossa análise de MCMC foi implementada em Python utilizando a biblioteca *emcee*, que é baseada no algoritmo *Affine Invariant Ensemble Sampler* (GOODMAN e WEARE, 2010). Em todas as cadeias, adotamos o critério de convergência $R - 1 < 10^{-2}$ para o parâmetro de Gelman-Rubin R . A tabela 6.1 resume nossos resultados, apresentando os valores de melhor ajuste dos parâmetros e suas incertezas de 1σ para todos os modelos analisados, juntamente com seus respectivos valores de qui-quadrado mínimo e reduzido, χ_{min}^2 e χ_ν^2 . Conforme mostrado na tabela, os valores de χ_ν^2 são competitivos em todos os modelos, exibindo apenas pequenas variações entre eles.

Na figura 6.2, apresentamos a comparação dos modelos para $H(z)$, juntamente com sua reconstrução por PG nos níveis de confiança de 1σ e 2σ no intervalo de redshift $z \in [0.0, 2.0]$. As curvas correspondem aos valores de melhor ajuste listados na tabela 6.1.

Tabela 6.1: Resultados da nossa análise de MCMC.

Modelo	H_0	$\Omega_{m,0}$	σ_8	M_B	Parâmetro	χ^2_{min}	χ^2_ν	AIC	BIC
Λ CDM	$67.2^{+1.8}_{-1.7}$	0.34 ± 0.02	0.74 ± 0.02	-19.42 ± 0.05	—	2913.42	1.65	2921.42	2943.33
ω CDM	67.3 ± 1.7	0.31 ± 0.03	$0.77^{+0.05}_{-0.04}$	$-19.41^{+0.06}_{-0.05}$	$-0.89^{+0.06}_{-0.08}$	2912.76	1.65	2922.76	2950.14
$\omega_0\omega_a$ CDM	$67.1^{+2.0}_{-1.5}$	0.31 ± 0.03	$0.73^{+0.07}_{-0.03}$	$-19.41^{+0.06}_{-0.05}$	$-0.89 \pm 0.08; -0.03^{+0.56}_{-0.61}$	2915.68	1.66	2927.68	2960.54
Ω_k -CDM	$61.3^{+4.1}_{-3.1}$	$0.32^{+0.03}_{-0.02}$	0.83 ± 0.06	$-19.42^{+0.06}_{-0.05}$	$0.20^{+0.10}_{-0.13}$	2911.84	1.65	2921.84	2949.23
Starobinsky ($n = 1$)	67.1 ± 1.8	0.33 ± 0.02	$0.75^{+0.03}_{-0.02}$	$-19.41^{+0.06}_{-0.05}$	$0.59^{+0.06}_{-0.31}$	2957.48	1.68	2967.48	2994.86
Starobinsky ($n = 2$)	$66.4^{+1.9}_{-1.8}$	0.35 ± 0.02	0.73 ± 0.02	$-19.42^{+0.05}_{-0.06}$	$1.05^{+0.01}_{-0.63}$	3006.87	1.71	3016.87	3044.26
Hu-Sawicki ($n = 1$)	$69.7^{+3.0}_{-2.7}$	$0.25^{+0.06}_{-0.03}$	$0.77^{+0.04}_{-0.03}$	-19.40 ± 0.05	82^{+41}_{-44}	2930.47	1.66	2940.47	2967.86
Hu-Sawicki ($n = 2$)	$66.8^{+2.0}_{-2.3}$	0.33 ± 0.02	0.75 ± 0.03	$-19.40^{+0.05}_{-0.06}$	104^{+45}_{-39}	2918.18	1.66	2928.18	2955.57
R^2 -AB	$67.3^{+2.0}_{-1.8}$	0.33 ± 0.02	0.74 ± 0.02	$-19.42^{+0.06}_{-0.05}$	$1.98^{+5.03}_{-0.35}$	3022.65	1.72	3032.65	3060.03
$F(Q)$	66.9 ± 1.8	0.35 ± 0.02	$0.80^{+0.04}_{-0.05}$	$-19.42^{+0.05}_{-0.06}$	$2.0^{+2.0}_{-1.4}$	2912.50	1.65	2922.50	2949.89

O painel superior exhibe os modelos baseados na RG, enquanto o painel inferior mostra os modelos baseados em GM. Todos os modelos permanecem dentro do nível de confiança de 1σ até $z \sim 1.5$ ². Tal resultado indica que, com a precisão atual dos dados, o parâmetro $H(z)$ sozinho não é suficiente para discriminar entre os modelos estudados.

A figura 6.3 mostra uma comparação semelhante, mas para $D_L(z)H_0/c$, junto com sua reconstrução por PG nos níveis de confiança de 1σ e 2σ no intervalo $z \in [0, 2.27]$. Novamente, o painel superior corresponde aos modelos baseados na RG, enquanto o painel inferior mostra os modelos baseados em GM. Praticamente todos os modelos permanecem dentro da região de 1σ CL. No entanto, o modelo de Hu-Sawicki ($n = 1$) é uma exceção, pois situa-se fora da região de 1σ , mas ainda permanece dentro da região de 2σ .

A figura 6.4 mostra a comparação entre os modelos utilizando os dados de $[f\sigma_8](z)$ e a reconstrução por PG, juntamente com suas previsões nos níveis de confiança de 1σ e 2σ no intervalo $z \in [0.0, 2.0]$. O painel superior exhibe os modelos baseados na RG, enquanto o painel inferior apresenta os modelos baseados em GM. Como pode ser observado, os modelos baseados em GM apresentam um desempenho qualitativo ligeiramente superior aos baseados na RG, pois tendem a seguir a curva reconstruída de $[f\sigma_8](z)$ com maior precisão, permanecendo consistentemente dentro do nível de confiança de 1σ . Por outro lado, o modelo cosmológico com energia escura dinâmica na parametrização CPL, $\omega_0\omega_a$ CDM, é o único modelo que se afasta levemente do CL de 2σ no intervalo $0.3 \lesssim z \lesssim 0.6$, embora ainda permaneça dentro do nível de confiança de 1σ – 2σ no restante do intervalo de redshift em análise.

As comparações mostradas nas figuras 6.2, 6.3 e 6.4 nos permitem verificar a consistência dos ajustes de MCMC sem favorecer nenhum modelo específico. Entretanto,

²Para valores de $z > 1.5$, a escassez de dados pode enviesar nossas comparações.

ressaltamos que essas comparações com as reconstruções por PG não levam em conta a complexidade dos modelos, que envolvem diferentes números de parâmetros livres. Naturalmente, aumentar o número de parâmetros livres pode tornar mais fácil para um modelo se ajustar aos dados, fornecendo-nos uma impressão equivocada de concordância. Portanto, para garantir uma comparação justa e objetiva entre os modelos, é necessário recorrer aos resultados do MCMC e aplicar ferramentas estatísticas, como o Critério de Informação de Akaike (AIC) e o Critério de Informação Bayesiano (BIC).

A estatística χ^2 é adequada para identificar os parâmetros de melhor ajuste dentro de um modelo, mas não é apropriada para comparar modelos com diferentes números de parâmetros, uma vez que valores mais baixos de χ^2 podem ser obtidos quando se aumenta a complexidade do modelo. Uma comparação mais robusta pode ser feita utilizando o AIC, que penaliza modelos com mais parâmetros livres. O valor de AIC é calculado da seguinte forma:

$$\text{AIC} \equiv \chi_{min}^2 + 2k, \quad (6.27)$$

em que k é o número de parâmetros livres no modelo. Assim, um valor de AIC mais baixo geralmente significa que o modelo se ajusta melhor aos dados. Um critério mais adequado para a comparação de modelos é calcular a diferença relativa entre eles, ou seja, ΔAIC . Examinamos três casos, cujos resultados estão resumidos na tabela 6.2:

- Comparação com ΛCDM : Como o ΛCDM é o modelo cosmológico padrão, comparamos todos os modelos analisados com ele. Nossos resultados indicam que, com base nos observáveis que utilizamos, três modelos são competitivos com o ΛCDM : $\Omega_k\text{-CDM}$, $F(Q)$ e ωCDM , enquanto os modelos $F(R)$ são fortemente desfavorecidos.
- Comparação de modelos de GM com $F(Q)$: Comparamos todos os modelos de GM com $F(Q)$, que aparece como o modelo de GM mais competitivo em relação ao ΛCDM . Nossos resultados indicam que quase todos os modelos $F(R)$ são fortemente desfavorecidos; o modelo de Hu-Sawicki ($n = 2$) é o único que não é fortemente desfavorecido, embora ainda seja menos favorecido que o $F(Q)$.
- Comparação entre modelos $F(R)$ e o modelo de Hu-Sawicki ($n = 2$): Comparamos os demais modelos $F(R)$ com o modelo de Hu-Sawicki ($n = 2$), que possui o menor AIC entre os modelos baseados em $F(R)$. Todos os outros modelos $F(R)$ são fortemente desfavorecidos.

Outro critério robusto para a comparação de modelos é o BIC, que contabiliza adequadamente o tamanho do conjunto de dados e penaliza a complexidade do modelo mais fortemente do que o AIC. O BIC é calculado da seguinte maneira:

$$\text{BIC} \equiv \chi_{min}^2 + k \ln n, \quad (6.28)$$

Tabela 6.2: Comparação estatística entre os modelos utilizando o AIC, com interpretação qualitativa de acordo com a escala calibrada de Jeffreys (PÉREZ-ROMERO e NESSERIS, 2018).

Comparação	Modelo	ΔAIC	Suporte Empírico
ΛCDM vs. todos os modelos	$\Omega_k\text{-CDM}$	0.42	Substancial
	$F(Q)$	1.08	Substancial
	ωCDM	1.34	Substancial
	$\omega_0\omega_a\text{CDM}$	6.26	Consideravelmente Menos Favorecido
	Hu-Sawicki ($n = 2$)	6.76	Consideravelmente Menos Favorecido
	Hu-Sawicki ($n = 1$)	19.05	Essencialmente Nenhum Suporte
	Starobinsky ($n = 1$)	46.06	Essencialmente Nenhum Suporte
	Starobinsky ($n = 2$)	95.45	Essencialmente Nenhum Suporte
$F(Q)$ vs. $F(R)$	$R^2\text{-AB}$	111.23	Essencialmente Nenhum Suporte
	Hu-Sawicki ($n = 2$)	5.68	Consideravelmente Menos Favorecido
	Hu-Sawicki ($n = 1$)	17.97	Essencialmente Nenhum Suporte
	Starobinsky ($n = 1$)	44.98	Essencialmente Nenhum Suporte
	Starobinsky ($n = 2$)	94.37	Essencialmente Nenhum Suporte
Hu-Sawicki ($n = 2$) vs. $F(R)$	$R^2\text{-AB}$	110.15	Essencialmente Nenhum Suporte
	Hu-Sawicki ($n = 1$)	12.29	Essencialmente Nenhum Suporte
	Starobinsky ($n = 1$)	39.30	Essencialmente Nenhum Suporte
	Starobinsky ($n = 2$)	88.69	Essencialmente Nenhum Suporte
	$R^2\text{-AB}$	104.47	Essencialmente Nenhum Suporte

em que k é o número de parâmetros livres no modelo e n é o tamanho da amostra. Assim como fizemos para o AIC, calculamos as diferenças relativas entre os modelos, ΔBIC , e examinamos os mesmos três casos. Os resultados são mostrados na tabela 6.3. As conclusões baseadas no AIC mudam ligeiramente ao utilizar o BIC. Em comparação com o ΛCDM , o BIC indica evidência moderada (positiva) contra o modelo $\Omega_k\text{-CDM}$ ($\Delta\text{BIC} = 5.9$), enquanto o $F(Q)$ e o ωCDM , que eram competitivos sob o AIC, são agora fortemente desfavorecidos ($\Delta\text{BIC} = 6.56$ e 6.81 , respectivamente). Todos os modelos restantes são muito fortemente desfavorecidos ($\Delta\text{BIC} > 10$). Quando os modelos $F(R)$ são comparados com o $F(Q)$, o BIC apresenta evidência moderada (positiva) contra o modelo de Hu-Sawicki ($n = 2$) ($\Delta\text{BIC} = 5.68$), enquanto todos os outros modelos $F(R)$ são muito fortemente desfavorecidos ($\Delta\text{BIC} > 10$). Por fim, quando o Hu-Sawicki ($n = 2$) é comparado com os demais modelos $F(R)$, o BIC indica evidência muito forte contra todos eles ($\Delta\text{BIC} > 10$).

6.4 Resumo e Conclusões

A comparação entre dados cosmológicos e funções previstas a partir de modelos teóricos permanece a principal abordagem para testar alternativas ao paradigma ΛCDM . Embora o modelo padrão tenha descrito com sucesso uma ampla gama de observações cosmológicas, ele ainda enfrenta desafios em aberto, como a compreensão da evolução do crescimento de

Tabela 6.3: Comparação estatística entre os modelos utilizando o BIC, com interpretação qualitativa de acordo com a escala calibrada de Jeffreys (PÉREZ-ROMERO e NESSERIS, 2018).

Comparação	Modelo	ΔBIC	Evidência Contra o Modelo
ΛCDM vs. todos os modelos	$\Omega_k\text{-CDM}$	5.90	Positiva
	$F(Q)$	6.56	Forte
	ωCDM	6.81	Forte
	Hu-Sawicki ($n = 2$)	12.24	Muito forte
	$\omega_0\omega_a\text{CDM}$	17.21	Muito forte
	Hu-Sawicki ($n = 1$)	24.53	Muito forte
	Starobinsky ($n = 1$)	51.53	Muito forte
	Starobinsky ($n = 2$)	100.93	Muito forte
	$R^2\text{-AB}$	116.70	Muito forte
$F(Q)$ vs. $F(R)$	Hu-Sawicki ($n = 2$)	5.68	Positiva
	Hu-Sawicki ($n = 1$)	17.97	Muito forte
	Starobinsky ($n = 1$)	44.97	Muito forte
	Starobinsky ($n = 2$)	94.37	Muito forte
	$R^2\text{-AB}$	110.14	Muito forte
Hu-Sawicki ($n = 2$) vs. $F(R)$	Hu-Sawicki ($n = 1$)	12.29	Muito forte
	Starobinsky ($n = 1$)	39.29	Muito forte
	Starobinsky ($n = 2$)	88.69	Muito forte
	$R^2\text{-AB}$	104.46	Muito forte

estruturas em larga escala, desde as flutuações primordiais de densidade até o Universo observado atualmente.

Neste estudo, investigamos diversos modelos alternativos — sendo eles: ωCDM , $\omega_0\omega_a\text{CDM}$, $\Omega_k\text{-CDM}$, Starobinsky, Hu-Sawicki, $R^2\text{-AB}$ e um modelo $F(Q)$ — utilizando PG e MCMC. Utilizamos dados de $H(z)$, $D_L(z)$ e $[f\sigma_8](z)$, e aplicamos o MCMC para inferir os valores de melhor ajuste dos parâmetros para cada modelo, comparando-os posteriormente com as reconstruções obtidas por PG para avaliar sua consistência com os dados.

Nossos resultados confirmam que observáveis do Universo de fundo por si sós — $H(z)$ e $D_L(z)$ — são em geral insuficientes para discriminar entre os modelos, uma vez que apresentam comportamento semelhante dentro das incertezas atuais. Além disso, observa-se na figura 6.3 que a curva de $D_L(z)$ para o modelo de Hu-Sawicki ($n = 1$) apresenta um desvio de mais de 1σ em relação à reconstrução por PG utilizando dados de SNIa, embora este modelo permaneça consistente em 2σ . Por outro lado, a inclusão de dados de crescimento cósmico mostrou-se bastante útil, pois destacou desvios de alguns modelos em relação à reconstrução por PG, como no caso do modelo $\omega_0\omega_a\text{CDM}$, que se afasta levemente de 2σ (em uma pequena parte do intervalo de redshift), conforme mostrado na figura 6.4.

Também realizamos uma comparação quantitativa de modelos utilizando o AIC e o

BIC para considerar uma penalização apropriada da complexidade do modelo. Nossos resultados para o AIC, resumidos na tabela 6.2, indicam que o modelo $F(Q)$ surge como uma alternativa competitiva, juntamente com dois modelos baseados na RG: Ω_k -CDM e ω CDM, enquanto as teorias $F(R)$ são fortemente desfavorecidas quando comparadas aos modelos Λ CDM e $F(Q)$. Isso se deve, provavelmente, ao fato de que o modelo $F(Q)$ preserva a dinâmica do Universo de fundo da RG, ao mesmo tempo que modifica o crescimento de estruturas de uma forma que permanece consistente com os dados atuais. Nossas comparações também destacaram que o modelo $F(Q)$ segue com precisão a função reconstruída de $[f\sigma_8](z)$, reforçando sua viabilidade como uma potencial alternativa ao MCP. Ademais, considerando os dados do Universo perturbado, o modelo $\omega_0\omega_a$ CDM parece exibir uma leve tensão com as reconstruções e, quando comparado ao Λ CDM, possui consideravelmente menos suporte dos dados. Para o BIC, nossos resultados, resumidos na tabela 6.3, confirmam que, sob uma penalização mais conservadora para a complexidade do modelo, o Λ CDM permanece como o modelo preferido entre os testados, e todos os modelos alternativos apresentam, pelo menos, evidência moderada (positiva) contra eles.

No geral, os vínculos recentes relatados na literatura indicam que desvios da RG, caso existam, devem ser muito pequenos. Nesse contexto, nossos resultados estão de acordo com os limites observacionais mais recentes e, fundamentalmente, a comparação estatística realizada por meio dos AIC e BIC coloca os modelos $F(R)$ em uma clara desvantagem em relação à RG, destacando um resultado central do nosso estudo ao comparar diretamente uma diversidade de teorias de GM.

Nossa conclusão final é que este estudo mostra que tanto as metodologias paramétricas quanto as não-paramétricas oferecem abordagens complementares e valiosas para explorar a viabilidade observacional de modelos cosmológicos alternativos, proporcionando uma perspectiva mais abrangente sobre seus desempenhos à luz dos dados observacionais atuais.

Os resultados destas análises aparecem no artigo *Viability of general relativity and modified gravity cosmologies using high-redshift cosmic probes*, publicado na revista *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* (OLIVEIRA *et al.*, 2025b).

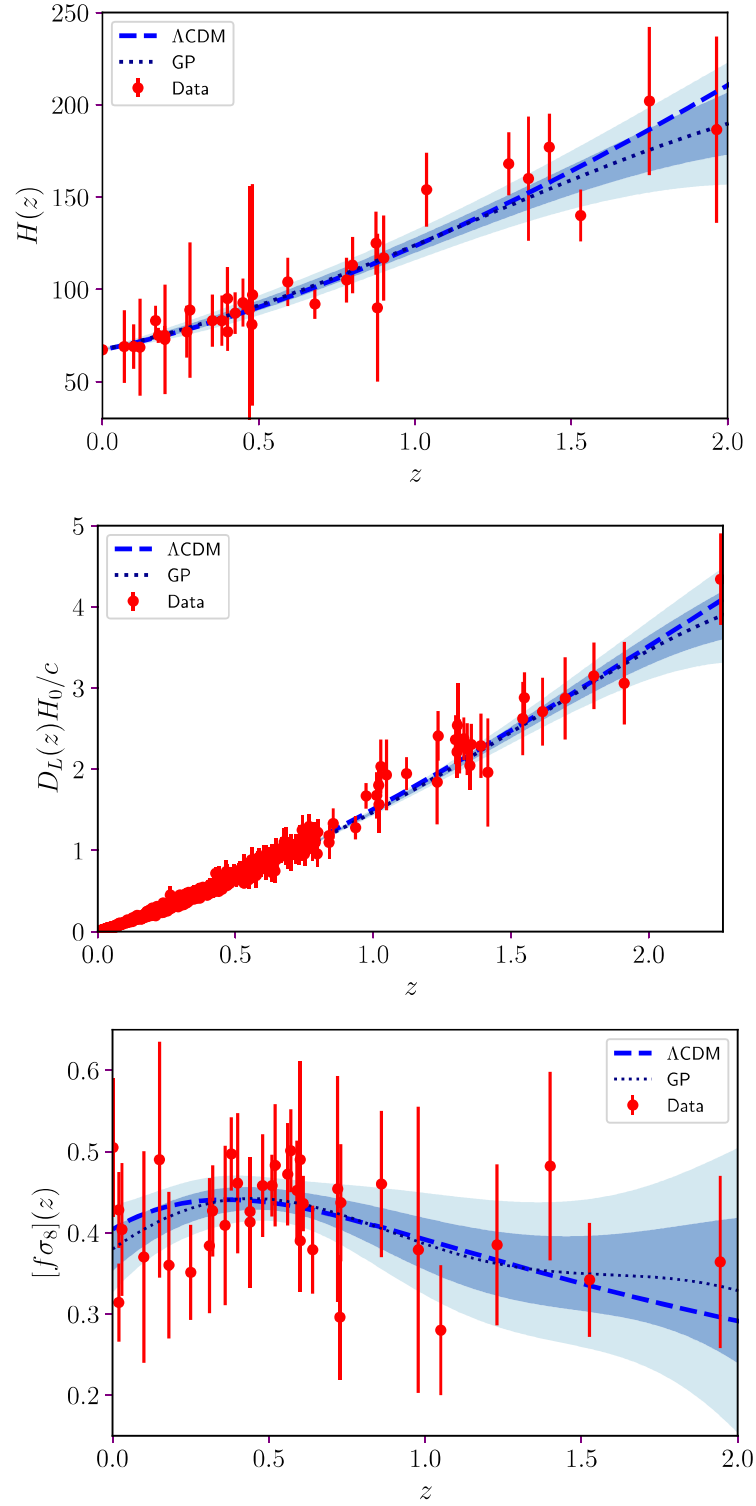


Figura 6.1: Paineis superior: Reconstrução de $H(z)$ a partir dos dados de $H(z)$. Paineis do meio: Reconstrução de $D_L(z)$ a partir dos dados de SNIa. Paineis inferior: Reconstrução de $[f\sigma_8](z)$ a partir dos dados de $[f\sigma_8](z)$. Em todos os painéis, as áreas sombreadas representam as regiões de confiança de 1σ (azul escuro) e 2σ (azul claro). A linha tracejada em azul escuro representa o modelo Λ CDM. Os pontos vermelhos correspondem aos dados e suas respectivas incertezas. Fonte: A autora (ver em OLIVEIRA *et al.* (2025b)).

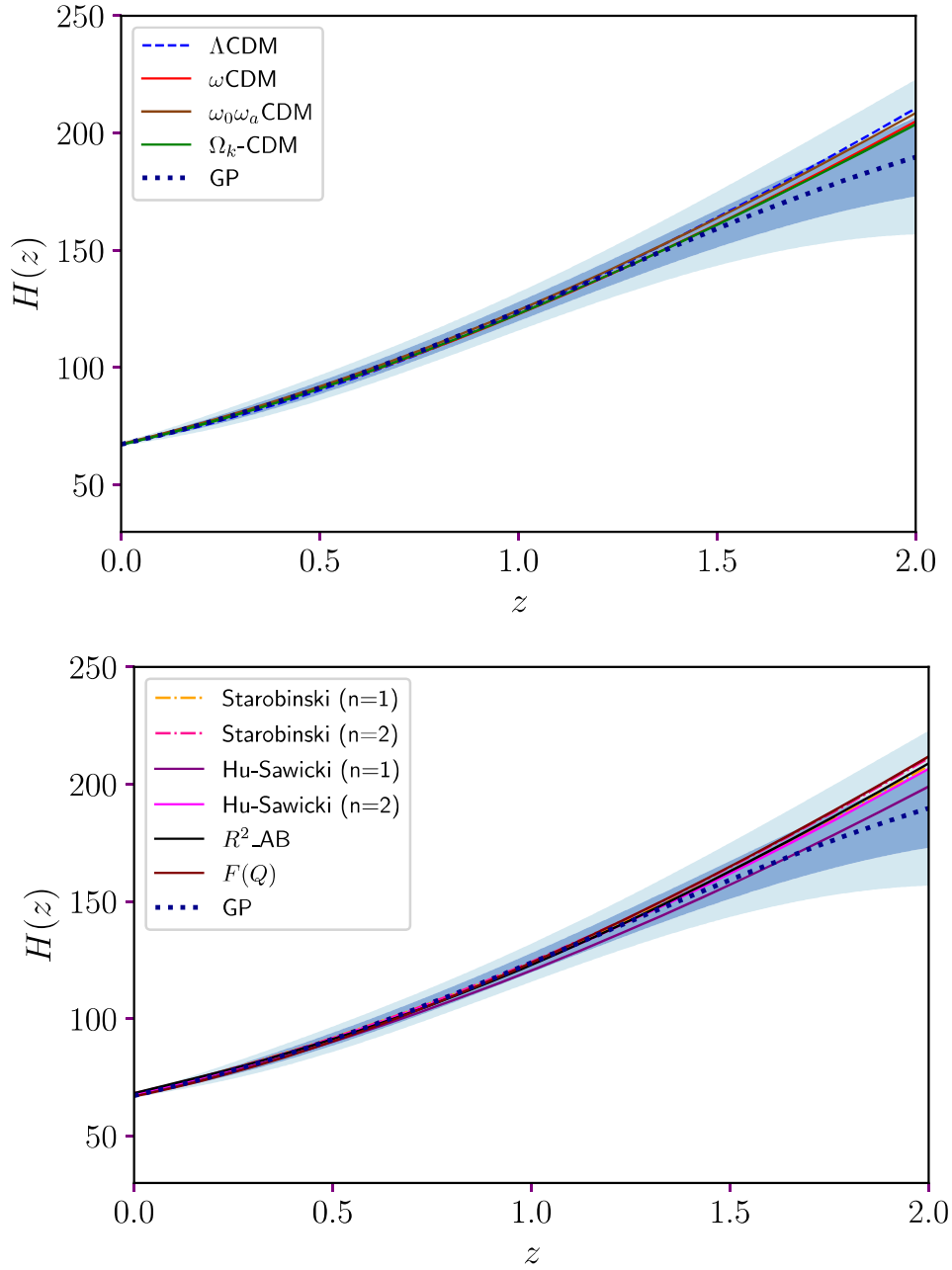


Figura 6.2: Painel superior: Comparação entre os modelos baseados na RG para $H(z)$. Painel inferior: Comparação entre os modelos baseados na GM para $H(z)$. Nos painéis, as áreas sombreadas representam as regiões de confiança de 1σ (azul escuro) e 2σ (azul claro). Fonte: A autora (ver em OLIVEIRA *et al.* (2025b)).

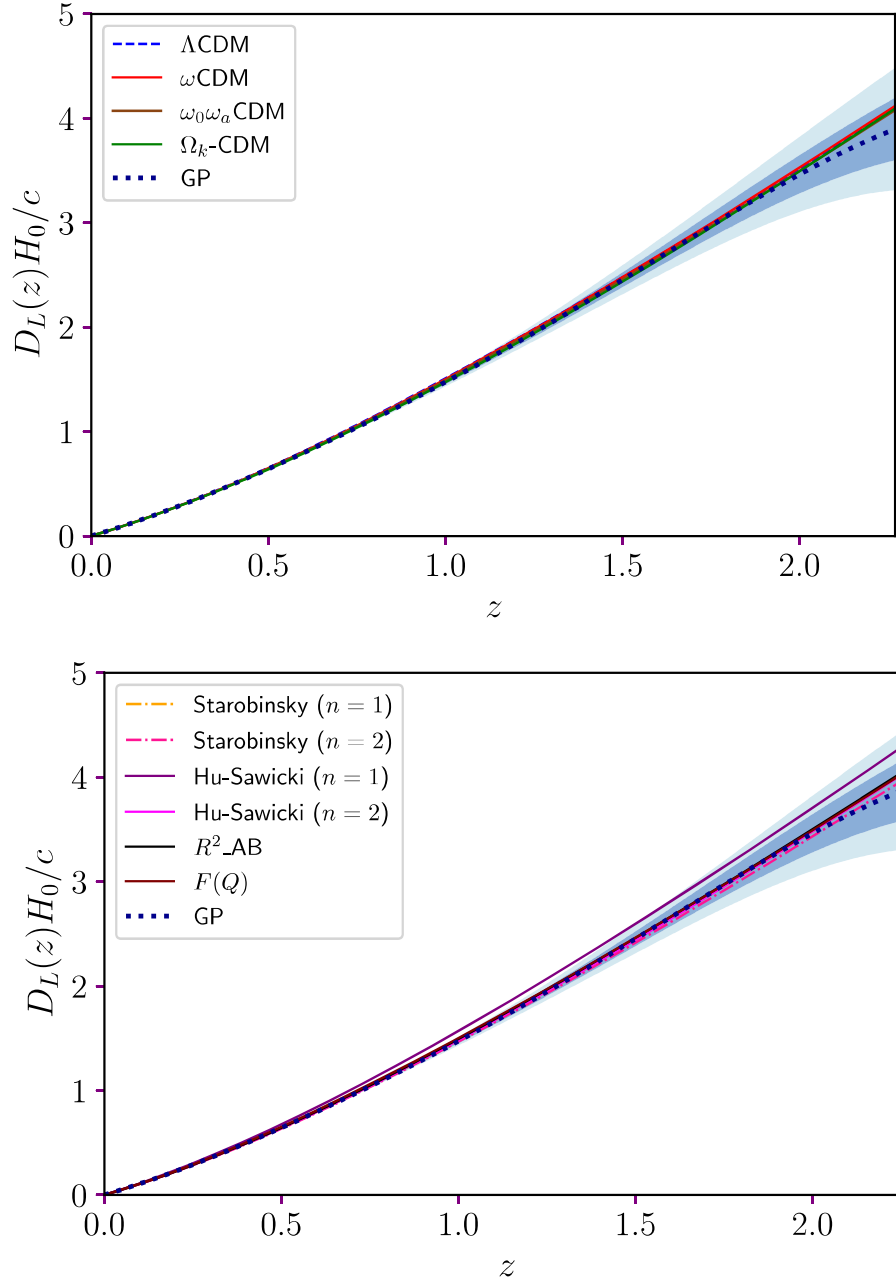


Figura 6.3: Painel superior: Comparação entre os modelos baseados na RG para $D_L(z)$. Painel inferior: Comparação entre os modelos baseados na GM para $D_L(z)$. Nos painéis, as áreas sombreadas representam as regiões de confiança de 1σ (azul escuro) e 2σ (azul claro). Fonte: A autora (ver em OLIVEIRA *et al.* (2025b)).

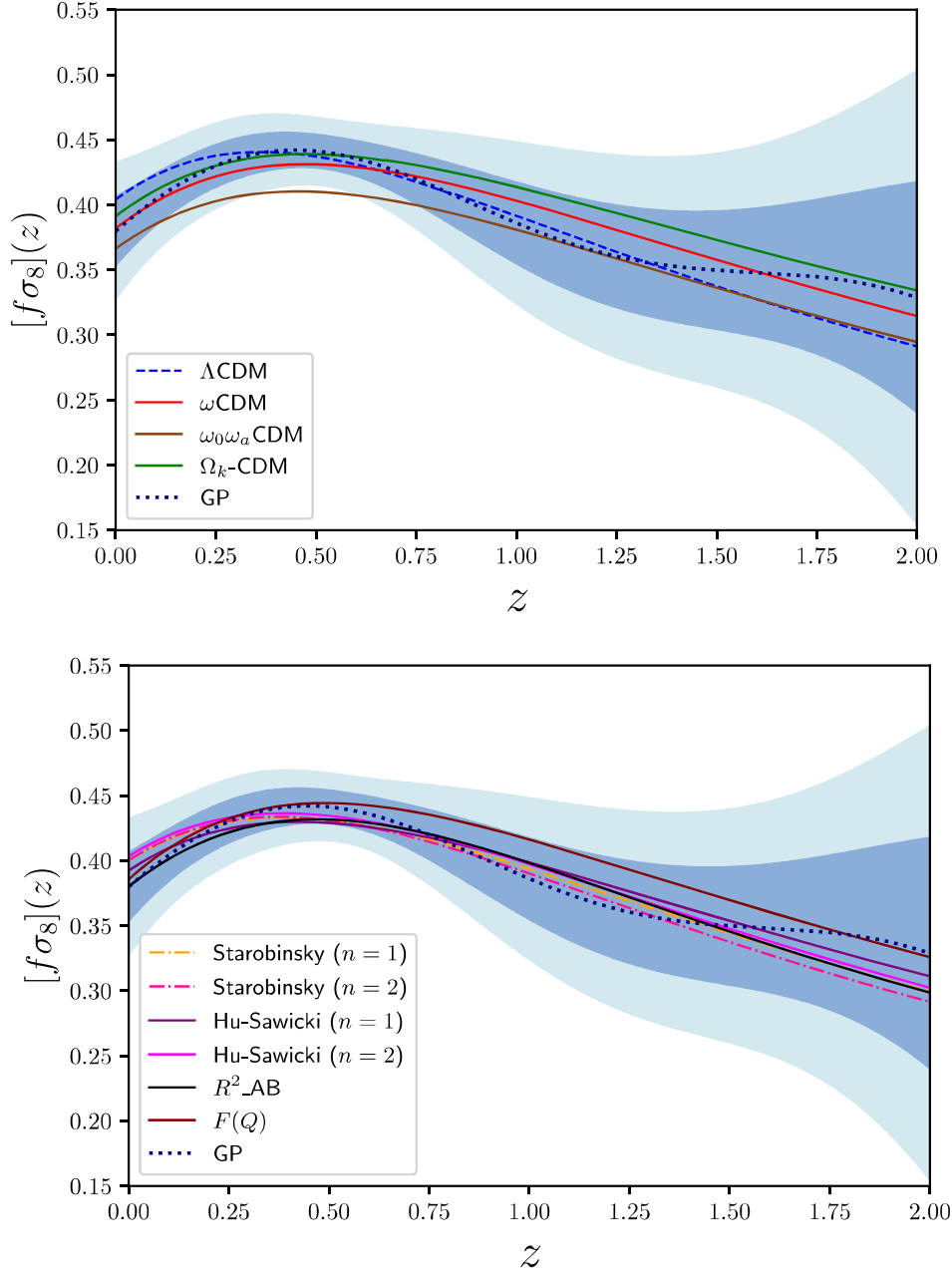


Figura 6.4: Painel superior: Comparação entre os modelos baseados na RG para $[f\sigma_8](z)$. Painel inferior: Comparação entre os modelos baseados na GM para $[f\sigma_8](z)$. Nos painéis, as áreas sombreadas representam as regiões de confiança de 1σ (azul escuro) e 2σ (azul claro). Fonte: A autora (ver em OLIVEIRA *et al.* (2025b)).

Capítulo 7

Conclusões

O modelo Λ CDM —conhecido como o Modelo Cosmológico Padrão (MCP)— tem reproduzido com sucesso os mais diversos fenômenos observáveis do nosso Universo. Contudo, pode não ser o modelo final, pois há problemas em aberto na cosmologia moderna que o Λ CDM ainda não conseguiu responder, como as tensões de H_0 e S_8 e a natureza física da matéria escura e da energia escura. Com o objetivo de resolver estes e outros problemas, modelos cosmológicos alternativos foram desenvolvidos e bastante estudados nas últimas décadas, tornando-se necessário confrontá-los com os mesmos dados observacionais que demonstraram o êxito do Λ CDM. Uma possível forma de testar estes modelos é por meio de dados do Universo perturbado, já que a evolução do crescimento de estruturas difere de acordo com a teoria estudada. Neste estudo, buscamos testar algumas classes de modelos alternativos utilizando esses dados.

Nos últimos anos, a quantidade de dados astronômicos do Universo no nível perturbativo aumentou significativamente, devido à sua capacidade de distinguir modelos cosmológicos. Estes dados correspondem a três grandezas: a taxa de crescimento de estruturas, $f(z)$; a amplitude da variância de matéria na escala de 8 Mpc/h, $\sigma_8(z)$; e o produto destas duas quantidades, a taxa de crescimento de estruturas normalizada, $[f\sigma_8](z)$. A partir desses três observáveis, é possível testar a consistência do modelo Λ CDM e inferir valores para os parâmetros cosmológicos de diversos modelos.

Duas ferramentas importantes para realizar os testes propostos nesta tese são os Processos Gaussianos (PG) e o Markov Chain Monte Carlo (MCMC). A primeira se baseia em uma maneira não paramétrica de reconstruir funções analíticas (ou seja, contínuas e diferenciáveis), possibilitando o estudo dessas funções sem a necessidade de assumir um modelo fiducial. Por isso, tornou-se a principal ferramenta não paramétrica utilizada na cosmologia moderna. Já o MCMC é uma ferramenta estatística clássica que utiliza a aleatoriedade para avaliar a probabilidade posterior de um dado modelo e tem sido amplamente usado na literatura para estimar valores para diversos parâmetros cosmológicos.

Uma parametrização útil para a taxa de crescimento de estruturas é dada por $f(z) = \Omega_m^\gamma(z)$, em que γ é o índice de crescimento de estruturas. Para o modelo Λ CDM, o

índice de crescimento é dado por um valor constante, $\gamma = 0.55$. Porém, para outros modelos cosmológicos, γ pode assumir diferentes valores, o que implica que realizar uma medida robusta de γ ou mostrar que ele pode variar de acordo com o redshift pode ser um caminho interessante para discriminar modelos alternativos à RG. Para estudar o comportamento de γ , realizamos uma reconstrução via Processos Gaussianos utilizando a parametrização dada pela equação (3.56) e combinando dados de $f(z)$, $[f\sigma_8](z)$ e $H(z)$ de cronômetros cósmicos. Com isso, propusemos um novo teste de consistência para γ sem a necessidade de assumir valores para nenhum parâmetro cosmológico. Obtivemos que, apesar de observarmos um comportamento dependente do redshift, o valor constante, esperado para o modelo Λ CDM, permanece dentro da região de 2σ de confiança da nossa reconstrução. Além disso, ao avaliar o valor de γ em $z = 0$, obtivemos $\gamma^f(z = 0) = 0.311 \pm 0.144$ e $\gamma^{f\sigma_8}(z = 0) = 0.609 \pm 0.200$, valores consistentes com o esperado dentro do MCP no nível de confiança de 2σ .

A aplicação dos PG na cosmologia vai muito além de realizar testes de consistência. Esta ferramenta também pode ser usada para uma comparação qualitativa entre um modelo com parâmetros cosmológicos já definidos e a predição dos dados. Nesse sentido, nós também investigamos se o modelo de energia escura dinâmica $\omega_0\omega_a$ CDM com parametrização CPL e valores dos parâmetros cosmológicos já inferidos pela colaboração DESI descreve adequadamente a amostra de 15 dados de $\sigma_8(z)$. Qualitativamente, tanto o modelo Λ CDM quanto o modelo $\omega_0\omega_a$ CDM analisados pelo DESI se mostraram competitivos. Contudo, ao realizar uma análise estatística considerando as incertezas associadas às medidas e à reconstrução, o modelo $\omega_0\omega_a$ CDM^{DESI} obteve um melhor resultado, mostrando-se mais competitivo para reproduzir os dados desse observável do Universo perturbado.

Ainda no contexto de utilizar o PG para uma comparação qualitativa entre modelos, nós também exploramos a viabilidade de modelos alternativos à RG. Em especial, estudamos três modelos baseados na RG, três modelos da classe de teorias $F(R)$ e um modelo de $F(Q)$. Neste caso, os parâmetros cosmológicos dos modelos analisados foram obtidos por meio do MCMC com três conjuntos de dados: dois do Universo de fundo, $H(z)$ e $D_L(z)$; e um do Universo perturbado, $[f\sigma_8](z)$. Entretanto, na análise qualitativa, nossos resultados confirmaram que a reconstrução obtida dos observáveis do Universo de fundo é em geral insuficiente para diferenciar os modelos cosmológicos, já que estes apresentam comportamento parecido dentro das regiões de incerteza. Por outro lado, a predição de $[f\sigma_8](z)$ destacou desvios de alguns modelos, como no caso do $\omega_0\omega_a$ CDM.

Uma comparação quantitativa entre os modelos estudados também foi feita utilizando o Critério de Informação de Akaike e o Critério de Informação Bayesiano. Os dois métodos mostraram que os modelos $F(R)$ apresentam uma forte desvantagem em comparação com os outros modelos e que o modelo Λ CDM permanece como o modelo favorecido. No entanto, para o AIC, o modelo $F(Q)$ surgiu como uma alternativa competitiva para descrever o Universo de fundo e o perturbado, o que se deve ao fato de este modelo manter

a dinâmica do Universo de fundo baseada na RG.

Com base nas três análises apresentadas nos Capítulos 4, 5 e 6, que utilizaram duas das ferramentas mais importantes na literatura atual da cosmologia moderna —uma paramétrica e outra não paramétrica—, podemos concluir que o modelo Λ CDM continua sendo o mais favorecido pelas observações e que um modelo substituto, caso exista, deve possuir pequenos desvios em relação à RG, assim como reproduzir com sucesso tanto os fenômenos cosmológicos do Universo de fundo quanto os do Universo no nível perturbativo, à luz dos dados observacionais atuais. Sem dúvida, dados mais precisos a serem obtidos nos próximos grandes levantamentos astronômicos ajudarão a confirmar ou descartar o Λ CDM como modelo padrão da cosmologia.

Apêndice A

Teste de Kernel

Neste estudo, realizamos a reconstrução via PG de diversos observáveis cosmológicos - $H(z)$, $D_L(z)$, $f(z)$, $[f\sigma_8](z)$ e $\sigma_8(z)$ - utilizando o kernel padrão, denominado de *Radial Basis Function*, também conhecido como *Squared Exponential* (SE). Porém, na literatura, há vários outros kernels disponíveis para uso. Apresentamos agora uma comparação entre dois kernels para a reconstrução do índice de crescimento γ : SE e Matérn. O kernel Matérn é escrito como

$$K_{M_\nu}(\tau) = \sigma_f^2 \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{\sqrt{2\nu}\tau}{l} \right)^\nu K_\nu \left(\frac{\sqrt{2\nu}\tau}{l} \right), \quad (\text{A.1})$$

em que $\Gamma(\nu)$ é a função Gamma padrão, K_ν é a função de Bessel modificada de segunda espécie, ν é um parâmetro estritamente positivo e σ_f e l são hiperparâmetros que também são otimizados durante o ajuste. Para o nosso teste de consistência, escolhemos $\nu = 5/2$. Como o kernel Matérn tende a SE conforme $\nu \rightarrow \infty$, este kernel é mais sensível a flutuações dos dados.

Plotamos a diferença relativa entre o γ obtido com ambos os kernels na figura [A.1](#). A diferença relativa $\mathcal{R}$ é obtida usando

$$\mathcal{R} \equiv \frac{\sigma_8^{\text{kernel 1}}}{\sigma_8^{\text{kernel 2}}} - 1, \quad (\text{A.2})$$

em que $\sigma_8^{\text{kernel } n}$ é a curva reconstruída via PG de um dado kernel n . Os erros são estimados propagando as incertezas das funções reconstruídas por PG, obtendo-se

$$\sigma_{\mathcal{R}} = \sqrt{\left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \sigma_8^{\text{kernel 1}}} \right)^2 \sigma_{\sigma_8^{\text{kernel 1}}}^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \sigma_8^{\text{kernel 2}}} \right)^2 \sigma_{\sigma_8^{\text{kernel 2}}}^2}, \quad (\text{A.3})$$

em que $\sigma_{\sigma_8^{\text{kernel } n}}$ é a incerteza da reconstrução de $\sigma_8^{\text{kernel } n}$.

É esperado que este resultado seja próximo de zero, pois o kernel não deve ter uma grande influência na reconstrução da função. As áreas sombreadas em verde representam

as regiões de confiança de 1σ e 2σ . Em ambos os gráficos, a linha sólida vermelha representa o valor esperado, enquanto que a linha tracejada representa a reconstrução da diferença relativa. Observamos que, como esperado, a diferença relativa é próxima de zero para o caso com dados de $f(z)$. Contudo, para o $\gamma(z)$ com dados de $f\sigma_8$, aparece uma divergência próxima a $z = 0.6$. Essa divergência ocorre porque γ^M vai a zero mais rápido do que γ^{RBF} devido à sensibilidade do kernel Matérn ao ruído, ou seja, não obtemos um kernel mais suave.

Realizamos este mesmo teste para a reconstrução de $\sigma_8(z)$, abordada no Capítulo 5, utilizando os kernels SE, Matérn ($\nu = 7/2$) e Matérn ($\nu = 9/2$). A diferença relativa obtida nos três casos foi muito próxima de zero dentro do intervalo de redshift da sua reconstrução, mostrando que a influência do kernel utilizado no PG também não é significativa neste caso.

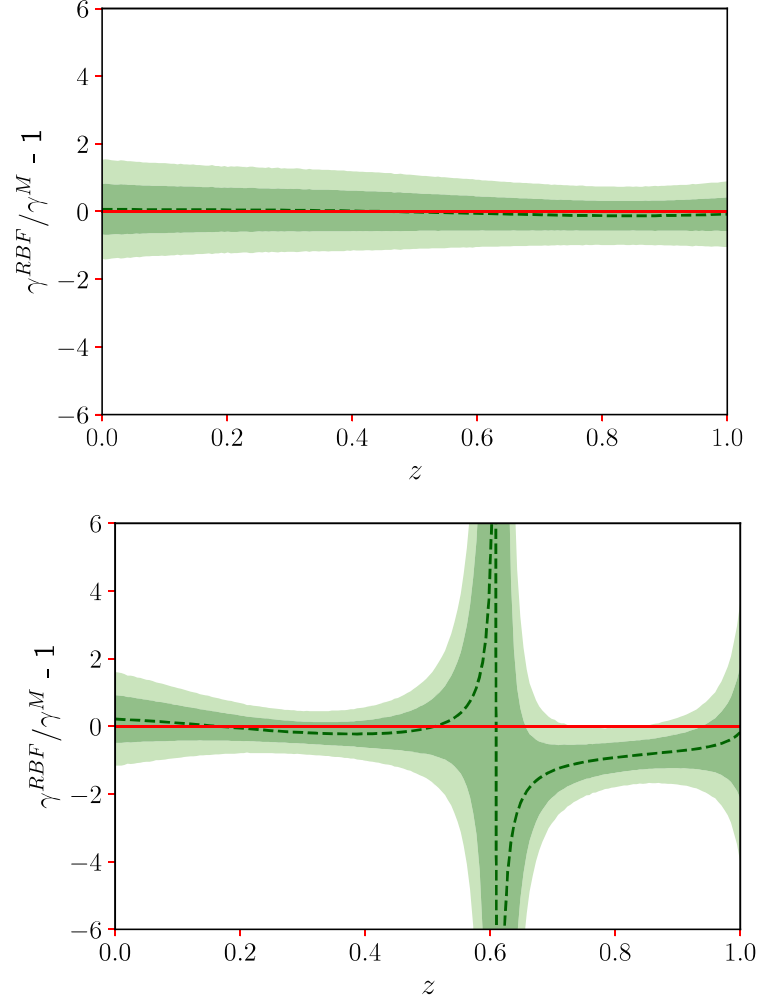


Figura A.1: Painel superior: Comparação entre os kernels SE e Matérn para a reconstrução de γ com o conjunto de dados $f(z)$. Painel inferior: Comparação entre os kernels SE e Matérn para a reconstrução de γ com o conjunto de dados $[f\sigma_8](z)$. Em ambos os painéis, as áreas sombreadas representam as regiões de confiança de 1σ (verde escuro) e 2σ (verde claro), a linha contínua vermelha corresponde ao valor esperado e a linha tracejada representa a reconstrução da diferença relativa. Como observamos, a diferença relativa obtida com ambos os kernels é muito próxima de zero para o caso com os dados de $f(z)$. Porém, para o caso com os dados de $[f\sigma_8](z)$, observa-se que a diferença relativa apresenta um comportamento diferente do esperado, aparecendo uma divergência próxima a $z = 0.6$. Isto ocorre pois o kernel Matérn é mais sensível ao ruído nos dados. Por isso, kernels mais suaves são recomendados. Fonte: A autora (ver em OLIVEIRA *et al.* (2024)).

Apêndice B

Teste da função média

Os PG são um método de regressão que não assumem um modelo paramétrico para obter informações a partir de medições observadas. No entanto, ainda precisamos assumir uma forma funcional para o kernel e um *palpite inicial*, a função média. Embora a maioria dos trabalhos investigue o efeito do kernel nos resultados, a função média ainda é frequentemente negligenciada, com poucas exceções na literatura (HOLSCLAW *et al.*, 2010a,b, 2011; SHAFIELOO *et al.*, 2012).

Um estudo recente investigou o efeito da função média na reconstrução do módulo de distância, $\mu(z)$ de SNIa (HWANG *et al.*, 2023). Este estudo observou que assumir uma função média nula resultou na incapacidade de capturar com precisão o modelo de controle usado para construir os dados. Esse comportamento também foi notado para sua derivada. Essa complicação na reconstrução do módulo de distância já é bem conhecida na literatura. Funções que variam rapidamente apresentam desafios maiores para a reconstrução em comparação com funções suaves (JESUS *et al.*, 2020; SEIKEL *et al.*, 2012). Por isso, em estudos que envolvem amostras de SNIa, frequentemente opta-se por reconstruir a distância de luminosidade em vez do módulo de distância.

Em nosso estudo, estamos lidando com funções suaves: $f(z)$, $[f\sigma_8](z)$ e $H(z)$. No entanto, é razoável questionar se assumir uma função média nula pode enviesar as suas reconstruções. Para testar isso, adotamos uma metodologia semelhante a formulada por HWANG *et al.* (2023): criamos dados simulados a partir de um modelo cosmológico fiducial e incorporamos os erros obtidos em medições reais.

Procedemos da seguinte forma: seja $F(z)$ um conjunto de previsões para um observável cosmológico e $\sigma_F(z)$ o erro associado. Uma realização aleatória de um conjunto simulado de $F(z)$ é então obtida por

$$\hat{F}(z) \sim \mathcal{N}[\bar{F}(z), \sigma_F(z)], \quad (\text{B.1})$$

em que $\bar{F}(z)$ é uma previsão do melhor ajuste do modelo Λ CDM com os parâmetros cosmológicos obtidos pela colaboração Planck. Os erros das medições de $f(z)$, $[f\sigma_8](z)$ e $H(z)$ são modelados usando um ajuste linear como $\sigma_n(z) = \alpha + \beta z$, em que n corre sobre

as amostras observacionais. Para os nossos conjuntos de dados desses três observáveis - disponíveis nas tabelas 4.1, 4.2 e 4.3 - temos

$$\sigma_f(z) = 0.14z + 0.08, \quad (\text{B.2})$$

$$\sigma_{f\sigma_8}(z) = 0.02z + 0.07, \quad (\text{B.3})$$

$$\sigma_H(z) = 10.34z + 14.28. \quad (\text{B.4})$$

O estudo envolve reconstruir cada realização usando a função média nula e compará-la com o modelo fiducial usado para construir os dados simulados. O resultado consiste na média das 500 realizações, denotada como

$$\langle \hat{F}(z) - \bar{F}(z) \rangle = \frac{1}{500} \sum_i^{500} \hat{F}_i(z) - \bar{F}(z), \quad (\text{B.5})$$

em que $\hat{F}_i(z)$ representa o valor reconstruído na i -ésima realização e $\bar{F}(z)$ é o modelo fiducial. O erro dessa diferença é a dispersão das 500 realizações. Um resultado esperado é uma curva suave e próxima de zero.

Na figura B.1, mostramos a diferença média para nossos dados simulados para $f(z)$, $[f\sigma_8](z)$ e $H(z)$. Note que, para as três grandezas cosmológicas, a diferença permanece estatisticamente consistente com zero em todo o intervalo de redshift e nenhuma oscilação é observada, como no caso do módulo de distância no estudo de HWANG *et al.* (2023). Portanto, nesta análise, uma função média nula não introduz um viés significativo na função reconstruída, desde que a função subjacente seja suave e bem amostrada, como é o nosso caso. Nosso resultado reforça que as técnicas de PG são capazes de reconstruir com precisão a função cosmológica a partir de um conjunto de dados observáveis sem suposições *ad hoc* sobre o comportamento da função média.

O mesmo estudo foi também realizado para a reconstrução de $\sigma_8(z)$. Assim como no caso de $f(z)$, $[f\sigma_8](z)$ e $H(z)$, uma função média nula não introduziu nenhum viés na reconstrução de $\sigma_8(z)$ devido à suavidade da função.

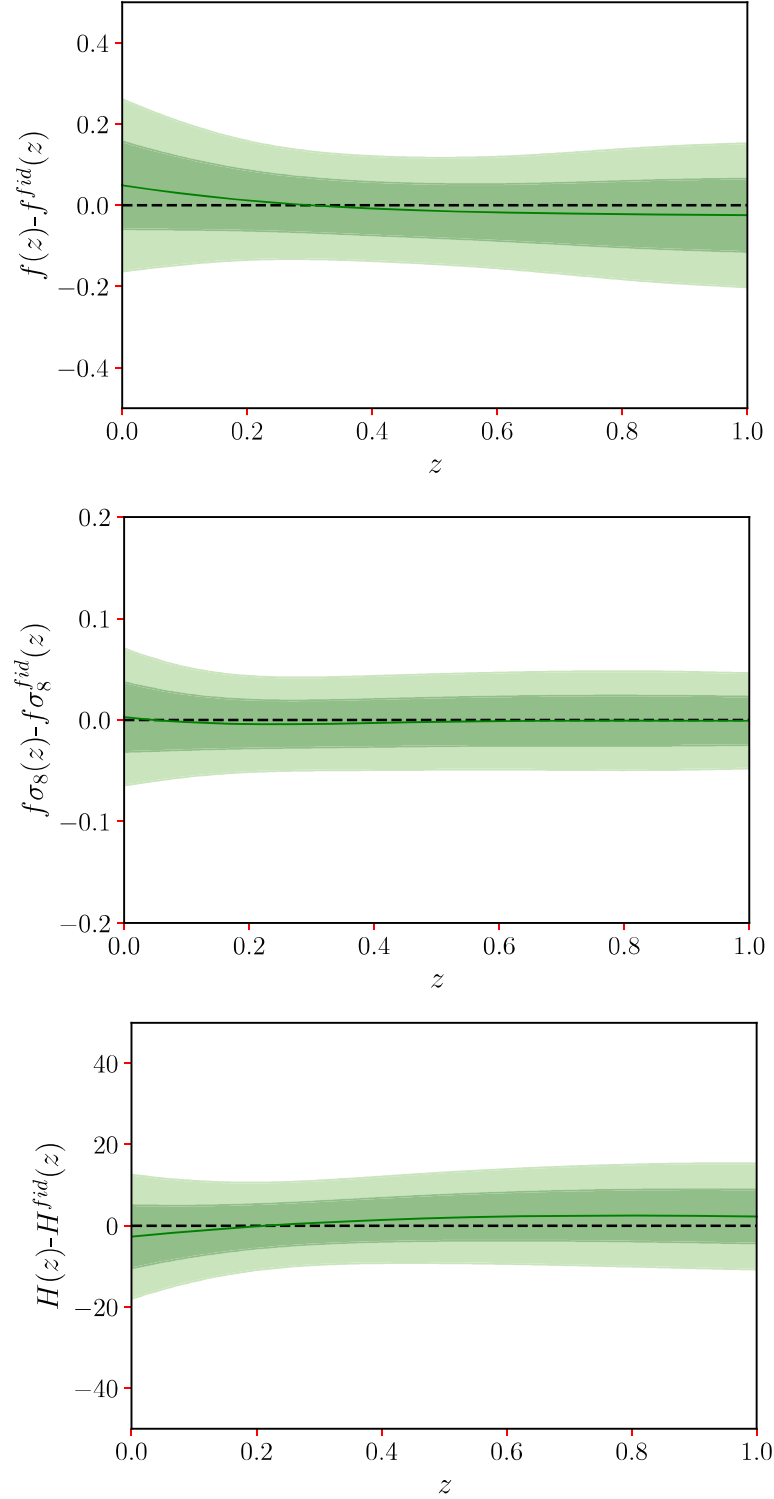


Figura B.1: Painel superior: Diferença média dos nossos dados simulados de $f(z)$. Painel do meio: Diferença média dos nossos dados simulados de $f\sigma_8(z)$. Painel inferior: Diferença média dos nossos dados simulados de $H(z)$. A linha contínua verde representa a diferença média para cada observável e a linha tracejada corresponde ao valor esperado. As áreas sombreadas representam as regiões de confiança de 1σ (verde escuro) e 2σ (verde claro). Para essas três grandezas cosmológicas, a diferença permanece consistentemente próxima de zero em todo o intervalo de redshift, sem oscilações observadas. Fonte: A autora (ver em OLIVEIRA *et al.* (2024)).

Referências Bibliográficas

- ABBOTT, T. M. C., OTHERS, 2023, “DES Y3 + KiDS-1000: Consistent cosmology combining cosmic shear surveys”, *The Open Journal of Astrophysics*, v. 6, pp. 36. doi: 10.21105/astro.2305.17173.
- ABBOTT, T. M. C., OTHERS, 2024, “The Dark Energy Survey: Cosmology Results with ~ 1500 New High-redshift Type Ia Supernovae Using the Full 5 yr Data Set”, *The Astrophysical Journal Letters*, 973(1):L14. doi: 10.3847/2041-8213/ad6f9f.
- ABRAMO, L. R., BERNUI, A., FERREIRA, I. S., et al., 2006, “Alignment tests for low CMB multipoles”, *PRD*, 74(6):063506. doi: 10.1103/PhysRevD.74.063506.
- ADIL, S., AKARSU, Ö., MALEKJANI, M., et al., 2024, “ S_8 increases with effective redshift in Λ CDM cosmology”, *MNRAS*, v. 528, n. 1, pp. L20–L26. doi: 10.1093/mnrasl/slad165.
- AFROZ, S., MUKHERJEE, S., 2025, “Multi-messenger cosmology: A route to accurate inference of dark energy beyond CPL parametrization from XG detectors”, *JCAP*, 2025(3):070. doi: 10.1088/1475-7516/2025/03/070.
- AKAIKE, H., 1974, “A New Look at the Statistical Model Identification”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 19 (jan.), pp. 716–723. doi: 10.1109/TAC.1974.1100705.
- AKARSU, Ö., Ó COLGÁIN, E., SEN, A. A., et al., 2025a, “Further support for S_8 increasing with effective redshift”, *MNRAS*, v. 542, n. 1 (set.), pp. L36–L42. doi: 10.1093/mnrasl/slaf041.
- AKARSU, Ö., ÇAM, A., PARASKEVAS, E. A., et al., 2025b, “Linear matter density perturbations in the Λ_s CDM model: Examining growth dynamics and addressing the S_8 tension”, *JCAP*, 2025(8):089. doi: 10.1088/1475-7516/2025/08/089.
- AKRAMI, Y., OTHERS, 2020, “Planck 2018 results. VII. Isotropy and Statistics of the CMB”, *Astron. Astrophys.*, v. 641, pp. A7. doi: 10.1051/0004-6361/201935201.

- ALBRECHT, A., STEINHARDT, P. J., 1982, “Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking”, *PRL*, v. 48, pp. 1220–1223.
- AMENDOLA, L., QUERCELLINI, C., 2004, “Skewness as a Test of the Equivalence Principle”, *PRL*, 92(18):181102. doi: 10.1103/PhysRevLett.92.181102.
- AMENDOLA, L., TSUJIKAWA, S., 2010, *Dark energy: theory and observations*. Cambridge University Press.
- AMENDOLA, L., GANNOUJI, R., POLARSKI, D., et al., 2007, “Conditions for the cosmological viability of $f(R)$ dark energy models”, *PRD*, 75(8):083504. doi: 10.1103/PhysRevD.75.083504.
- AMENDOLA, L., OTHERS, 2018, “Cosmology and fundamental physics with the Euclid satellite”, *Living Rev. Rel.*, v. 21, n. 1, pp. 2. doi: 10.1007/s41114-017-0010-3.
- APPLEBY, S., BATTYE, R., 2007, “Do consistent $F(R)$ models mimic general relativity plus Λ ?” *Physics Letters B*, v. 654, n. 1-2 (out.), pp. 7–12. doi: 10.1016/j.physletb.2007.08.037.
- APPLEBY, S. A., BATTYE, R. A., STAROBINSKY, A. A., 2010, “Curing singularities in cosmological evolution of $F(R)$ gravity”, *JCAP*, 2010(6):005. doi: 10.1088/1475-7516/2010/06/005.
- AVILA, F., NOVAES, C. P., BERNUI, A., et al., 2019, “The angular scale of homogeneity in the local Universe with the SDSS blue galaxies”, *MNRAS*, v. 488, n. 1 (set.), pp. 1481–1487. doi: 10.1093/mnras/stz1765.
- AVILA, F., BERNUI, A., DE CARVALHO, E., et al., 2021, “The growth rate of cosmic structures in the local Universe with the ALFALFA survey”, *MNRAS*, v. 505, n. 3 (ago.), pp. 3404–3413. doi: 10.1093/mnras/stab1488.
- AVILA, F., NOVAES, C. P., BERNUI, A., et al., 2018, “The scale of homogeneity in the local Universe with the ALFALFA catalogue”, *JCAP*, 12(12):041. doi: 10.1088/1475-7516/2018/12/041.
- AVILA, F., BERNUI, A., BONILLA, A., et al., 2022a, “Inferring $S_8(z)$ and $\gamma(z)$ with cosmic growth rate measurements using machine learning”, *European Physical Journal C*, 82(7):594. doi: 10.1140/epjc/s10052-022-10561-0.
- AVILA, F., BERNUI, A., NUNES, R. C., et al., 2022b, “The homogeneity scale and the growth rate of cosmic structures”, *MNRAS*, v. 509, n. 2 (jan.), pp. 2994–3003. doi: 10.1093/mnras/stab3122.

- AVILA, F., BERNUI, A., SABOGAL, M. A., et al., 2025a, “Transverse BAO scale measurement at $z_{\text{eff}} = 1.725$ with the SDSS quasars catalog”, *arXiv e-prints*, art. arXiv:2510.15650. doi: 10.48550/arXiv.2510.15650.
- AVILA, F., OLIVEIRA, F., FRANCO, C., et al., 2025b, “Probing the Cosmic Distance Duality Relation via Non-Parametric Reconstruction for High Redshifts”, *Universe*, 11(9):307. doi: 10.3390/universe11090307.
- AVILA, F., RIVERA, A. B., NUNES, R. C., et al., 2025c, “Revisiting the temperature evolution law of the CMB with Gaussian processes”, *Physics Letters B*, 867: 139606. doi: 10.1016/j.physletb.2025.139606.
- BARBOZA, JR., E. M., ALCANIZ, J. S., ZHU, Z.-H., et al., 2009, “Generalized equation of state for dark energy”, *PRD*, 80(4):043521. doi: 10.1103/PhysRevD.80.043521.
- BARBOZA, E., 2010, *Accelerated expansion of the universe and the nature of dark energy*. Tese de Mestrado, Observatório Nacional.
- BARROS, B. J., BARREIRO, T., KOIVISTO, T., et al., 2020, “Testing $F(Q)$ gravity with redshift space distortions”, *Physics of the Dark Universe*, 30:100616. doi: 10.1016/j.dark.2020.100616.
- BASILAKOS, S., 2012, “The Λ CDM Growth Rate of Structure Revisited”, *International Journal of Modern Physics D*, 21(7):1250064. doi: 10.1142/S0218271812500642.
- BASILAKOS, S., NESSERIS, S., 2017, “Conjoined constraints on modified gravity from the expansion history and cosmic growth”, *PRD*, 96(6):063517. doi: 10.1103/PhysRevD.96.063517.
- BASILAKOS, S., PLIONIS, M., SOLÀ, J., 2009, “Hubble expansion and structure formation in time varying vacuum models”, *PRD*, 80(8):083511. doi: 10.1103/PhysRevD.80.083511.
- BASILAKOS, S., NESSERIS, S., PERIVOLAROPOULOS, L., 2013, “Observational constraints on viable $f(R)$ parametrizations with geometrical and dynamical probes”, *PRD*, 87(12):123529. doi: 10.1103/PhysRevD.87.123529.
- BAUMANN, D., 2022, *Cosmology*. doi: 10.1017/9781108937092.
- BERNUI, A., HIPÓLITO-RICALDI, W. S., 2008, “Can a primordial magnetic field originate large-scale anomalies in WMAP data?” *MNRAS*, v. 389, n. 3 (set.), pp. 1453–1460. doi: 10.1111/j.1365-2966.2008.13683.x.

- BERNUI, A., REBOUÇAS, M. J., 2009, “Searching for non-Gaussianity in the WMAP data”, *PRD*, 79(6):063528. doi: 10.1103/PhysRevD.79.063528.
- BERNUI, A., REBOUÇAS, M. J., 2010, “Non-Gaussianity in the foreground-reduced CMB maps”, *PRD*, 81(6):063533. doi: 10.1103/PhysRevD.81.063533.
- BERNUI, A., VILLELA, T., WUENSCHÉ, C. A., et al., 2006a, “On the cosmic microwave background large-scale angular correlations”, *A&A*, v. 454, n. 2 (ago.), pp. 409–414. doi: 10.1051/0004-6361:20054243.
- BERNUI, A., MOTA, B., REBOUÇAS, M. J., et al., 2007a, “a Note on the Large-Angle Anisotropies in the Wmap Cut-Sky Maps”, *International Journal of Modern Physics D*, v. 16, n. 2-03 (jan.), pp. 411–420. doi: 10.1142/S0218271807010195.
- BERNUI, A., MOTA, B., REBOUÇAS, M. J., et al., 2007b, “Mapping the large-scale anisotropy in the WMAP data”, *A&A*, v. 464, n. 2 (mar.), pp. 479–485. doi: 10.1051/0004-6361:20065585.
- BERNUI, A., OLIVEIRA, A. F., PEREIRA, T. S., 2014, “North-South non-Gaussian asymmetry in Planck CMB maps”, *JCAP*, v. 10, n. 10 (out.), pp. 041–041. doi: 10.1088/1475-7516/2014/10/041.
- BERNUI, A., 2008, “Anomalous CMB north-south asymmetry”, *PRD*, 78(6):063531. doi: 10.1103/PhysRevD.78.063531.
- BERNUI, A., 2009, “Is the cold spot responsible for the CMB North-South asymmetry?” *PRD*, 80(12):123010. doi: 10.1103/PhysRevD.80.123010.
- BERNUI, A., TSALLIS, C., VILLELA, T., 2006b, “Temperature fluctuations of the cosmic microwave background radiation: A case of non-extensivity?” *Physics Letters A*, v. 356, n. 6 (ago.), pp. 426–430. doi: 10.1016/j.physleta.2006.04.013.
- BERNUI, A., NOVAES, C. P., PEREIRA, T. S., et al., 2018, “Topology and the suppression of CMB large-angle correlations”, *arXiv e-prints*, art. arXiv:1809.05924. doi: 10.48550/arXiv.1809.05924.
- BERNUI, A., DI VALENTINO, E., GIARÈ, W., et al., 2023, “Exploring the H_0 tension and the evidence for dark sector interactions from 2D BAO measurements”, *PRD*, 107(10):103531. doi: 10.1103/PhysRevD.107.103531.
- BERTI, E., BARAUSSE, E., CARDOSO, V., et al., 2015, “Testing general relativity with present and future astrophysical observations”, *Classical and Quantum Gravity*, 32(24):243001. doi: 10.1088/0264-9381/32/24/243001.

- BERTINI, N. R., HIPÓLITO-RICALDI, W. S., DE MELO-SANTOS, F., et al., 2020, “Cosmological framework for renormalization group extended gravity at the action level”, *European Physical Journal C*, 80(5):479. doi: 10.1140/epjc/s10052-020-8041-4.
- BESSA, P., CAMPISTA, M., BERNUI, A., 2022, “Observational constraints on Starobinsky $f(R)$ cosmology from cosmic expansion and structure growth data”, *European Physical Journal C*, 82(6):506. doi: 10.1140/epjc/s10052-022-10457-z.
- BOGGESS, N. W., MATHER, J. C., WEISS, R., et al., 1992, “The COBE Mission: Its Design and Performance Two Years after Launch”, *APJ*, v. 397 (out.), pp. 420. doi: 10.1086/171797.
- BOM, C. R., FRAGA, B. M., SABOGAL, M. A., et al., 2026, “Physics-guided discovery of dynamical dark-energy equations of state through iterative AI reasoning”, *arXiv e-prints*, art. arXiv:2606.19427. doi: 10.48550/arXiv.2606.19427.
- BONILLA, A., KUMAR, S., NUNES, R. C., 2021, “Measurements of H_0 and reconstruction of the dark energy properties from a model-independent joint analysis”, *European Physical Journal C*, 81(2):127. doi: 10.1140/epjc/s10052-021-08925-z.
- BONILLA, A., KUMAR, S., NUNES, R. C., et al., 2022, “Reconstruction of the dark sectors’ interaction: A model-independent inference and forecast from GW standard sirens”, *MNRAS*, v. 512, n. 3 (maio), pp. 4231–4238. doi: 10.1093/mnras/stac687.
- BOSMA, A., 1981, “21-cm line studies of spiral galaxies. II. The distribution and kinematics of neutral hydrogen in spiral galaxies of various morphological types.” *AJ*, v. 86 (dez.), pp. 1825–1846. doi: 10.1086/113063.
- BOUSSO, R., 2008, “The cosmological constant”, *General Relativity and Gravitation*, v. 40, pp. 607–637.
- BROUT, D., SCOLNIC, D., POPOVIC, B., et al., 2024. “VizieR Online Data Catalog: The Pantheon+ analysis: cosmological constraints (Brout+, 2022)”. VizieR On-line Data Catalog: J/ApJ/938/110. Originally published in: 2022ApJ...938..110B, ago.
- CAI, Y.-F., CAPOZZIELLO, S., DE LAURENTIS, M., et al., 2016, “ $f(T)$ teleparallel gravity and cosmology”, *Rept. Prog. Phys.*, v. 79, n. 10, pp. 106901. doi: 10.1088/0034-4885/79/10/106901.

- CAPOZZIELLO, S., D'AGOSTINO, R., 2022, “Model-independent reconstruction of $f(Q)$ non-metric gravity”, *Physics Letters B*, 832:137229. doi: 10.1016/j.physletb.2022.137229.
- CAPOZZIELLO, S., DE LAURENTIS, M., 2011, “Extended Theories of Gravity”, *Physics Reports*, v. 509, n. 4 (dez.), pp. 167–321. doi: 10.1016/j.physrep.2011.09.003.
- CAPOZZIELLO, S., FANG, L. Z., 2002, “Curvature Quintessence”, *International Journal of Modern Physics D*, v. 11, n. 4 (jan.), pp. 483–491. doi: 10.1142/S0218271802002025.
- CARDONA, W., SABOGAL, M. A., 2023, “Holographic energy density, dark energy sound speed, and tensions in cosmological parameters: H_0 and S_8 ”, *JCAP*, 2023 (2):045. doi: 10.1088/1475-7516/2023/02/045.
- CARDONA, W., ARJONA, R., ESTRADA, A., et al., 2021, “Cosmological constraints with the Effective Fluid approach for Modified Gravity”, *JCAP*, 2021(5):064. doi: 10.1088/1475-7516/2021/05/064.
- CARROLL, B. W., OSTLIE, D. A., 2017, *An Introduction to Modern Astrophysics*. Cambridge University Press.
- CATTANI, M., 1998, “Dedução das Equações da Teoria de Gravitação de Einstein em um Curso de Graduação”, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 20, n. 1.
- CHEN, Y., KUMAR, S., RATRA, B., 2017, “Determining the Hubble Constant from Hubble Parameter Measurements”, *APJ*, 835(1):86. doi: 10.3847/1538-4357/835/1/86.
- CHEVALLIER, M., POLARSKI, D., 2001, “Accelerating Universes with Scaling Dark Matter”, *International Journal of Modern Physics D*, v. 10, n. 2 (jan.), pp. 213–223. doi: 10.1142/S0218271801000822.
- CLIFTON, T., FERREIRA, P. G., PADILLA, A., et al., 2012, “Modified gravity and cosmology”, *Physics Reports*, v. 513, n. 1 (mar.), pp. 1–189. doi: 10.1016/j.physrep.2012.01.001.
- COLES, P., 1996, “The large-scale structure of the Universe.” *Contemporary Physics*, v. 37, n. 6 (dez.), pp. 429–440. doi: 10.1080/00107519608217534.
- COLGÁIN, E. Ó., SHEIKH-JABBARI, M. M., 2021, “Elucidating cosmological model dependence with H_0 ”, *arXiv e-prints*, art. arXiv:2101.08565. doi: 10.48550/arXiv.2101.08565.

- CONTRERAS, C., BLAKE, C., POOLE, G. B., et al., 2013, “The WiggleZ Dark Energy Survey: measuring the cosmic growth rate with the two-point galaxy correlation function”, *MNRAS*, v. 430, n. 2 (abr.), pp. 924–933. doi: 10.1093/mnras/sts608.
- CROCCE, M., GAZTAÑAGA, E., CABRÉ, A., et al., 2011, “Clustering of photometric luminous red galaxies - I. Growth of structure and baryon acoustic feature”, *MNRAS*, v. 417, n. 4 (nov.), pp. 2577–2591. doi: 10.1111/j.1365-2966.2011.19425.x.
- D’AGOSTINO, R., NUNES, R. C., 2022, “Forecasting constraints on deviations from general relativity in $f(Q)$ gravity with standard sirens”, *PRD*, v. 106 (Dec), pp. 124053. doi: 10.1103/PhysRevD.106.124053. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.106.124053>>.
- DE CARVALHO, E., BERNUI, A., XAVIER, H. S., et al., 2020, “Baryon acoustic oscillations signature in the three-point angular correlation function from the SDSS-DR12 quasar survey”, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 492, n. 3 (mar.), pp. 4469–4476. doi: 10.1093/mnras/staa119.
- DE CARVALHO, E., BERNUI, A., AVILA, F., et al., 2021, “BAO angular scale at $z_{eff} = 0.11$ with the SDSS blue galaxies”, *A&A*, 649:A20. doi: 10.1051/0004-6361/202039936.
- DE FELICE, A., TSUJIKAWA, S., 2010, “ $f(R)$ Theories”, *Living Reviews in Relativity*, 13(1):3. doi: 10.12942/lrr-2010-3.
- DE SOUZA, M. V., 2026, *Estudo de modelos de gravidade modificada usando dados cosmológicos de aglomeração de matéria*. Dissertação (mestrado em astronomia), Observatório Nacional, Rio de Janeiro.
- DE SOUZA, M. V., OLIVEIRA, F., HIPÓLITO-RICALDI, W. S., et al., 2026, “Modified Gravity from growth data: goodness-of-fit and gravitational coupling”, *in preparation*.
- DELBEM, N. F., 2010, “Introdução matemática aos modelos cosmológicos”, .
- DESI COLLABORATION, ABDUL-KARIM, M., AGUILAR, J., et al., 2025, “DESI DR2 Results II: Measurements of Baryon Acoustic Oscillations and Cosmological Constraints”, *arXiv e-prints*. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2503.14738>>.
- DI VALENTINO, E. E. A., 2021, “Cosmology Intertwined III: $f\sigma_8$ and S_8 ”, *Astroparticle Physics*, 131:102604. doi: 10.1016/j.astropartphys.2021.102604.

- DIAS, B. L., AVILA, F., BERNUI, A., 2023, “Probing cosmic homogeneity in the Local Universe”, *MNRAS*, v. 526, n. 3 (dez.), pp. 3219–3229. doi: 10.1093/mnras/stad2980.
- DICKE, R. H., PEEBLES, P. J. E., ROLL, P. G., et al., 1965, “Cosmic Black-Body Radiation.” *APJ*, v. 142 (jul.), pp. 414–419. doi: 10.1086/148306.
- DIEMER, B., 2018, “COLOSSUS: A Python Toolkit for Cosmology, Large-scale Structure, and Dark Matter Halos”, *APJS*, 239(2):35. doi: 10.3847/1538-4365/aace8c.
- DINDA, B. R., BANERJEE, N., 2023, “Model independent bounds on type Ia supernova absolute peak magnitude”, *PRD*, 107(6):063513. doi: 10.1103/PhysRevD.107.063513.
- DODELSON, S., 2003, *Modern Cosmology*. San Diego, Academic Press.
- DODELSON, S., GATES, E. I., TURNER, M. S., 1996, “Cold dark matter”, *Science*, v. 274, n. 5284, pp. 69–75.
- EFSTATHIOU, G., 1999, “Constraining the equation of state of the Universe from distant Type Ia supernovae and cosmic microwave background anisotropies”, *MNRAS*, v. 310, n. 3 (dez.), pp. 842–850. doi: 10.1046/j.1365-8711.1999.02997.x.
- EINSTEIN, A., 1905, “Zur Elektrodynamik bewegter Körper”, *Annalen der Physik*, v. 322, n. 10 (jan.), pp. 891–921. doi: 10.1002/andp.19053221004.
- EINSTEIN, A., 1915, “Die Feldgleichungen der Gravitation”, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, pp. 844–847.
- EINSTEIN, A., 1917, “Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie”, *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, (jan.), pp. 142–152.
- ELLIS, G. F. R., 2007, “On the definition of distance in general relativity: I. M. H. Etherington (Philosophical Magazine ser. 7, vol. 15, 761 (1933))”, *General Relativity and Gravitation*, v. 39, n. 7 (jul), pp. 1047–1052. doi: 10.1007/s10714-006-0355-5.
- ETHERINGTON, I. M. H., 1933, “On the Definition of Distance in General Relativity.” *Philosophical Magazine*, v. 15, n. 18 (jan), pp. 761.
- FIXSEN, D. J., HINSHAW, G., BENNETT, C. L., et al., 1997, “The Spectrum of the Cosmic Microwave Background Anisotropy from the Combined COBE FIRAS

- and DMR Observations”, *APJ*, v. 486, n. 2 (set.), pp. 623–628. doi: 10.1086/304560.
- FRANCO, C., AVILA, F., BERNUI, A., 2024, “Probing cosmic isotropy in the Local Universe”, *MNRAS*, v. 527, n. 3 (jan.), pp. 7400–7413. doi: 10.1093/mnras/stad3616.
- FRANCO, C., AVILA, F., BERNUI, A., 2025a, “Probing Large-scale Structures with the Two-point Function and the Power Spectrum: Insights into Cosmic Clustering Evolution”, *APJ*, 993(1):133. doi: 10.3847/1538-4357/ae0a32.
- FRANCO, C., AVILA, F., BERNUI, A., et al., 2025b, “The homogeneity scale in the Local Universe: model-independent estimate from S-PLUS DR4 blue galaxies”, *arXiv e-prints*, art. arXiv:2511.12532. doi: 10.48550/arXiv.2511.12532.
- FRANCO, C., OLIVEIRA, J., LOPES, M., et al., 2025c, “Measuring the matter fluctuations in the Local Universe with the ALFALFA catalogue”, *MNRAS*, v. 537, n. 2 (fev.), pp. 897–908. doi: 10.1093/mnras/staf088.
- FREEDMAN, W. L., MADORE, B. F., HATT, D., et al., 2019, “The Carnegie-Chicago Hubble Program. VIII. An Independent Determination of the Hubble Constant Based on the Tip of the Red Giant Branch”, *APJ*, 882(1):34. doi: 10.3847/1538-4357/ab2f73.
- FRIEDMANN, A., 1924, “Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes”, *Zeitschrift für Physik*, v. 21, n. 1, pp. 326–332.
- FRIEMAN, J. A., TURNER, M. S., HUTERER, D., 2008, “Dark energy and the accelerating universe.” *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, v. 46 (set.), pp. 385–432. doi: 10.1146/annurev.astro.46.060407.145243.
- GAMOW, G., 1948, “The Origin of Elements and the Separation of Galaxies”, *Physical Review*, v. 74, pp. 505–506.
- GELMAN, A., CARLIN, J. B., STERN, H. S., et al., 2013, *Bayesian Data Analysis*. Chapman and Hall/CRC.
- GHOSH, B., BENGALY, C., 2024, “Consistency tests between SDSS and DESI BAO measurements”, *Physics of the Dark Universe*, 46:101699. doi: 10.1016/j.dark.2024.101699.
- GILKS, W. R., RICHARDSON, S., SPIEGELHALTER, D., 1995, *Markov Chain Monte Carlo in Practice*. Chapman and Hall/CRC.

- GÓMEZ-VALENT, A., AMENDOLA, L., 2018, “ H_0 from cosmic chronometers and Type Ia supernovae, with Gaussian Processes and the novel Weighted Polynomial Regression method”, *JCAP*, 2018(4):051. doi: 10.1088/1475-7516/2018/04/051.
- GONG, Y., ZHANG, Y.-Z., 2005, “Probing the curvature and dark energy”, *PRD*, 72(4):043518. doi: 10.1103/PhysRevD.72.043518.
- GONZÁLEZ, J. E., ALCANIZ, J. S., CARVALHO, J. C., 2016, “Non-parametric reconstruction of cosmological matter perturbations”, *JCAP*, 2016(4):016. doi: 10.1088/1475-7516/2016/04/016.
- GOODMAN, J., WEARE, J., 2010, “Ensemble Samplers with Affine Invariance”, *Communications in Applied Mathematics and Computational Science*, v. 5, n. 1, pp. 65–80.
- GUTH, A. H., 1981, “Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems”, *PRD*, v. 23, pp. 347–356.
- HAGSTOTZ, S., REISCHKE, R., LILOW, R., 2022, “A new measurement of the Hubble constant using fast radio bursts”, *MNRAS*, v. 511, n. 1 (mar.), pp. 662–667. doi: 10.1093/mnras/stac077.
- HANNESTAD, S., MÖRTSELL, E., 2004, “Cosmological constraints on the dark energy equation of state and its evolution”, *JCAP*, 2004(9):001. doi: 10.1088/1475-7516/2004/09/001.
- HARTLE, J. B. G., 2003, *An Introduction to Einstein’s General Relativity*. San Francisco, Pearson Education.
- HIPÓLITO-RICALDI, W. S., VON MARTTENS, R., DE MELO-SANTOS, F., et al., 2025, “Scale-dependent and background-preserving gravity from an action: cosmological tests”, *European Physical Journal C*, 85(5):599. doi: 10.1140/epjc/s10052-025-14208-8.
- HOBSON, M. P., EFSTATHIOU, G. P., LASENBY, A. N., 2006, *General Relativity*. Nova York, Cambridge University Press.
- HOLANDA, R. F. L., LIMA, J. A. S., RIBEIRO, M. B., 2010, “Testing the Distance-Duality Relation with Galaxy Clusters and Type Ia Supernovae”, *APJL*, v. 722, n. 2 (oct), pp. L233–L237. doi: 10.1088/2041-8205/722/2/L233.
- HOLSCLAW, T., OTHERS, 2010a, “Nonparametric reconstruction of the dark energy equation of state”, *PRD*, 82(10):103502. doi: 10.1103/PhysRevD.82.103502.

- HOLSCLAW, T., OTHERS, 2010b, “Nonparametric Dark Energy Reconstruction from Supernova Data”, *PRL*, 105(24):241302. doi: 10.1103/PhysRevLett.105.241302.
- HOLSCLAW, T., OTHERS, 2011, “Nonparametric reconstruction of the dark energy equation of state from diverse data sets”, *PRD*, 84(8):083501. doi: 10.1103/PhysRevD.84.083501.
- HU, J. P., WANG, F. Y., 2022, “Revealing the late-time transition of H_0 : relieve the Hubble crisis”, *MNRAS*, v. 517, n. 1 (nov.), pp. 576–581. doi: 10.1093/mnras/stac2728.
- HU, W., SAWICKI, I., 2007, “Models of $f(R)$ cosmic acceleration that evade solar system tests”, *PRD*, 76(6):064004. doi: 10.1103/PhysRevD.76.064004.
- HUBBLE, E., 1929, “A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae”, *Proceedings of the national academy of sciences*, v. 15, n. 3, pp. 168–173.
- HWANG, S.-G., L’HUILIER, B., KEELEY, R. E., et al., 2023, “How to use GP: effects of the mean function and hyperparameter selection on Gaussian process regression”, *JCAP*, 2023(2):014. doi: 10.1088/1475-7516/2023/02/014.
- JALILVAND, F., MEHRABI, A., 2022, “Model independent estimation of the cosmography parameters using cosmic chronometers”, *European Physical Journal Plus*, 137(12):1341. doi: 10.1140/epjp/s13360-022-03551-4.
- JASSAL, H. K., BAGLA, J. S., PADMANABHAN, T., 2005, “WMAP constraints on low redshift evolution of dark energy”, *MNRAS*, v. 356, n. 1 (jan.), pp. L11–L16. doi: 10.1111/j.1745-3933.2005.08577.x.
- JEANS, J. H., 1902, “The Stability of a Spherical Nebula”, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, v. 199 (jan.), pp. 1–53. doi: 10.1098/rsta.1902.0012.
- JESUS, J. F., VALENTIM, R., ESCOBAL, A. A., et al., 2020, “Gaussian process estimation of transition redshift”, *JCAP*, 2020(4):053. doi: 10.1088/1475-7516/2020/04/053.
- JIMÉNEZ, J. B., HEISENBERG, L., KOIVISTO, T., et al., 2020, “Cosmology in $f(Q)$ geometry”, *PRD*, 101(10):103507. doi: 10.1103/PhysRevD.101.103507.
- JIMENEZ, R., LOEB, A., 2002, “Constraining Cosmological Parameters Based on Relative Galaxy Ages”, *APJ*, v. 573, n. 1 (jul.), pp. 37–42. doi: 10.1086/340549.

- JIMENEZ, R., MORESCO, M., VERDE, L., et al., 2023. “Cosmic Chronometers with Photometry: a new path to $H(z)$ ”. .
- JOYCE, A., JAIN, B., KHOURY, J., et al., 2015, “Beyond the cosmological standard model”, *PHYSREP*, v. 568 (mar.), pp. 1–98. doi: 10.1016/j.physrep.2014.12.002.
- KESTER, C. E., BERNUI, A., HIPÓLITO-RICALDI, W. S., 2024, “Probing the statistical isotropy of the universe with Planck data of the cosmic microwave background”, *A&A*, 683:A176. doi: 10.1051/0004-6361/202348160.
- KHADKA, N., RATRA, B., 2020, “Quasar X-ray and UV flux, baryon acoustic oscillation, and Hubble parameter measurement constraints on cosmological model parameters”, *MNRAS*, v. 492, n. 3 (mar.), pp. 4456–4468. doi: 10.1093/mnras/staa101.
- KHYLLEP, W., PALIATHANASIS, A., DUTTA, J., 2021, “Cosmological solutions and growth index of matter perturbations in $f(Q)$ gravity”, *PRD*, 103(10):103521. doi: 10.1103/PhysRevD.103.103521.
- KIRSHNER, R. P., 2004, “Hubble’s diagram and cosmic expansion”, *Proceedings of the National Academy of Science*, v. 101, n. 1 (jan.), pp. 8–13. doi: 10.1073/pnas.2536799100.
- KOMATSU, E., DUNKLEY, J., NOLTA, M. R., et al., 2009, “Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe Observations: Cosmological Interpretation”, *APJS*, v. 180, n. 2 (fev.), pp. 330–376. doi: 10.1088/0067-0049/180/2/330.
- KOPP, M., APPLEBY, S. A., ACHITOUV, I., et al., 2013, “Spherical collapse and halo mass function in $f(R)$ theories”, *PRD*, 88(8):084015. doi: 10.1103/PhysRevD.88.084015.
- KUMAR, D., DHANKAR, P. K., RAY, S., et al., 2025, “Joint Analysis of Constraints on $f(R)$ Parametrization from Recent Cosmological Observations”, *Physics of the Dark Universe*, 49:101989. doi: 10.1016/j.dark.2025.101989.
- KUMAR, S., NUNES, R. C., PAN, S., et al., 2023, “New late-time constraints on $f(R)$ gravity”, *Physics of the Dark Universe*, 42:101281. doi: 10.1016/j.dark.2023.101281.
- LAZKOZ, R., LOBO, F. S. N., ORTIZ-BAÑOS, M., et al., 2019, “Observational constraints of $f(Q)$ gravity”, *PRD*, 100(10):104027. doi: 10.1103/PhysRevD.100.104027.

- LEE, S., 2005, “Constraints on the dark energy equation of state from the separation of CMB peaks and the evolution of α ”, *PRD*, 71(12):123528. doi: 10.1103/PhysRevD.71.123528.
- LEMAÎTRE, G., 1927, “Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques”, *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, v. 47 (jan.), pp. 49–59.
- LINDE, A. D., 1982, “A New Inflationary Universe Scenario”, *Physics Letters B*, v. 108, pp. 389–393.
- LINDER, E., 2002, “Exploring the Expansion History of the Universe”, *PRL*, 90(9):091301. doi: 10.1103/PhysRevLett.90.091301.
- LINDER, E. V., 2005, “Cosmic growth history and expansion history”, *PRD*, 72(4):043529. doi: 10.1103/PhysRevD.72.043529.
- LINDER, E. V., CAHN, R. N., 2007, “Parameterized beyond-Einstein growth”, *Astroparticle Physics*, v. 28, n. 4-5 (dez.), pp. 481–488. doi: 10.1016/j.astropartphys.2007.09.003.
- LIU, K., FU, X., XU, B., et al., 2025, “The growth of linear perturbations in the interacting dark energy models and observational constraints”, *arXiv e-prints*, art. arXiv:2503.05208. doi: 10.48550/arXiv.2503.05208.
- LOPES, M., BERNUI, A., FRANCO, C., et al., 2024, “Bulk Flow Motion Detection in the Local Universe with Pantheon+ Type Ia Supernovae”, *APJ*, 967(1):47. doi: 10.3847/1538-4357/ad3735.
- LOPES, M., BERNUI, A., HIPÓLITO-RICALDI, W. S., et al., 2025, “Dipolar fluence distribution of statistically isotropic FERMI gamma-ray bursts”, *A&A*, 694: A77. doi: 10.1051/0004-6361/202452181.
- LOPES, M., AVILA, F., BERNUI, A., et al., 2026, “First tomographic measurements of the angular clustering and bias of photometric quasars from S-PLUS”, *arXiv e-prints*, art. arXiv:2609.01238. doi: 10.48550/arXiv.2609.01238.
- LUONGO, O., MUCCINO, M., 2024, “Model-independent cosmographic constraints from DESI 2024”, *A&A*, 690:A40. doi: 10.1051/0004-6361/202450512.
- MAARTENS, R., 2011, “Is the Universe homogeneous?” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, v. 369, n. 1957 (dez.), pp. 5115–5137. doi: 10.1098/rsta.2011.0289.

- MARQUES, G. A., NOVAES, C. P., BERNUI, A., et al., 2018, “Isotropy analyses of the Planck convergence map”, *MNRAS*, v. 473, n. 1 (jan.), pp. 165–172. doi: 10.1093/mnras/stx2240.
- MARQUES, G. A., BERNUI, A., 2020, “Tomographic analyses of the CMB lensing and galaxy clustering to probe the linear structure growth”, *JCAP*, 05(5):052. doi: 10.1088/1475-7516/2020/05/052.
- MARQUES, G. A., LIU, J., ZORRILLA MATILLA, J. M., et al., 2019, “Constraining neutrino mass with weak lensing Minkowski Functionals”, *JCAP*, 06(6):019. doi: 10.1088/1475-7516/2019/06/019.
- MARTINELLI, M., OTHERS, 2021, “Euclid: Constraining dark energy coupled to electromagnetism using astrophysical and laboratory data”, *A&A*, 654:A148. doi: 10.1051/0004-6361/202141353.
- MARTINELLI, M., 2009, “Cosmological constraints on the Hu-Sawicki modified gravity scenario”, *Nuclear Physics B Proceedings Supplements*, v. 194 (out.), pp. 266–271. doi: 10.1016/j.nuclphysbps.2009.07.090.
- MARTINEZ, V. J., SAAR, E., 2001, *Statistics of the galaxy distribution*. CRC press.
- MOKEDDEM, R., HIPÓLITO-RICALDI, W. S., BERNUI, A., 2023, “Excess of lensing amplitude in the Planck CMB power spectrum”, *JCAP*, 01(1):017. doi: 10.1088/1475-7516/2023/01/017.
- MOKEDDEM, R., LOPES, M., AVILA, F., et al., 2026, “Probing cosmic isotropy: Hubble constant and matter density large-angle variations with the Pantheon+SH0ES data”, *Physics of the Dark Universe*, 51:102185. doi: 10.1016/j.dark.2025.102185.
- MORESCO, M., 2023. “Addressing the Hubble tension with cosmic chronometers”. .
- MORESCO, M., JIMENEZ, R., VERDE, L., et al., 2020, “Setting the Stage for Cosmic Chronometers. II. Impact of Stellar Population Synthesis Models Systematics and Full Covariance Matrix”, *APJ*, 898(1):82. doi: 10.3847/1538-4357/ab9eb0.
- MOTOHASHI, H., STAROBINSKY, A. A., YOKOYAMA, J., 2010, “Phantom Boundary Crossing and Anomalous Growth Index of Fluctuations in Viable $f(R)$ Models of Cosmic Acceleration”, *Progress of Theoretical Physics*, v. 123, n. 5 (maio), pp. 887–902. doi: 10.1143/PTP.123.887.
- MOTOHASHI, H., NISHIZAWA, A., 2012, “Reheating after $f(R)$ inflation”, *PRD*, 86(8):083514. doi: 10.1103/PhysRevD.86.083514.

- MOTOHASHI, H., STAROBINSKY, A. A., YOKOYAMA, J., 2009, “Analytic Solution for Matter Density Perturbations in a Class of Viable Cosmological $f(R)$ Models”, *International Journal of Modern Physics D*, v. 18, n. 11 (jan.), pp. 1731–1740. doi: 10.1142/S0218271809015278.
- MU, Y., LI, E.-K., XU, L., 2023, “Model-independent reconstruction of growth index via Gaussian process”, *Classical and Quantum Gravity*, 40(22):225003. doi: 10.1088/1361-6382/acfb6c.
- MUKHANOV, V. F., FELDMAN, H. A., BRANDENBERGER, R. H., 1992, “Theory of cosmological perturbations”, *Physics Reports*, v. 215, n. 5-6 (jun.), pp. 203–333. doi: 10.1016/0370-1573(92)90044-Z.
- MUKHERJEE, P., BANERJEE, N., 2020, “Revisiting a non-parametric reconstruction of the deceleration parameter from combined background and the growth rate data”, *arXiv e-prints*, art. arXiv:2007.15941. doi: 10.48550/arXiv.2007.15941.
- MUKHERJEE, P., MUKHERJEE, A., 2021, “Assessment of the cosmic distance duality relation using Gaussian process”, *MNRAS*, v. 504, n. 3 (jun.), pp. 3938–3946. doi: 10.1093/mnras/stab1054.
- NESSERIS, S., PANTAZIS, G., PERIVOLAROPOULOS, L., 2017, “Tension and constraints on modified gravity parametrizations of $G_{\text{eff}}(z)$ from growth rate and Planck data”, *arXiv e-prints*, art. arXiv:1703.10538. doi: 10.48550/arXiv.1703.10538.
- NGUYEN, N.-M., HUTERER, D., WEN, Y., 2023, “Evidence for Suppression of Structure Growth in the Concordance Cosmological Model”, *PRL*, 131(11):111001. doi: 10.1103/PhysRevLett.131.111001.
- NIU, J., CHEN, Y., ZHANG, T.-J., 2023, “Reconstruction of the dark energy scalar field potential by Gaussian process”, *arXiv e-prints*, art. arXiv:2305.04752. doi: 10.48550/arXiv.2305.04752.
- NOJIRI, S., ODINTSOV, S. D., OIKONOMOU, V. K., 2017, “Modified gravity theories on a nutshell: Inflation, bounce and late-time evolution”, *Physics Reports*, v. 692 (jun.), pp. 1–104. doi: 10.1016/j.physrep.2017.06.001.
- NOJIRI, S., ODINTSOV, S. D., 2011, “Unified cosmic history in modified gravity: From $F(R)$ theory to Lorentz non-invariant models”, *Physics Reports*, v. 505, n. 2 (ago.), pp. 59–144. doi: 10.1016/j.physrep.2011.04.001.

- NOVAES, C. P., BERNUI, A., FERREIRA, I. S., et al., 2015, “A neural-network based estimator to search for primordial non-Gaussianity in Planck CMB maps”, *JCAP*, v. 09, n. 9 (set.), pp. 064–064. doi: 10.1088/1475-7516/2015/09/064.
- NOVAES, C. P., BERNUI, A., MARQUES, G. A., et al., 2016, “Local analyses of Planck maps with Minkowski functionals”, *MNRAS*, v. 461, n. 2 (set.), pp. 1363–1373. doi: 10.1093/mnras/stw1427.
- NOVAES, C. P., THIELE, L., ARMIJO, J., et al., 2025, “Cosmology from HSC Y1 weak lensing data with combined higher-order statistics and simulation-based inference”, *PRD*, 111(8):083510. doi: 10.1103/PhysRevD.111.083510.
- NUNES, R. C., BERNUI, A., 2020, “BAO signatures in the 2-point angular correlations and the Hubble tension”, *European Physical Journal C*, 80(11):1025. doi: 10.1140/epjc/s10052-020-08601-8.
- NUNES, R. C., SUNNY, V., 2021, “Arbitrating the S_8 discrepancy with growth rate measurements from redshift-space distortions”, *MNRAS*, v. 505, n. 4, pp. 5427–5437. doi: 10.1093/mnras/stab1613.
- NUNES, R. C., PAN, S., SARIDAKIS, E. N., et al., 2017, “New observational constraints on $f(R)$ gravity from cosmic chronometers”, *JCAP*, 2017(1):005. doi: 10.1088/1475-7516/2017/01/005.
- Ó. COLGÁIN, E., POURJOAGHI, S., SHEIKH-JABBARI, M. M., et al., 2025, “A comparison of Bayesian and frequentist confidence intervals in the presence of a late Universe degeneracy”, *European Physical Journal C*, 85(2):124. doi: 10.1140/epjc/s10052-024-13727-0.
- OKE, J. B., GUNN, J. E., 1983, “Secondary standard stars for absolute spectrophotometry.” *APJ*, v. 266 (mar.), pp. 713–717. doi: 10.1086/160817.
- OKS, E., 2021, “Brief review of recent advances in understanding dark matter and dark energy”, *New Astron. Rev.*, v. 93, pp. 101632. doi: 10.1016/j.newar.2021.101632.
- OLIVEIRA, F., AVILA, F., BERNUI, A., et al., 2024, “Reconstructing the growth index γ with Gaussian processes”, *European Physical Journal C*, 84(6):636. doi: 10.1140/epjc/s10052-024-12953-w.
- OLIVEIRA, F., AVILA, F., FRANCO, C., et al., 2025a, “Is $\omega_0\omega_a$ CDM a good model for the clumpy Universe?” *Physics of the Dark Universe*, 49:101996. doi: 10.1016/j.dark.2025.101996.

- OLIVEIRA, F., RIBEIRO, B., HIPÓLITO-RICALDI, W. S., et al., 2025b, “Viability of general relativity and modified gravity cosmologies using high-redshift cosmic probes”, *JCAP*, 12(12):007. doi: 10.1088/1475-7516/2025/12/007.
- OLIVEIRA, F., SABOGAL, M. A., AVILA, F., et al., 2026, “Testing Scale-Dependent Suppression of Structure Growth in the Linear Regime”, *arXiv e-prints*, art. arXiv:2608.02175. doi: 10.48550/arXiv.2608.02175.
- PADILLA, A., 2015, “Lectures on the Cosmological Constant Problem”, *arXiv e-prints*, art. arXiv:1502.05296. doi: 10.48550/arXiv.1502.05296.
- PADILLA, L. E., TELLEZ, L. O., ESCAMILLA, L. A., et al., 2019, “Cosmological parameter inference with Bayesian statistics”, *arXiv e-prints*, art. arXiv:1903.11127. doi: 10.48550/arXiv.1903.11127.
- PADMANABHAN, T., 1993, *Structure Formation in the Universe*.
- PALIATHANASIS, A., 2025, “Testing Non-Coincident $f(Q)$ -gravity with DESI DR2 BAO and GRBs”, *arXiv e-prints*, art. arXiv:2504.11132. doi: 10.48550/arXiv.2504.11132.
- PEEBLES, P. J. E., 1984, “Dark matter and the origin of galaxies and globular star clusters”, *APJ*, v. 284, pp. 439–444.
- PEEBLES, P., PAGE, L., PARTRIDGE, R., 2010, “Finding the big bang”, *Journal for the History of Astronomy*, v. 41, n. 1, pp. 137–138.
- PENZIAS, A. A., WILSON, R. W., 1965, “A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s.” *APJ*, v. 142 (jul.), pp. 419–421. doi: 10.1086/148307.
- PERENON, L., BEL, J., MAARTENS, R., et al., 2019, “Optimising growth of structure constraints on modified gravity”, *JCAP*, 2019(6):020. doi: 10.1088/1475-7516/2019/06/020.
- PERENON, L., MARTINELLI, M., ILIĆ, S., et al., 2021, “Multi-tasking the growth of cosmological structures”, *Physics of the Dark Universe*, 34:100898. doi: 10.1016/j.dark.2021.100898.
- PÉREZ-ROMERO, J., NESSERIS, S., 2018, “Cosmological constraints and comparison of viable $f(R)$ models”, *PRD*, v. 97, n. 2, pp. 023525. doi: 10.1103/PhysRevD.97.023525.
- PERIVOLAROPOULOS, L., SKARA, F., 2022, “Challenges for Λ CDM: An update”, *NAR*, 95:101659. doi: 10.1016/j.newar.2022.101659.

- PERLMUTTER, S., OTHERS, 1999, “Measurements of Ω and Λ from 42 High Redshift Supernovae”, *APJ*, v. 517, pp. 565–586. doi: 10.1086/307221.
- PICCIRILLI, G., FABBIAN, G., ALONSO, D., et al., 2024, “Growth history and quasar bias evolution at $z < 3$ from Quiaia”, *JCAP*, 2024(6):012. doi: 10.1088/1475-7516/2024/06/012.
- PLANCK COLLABORATION, ADE, P. A. R., AGHANIM, N., et al., 2016, “Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters”, *A&A*, 594:A13. doi: 10.1051/0004-6361/201525830.
- PLANCK COLLABORATION, AGHANIM, N., AKRAMI, Y., et al., 2020, “Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters”, *A&A*, 641:A6. doi: 10.1051/0004-6361/201833910.
- PLAZA, F., KRAISELBURD, L., 2025, “Testing $f(R)$ -gravity models with DESI DR2 2025-BAO and other cosmological data”, *PRD*, 112(2):023554. doi: 10.1103/gtrg-56fj.
- RÄSÄNEN, S., VÄLIVIITA, J., KOSONEN, V., 2016, “Testing distance duality with CMB anisotropies”, *JCAP*, 2016(4):050. doi: 10.1088/1475-7516/2016/04/050.
- RASMUSSEN, C. E., WILLIAMS, C. K. I., 2006, *Gaussian Processes for Machine Learning*. Cambridge, MA, MIT Press. ISBN: 9780262182539.
- RENZI, F., SILVESTRI, A., 2020, “A look at the Hubble speed from first principles”, *arXiv e-prints*, art. arXiv:2011.10559. doi: 10.48550/arXiv.2011.10559.
- RENZI, F., HOGG, N. B., GIARÈ, W., 2022, “The resilience of the Etherington-Hubble relation”, *MNRAS*, v. 513, n. 3 (jul.), pp. 4004–4014. doi: 10.1093/mnras/stac1030.
- RIBEIRO, B., BERNUI, A., CAMPISTA, M., 2024, “Cosmological constraints on the R^2 -corrected Appleby–Battye model”, *European Physical Journal C*, 84(2):114. doi: 10.1140/epjc/s10052-024-12437-x.
- RIBEIRO, B. W. N., SALES, L. L., DE FARIAS, K. E. L., et al., 2026, “Constraints on Dark Energy and Modified Gravity Models from Fast Radio Bursts and Late-Time Geometric Probes”, *arXiv e-prints*, art. arXiv:2606.29583.
- RIBEIRO, U., AVILA, F., BOM, C. R., et al., 2025, “A cosmology weakly dependent measurement of 2D Baryon Acoustic Oscillations scale from the Southern Photometric Local Universe Survey”, *arXiv e-prints*, art. arXiv:2506.08288. doi: 10.48550/arXiv.2506.08288.

- RIESS, A. G., YUAN, W., MACRI, L. M., et al., 2022, “A Comprehensive Measurement of the Local Value of the Hubble Constant with $1 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ Uncertainty from the Hubble Space Telescope and the SH0ES Team”, *APJL*, 934(1):L7. doi: 10.3847/2041-8213/ac5c5b.
- RIESS, A. G., OTHERS, 1998, “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant”, *Astronomical Journal*, v. 116, pp. 1009–1038. doi: 10.1086/300499.
- ROMERO FUÑO, A., HIPÓLITO-RICALDI, W. S., ZIMDAHL, W., 2016, “Matter perturbations in scaling cosmology”, *MNRAS*, v. 457, n. 3 (abr.), pp. 2958–2967. doi: 10.1093/mnras/stw127.
- RUBIN, V. C., BURSTEIN, D., FORD, JR., W. K., et al., 1985, “Rotation velocities of 16 SA galaxies and a comparison of Sa, SB and SC rotation properties.” *APJ*, v. 289 (fev.), pp. 81–104. doi: 10.1086/162866.
- RUIZ-ZAPATERO, J., GARCÍA-GARCÍA, C., ALONSO, D., et al., 2022, “Model-independent constraints on Ω_m and $H(z)$ from the link between geometry and growth”, *MNRAS*, v. 512, n. 2 (maio), pp. 1967–1984. doi: 10.1093/mnras/stac431.
- RYDEN, B., 2003, *Introduction to cosmology*.
- SABOGAL, M. A., NUNES, R. C., 2025, “Robust evidence for dynamical dark energy from DESI galaxy-CMB lensing cross-correlation and geometric probes”, *JCAP*, 2025(9):084. doi: 10.1088/1475-7516/2025/09/084.
- SABOGAL, M. A., SILVA, E., NUNES, R. C., et al., 2024, “Quantifying the S8 tension and evidence for interacting dark energy from redshift-space distortion measurements”, *PRD*, 110(12):123508. doi: 10.1103/PhysRevD.110.123508.
- SABOGAL, M. A., NUNES, R. C., AVILA, F., et al., 2025, “Updated Cosmological Constraints from 2D BAO Measurements: A New Compilation and Comparison with DESI DR2”, *arXiv e-prints*, art. arXiv:2510.16141. doi: 10.48550/arXiv.2510.16141.
- SAHLU, S., ALFEDEEL, A. H. A., ABEBE, A., 2024a, “The cosmology of $f(R, L_m)$ gravity: constraining the background and perturbed dynamics”, *European Physical Journal C*, 84(9):982. doi: 10.1140/epjc/s10052-024-13307-2.
- SAHLU, S., HOUGH, R. T., ABEBE, A., et al., 2024b, “Constraining viscous fluid models in $f(Q)$ gravity with data”, *arXiv e-prints*, art. arXiv:2408.02775. doi: 10.48550/arXiv.2408.02775.

- SAHLU, S., DE LA CRUZ-DOMBRIZ, Á., ABEBE, A., 2025, “Structure growth in $f(Q)$ cosmology”, *MNRAS*, v. 539, n. 2 (maio), pp. 690–703. doi: 10.1093/mnras/staf439.
- SASAKI, M., 1986, “Large Scale Quantum Fluctuations in the Inflationary Universe”, *Progress of Theoretical Physics*, v. 76, n. 5 (nov.), pp. 1036–1046. doi: 10.1143/PTP.76.1036.
- SCHERER, M., SABOGAL, M. A., NUNES, R. C., et al., 2025, “Challenging the Λ CDM model: 5σ evidence for a dynamical dark energy late-time transition”, *PRD*, 112 (4):043513. doi: 10.1103/n86r-sjgm.
- SCHWARZ, G., 1978, “Estimating the Dimension of a Model”, *The Annals of Statistics*, v. 6, n. 2, pp. 461 – 464. doi: 10.1214/aos/1176344136.
- SCRIMGEOUR, M. I., DAVIS, T., BLAKE, C., et al., 2012, “The WiggleZ Dark Energy Survey: the transition to large-scale cosmic homogeneity”, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, v. 425, n. 1 (set.), pp. 116–134. doi: 10.1111/j.1365-2966.2012.21402.x.
- SEIKEL, M., CLARKSON, C., 2013, “Optimising Gaussian processes for reconstructing dark energy dynamics from supernovae”, *arXiv e-prints*, art. arXiv:1311.6678. doi: 10.48550/arXiv.1311.6678.
- SEIKEL, M., CLARKSON, C., SMITH, M., 2012, “Reconstruction of dark energy and expansion dynamics using Gaussian processes”, *JCAP*, 2012(6):036. doi: 10.1088/1475-7516/2012/06/036.
- SHAFIELOO, A., KIM, A. G., LINDER, E. V., 2012, “Gaussian process cosmography”, *PRD*, 85(12):123530. doi: 10.1103/PhysRevD.85.123530.
- SHAH, P., LEMOS, P., LAHAV, O., 2021, “A buyer’s guide to the Hubble constant”, *The Astronomy and Astrophysics Review*, 29(1):9. doi: 10.1007/s00159-021-00137-4.
- SKARA, F., PERIVOLAROPOULOS, L., 2020, “Tension of the E_G statistic and redshift space distortion data with the Planck- Λ CDM model and implications for weakening gravity”, *PRD*, 101(6):063521. doi: 10.1103/PhysRevD.101.063521.
- SMOOT, G. F., 1999, “COBE observations and results”. In: Maiani, L., Melchiorri, F., Vittorio, N. (Eds.), *3K cosmology*, v. 476, *American Institute of Physics Conference Series*, pp. 1–10. AIP, maio. doi: 10.1063/1.59326.
- SOTIRIOU, T. P., FARAONI, V., 2010, “ $f(R)$ theories of gravity”, *Reviews of Modern Physics*, v. 82, n. 1 (jan.), pp. 451–497. doi: 10.1103/RevModPhys.82.451.

- SPECOGNA, E., DI VALENTINO, E., SAID, J. L., et al., 2024, “Exploring the growth index γ_L : Insights from different CMB dataset combinations and approaches”, *PRD*, 109(4):043528. doi: 10.1103/PhysRevD.109.043528.
- SPERGEL, D. N., VERDE, L., PEIRIS, H. V., et al., 2003, “First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters”, *APJS*, v. 148, n. 1 (set.), pp. 175–194. doi: 10.1086/377226.
- SPERGEL, D. N., BEAN, R., DORÉ, O., et al., 2007, “Three-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Implications for Cosmology”, *APJS*, v. 170, n. 2 (jun.), pp. 377–408. doi: 10.1086/513700.
- STAROBINSKY, A. A., 1980, “A new type of isotropic cosmological models without singularity”, *Physics Letters B*, v. 91, n. 1 (mar.), pp. 99–102. doi: 10.1016/0370-2693(80)90670-X.
- STAROBINSKY, A. A., 2007, “Disappearing cosmological constant in $f(R)$ gravity”, *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, v. 86, n. 3 (out.), pp. 157–163. doi: 10.1134/S0021364007150027.
- STERN, D., OTHERS, 2010, “Cosmic chronometers: constraining the equation of state of dark energy. I: $H(z)$ measurements”, *JCAP*, 2010(2):008. doi: 10.1088/1475-7516/2010/02/008.
- TEGMARK, M., TAYLOR, A. N., HEAVENS, A. F., 1997, “Karhunen–Loève Eigenvalue Problems in Cosmology: How Should We Tackle Large Data Sets?” *Astrophysical Journal*, v. 480, pp. 22–35. doi: 10.1086/303939.
- TSUJIKAWA, S., 2007, “Matter density perturbations and effective gravitational constant in modified gravity models of dark energy”, *PRD*, 76(2):023514. doi: 10.1103/PhysRevD.76.023514.
- TSUJIKAWA, S., 2008, “Observational signatures of $f(R)$ dark energy models that satisfy cosmological and local gravity constraints”, *PRD*, 77(2):023507. doi: 10.1103/PhysRevD.77.023507.
- TSUJIKAWA, S., 2013, “Quintessence: A Review”, *Class. Quant. Grav.*, v. 30, pp. 214003. doi: 10.1088/0264-9381/30/21/214003.
- VANETTI, E., VANZAN, E., BELLOMO, N., et al., 2025, “Testing the growth of cosmic structures during the Dark Ages”, *JCAP*, 2025(9):054. doi: 10.1088/1475-7516/2025/09/054.

- VARGAS DOS SANTOS, M., REIS, R. R. R., WAGA, I., 2016, “Constraining the cosmic deceleration-acceleration transition with type Ia supernova, BAO/CMB and $H(z)$ data”, *JCAP*, 2016(2):066. doi: 10.1088/1475-7516/2016/02/066.
- WALD, R. M., 1984, *General Relativity*. Chicago, The University of Chicago Press, Ltd.
- WANG, B., ABDALLA, E., ATRIO-BARANDELA, F., et al., 2024, “Further understanding the interaction between dark energy and dark matter: current status and future directions”, *Rept. Prog. Phys.*, v. 87, n. 3, pp. 036901. doi: 10.1088/1361-6633/ad2527.
- WANG, L., STEINHARDT, P. J., 1998, “Cluster Abundance Constraints for Cosmological Models with a Time-varying, Spatially Inhomogeneous Energy Component with Negative Pressure”, *APJ*, v. 508, n. 2 (dez.), pp. 483–490. doi: 10.1086/306436.
- WEINBERG, D. H., MORTONSON, M. J., EISENSTEIN, D. J., et al., 2013, “Observational probes of cosmic acceleration”, *Physics Reports*, v. 530, n. 2 (set.), pp. 87–255. doi: 10.1016/j.physrep.2013.05.001.
- WEINBERG, S., 1989, “The Cosmological Constant Problem”, *Reviews of Modern Physics*, v. 61, pp. 1–23. doi: 10.1103/RevModPhys.61.1.
- WEINBERG, S., 2008, *Cosmology*. Oxford, Oxford University Press.
- WEINBERG, S., 1972, “Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity”, .
- WEN, Y., NGUYEN, N.-M., HUTERER, D., 2023, “Sweeping Horndeski canvas: new growth-rate parameterization for modified-gravity theories”, *JCAP*, 2023(9):028. doi: 10.1088/1475-7516/2023/09/028.
- WETTERICH, C., 2004, “Phenomenological parameterization of quintessence”, *Physics Letters B*, v. 594, n. 1-2 (jul.), pp. 17–22. doi: 10.1016/j.physletb.2004.05.008.
- XIE, H., NONG, X., WANG, H., et al., 2025, “Constraints on cosmological models with gamma-ray bursts in cosmology-independent way”, *International Journal of Modern Physics D*, 34(2):2450073. doi: 10.1142/S0218271824500731.
- YANG, T., GUO, Z.-K., CAI, R.-G., 2015, “Reconstructing the interaction between dark energy and dark matter using Gaussian processes”, *PRD*, 91(12):123533. doi: 10.1103/PhysRevD.91.123533.

- YIN, Z.-Y., WEI, H., 2019, “Non-parametric reconstruction of growth index via Gaussian processes”, *Science China Physics, Mechanics, and Astronomy*, 62(9):999811. doi: 10.1007/s11433-019-9373-0.
- ZHAN, H., TYSON, J. A., 2018, “Cosmology with the Large Synoptic Survey Telescope: an overview”, *Reports on Progress in Physics*, 81(6):066901. doi: 10.1088/1361-6633/aab1bd.
- ZHANG, H., WANG, Y.-C., ZHANG, T.-J., et al., 2023, “Kernel Selection for Gaussian Process in Cosmology: With Approximate Bayesian Computation Rejection and Nested Sampling”, *APJS*, 266(2):27. doi: 10.3847/1538-4365/accb92.
- ZHANG, M.-J., LI, H., 2018, “Gaussian processes reconstruction of dark energy from observational data”, *European Physical Journal C*, 78(6):460. doi: 10.1140/epjc/s10052-018-5953-3.
- ZHENG, J., ZHAO, G.-B., WANG, Y., et al., 2022, “A New Consistency Test for Λ CDM Cosmology Using Galaxy Surveys”, *Research in Astronomy and Astrophysics*, 22(6):065016. doi: 10.1088/1674-4527/ac69b8.
- ZUÑIGA VARGAS, C., HIPÓLITO-RICALDI, W. S., ZIMDAHL, W., 2012, “Perturbations for transient acceleration”, *JCAP*, 2012(4):032. doi: 10.1088/1475-7516/2012/04/032.
- ZWICKY, F., 2009, “Republication of: The redshift of extragalactic nebulae”, *General Relativity and Gravitation*, v. 41, n. 1 (jan.), pp. 207–224. doi: 10.1007/s10714-008-0707-4.