



Observatório
Nacional

TESE DE DOUTORADO

ANÁLISES GERAIS DA VELOCIDADE DA LUZ COM OBSERVAÇÕES
COSMOLÓGICAS

JAIANE DA SILVA SANTOS

RIO DE JANEIRO

2026

Ministério da Ciência, Tecnologia, Inovações e Comunicações
Observatório Nacional
Programa de Pós-Graduação

Tese de Doutorado

ANÁLISES GERAIS DA VELOCIDADE DA LUZ COM OBSERVAÇÕES
COSMOLÓGICAS

por

Jaiane da Silva Santos

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação em Astronomia do Observatório Nacional, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutor em Astronomia.

Orientador: Dr. Carlos André P. Bengaly
Junior

Coorientador: Dr. Rodrigo de Sousa
Gonçalves

Rio de Janeiro, RJ – Brasil
Fevereiro de 2026

S837

Silva Santos, Jaiane da

Análises gerais da velocidade da luz com observações
cosmológicas [Rio de Janeiro] 2026.

xxii, 101 p. 29,7 cm: graf. il. tab.

Tese (doutorado) - Observatório Nacional - Rio de Janeiro,
2026.

1. Cosmologia. 2. Constantes Fundamentais. 3. Processos
Gaussianos. 4. Relação de Dualidade de Distância Cósmica.
I. Observatório Nacional. II. Título.

CDU 000.000.000

“ANÁLISES GERAIS DA VELOCIDADE DA LUZ COM OBSERVAÇÕES
COSMOLÓGICAS”

JAIANE DA SILVA SANTOS

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ASTRONOMIA DO OBSERVATÓRIO NACIONAL COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ASTRONOMIA.

Aprovada por:

Dr. Carlos André P. Bengaly Junior – Observatório Nacional
(Orientador)

Dr. Rodrigo de Sousa Gonçalves – UFRRJ, ON
(Coorientador)

Dra. Maria Aldinez Dantas – UERN

Dr. Cássio Bruno Magalhães Pigozzo – UFBA

Dr. Valério Marra – UFES

Dr. Jailson Souza de Alcaniz – ON

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

27 DE FEVEREIRO DE 2026

A meu pai, Jonas.

*“Direi do Senhor: Ele é o meu Deus,
o meu refúgio,
a minha fortaleza,
e nele confiarei.”*

(Bíblia Sagrada, Salmos 91, 2)

Agradecimentos

- A Deus, meu suporte maior que está comigo em todos os momentos.
- Aos melhores pais do mundo, Maria e Jonas (*in memoriam*), por sempre me apoiarem e me darem forças para lutar pelos meus objetivos. Vocês são e sempre serão meus melhores exemplos e inspiração. A vocês todo o meu amor.
- À minha irmã, Joisiane, que, além de me apoiar é uma grande amiga que sempre me ajudou quando mais precisei. Nossa interação vai muito além de compartilharmos o dia a dia, felicidades e frustrações, inclui algo que só ocorre entre irmãos, a naturalidade da afinidade. Tenha certeza que me orgulho muito e sempre me orgulharei de quem você se tornou. Você é força e luz. Obrigada pela sua existência.
- Aos meus familiares pelo apoio, confiança e incentivo. Obrigada por estarem sempre comigo em todos os momentos da minha vida.
- Agradeço imensamente ao meu orientador, Carlos Bengaly, e ao meu coorientador Rodrigo Gonçalves, pela orientação, paciência e dedicação. Muito obrigada pela confiança, ensinamentos e valiosos conselhos.
- Agradeço aos meus amigos e colegas do Observatório Nacional, em particular aos da casa branca. Especialmente: Thaís Lemos, Sousa, Camila, Ayslana, Gabriel Rodrigues, Mariana, Ellen, Bruno Wesley, Rodolpho, Fernanda, Dinorah, Jonatã e Shao. Obrigada, Jonathan Moraes, pela colaboração e dedicação. Vocês foram muito importantes nessa caminhada.
- A todos os integrantes do grupo de Cosmologia do ON, GCON. Muito obrigada.
- À Christianne Garnier, por ser essa pessoa admirável. Obrigada pela atenção e cuidado com todos.
- À Tangerina, por alegrar os nossos dias e por todo o seu amor.
- Aos funcionários do Observatório Nacional que de forma direta ou indireta são responsáveis pelo funcionamento da Pós-Graduação.
- À CAPES pelo apoio financeiro fundamental para que tudo isso fosse possível.

ANÁLISES GERAIS DA VELOCIDADE DA LUZ COM OBSERVAÇÕES
COSMOLÓGICAS

RESUMO

As constantes fundamentais da Natureza desempenham um papel crucial em nossa compreensão do Universo. Elas representam os limites do nosso conhecimento das leis da Física, mas, ao mesmo tempo, sistematizam novos fenômenos ainda a serem descobertos. Nos últimos anos, um enorme esforço observacional tem sido dedicado ao estudo da possível variação no espaço e no tempo de algumas dessas constantes fundamentais. Tal descoberta teria consequências profundas em nossos modelos atuais de interações físicas e, em particular, na estrutura teórica por trás da gravitação. A Cosmologia nos fornece uma grande janela para procurar esta variação, com escalas de espaço e tempo que vão do Sistema Solar a todo o Universo observável e sua origem. Por outro lado, modelos teóricos estão sendo ativamente desenvolvidos a fim de fornecer uma descrição fisicamente viável da variação de constantes fundamentais.

Portanto, medições de constantes físicas fundamentais usando dados observacionais astronômicos representam um método poderoso para investigar evidências para uma nova física além do modelo cosmológico padrão, ou seja, o modelo Λ CDM. Neste contexto, medimos a velocidade da luz c por meio do parâmetro de Hubble e de medições de distância de diâmetro angular a partir de conjuntos de dados atuais, obtidos a partir de uma compilação de idades de galáxias e oscilações acústicas bariônicas (BAO) radiais para o primeiro, e distâncias de Supernova do Tipo Ia (SNe) do Pantheon+SH0ES para o último. Fazemos isso realizando uma reconstrução dos Processos Gaussianos dessas quantidades, a fim de evitar a suposição de um modelo cosmológico. Em seguida, realizamos uma previsão da precisão dessa medida dos próximos levantamentos de *redshift* de galáxias, como o J-PAS, e de sirenes-padrão de experimentos de ondas gravitacionais, como nos casos do LIGO e do Einstein Telescope. Nossos resultados apontam que poderemos reduzir a incerteza de medidas da velocidade da luz de aproximadamente 5%, com dados atuais, para 1.5-2% quando estes dados futuros estiverem disponíveis.

Além disso, realizamos um teste da relação de dualidade de distâncias cósmicas (RDDC), uma das relações mais fundamentais na Cosmologia, a fim de testar um modelo de velocidade da luz variável conhecido como "minimally extended varying speed of light" (meVSL). Esse modelo prevê que a velocidade da luz varia em conjunto com outras constantes fundamentais, de maneira a preservar a invariância de Lorentz, termodinâmica, identidades de Bianchi etc., porém, modificando a relação de dualidade mencionada anteriormente. Utilizamos diferentes conjuntos de dados de oscilações acústicas bariônicas do

SDSS e DESI, bem como Supernovas do tipo Ia da compilação Pantheon+SH0ES, além de Processos Gaussianos novamente para reconstruir os dados de distância de luminosidade das Supernovas. Obtivemos um desvio da RDDC usual em aproximadamente 4σ utilizando Supernovas com um conjunto específico de dados de BAO do SDSS, que mede o seu modo transversal (2D). No entanto, este resultado não foi encontrado em outras amostras de BAO do SDSS e do DESI que mediram o seu modo anisotrópico (3D). Isto nos indica que estes dados ainda não possuem precisão o suficiente para distinguir entre evidências para uma nova física e possíveis erros sistemáticos.

GENERAL ANALYZES OF THE SPEED OF LIGHT WITH COSMOLOGICAL
OBSERVATIONS

ABSTRACT

The fundamental constants of Nature play a crucial role in our understanding of the Universe. They represent the limits of our knowledge of the laws of physics, but at the same time, they systematize new phenomena yet to be discovered. In recent years, an enormous observational effort has been devoted to studying the possible variation in space and time of some of these fundamental constants. Such a discovery would have profound consequences for our current models of physical interactions and, in particular, for the theoretical framework behind gravitation. Cosmology provides us with a vast window to search for this variation, with scales of space and time ranging from the Solar System to the entire observable Universe and its origin. On the other hand, theoretical models are being actively developed in order to provide a physically viable description of the variation of fundamental constants.

Therefore, measurements of fundamental physical constants using astronomical observational data represent a powerful method to investigate evidence for new physics beyond the standard cosmological model, namely the Λ CDM model. In this context, we measure the speed of light c by means of the Hubble parameter and angular diameter distance measurements from current datasets, obtained from a compilation of galaxy ages and radial baryon acoustic oscillations (BAO) for the former, and Type Ia Supernova (SNe) distances from Pantheon+SH0ES for the latter. We do this by performing a Gaussian Process reconstruction of these quantities, in order to avoid the assumption of a cosmological model. We then predict the accuracy of this measurement from upcoming galaxy redshift surveys, such as J-PAS, and from standard sirens from gravitational-wave experiments, such as LIGO and the Einstein Telescope. Our results indicate that we may be able to reduce the uncertainty of light speed measurements from approximately 5% with current data to 1.5-2% when these future data become available.

Furthermore, we perform a test of the cosmic distance duality relation (CDDR), one of the most fundamental relations in Cosmology, in order to test a model of variable speed of light known as the "minimally extended varying speed of light" (meVSL). This model predicts that the speed of light varies together with other fundamental constants, in a way that preserves Lorentz invariance, thermodynamics, Bianchi identities, etc., but by modifying the duality relation mentioned above. We use different data sets of baryon acoustic oscillations from SDSS and DESI, as well as Type Ia supernovae from the Pantheon+SH0ES compilation, and Gaussian processes again to reconstruct the data

of Supernovae luminosity distance. We obtained a deviation from the usual RDDC of approximately 4σ using Supernovae with a specific set of BAO data from the SDSS, which measures its transverse mode (2D). However, this result was not found in other BAO samples from the SDSS and DESI that measured its anisotropic mode (3D). This indicates to us that these data are not yet precise enough to distinguish between evidence for new physics and possible systematic errors.

Lista de Figuras

2.1	<i>Painel esquerdo:</i> Ilustração da variedade \mathcal{M} , mostrando a linha de mundo de um observador fundamental (OF) O sobre esta variedade uma vez que ela se encontra fatiada em hipersuperfícies em tempo constante \sum_t (KNOBEL, 2012). <i>Painel direito:</i> OFs atravessam o fatiamento do espaço-tempo em diferentes instantes, t_1 e t_2 . De acordo com o postulado de Weyl, tais linhas de mundo jamais se interceptam, exceto em ponto singulares, e são ortogonais para quaisquer OFs ao atravessarem tais hipersuperfícies (HOBSON <i>et al.</i> , 2006).	10
2.2	Geometria do universo. O primeiro caso mostra uma curvatura esférica ($k > 0$), indicando um universo fechado. O segundo caso mostra uma curvatura hiperbólica ($k < 0$), indicando um universo aberto. O terceiro caso é o universo plano, euclidiano com $k = 0$.	13
2.3	Universo em expansão. A distância comóvel associada à posição coordenada \vec{r} permanece aproximadamente constante à medida que a grade se expande, enquanto a distância física \vec{d} aumenta com o tempo (BAUMANN, 2022).	14
2.4	Relação velocidade-distância para nebulosas extragalácticas encontrada por Hubble (HUBBLE, 1929).	15
2.5	Distância de diâmetro angular medida a partir da origem até uma régua padrão de comprimento l com coordenadas (r, θ_1, ϕ) e (r, θ_2, ϕ) (RYDEN, 2016).	20
2.6	Curvas de luz de supernovas do Tipo Ia na banda B do levantamento Calán/Tololo. <i>Painel superior:</i> Observamos as diferenças nas luminosidades máximas das SNe. <i>Painel inferior:</i> Observamos as diferentes curvas de luz após calibração (MIQUEL, 2007).	29
2.7	Diagrama de Hubble da colaboração Pantheon+ apresentando módulo de distância versus <i>redshift</i> de supernovas tipo Ia. A partir de dados deste tipo é utilizada a relação (2.106) para o cálculo de distâncias. Cada cor representa um compilado de dados e a linha tracejada em cinza é a tendência prevista por Hubble (BROUT <i>et al.</i> , 2022).	30
2.8	Espectro de corpo negro obtido pelo WMAP/FIRAS (FIXSEN, 2009).	31

2.9	Mapa das flutuações de temperatura da RCF da Colaboração Planck (AKRAMI <i>et al.</i> , 2020).	31
2.10	Espectro de potência de temperatura da RCF da Colaboração Planck (AKRAMI <i>et al.</i> , 2020).	32
2.11	Função de correlação de 2 pontos (2PCF) de galáxias considerando dados do SDSS, onde detectou-se, pela primeira vez, o sinal do BAO em $z \simeq 0.3$ (EISENSTEIN <i>et al.</i> , 2005).	34
2.12	Constante de Hubble, H_0 , inferida a partir da onda gravitacional GW170817 (WANG <i>et al.</i> , 2023), representada pela curva em vermelho. Observamos uma incerteza alta para tal medição, que é ocasionada por conta de ter apenas um único evento de onda gravitacional sendo utilizada para o cálculo da Constante de Hubble. Representado em outras cores, temos diferentes medições da mesma constante, H_0 , para comparativo.	36
2.13	Ilustração do primeiro evento de onda gravitacional observado pelo LIGO (CALTECH, 2016).	36
2.14	Medidas do parâmetros de Hubble, $H(z)$, obtidas com o método de cronômetros cósmicos (CC) versus <i>redshift</i> z (MORESCO <i>et al.</i> , 2022).	37
2.15	Medidas de H_0 obtidas na literatura recente. Na parte de cima do painel estão as medidas do Universo primordial e na parte intermediária se encontram resultados obtidos de dados do Universo tardio. Na parte de baixo temos a combinação destes resultados assumindo ou não um modelo cosmológico.	39
3.1	<i>Painel superior</i> : medições de $c(z_m)$, em função de z_m , obtidas assumindo o kernel SqExp via GP a partir da seguinte combinação de conjuntos de dados: CC+SNe (círculo preto), CC+GW do LIGO (círculo vermelho), CC+GW do ET (círculo azul). A combinação dos mesmos conjuntos de dados com $H(z)$ do J-PAS é indicada por estrelas pretas, vermelhas e azuis, respectivamente. <i>Painel inferior</i> : Igual ao painel superior, mas assumindo o kernel Mat72. As incertezas em todos os casos correspondem ao nível de confiança de 2σ e a linha horizontal magenta representa o valor previsto pelo cenário Λ CDM.	51

3.2	O painel superior esquerdo mostra a reconstrução dos Processos Gaussianos da distância de diâmetro angular, $d_A(z)$, conforme obtida pelas Eqs.(3.7) a (3.1), usando a compilação de Supernovas do Tipo Ia Pantheon+SH0ES. O painel superior direito exhibe a reconstrução da derivada de primeira ordem, $d'_A(z)$, enquanto o painel central inferior representa a reconstrução da derivada de segunda ordem, $d''_A(z)$, ainda obtidas da mesma amostra observacional. Os pontos pretos com barras de erro no gráfico de $d_A(z)$, representam os dados observacionais, e as curvas cinzas denotam os níveis de confiança 1, 2 e 3σ das reconstruções, respectivamente, do tom mais escuro para o mais claro. Todas as reconstruções foram realizadas considerando o kernel exponencial ao quadrado.	53
3.3	A mesma que a Fig. 3.2, mas assumindo o kernel Mat72 dos Processos Gaussianos.	54
3.4	A mesma que a Fig. 3.2, mas válida para o conjunto de dados de ondas gravitacionais simuladas, assumindo as especificações do interferômetro LIGO.	55
3.5	A mesma que a Fig. 3.4, mas assumindo o kernel Mat72 dos Processos Gaussianos, em vez disso	56
3.6	A mesma que a Fig. 3.4, mas válida para o conjunto de dados de ondas gravitacionais simuladas, assumindo as especificações do Einstein Telescope.	57
3.7	A mesma que a Fig. 3.6, mas assumindo o kernel Mat72 dos Processos Gaussianos, em vez disso.	58
3.8	<i>Painel superior esquerdo:</i> Reconstrução do parâmetro de Hubble, $H(z)$, obtido a partir do conjunto de dados de cronômetros cósmicos. Os pontos pretos representam os pontos de dados com suas respectivas incertezas. <i>Painel superior direito:</i> Semelhante ao anterior, mas para cronômetros cósmicos combinados com o conjunto de dados simulados do J-PAS. <i>Painel inferior esquerdo:</i> A primeira derivada do parâmetro de Hubble, $H'(z)$, apenas a partir da amostra de cronômetros cósmicos. <i>Painel inferior direito:</i> Semelhante ao gráfico anterior, mas para cronômetros cósmicos com combinação do J-PAS. Como nos gráficos anteriores, as curvas cinzas denotam os níveis de confiança de 1, 2, e 3σ das reconstruções, respectivamente, do tom mais escuro para o mais claro. Todos os resultados foram obtidos assumindo o kernel exponencial ao quadrado.	59
3.9	Semelhante à Fig. 3.8, mas assumindo o kernel Mat72 dos Processos Gaussianos, em vez disso	60

4.1	Reconstrução da distância de luminosidade, $d_L(z)$, via Processos Gaussianos, conforme obtida pelas Eqs. 4.14, 4.15 e 4.22, usando o kernel SqExp. Os pontos pretos com barras de erro no gráfico $d_L(z)$ representam os dados observacionais, e as curvas rosa denotam os níveis de confiança 1, 2, e 3σ das reconstruções, respectivamente, do tom mais escuro para o mais claro.	72
4.2	Medições de $\eta(z)$ com um nível de confiança de 2σ obtidas a partir dos dados de SNe Pantheon+ e SH0ES com os dados de BAO conjuntos (2D, 3D BAO (DESI) e 3D BAO (SDSS)). Os pontos de dados azul, vermelho e magenta representam os dados SNe combinados com o 3D BAO (SDSS), SNe com 2D BAO e SNe com 3D BAO (DESI), respectivamente. A linha horizontal representa a RDDC padrão, ou seja, $\eta(z) = 1$.	73
4.3	As verossimilhanças normalizadas para o parâmetro b assumindo SNe juntamente com (<i>painel superior:</i>) amostra conjunta 2D+3D BAO (SDSS) (linha tracejada azul), BAO 2D (linha contínua vermelha) e amostra conjunta 2D+3D BAO (DESI) (linha tracejada-pontilhada magenta), (<i>painel inferior:</i>) BAO 3D (SDSS, linha tracejada azul) e BAO 3D (DESI, linha contínua vermelha). A linha vertical denota o caso da RDDC padrão, ou seja, $b = 0$.	74
4.4	As verossimilhanças normalizadas para o parâmetro η_0 assumindo SNe juntamente com (<i>painel superior:</i>) amostra conjunta 2D+3D BAO (SDSS) (linha tracejada azul), BAO 2D (linha contínua vermelha) e amostra conjunta 2D+3D BAO (DESI) (linha tracejada-pontilhada magenta), (<i>painel inferior:</i>) BAO 3D (SDSS, linha tracejada azul) e BAO 3D (DESI, linha contínua vermelha). A linha vertical denota o caso da RDDC padrão, ou seja, $\eta_0 = 1.0$.	75

Lista de Tabelas

3.1	Resultados para as medições de $c(z_m)$ assumindo o kernel SqExp via PG. A primeira coluna exibe a combinação de conjuntos de dados, a segunda coluna mostra o valor de z_m reconstruído, a terceira coluna fornece as medições de $c(z_m)$ e suas incertezas em um nível de confiança de 1σ , em unidades de 10^5 km s^{-1} , e a quarta coluna fornece sua incerteza relativa, em porcentagem.	50
3.2	A mesma que a Tabela 3.1, mas assumindo o kernel Mat72 via PG.	52
4.1	Evoluções cosmológicas em grandezas físicas e constantes de vários modelos VSL. NC significa não considerado (LEE, 2021b).	67
4.2	Os pontos de dados de BAO 3D usados neste trabalho.	68
4.3	Os pontos de dados de BAO 2D usados neste trabalho.	69
4.4	Resultados do melhor ajuste para b , como em $\eta(z) = (1+z)^{-b/8}$. A primeira coluna exibe a combinação de conjuntos de dados, a segunda coluna fornece os valores de melhor ajuste para b e suas incertezas em 1σ , a terceira coluna representa o χ^2 reduzido, denominado χ^2_ν , e a quarta coluna fornece o seu desvio de $b = 0$	72
4.5	Resultados do melhor ajuste para η_0 , como em $\eta(z) = \eta_0 = \text{constant}$. A primeira coluna exibe a combinação de conjuntos de dados, a segunda coluna fornece os valores de melhor ajuste para η_0 e suas incertezas em 1σ , a terceira coluna representa o χ^2 reduzido, denominado χ^2_ν , e a quarta coluna fornece o seu desvio de $\eta_0 = 1$	73

Sumário

Lista de Figuras	xv
Lista de Tabelas	xix
1 Introdução	1
2 Modelo Cosmológico Padrão	5
2.1 Fundamentos da Relatividade Geral	5
2.1.1 Tensor métrico	6
2.1.2 Geodésica	7
2.1.3 Tensor de Riemann	7
2.1.4 Tensor energia-momento	9
2.2 Geometria do espaço-tempo	9
2.3 Universo em expansão	13
2.4 Redshift	16
2.5 Distâncias cosmológicas	17
2.5.1 Distância de diâmetro angular	19
2.5.2 Distância de luminosidade	20
2.6 Equações de campo e parâmetros cosmológicos	22
2.6.1 Parâmetros cosmológicos	25
2.7 Observáveis Cosmológicos	27
2.8 Possíveis alternativas ao MCP	35
2.9 Resumo	38
3 Medindo a velocidade da luz com observações cosmológicas: resultados atuais e previsões.	41
3.1 Comentários sobre modelos VSL	43
3.2 Método	45
3.3 Dados e simulações	47
3.4 Processos Gaussianos	48
3.5 Metodologia	49
3.6 Resultados	50

3.7	Resumo	52
4	Restrições sobre o modelo de velocidade da luz minimamente estendido através da relação de dualidade de distância cósmica	63
4.1	Relação de dualidade de distâncias cósmicas (RDDC)	63
4.2	Distâncias no modelo meVSL	65
4.3	Análises	67
4.3.1	Dados	68
4.3.2	Metodologia	69
4.4	Resultados	71
4.5	Resumo	76
5	Conclusões e perspectivas	79
	Referências Bibliográficas	83

Capítulo 1

Introdução

À ciência que estuda a origem, estrutura e evolução do Universo, e se constitui como uma ciência multidisciplinar, damos o nome de Cosmologia. Seu objetivo é entender como o Universo se formou, por que apresenta as características que observamos atualmente e qual será o seu destino no futuro. As ferramentas principais empregadas para esse entendimento vêm da Física, Matemática e Astronomia. O estudo da Cosmologia está estreitamente relacionado a uma teoria de gravitação, visto que esta é a única interação fundamental que atua em escalas astronômicas e cosmológicas.

A Teoria da Relatividade Especial (TRE), proposta Albert Einstein em 1905, baseia-se em dois postulados fundamentais. O primeiro é o princípio da relatividade, que estabelece que as leis da Física são as mesmas em todos os referenciais inerciais e o segundo é a constância da velocidade da luz. Podemos entender a TRE, de maneira geral, como uma extensão da mecânica newtoniana, na qual o conceito de referencial absoluto deixa de existir, assumindo um caráter relativo. No entanto, a TRE concilia apenas o eletromagnetismo e a mecânica, sendo a gravidade incorporada apenas dez anos depois, quando Einstein inseriu os referenciais não inerciais e apresentou a forma final da Teoria da Relatividade Geral (TRG) (EINSTEIN, 1916). A partir desse momento, questões como a precessão do periélio de Mercúrio, por exemplo, foi imediatamente resolvida e novas previsões foram feitas, como o valor do ângulo e deflexão gravitacional da luz ao passar pela vizinhança do Sol, verificado durante o eclipse solar de 1919 em Sobral (DODWELL e DAVIDSON, 1924). Outra mudança advinda da TRG é a interpretação da gravidade como uma propriedade geométrica, e não mais como uma interação à distância. Pois, agora, a geometria do espaço-tempo é alterada pela distribuição de matéria e energia existente nele.

Com o passar dos anos a TRG se estabeleceu como teoria vigente de gravitação, colocando a gravitação newtoniana como um caso limite para baixas velocidades e campos gravitacionais fracos. Vale notar que, hoje, pouco mais de 100 anos após a dedução das equações de campo de Einstein, a TRG continua sendo confirmada. A detecção de ondas gravitacionais a partir de um evento de colisão de buracos negros (ABBOTT *et al.*, 2016b),

relatada pelas colaborações LIGO¹ e VIRGO², a qual recebeu o prêmio Nobel de Física em 2017, foi a última confirmação.

Traçando agora uma linha do tempo sobre a Cosmologia, com o advento da TRG tivemos o início da Cosmologia moderna, onde o próprio Einstein propôs um modelo cosmológico descrevendo um Universo estático, composto apenas de matéria e curvatura, em um espaço-tempo homogêneo e isotrópico (EINSTEIN, 1917). Nesta proposta, Einstein introduziu um termo em suas equações de campo para contrabalancear a ação gravitacional entre os objetos. O termo em questão, Λ , recebeu o nome de Constante Cosmológica (EINSTEIN, 1917).

Desde o final da década de 1990, e em superação ao modelo anterior, o Modelo Cosmológico Padrão (MCP) tem sido descrito pelo modelo plano Λ CDM (PERLMUTTER *et al.*, 1999; RIESS *et al.*, 1998), que afirma que o Universo é dominado pela matéria escura fria (*cold dark matter*, CDM), como responsável pela formação de estruturas e dinâmica de galáxias, e pela Constante Cosmológica Λ como responsável pela expansão acelerada do Universo em períodos tardios. A estrutura do MCP fornece uma série de previsões bem sucedidas, como observações recentes da Radiação Cósmica de Fundo (RCF) (AGHANIM *et al.*, 2020), distâncias de luminosidade de Supernovas do Tipo Ia (SNe) (SCOLNIC *et al.*, 2018), bem como agrupamento de galáxias e lentes fracas (ABBOTT *et al.*, 2022; ALAM *et al.*, 2021; HEYMANS *et al.*, 2021; SECCO *et al.*, 2022), que validam o MCP como o modelo que melhor descreve os dados observados com grande precisão. Neste cenário, a Constante Cosmológica Λ corresponde a aproximadamente 70% do conteúdo energético do Universo atual, sendo interpretada como um fluido do tipo perfeito com uma propriedade peculiar de apresentar pressão negativa, ou seja, $P_\Lambda = -\rho_\Lambda$, enquanto a matéria escura ($P_{\text{cdm}} = 0$) corresponde a cerca de 25% da densidade de energia total do Universo hoje, e a matéria bariônica (isto é, matéria formada por partículas do modelo padrão da física de partículas, tal como prótons, nêutrons e elétrons) compõem os demais 5%. Por fim, a matéria relativística, na forma de radiação e neutrinos, contribuem com menos de 1% deste conteúdo.

Embora o modelo Λ CDM, seja o mais simples e satisfatório para descrever observações cosmológicas, existem alguns problemas que o MCP não é capaz de explicar, a exemplo de problemas relacionados às condições iniciais, a dificuldade de explicar porque a curvatura espacial é tão pequena hoje (MUKHANOV, 2005; WEINBERG, 2008). Outra questão está relacionada a escala do horizonte na superfície de último espalhamento que corresponde a 1° no céu, de modo que, acima desta escala, deveríamos observar uma distribuição de temperatura não isotrópica. Entretanto, as observações das flutuações de temperatura

¹Do inglês, *Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*. Este observatório encontra-se nos Estados Unidos e conta com a participação de 900 cientistas de 40 instituições em todo o mundo, com o objetivo principal de observar ondas gravitacionais de origem cósmica.

²Faz parte de uma colaboração científica entre 6 países europeus que tem como objetivo detectar ondas gravitacionais.

da RCF nos indicam um elevado grau de isotropia em todas as escalas angulares. A melhor explicação para estes e outros problemas é o cenário inflacionário (ALBRECHT e STEINHARDT, 1982; GUTH, 1987; LINDE, 1987). Recentemente, a primeira divulgação de dados do telescópio DESI mostrou que pode haver uma evolução da equação de estado da energia escura, sugerindo assim uma possível quebra do paradigma da Constante Cosmológica (ADAME *et al.*, 2025).

Neste sentido, tem-se aumentando o interesse por alternativas ao MCP que permitam explicar os dois períodos de aceleração cósmica sem recorrer à alguma componente exótica de energia ou campos escalares de origem desconhecida. Teorias de $f(R)$, bem como modelos de interação entre matéria e energia escura, surgem como possíveis alternativas à Constante Cosmológica. Essa série de possibilidades para a descrição do mecanismo de aceleração do Universo nos mostra que estamos vivendo em uma era muito rica de pesquisa no âmbito da Cosmologia, onde alguns pressupostos sobre nosso Universo estão sendo revistos à luz dos novos dados observacionais.

Trabalhos recentes trouxeram a velocidade da luz variável (VSL, do inglês *Variable Speed of Light*) para as áreas da Cosmologia, Gravidade quântica e experimento/observação. Como um modelo cosmológico, o VSL pode ser visto como uma alternativa a inflação (BARROW, 1999; MIDY e PETIT, 1999; PETIT, 1988a,b), resolvendo os problemas cosmológicos e fornecendo uma teoria da formação de estruturas. Mesmo após a proposta da relatividade especial em 1905, muitas teorias sobre a variação da velocidade da luz foram consideradas, principalmente pelo próprio Einstein (EINSTEIN, 1911). Um modelo VSL que propõe que a velocidade da luz varia em conjunto com outras constantes fundamentais, de maneira a preservar a invariância de Lorentz, termodinâmica, identidades de Bianchi etc. é chamado de modelo de velocidade da luz variável minimamente estendida (meVSL, do inglês *Minimally Extended Varying Speed of Light*) (LEE, 2023b). Apesar do sucesso da cosmologia padrão baseadas em métricas como a de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), há diversas deficiências nestes cenários. Assim, uma das principais motivações para a proposta de modelos VSL é buscar explicações para algumas propriedades incomuns do Universo e superar algumas das limitações da cosmologia padrão (AVELINO e MARTINS, 2003; LESZCZYNSKA *et al.*, 2019; PEDRAM e JALALZADEH, 2008; SALZANO e DABROWSKI, 2017a), e, especificamente, a dinâmica do modelo VSL foi explorada através de diversas pesquisas teóricas e empíricas (ALEXANDER (2000); AVELINO e MARTINS (1999a); BELINCHON (2000); DRUMMOND (1999) e referências ali encontradas). Após esse panorama geral, iremos mencionar, agora, os parâmetros físicos que permitem a exploração de cenários alternativos.

As constantes fundamentais são a base das nossas leis físicas. Qualquer constante que varie no espaço e/ou no tempo sinalizaria uma violação da invariância da posição local e estaria associada a uma violação da universalidade da queda livre e, portanto, do

princípio da equivalência fraca, no cerne da geometrização da gravidade. Também refletirá a existência de novos graus de liberdade que se acoplam a campos de matéria padrão. Assim, testar a variabilidade das constantes fundamentais é de extrema importância para a nossa compreensão da gravidade e para caracterizar o domínio de validade da Relatividade Geral. Além disso, abre uma janela independente para as componentes da matéria escura e da energia escura. Como consequência, devido ao desenvolvimento ativo de experimentos, as constantes fundamentais se tornaram um elemento-chave em nossa busca por uma física além do modelo padrão da física de partículas e da Relatividade Geral.

Esta tese se dedica, portanto, a investigar uma possível variação em constantes fundamentais da natureza usando o estudo da variabilidade dessas constantes como um teste de física fundamental considerando tanto observações atuais quanto simulações de dados futuros, bem como dados cosmológicos mais recentes hoje disponíveis. A tese em questão está dividida da seguinte forma. No capítulo 2, apresentamos uma visão geral dos fundamentos e do estado atual da Cosmologia. Os capítulos 3 e 4 constituem os resultados originais deste trabalho, que envolvem uma sondagem da variação de constantes fundamentais em cenários cosmológicos. No capítulo 3, medimos o valor da velocidade da luz com observações cosmológicas, a fim de verificar se ele é consistente com valores obtidos em experimentos realizados em laboratórios terrestres (ou no Sistema Solar), bem como a precisão desta medida. No capítulo 4 restringimos o modelo de velocidade da luz minimamente estendido (meVSL) através da relação de dualidade de distância cósmica (RDDC) no contexto de objetos astrofísicos. Finalmente, apresentamos as conclusões e as perspectivas futuras no capítulo 5.

Capítulo 2

Modelo Cosmológico Padrão

2.1 Fundamentos da Relatividade Geral

Como apontado na introdução, a Teoria da Relatividade Geral nasce como uma extensão natural da Teoria da Relatividade Especial, através da vontade de Einstein de entender, dentro de um contexto mais amplo, o papel de referenciais não inerciais nas leis da Física. Tendo em vista que a descrição newtoniana da gravidade não pode ser adequadamente incorporada a uma estrutura relativística, a RG também oferece uma abordagem ampla e elaborada para esse fenômeno. Nesse sentido, a ideia essencial é que, embora a maioria das forças fundamentais seja descrita por campos no espaço-tempo, como o eletromagnetismo e os campos que caracterizam as interações nucleares fracas e fortes, a gravidade é inata a própria estrutura espaço-tempo. A gravidade é uma manifestação da curvatura do espaço-tempo, em última análise.

A versão final da TRG foi apresentada por Einstein entre o final de 1915 e início de 1916 numa série de publicações científicas (EINSTEIN, 1916, 1915). Temos então que a equação essencial da TRG, que descreve a relação entre a distribuição de matéria e energia e a geometria do espaço-tempo, é

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

onde o termo $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, $g_{\mu\nu}$ trata-se das componentes do tensor métrico, R é o escalar de curvatura de Ricci, Λ é a Constante Cosmológica, G é a constante gravitacional de Newton, onde $\kappa \equiv \frac{8\pi G}{c^4}$ trata-se da constante gravitacional de Einstein e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento. Adiante vamos detalhar um pouco mais sobre cada um destes tensores, bem como o tensor de Riemman $R^\lambda_{\mu\nu\rho}$, que constituem as principais ferramentas matemáticas da TRG.

2.1.1 Tensor métrico

O tensor métrico, ou simplesmente a métrica, é um dos principais elementos usados para estabelecer relações geométricas e físicas no espaço-tempo. Define toda a estrutura geométrica e causal do espaço-tempo relativístico, derivando as noções de espaço, tempo próprio e causalidade. Para iniciarmos, vamos considerar o caso da TRE, onde o intervalo entre eventos que ocorrem no espaço-tempo é descrito pelo elemento de linha de Minkowski,

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta, \quad (2.2)$$

sendo $\eta_{\alpha\beta}$ a métrica de Minkowski, $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ e ξ^α representa um sistema de coordenadas em queda livre (inercial). A partir de agora, vamos adotar a convenção de soma de Einstein. Aqui estamos considerando que os índices gregos variam de 0 a 3 e os índices latinos variam de 1 a 3.

É conveniente usar um sistema de coordenadas genérico ξ^α , no espaço-tempo curvo da TRG, tal que, $\xi^\alpha = \xi^\alpha(x^\mu)$ e a variação infinitesimal $d\xi^\alpha$ é dada por

$$d\xi^\alpha = \partial_\mu \xi^\alpha dx^\mu. \quad (2.3)$$

Substituindo a Eq. 2.3 na Eq. 2.2, obtemos o elemento de linha geral

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.4)$$

em que o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ ¹ foi definido como (WEINBERG, 1972)

$$g_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}. \quad (2.5)$$

O tensor métrico é simétrico, ou seja,

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \quad (2.6)$$

e a métrica inversa, dada por $g^{\mu\nu}$, é definida de modo que

$$g_{\mu\lambda} g^{\lambda\mu} = \delta_\mu^\nu = \begin{cases} 1, & \text{se } \mu = \nu \\ 0, & \text{se } \mu \neq \nu \end{cases} \quad (2.7)$$

no qual δ_μ^ν é a delta de Kronecker. Em nossa convenção adotamos a assinatura da métrica como $(+, -, -, -)$. Portanto, um vetor cujas componentes são dadas por V^μ ² pode ser

¹Nesse caso, a métrica no sistema de coordenadas x^μ foi obtida pela transformação da métrica $\eta_{\alpha\beta}$ no sistema ξ^α , ou seja, $ds^2 = \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \right) dx^\mu dx^\nu$.

²No espaço-tempo de Minkowski, o quadrado do comprimento ou norma de um vetor é definido como usualmente por: $V^2 = g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = V_\mu V^\mu$.

classificado como

$$\begin{cases} \text{tipo-tempo, se } g_{\mu\nu}V^\mu V^\nu < 0 \\ \text{tipo-nulo, se } g_{\mu\nu}V^\mu V^\nu = 0 \\ \text{tipo-espaço, se } g_{\mu\nu}V^\mu V^\nu > 0 \end{cases} . \quad (2.8)$$

2.1.2 Geodésica

A geodésica é o caminho que uma partícula livre segue no espaço-tempo quando apenas a gravidade atua sobre ela. Em outras palavras, a geodésica é o caminho mais curto entre dois pontos (ou eventos) no espaço-tempo. Vamos considerar uma partícula movendo-se livremente sob a influência exclusiva da gravidade. De acordo com o Princípio da Equivalência, existe um sistema de coordenadas ξ^a , no qual a equação do movimento da partícula segue uma linha reta no espaço-tempo, ou seja,

$$\frac{d^2\xi^a}{d\tau^2} = 0, \quad (2.9)$$

sendo τ o tempo próprio definido como

$$c^2 d\tau^2 \equiv ds^2. \quad (2.10)$$

Em um sistema de coordenadas arbitrário x^λ , a Eq. 2.9 passa a ser

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (2.11)$$

e $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ são chamados de símbolos de Christoffel, calculados como segue

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (2.12)$$

Os símbolos de Christoffel formam um tipo particular de conexão e estes dependem das derivadas parciais do tensor métrico e satisfazem a condição de compatibilidade métrica dada por

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.13)$$

2.1.3 Tensor de Riemann

A curvatura do espaço-tempo é dada pelo tensor de Riemann, $R_{\mu\nu\rho}^\lambda$. Então, para que um espaço-tempo seja curvo, uma condição necessária e suficiente é que o tensor de Riemann não seja nulo.

O tensor de Riemann mede a não-comutatividade das derivadas covariantes ∇_μ e ∇_ρ

aplicadas em um vetor arbitrário \mathcal{V}^λ , dada por

$$(\nabla_\nu \nabla_\rho - \nabla_\rho \nabla_\nu) \mathcal{V}^\lambda = R_{\mu\nu\rho}^\lambda \mathcal{V}^\mu. \quad (2.14)$$

Escrevendo em termos dos símbolos de Christoffel, temos

$$R_{\mu\nu\rho}^\lambda \equiv \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\lambda - \partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\rho}^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \Gamma_{\sigma\rho}^\lambda. \quad (2.15)$$

Podemos ainda baixar o índice superior do tensor de Riemann visando investigarmos as suas simetrias,

$$R_{\lambda\mu\nu\rho} = -R_{\lambda\mu\rho\nu}, \quad (2.16)$$

$$R_{\lambda\mu\nu\rho} = -R_{\mu\lambda\rho\nu}, \quad (2.17)$$

$$R_{\lambda\mu\nu\rho} = R_{\nu\rho\lambda\mu}. \quad (2.18)$$

Levando em conta ainda as chamadas identidades de Bianchi, temos que

$$R_{\mu\nu\rho}^\lambda + R_{\nu\rho\mu}^\lambda + R_{\rho\mu\nu}^\lambda = 0, \quad (2.19)$$

$$\nabla_\sigma R_{\mu\nu\rho}^\lambda + \nabla_\nu R_{\mu\rho\sigma}^\lambda + \nabla_\rho R_{\mu\sigma\nu}^\lambda = 0. \quad (2.20)$$

A contração do primeiro índice com o terceiro define o tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu\lambda}^\lambda = \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\lambda}^\lambda \quad (2.21)$$

e, em seguida, a contração deste com a métrica leva ao escalar de Ricci

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R_\mu^\mu. \quad (2.22)$$

O tensor de Ricci é simétrico, ou seja,

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}. \quad (2.23)$$

As quantidades acima são essenciais para definir o tensor de Einstein dado por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}. \quad (2.24)$$

Considerando as identidades de Bianchi, temos

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0. \quad (2.25)$$

2.1.4 Tensor energia-momento

O tensor energia-momento, $T_{\mu\nu}$, leva em conta o conteúdo de energia, momento e pressão de toda e qualquer forma de matéria, energia ou radiação. As suas componentes estão relacionadas à pressão (T_{00}), densidade de energia (T_{0i}), fluxo de momento (T_{i0}) e de partículas (T_{ij}). Este tensor é simétrico, ou seja,

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu} \quad (2.26)$$

e satisfaz a condição

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.27)$$

Como consequência direta das simetrias presentes no espaço-tempo relativístico, particularmente em relação ao Princípio da Covariância Geral, a Eq. 2.27 aparece e esta representa a conservação de energia-momento.

Levando em consideração que o conteúdo material do Universo pode ser descrito por um fluido do tipo perfeito, desta forma, ausente de viscosidade e condução de calor, podemos escrever seu tensor energia-momento como (WEINBERG, 1972)

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u^{\mu} u^{\nu} - P g^{\mu\nu}. \quad (2.28)$$

em que P é a pressão e ρ é a densidade de energia do fluido, u^{μ} representa a quadrivelocidade de um elemento do fluido.

2.2 Geometria do espaço-tempo

Devemos obter uma métrica $g_{\mu\nu}$ que descreva um Universo homogêneo, isotrópico e em expansão que nos forneça as distâncias e os relógios cósmicos que estabelecem como as observações cosmológicas que fazemos são realizadas, de fato.

Para tanto, vamos agora introduzir o conceito idealizado de observadores fundamentais (OFs), que se trata de observadores que estão em repouso com respeito ao fluido cosmológico. Dessa maneira, OFs sempre observam o Universo como sendo estatisticamente isotrópico. Como podemos ver, a Figura 2.1 (parte esquerda) nos mostra apenas a linha de mundo de um único OF, isto é, uma delimitação em uma região do espaço-tempo. Podemos ainda generalizar tal delimitação imaginando, portanto, que existem outros OFs, onde as linhas de mundo de tais observadores atravessando hipersuperfície tipo-espaço são dadas como mostra a Figura 2.1 (parte direita). As linhas de mundo tipo-tempo dos OFs formam uma congruência no espaço-tempo que não se interceptam, com exceção de algum ponto singular no passado ou futuro. Tal hipótese, consiste no chamado Postulado de Weyl (PW). Logo, uma linha de mundo é precisamente definida para cada observador.

Dessa forma, podemos agora estabelecer os conceitos de homogeneidade e isotropia

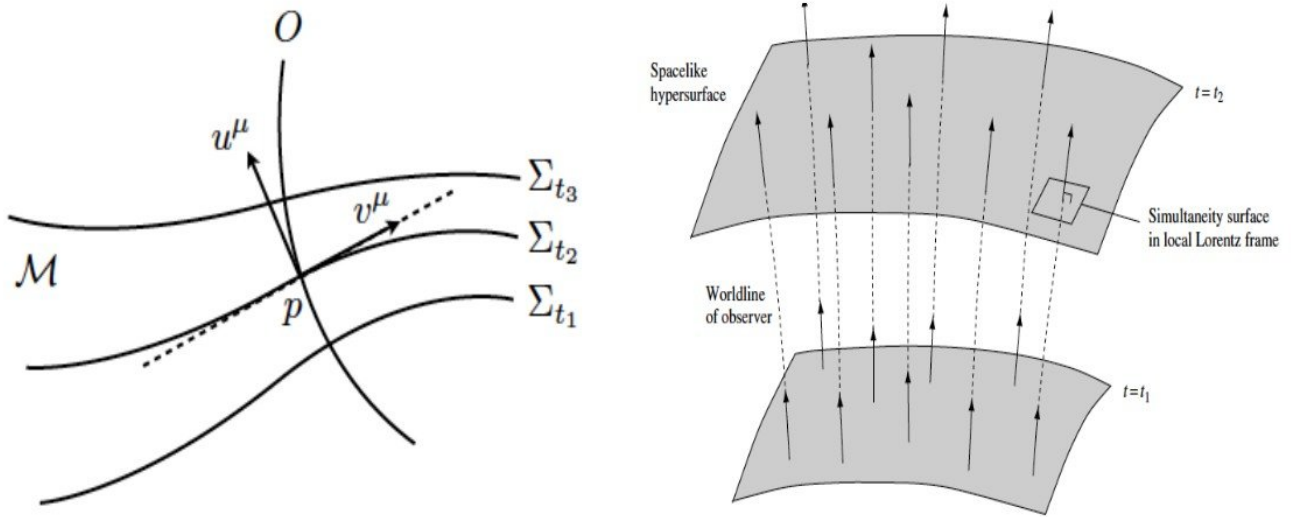


Figura 2.1: *Painel esquerdo:* Ilustração da variedade \mathcal{M} , mostrando a linha de mundo de um observador fundamental (OF) O sobre esta variedade uma vez que ela se encontra fatiada em hipersuperfícies em tempo constante Σ_t (KNOBEL, 2012). *Painel direito:* OFs atravessam o fatiamento do espaço-tempo em diferentes instantes, t_1 e t_2 . De acordo com o postulado de Weyl, tais linhas de mundo jamais se interceptam, exceto em ponto singulares, e são ortogonais para quaisquer OFs ao atravessarem tais hipersuperfícies (HOBSON *et al.*, 2006).

que definem o Princípio Cosmológico (PC) da seguinte forma: homogeneidade implica que todos os pontos no espaço-tempo são equivalentes, enquanto, a isotropia afirma que não há direções privilegiadas em torno de nenhum ponto. Matematicamente, homogeneidade representa simetria sob translações, enquanto isotropia representa simetria sob rotações.

Por meio da discussão acima, podemos então caracterizar as coordenadas da geodésica do fluido que permeia o Universo como (x^0, x^1, x^2, x^3) , onde $x^0 = ct$. Temos que as hipersuperfícies espaciais variando através das geodésicas de cada OF são dadas por $t = \text{constante}$ e (x^1, x^2, x^3) , então temos que $x^0 = \text{constante}$ que está localizado em uma das hipersuperfícies do tipo espaço, e qualquer OF desta seção espacial, com sua própria geodésica, fixada em $x^i = \text{constante}$ ($i = 1, 2, 3$). Como consequência, teremos uma ortogonalidade entre as linhas de mundo e as seções espaciais, implicando, portanto,

que $g_{0i} = 0$. A condição $x^i = \text{constante}$, satisfaz uma geodésica dada por (2.11), onde $\mu, \nu = (0, 1, 2, 3)$.

Portanto, temos que $\frac{dx^i}{d\tau} = 0$, exigindo que o símbolo de Christoffel $\Gamma_{00}^i = 0$, então $\frac{dx^0}{d\tau} \neq 0$ e $\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} \forall \mu$. Esta condição é satisfeita para g_{0i} , então podemos definir a expressão para conexão em termos da métrica (2.12), então $\partial_i g_{00} = 0$. Para eliminar a dependência de g_{00} em x^0 , podemos redefini-lo de forma que o escrevamos como $g_{00} = 1$. O que nos permite chegar ao elemento de linha do Universo dado por (2.4) onde $x^0 = ct$, assim temos que

$$ds^2 = c^2 dt^2 - g_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.29)$$

sendo $g_{ij} = a^2(t)\gamma_{ij}(x^\alpha)$. O tensor métrico puramente espacial, γ_{ij} , obedece ao tensor de Riemann (2.15) da seguinte maneira

$$R_{ijkl} = K(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}), \quad (2.30)$$

e ao tensor de Ricci (2.21),

$$R_{ij} = \gamma^{kl} R_{kijl} = 2K\gamma_{ij}. \quad (2.31)$$

De forma similar, podemos escrever o escalar de Ricci (2.22) como sendo $R = 6K$. O PC exige que a curvatura K seja constante. Agora, como a seção 3-espacial é esfericamente simétrica, a métrica puramente espacial apresenta a seguinte forma

$$\gamma_{ij} dx^i dx^j = e^\lambda dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.32)$$

com $\lambda = \lambda(r)$. Agora vamos considerar a parte espacial da métrica dada por (2.32) e a partir dela vamos obter os símbolos de Christoffel não nulos. Para isso vamos considerar a Eq. 2.12. Temos, então

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \frac{d\lambda(r)}{dr}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -re^{-\lambda(r)}, \\ \Gamma_{33}^1 &= -re^{-\lambda(r)} \sin^2\theta, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin\theta \cos\theta, \\ \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \cot\theta. \end{aligned}$$

A partir dos símbolos de Christoffel obtidos, vamos agora calcular as componentes não

nulas do tensor Ricci. Para isso considere a Eq. 2.21. Logo, temos

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{1}{r} \frac{d\lambda(r)}{dr}, \\ R_{22} &= \frac{r}{2} \frac{d\lambda(r)}{dr} e^{-\lambda(r)} + 1 - e^{-\lambda(r)}, \\ R_{33} &= R_{22} \sin^2\theta. \end{aligned}$$

Temos ainda que o tensor de Ricci (2.21) e o tensor métrico g_{ij} estão relacionados através da Eq. 2.31, fornecendo

$$\begin{aligned} \frac{r}{2} \frac{d\lambda(r)}{dr} e^{-\lambda(r)} + 1 e^{-\lambda(r)} &= 2Kr^2, \\ \frac{1}{r} \frac{d\lambda(r)}{dr} &= 2Ke^{\lambda(r)}. \end{aligned}$$

Resolvendo o conjunto de equações diferenciais acima, obtemos como solução

$$e^{\lambda(r)} = \frac{1}{1 - Kr^2}. \quad (2.33)$$

Dessa forma chegamos que,

$$d\sigma^2 = a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (2.34)$$

Para $K \neq 0$, podemos considerar as seguintes substituições $a \rightarrow \frac{a}{\sqrt{|K|}}$, $r \rightarrow \sqrt{|K|}r$ e $k \rightarrow \frac{K}{\sqrt{|K|}}$. Deste modo, temos que $k = 1$ para a superfície esférica e $k = -1$ para o parabolóide hiperbólico. Para o elemento de linha do terceiro caso que satisfaz as condições do Princípio Cosmológico, que é a superfície plana, precisamos simplesmente definir $k = 0$. Portanto, a métrica que satisfaz os requisitos estabelecidos pela homogeneidade e isotropia resulta do elemento de linha

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (2.35)$$

em que r, θ, ϕ são as coordenadas comóveis, t é o tempo próprio, $a(t)$ é o fator de escala e k é o parâmetro de curvatura. A Eq. 2.35 é conhecida como a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), responsável por descrever o Universo. A Figura 2.2 ilustra uma representação 2D para cada uma das geometrias descritas aqui.

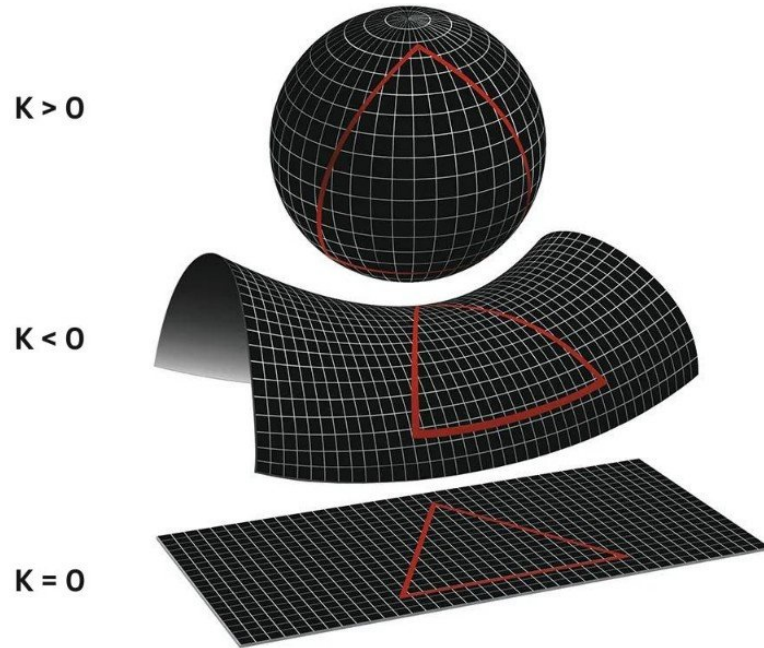


Figura 2.2: Geometria do universo. O primeiro caso mostra uma curvatura esférica ($k > 0$), indicando um universo fechado. O segundo caso mostra uma curvatura hiperbólica ($k < 0$), indicando um universo aberto. O terceiro caso é o universo plano, euclidiano com $k = 0$.

2.3 Universo em expansão

Uma das questões mais fundamentais da Cosmologia é a expansão do Universo. Podemos dizer que toda a Cosmologia Moderna ganhou força com a descoberta de que o Universo está em expansão. A partir daquele momento, a Cosmologia deixou de se limitar a especulações filosóficas e passou a ser objeto de investigação quantitativa por físicos, dando origem ao que hoje conhecemos como Cosmologia Física.

Podemos entender a expansão do Universo como um efeito puramente cosmológico, caracterizado pelo aumento da distância física entre partes gravitacionalmente livres do universo observado ao longo do tempo, enquanto os objetos envolvidos permanecem aproximadamente fixos em suas posições móveis. Vale ressaltar que essa expansão do espaço não é observada em sistemas como o Sistema Solar, dentro de galáxias ou mesmo em aglomerados de galáxias. Nessas escalas, a gravidade atua de forma atrativa, mantendo tais sistemas ligados e estáveis por um longo período até que entrem em colapso.

Adotando um sistema de coordenadas que se move com a expansão, as coordenadas comóveis (ver representação na Figura 2.3). Como o Universo é homogêneo e isotrópico, com expansão uniforme, a distância real $\vec{d}(t)$ (coordenadas físicas) em termos da distância comóvel \vec{r} (coordenadas comóveis) pode ser escrita como

$$\vec{d}(t) = a(t) \times \vec{r} \quad (2.36)$$

sendo $a(t)$ o fator de escala do Universo.

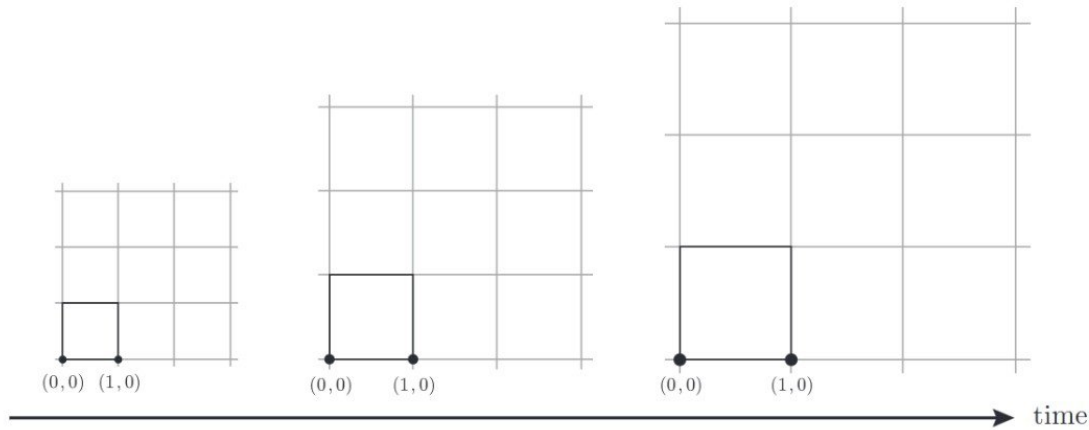


Figura 2.3: Universo em expansão. A distância comóvel associada à posição coordenada \vec{r} permanece aproximadamente constante à medida que a grade se expande, enquanto a distância física \vec{d} aumenta com o tempo (BAUMANN, 2022).

Einstein publicou um artigo em 1917, intitulado *Considerações Cosmológicas na Teoria da Relatividade Geral*, onde propôs um modelo esférico e estático do Universo, inaugurando assim a era da Cosmologia Moderna. Esse modelo era esférico, fechado, finito e estático. No entanto, a solução para as equações da relatividade geral apontava para um Universo dinâmico, no qual a matéria tende a se aglomerar em torno de si mesma devido a deformações no espaço-tempo. Para tentar explicar isso, Einstein inseriu a Constante Cosmológica Λ nas equações de campo da TRG.

O astrônomo holandês De Sitter apresentou à Royal Astronomical Society, em 1917, um modelo de universo isotrópico que não continha matéria no mesmo ano em que Einstein apresentou seu modelo de universo. Embora esse modelo tenha sido o primeiro a sugerir algum tipo de expansão no Universo, o próprio De Sitter e a comunidade científica da época o reconheceram como um espaço-tempo estático. Quando esse modelo foi apresentado a Einstein, ele o aceitou apenas como uma solução matemática para as equações de campo. Para Einstein, o modelo de De Sitter deveria ser rejeitado por contradizer a física.

Em 1922, o físico e matemático russo Alexander Friedmann, estudando a equação original derivada por Einstein, concluiu que ela não necessitava da Constante Cosmológica. Friedmann, por outro lado, apresentou uma solução para as equações relativísticas que demonstrava a expansão do Universo (FRIEDMAN, 1922). Vale ressaltar que o trabalho de Friedmann foi considerado pela comunidade científica da época como puramente teórico. O astrônomo e físico belga Lemaître também indicou um Universo em expansão, em

1927 (LEMAÎTRE, 1927, 1931). Podemos dizer hoje que as contribuições de Friedmann e Lemaître foram de extrema importância para a Cosmologia Moderna.

No entanto, em 1929, Edwin Hubble surpreendeu o mundo mais uma vez com uma descoberta fundamental que mudaria nossa visão do Cosmos. A ideia de um Universo em expansão foi plenamente aceita naquele ano com a publicação de dados de 46 galáxias por Hubble. Seus dados mostraram evidências de que todas, exceto algumas galáxias muito próximas de nós e ainda sujeitas ao campo gravitacional da nossa galáxia, estavam se afastando de nós.

O que Hubble realmente observou foi a existência de uma relação linear entre *redshift* e distância. Hubble mediu o *redshift* das linhas espectrais das galáxias e concluiu que essas galáxias estavam se afastando a velocidades proporcionais às suas distâncias. Assim, quanto mais distante a galáxia estava, maior era sua velocidade de recessão

$$V = H(t)r, \quad (2.37)$$

onde V é a velocidade radial da galáxia, r é sua distância do observador e $H(t)$ é o parâmetro de Hubble. A constante de Hubble, H_0 , é o valor do parâmetro de Hubble hoje, ou seja, no instante $t = t_0$. Na Figura 2.4, mostramos uma versão original do diagrama de Hubble (HUBBLE, 1929). Assim, a expansão do Universo, prevista pela primeira vez por Friedmann em 1922, foi confirmada observacionalmente. A Eq. 2.37 é conhecida como lei de Hubble-Lemaître.

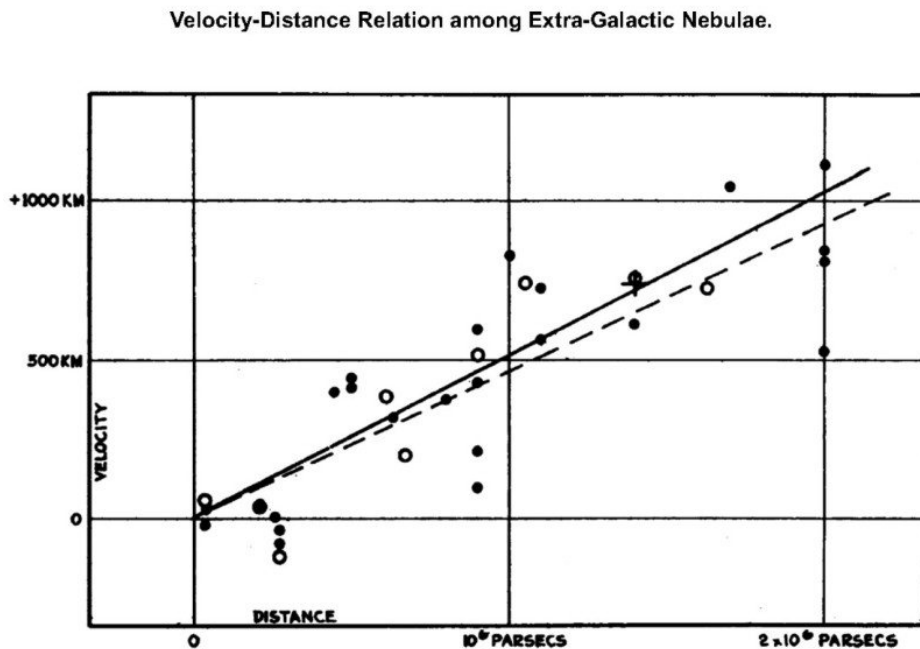


Figura 2.4: Relação velocidade-distância para nebulosas extragalácticas encontrada por Hubble (HUBBLE, 1929).

2.4 Redshift

O *redshift* z de um objeto pode ser obtido diretamente pela observação das linhas (absorção ou emissão) de seu espectro. O *redshift* é o deslocamento das linhas devido ao movimento relativo entre a fonte e o observador, que pode ser devido ao efeito Doppler, à expansão do Universo ou a uma combinação destes dois efeitos. Nesse contexto, o *redshift* é dado como segue

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e}, \quad (2.38)$$

λ_0 se refere ao comprimento de onda observado (ou frequência) e λ_e ao comprimento emitido.

Suponha que um fóton seja emitido por uma fonte localizada em (r_1, θ_1, ϕ_1) no instante t_1 e seja detectado por um observador comóvel em $O(r_0, \theta_0, \phi_0)$ no instante t_0 . O Princípio Cosmológico permite a escolha da origem do sistema de coordenadas para o observador como sendo $r_0 = 0$, uma vez que a homogeneidade requer que todas as posições sejam equivalentes. Assim, o fóton viajará em geodésicas radiais nulas ($ds^2 = 0$) em direção à origem O ao longo de $-r$, com θ e ϕ sendo fixos ($d\theta = d\phi = 0$). Usando essas considerações em 2.35, obtemos que

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2} = 0, \quad (2.39)$$

logo chegamos na equação,

$$c \frac{dt}{a(t)} = \pm \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (2.40)$$

os sinais (+) e (-) representam a luz se afastando e se aproximando da origem, respectivamente. Considerando que r tem uma relação inversamente proporcional com o tempo, ou seja, r diminui com o aumento do tempo, podemos escolher o sinal negativo. Para a situação considerada, é necessário

$$c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = - \int_r^0 \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = f(r), \quad (2.41)$$

sendo a solução de $f(r)$, para os casos $k = \pm 1$ e $k = 0$ dada por:

$$f(r) = \chi = \begin{cases} \sin^{-1}(\sqrt{k}r)/\sqrt{k} \rightarrow k > 0, \\ r \rightarrow k = 0, \\ \sinh^{-1}(\sqrt{|k|r})/\sqrt{|k|} \rightarrow k < 0. \end{cases} \quad (2.42)$$

Supondo agora que a próxima crista foi emitida em $t_e + \lambda_e/c$ e capturada em $t_0 + \lambda_0/c$, temos a equação de movimento dada por

$$c \int_{t_e + \lambda_e/c}^{t_0 + \lambda_0/c} \frac{dt}{a(t)} = f(r). \quad (2.43)$$

Substituindo a Eq. 2.41 em 2.43, obtemos

$$c \int_{t_e + \lambda_e/c}^{t_0 + \lambda_0/c} \frac{dt}{a(t)} - c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = f(t_0 + \lambda_0/c) - f(t_e + \lambda_e/c) - (f(t_0) - f(t_e)), \quad (2.44)$$

reorganizando os termos da Eq. 2.44, temos então

$$c \int_{t_e}^{t_e + \lambda_e/c} \frac{dt}{a(t)} = c \int_{t_0}^{t_0 + \lambda_0/c} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.45)$$

A Eq. 2.45 decorre do fato de que o Universo não tem tempo suficiente para se expandir significativamente durante o período entre a emissão ou observação de duas cristas de onda sucessivas. Por essa razão, podemos considerar $a(t)$ constante na Eq. 2.45. Portanto, fazendo $c = 1$, temos

$$\frac{\lambda_e}{a(t_e)} = \frac{\lambda_0}{a(t_0)}, \quad (2.46)$$

logo,

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)}, \quad (2.47)$$

pela Eq. 2.38 temos,

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = 1 + z, \quad (2.48)$$

portanto obtemos que,

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \frac{1}{a(t_e)} \Rightarrow z = \frac{1}{a(t_e)} - 1. \quad (2.49)$$

A segunda igualdade é alcançada ao definir $a(t_0) = 1$, o fator de escala atual. Podemos concluir da Eq. 2.49 que as linhas espectrais observadas de uma fonte distante são deslocadas para o vermelho ao longo da expansão cósmica. Foi por meio da observação desse efeito nos espectros das galáxias estudadas por Hubble (HUBBLE, 1929), bem como o trabalho desenvolvido pelo Vesto Slipher (SLIPHER, 1912) que o astrônomo foi capaz de medir as velocidades recessivas e, assim, descobrir a expansão do Universo.

2.5 Distâncias cosmológicas

Existem vários tipos, métodos e maneiras de medir distâncias. Na Seção 2.3, foi apresentado o sistema de coordenadas comóvel, um sistema que se move junto com a expansão, de modo que qualquer ponto localizado em uma determinada posição dele permanece fixo e evolui com a medição do tempo próprio, descrito pela métrica FLRW. Portanto, é de fundamental importância especificar um procedimento para determinar a distância entre dois objetos no espaço.

A distância própria, $d_p(t)$, é definida como o intervalo da geodésica em um dado instante de tempo t . Assim, podemos obter a distância física entre dois observadores, dada a expansão do Universo, em dado instante de tempo t a partir da métrica de FLRW 2.35. Se considerarmos, matematicamente, um objeto localizado na origem do sistema e outro na posição de coordenada (r, θ, ϕ) , temos que para um determinado tempo t e ângulos θ e ϕ fixos,

$$ds^2 = -a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} \right), \quad (2.50)$$

$$ds = -a(t) \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (2.51)$$

Integrando a Eq. 2.51 sobre a coordenada radial, obtemos distância própria como segue

$$d_p(t) = a(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (2.52)$$

Note que, pela Eq. 2.41 vimos que

$$c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = f(r) = \chi, \quad (2.53)$$

sendo χ a distância comóvel, ou seja, a distância física entre dois diferentes eventos que estejam em repouso entre si com relação a expansão do Universo.

Dessa forma, podemos escrever a distância própria como

$$d_p(t) = a(t)\chi = a(t)c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.54)$$

Agora precisamos reescrever a distância própria em função do *redshift* z pois ele se trata de uma medida observacional, diferentemente de t . Para isso vamos considerar a relação entre o fator de escala e z dada pela Eq. 2.49 de onde temos que,

$$dt = -\frac{dz}{H(z)(1+z)}, \quad (2.55)$$

onde encontramos a distância comóvel agora dada por

$$\chi = c \int_0^z \frac{dz}{H(z)} \quad (2.56)$$

e a distância própria

$$d_p(t) = a(t)c \int_0^z \frac{dz}{H(z)}. \quad (2.57)$$

Note agora que se considerarmos o tempo t fixo como sendo o tempo atual, t_0 , e $a(t_0) = 1$,

temos que a distância própria atual entre dois objetos é dada então por

$$d_p(t_0) = c \int_0^z \frac{dz}{H(z)} = \chi. \quad (2.58)$$

Apesar da importância teórica das definições de distância própria e comóvel, elas não podem ser obtidas diretamente através de observações astronômicas, ou seja, não são diretamente mensuráveis³. Sendo assim, precisamos definir distâncias que podem, de fato, serem obtidas através de observações astronômicas, sendo elas a distância de diâmetro angular, d_A , e a distância de luminosidade, d_L .

2.5.1 Distância de diâmetro angular

A distância de diâmetro angular é uma medida de distância baseada em objetos cujo tamanho intrínseco l é bem conhecido. Esses objetos são chamados de réguas padrão. A seguir, veremos como tais objetos são usados com a finalidade de determinar distâncias.

Considere uma régua padrão de comprimento l , alinhada de forma perpendicular a nossa linha de visada, de tal maneira que possua uma abertura angular $\delta\theta$ pequena o suficiente para que possamos definir a distância de diâmetro angular como

$$d_A = \frac{l}{\delta\theta}. \quad (2.59)$$

Podemos reescrever o elemento de linha da métrica FLRW (2.35) da seguinte forma

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) [d\chi^2 + S_k^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)], \quad (2.60)$$

sendo $S_k(\chi)$,

$$S_k(\chi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}\chi) \rightarrow k > 0, \\ \chi \rightarrow k = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{|k|}} \sinh(\sqrt{|k|}\chi) \rightarrow k < 0. \end{cases} \quad (2.61)$$

Supondo agora um universo descrito pela métrica FLRW (2.60), considerando que estamos na origem do sistema $(0, 0, 0)$ e que as coordenadas das extremidades do objeto são dadas por (r, θ_1, ϕ) e (r, θ_2, ϕ) , como mostrado na Figura 2.5. Como os fótons seguem geodésicas nulas ao longo da dimensão do objeto, temos que r e ϕ são constantes. A distância $ds = l$ entre as extremidades do objeto, medida no tempo de emissão t_e , é dada por

$$ds = l = a(t) S_k(\chi) \delta\theta. \quad (2.62)$$

³No caso da distância própria, a luz tem o seu tempo de viagem até chegar ao observador – logo, a distância medida em um dado instante t não é mais a mesma quando a luz do objeto chega até nós. No caso da distância comóvel, de fato, ela só pode ser obtida ao assumir um modelo para descrever como a expansão do universo acontece, através da forma funcional do fator de escala $a(t)$.

Substituindo a Eq. 2.62 na Eq. 2.59, temos que

$$d_A(z) = a(t)S_k(\chi), \quad (2.63)$$

$$d_A = \frac{S_k(\chi)}{(1+z)}. \quad (2.64)$$

No contexto do MCP, onde temos $k = 0$, isto é, um Universo plano, a distância de diâmetro angular é dada por

$$d_A(z) = \frac{1}{(1+z)} \int_0^z \frac{cdz}{H(z)}. \quad (2.65)$$

Nesse caso, podemos ainda efetuar a seguinte aproximação, $S_k(\chi) \approx \chi = d_p(t_0)$ de modo que a distância de diâmetro angular é

$$d_A(z) = \frac{d_p(t_0)}{(1+z)}. \quad (2.66)$$

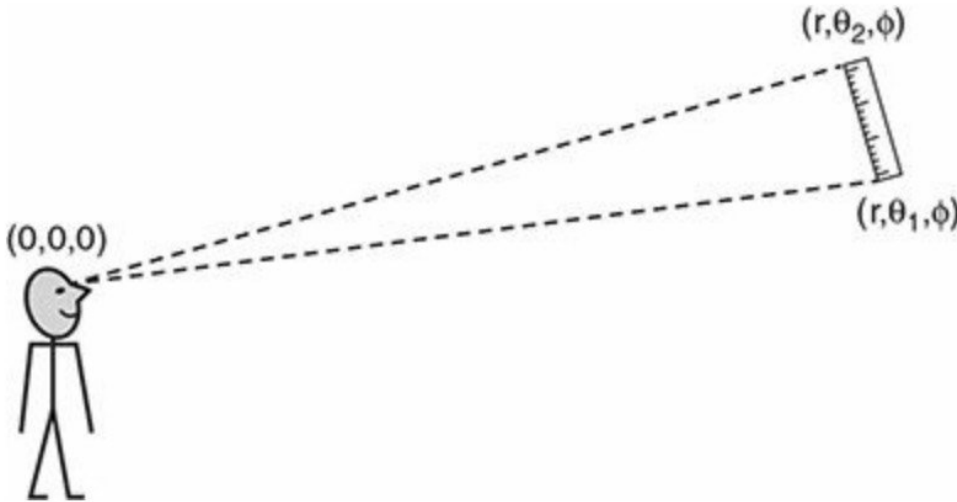


Figura 2.5: Distância de diâmetro angular medida a partir da origem até uma régua padrão de comprimento l com coordenadas (r, θ_1, ϕ) e (r, θ_2, ϕ) (RYDEN, 2016).

2.5.2 Distância de luminosidade

Podemos definir a distância de luminosidade como uma medida de distância baseada em objetos cuja luminosidade L é bem conhecida, os quais chamamos de velas padrão ou padronizáveis. Dessa maneira, conhecendo a luminosidade L do objeto, podemos

determinar o seu fluxo aparente e assim definir a distância de luminosidade tal qual

$$d_L = \left(\frac{L}{4\pi f} \right)^2. \quad (2.67)$$

A luminosidade L é definida como sendo a energia que um objeto emite por unidade de tempo. Por sua vez, o fluxo f , está relacionado com a energia por unidade de tempo por unidade de área que um objeto emite.

Considere um Universo descrito pela métrica FLRW (2.60). Agora imagine que um observador encontra-se na origem, em $t = t_0$, e ele vê, portanto, a luz emitida por uma fonte no tempo $t = t_e$. Os fótons que foram emitidos em $t = t_e$, no momento, estão em t_0 espalhados sobre uma superfície esférica de raio próprio $d_p(t_0) = \chi$ e área $A_p(t_0) = 4\pi S_k^2(\chi)$. Já se no caso o espaço for plano, então a superfície própria é dada por uma relação euclidiana, $A_p(t_0) = 4\pi\chi^2$. Se o Universo é positivamente curvado, temos que $A_p(t_0) < 4\pi\chi^2$ e os fótons se espalham por uma área menor do que em um espaço plano. Se o Universo, por outro lado, é negativamente curvado, temos que $A_p(t_0) > 4\pi\chi^2$ e os fótons se espalham por uma área maior do que em um Universo plano.

Devemos considerar também a expansão do Universo, além dos efeitos geométricos. A expansão do Universo, faz com que o fluxo observado das velas padrão decresça por um fator adicional de $(1+z)^{-2}$. Sendo assim, considerando as Eqs. 2.48 e 2.49, temos que o comprimento de onda de um fóton emitido em λ_e é alterado para,

$$\lambda_0 = \frac{1}{a(t_e)}\lambda_e = (1+z)\lambda_e. \quad (2.68)$$

e sua energia terá decrescido para

$$E_0 = \frac{E_e}{(1+z)}. \quad (2.69)$$

Devido a expansão do Universo, se dois fótons são emitidos em uma mesma direção separados por um intervalo de tempo Δt_e , a distância própria entre eles inicialmente será $c\Delta t_e$. Enquanto que, a distância própria na observação de fótons em t_0 será de $c(\Delta t_e)(1+z)$. E o intervalo de tempo que iremos detectá-los será $\Delta t_0 = \Delta t_e(1+z)$.

Levando em consideração tais fatores, em um Universo que se expande e é espacialmente curvado, podemos estabelecer a relação entre o fluxo aparente e a luminosidade de uma fonte distante da seguinte forma

$$f = \frac{L}{4\pi S_k^2(\chi)(1+z)^2}. \quad (2.70)$$

Substituindo a Eq. 2.70 na Eq. 2.67, temos que a distância luminosidade é dada por

$$d_L(z) = S_k(\chi)(1+z). \quad (2.71)$$

Para o Universo plano, temos que a distância de luminosidade assume a forma

$$d_L(z) = (1+z) \int_0^z \frac{cdz}{H(z)}. \quad (2.72)$$

Observando as Eqs. 2.64 e 2.71 podemos estabelecer uma relação entre a distância de diâmetro angular e a distância de luminosidade, chamada de relação de dualidade de distâncias cósmicas (RDDC)

$$d_L(z) = d_A(z)(1+z)^2. \quad (2.73)$$

A RDDC (2.73) é uma das relações mais fundamentais em cosmologia que independe de modelo cosmológico, teoria de gravitação, métrica etc. Esta relação constitui um poderoso teste fundamental de cosmologia e será vista com mais detalhes na seção 4.1.

2.6 Equações de campo e parâmetros cosmológicos

Até agora, mostramos separadamente os pilares principais do MCP, que são a RG como teoria de gravitação, e o PC como geometria de um espaço-tempo estatisticamente homogêneo e isotrópico. Mostramos também algumas definições pertinentes que podem ser derivadas através deles, como *redshifts*, distâncias cosmológicas etc. Contudo, ainda precisamos derivar as equações de movimento que descrevem a dinâmica do Universo. Então, vamos fazer uso da métrica FLRW na equação de campo gravitacional na presença de matéria e energia das componentes que permeiam o Universo, ou seja, matéria bariônica, matéria escura fria (CDM) e Constante Cosmológica Λ , o que vai nos permitir determinar a evolução do fator de escala em função dessas quantidades.

Sendo assim, da métrica FLRW (2.35) temos que as componentes do tensor métrico na forma covariante $g_{\mu\nu}$ são

$$g_{00} = c^2, \quad g_{11} = -\frac{a^2(t)}{1-kr^2}, \quad g_{22} = -a^2(t)r^2, \quad g_{33} = -a^2(t)r^2\sin^2\theta, \quad g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{para } \mu \neq \nu \quad (2.74)$$

e na forma contravariante $g^{\mu\nu}$ são dadas da seguinte forma

$$g^{00} = \frac{1}{c^2}, \quad g^{11} = -\frac{1-kr^2}{a^2(t)}, \quad g^{22} = -\frac{1}{a^2(t)r^2}, \quad g^{33} = -\frac{1}{a^2(t)r^2\sin^2\theta}, \quad g^{\mu\nu} = 0 \quad \text{para } \mu \neq \nu. \quad (2.75)$$

Uma vez que temos as componentes do tensor métrico, o primeiro passo agora para ob-

termos as equações que descrevem a dinâmica do Universo é calcularmos os símbolos de Christoffel não nulos. Para tanto, considerando a Eq. 2.12, obtemos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^0 &= \frac{a\dot{a}}{c^2(1-kr^2)}, \\
\Gamma_{22}^0 &= \frac{a\dot{a}r^2}{c^2}, \\
\Gamma_{33}^0 &= \frac{a\dot{a}r^2 \sin^2\theta}{c^2}, \\
\Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{10}^1 = \frac{\dot{a}}{a}, \\
\Gamma_{11}^1 &= \frac{kr}{1-kr^2}, \\
\Gamma_{22}^1 &= -r(1-kr^2), \\
\Gamma_{33}^1 &= -r(1-kr^2) \sin^2\theta, \\
\Gamma_{02}^2 &= \Gamma_{20}^2 = \frac{\dot{a}}{a}, \\
\Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \\
\Gamma_{33}^2 &= -\sin\theta \cos\theta, \\
\Gamma_{03}^3 &= \Gamma_{30}^3 = \frac{\dot{a}}{a}, \\
\Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \\
\Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \cot\theta.
\end{aligned}$$

Agora de posse dos símbolos de Cristoffel, o segundo passo será obter as componentes não nulas do Tensor de Ricci. Desse modo, fazendo uso da Eq. 2.21, obtemos as quatro componentes não nulas que são elas

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -\frac{3\ddot{a}}{a}, \\
R_{11} &= \frac{\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2kc^2}{c^2(1-kr^2)}, \\
R_{22} &= \frac{r^2(\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2kc^2)}{c^2}, \\
R_{33} &= \frac{(\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2kc^2) r^2 \sin^2\theta}{c^2}.
\end{aligned}$$

Tendo calculado o Tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, onde $R_{\mu\nu} = 0$ para $\mu \neq \nu$, podemos agora obter o escalar de Ricci. Dessa maneira, levando em consideração a Eq. 2.22, temos que o escalar

de Ricci é dado por

$$R = -\frac{6}{c^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{kc^2}{a^2} \right). \quad (2.76)$$

Com todos o resultados acima, podemos calcular a componente G_{00} do tensor de Einstein. Por meio da Eq. 2.1, vemos que

$$G_{00} = 3 \left(\frac{\dot{a}^2 + kc^2}{a^2} \right). \quad (2.77)$$

Prosseguindo com o nosso objetivo, precisamos agora nos encarregar em obter as componentes do tensor energia-momento, dado pela Eq. 2.28, onde este satisfaz a condição de um Universo homogêneo e isotrópico e é consistente com a métrica FLRW. A quadrivelocidade deste fluido é dada por $u^\mu = (c, 0, 0, 0)$. Vamos apresentar agora o tensor energia-momento na sua forma covariante, como segue

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} T_\nu^\alpha = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u^\alpha u_\nu g_{\mu\alpha} - P \delta_\nu^\alpha g_{\mu\alpha} = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu}. \quad (2.78)$$

Logo, da Eq. 2.78, temos que a componente T_{00} do tensor energia-momento é

$$T_{00} = \rho c^2, \quad (2.79)$$

e as outras componentes não nulas, $T_{\mu\nu} = 0$ para $\mu \neq \nu$, são

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = -P. \quad (2.80)$$

Agora precisamos, calcular o traço do tensor energia-momento, $T = T_\mu^\mu$. Podemos fazer isso contraindo a Eq. 2.78 com sua forma contravariante dada pela Eq. 2.28, logo

$$T = T_\mu^\mu = \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) c^2 - P \delta_\mu^\mu = \rho c^2 - 3P. \quad (2.81)$$

Dessa maneira agora podemos, de fato, seguir com a obtenção das equações de Friedmann. Pela Eq. 2.1, temos que

$$G_{00} = \Lambda g_{00} + \frac{8\pi G}{c^4} T_{00} \quad (2.82)$$

Por meio de 2.77 e 2.79, e a componente g_{00} (2.74), chegamos na equação

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{3a^2}. \quad (2.83)$$

A Eq. 2.83 é a primeira equação de Friedmann. Para obtermos a segunda equação de

Friedmann, vamos multiplicar a Eq. 2.1 por $g^{\mu\nu}$, tal qual

$$R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}g^{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}g^{\mu\nu}. \quad (2.84)$$

Lembrando que $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \delta_\nu^\nu = 4$, ou seja, o traço da métrica considerando apenas a dimensionalidade do espaço-tempo, além da definição do escalar de Ricci (2.22) e $T_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = T$, então podemos escrever a Eq. 2.84 da seguinte forma

$$-R - 4\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4}T. \quad (2.85)$$

Através das Eqs. 2.76, 2.81 e 2.83, obtemos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3P}{c^2} \right) + \frac{\Lambda c^2}{3}. \quad (2.86)$$

A Eq. 2.86 é a segunda equação de Friedmann, também conhecida como equação de aceleração.

Precisamos ainda obter outra equação que tem fundamental importância para a Cosmologia, pois esta vai nos dizer como as componentes materiais que constituem o fluido perfeito devem se comportar. Para isso, tomando a derivada temporal da primeira equação de Friedmann (2.83), temos

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{4\pi G}{3} \left(\dot{\rho} \frac{a}{\dot{a}} + 2\rho \right) + \frac{\Lambda c^2}{3}. \quad (2.87)$$

Nesse momento, devemos nos lembrar da Eq. 2.86, dessa maneira podemos chegar na seguinte equação

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right). \quad (2.88)$$

A Eq. 2.88 é a equação da continuidade do fluido relativístico. Poderia ter sido obtida, também, diretamente pela conservação de energia do tensor de energia-momento (2.27).

2.6.1 Parâmetros cosmológicos

Nesta subseção, vamos introduzir os parâmetros que se correlacionam com as equações fundamentais da Cosmologia que obtemos anteriormente. Para tal, podemos assumir que as componentes materiais que constituem o fluido cosmológico satisfazem a equação de estado,

$$P = \omega \rho c^2, \quad (2.89)$$

onde ω é um parâmetro da equação de estado, ρ é a densidade de energia, c é a velocidade da luz e P é a pressão. Portanto, a Eq. 2.88 nos fornece

$$\frac{d\rho}{\rho} = -3(1 + \omega) \frac{da}{a}, \quad (2.90)$$

Integrando a Eq. 2.90, temos então

$$\rho = \rho_0 a^{-3(1+\omega)}. \quad (2.91)$$

Vamos agora supor que o Universo seja composto por ω componentes, por exemplo, matéria bariônica, fótons, neutrinos, dentre outros. Então, vamos considerar ρ_ω a densidade de energia para cada componente ω constituinte do fluido e $\rho_{\omega,0}$ a densidade de energia atual de uma determinada componente ω . Reescrevendo a equação acima, temos

$$\rho_\omega = \rho_{\omega,0} a^{-3(1+\omega)}. \quad (2.92)$$

Considerando resultados da termodinâmica, onde temos que $|p| \ll \rho c^2$, o que nos diz que a matéria bariônica e CDM, apresenta uma pressão muito menor do que a densidade de energia, logo, $\omega = 0$. No caso da matéria relativística (fótons e neutrinos), temos que $p = \frac{1}{3}\rho c^2$, o que significa que sua pressão é um terço da densidade de energia, isso implica que $\omega = \frac{1}{3}$ e $\omega = -1$ para Λ , temos a evolução da densidade de energia para cada uma das componentes consideradas

$$\rho_m = \rho_{m,0} a^{-3} \quad (2.93)$$

$$\rho_r = \rho_{r,0} a^{-4} \quad (2.94)$$

$$\rho_\Lambda = \rho_{\Lambda,0}. \quad (2.95)$$

Vamos definir agora outro parâmetro muito importante, que é a densidade crítica do Universo. Considerando um Universo plano, ou seja, fazendo $k = 0$ na equação de Friedmann (2.83), encontramos que a densidade crítica é dada por

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (2.96)$$

e a densidade crítica hoje como sendo,

$$\rho_{c,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (2.97)$$

Já o parâmetro de densidade de energia é definido pela razão entre a densidade de energia e a densidade crítica, ou seja, $\Omega_\omega = \frac{\rho_\omega}{\rho_c}$. Vamos escrevê-lo para cada uma das componentes

trabalhadas aqui. Dessa forma, temos

$$\Omega_{m,0} = \frac{\rho_{m,0}}{\rho_{c,0}} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{m,0}, \quad (2.98)$$

$$\Omega_{r,0} = \frac{\rho_{r,0}}{\rho_{c,0}} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{r,0}, \quad (2.99)$$

$$\Omega_{\Lambda,0} = \frac{\rho_{\Lambda,0}}{\rho_{c,0}} = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}. \quad (2.100)$$

$$(2.101)$$

Agora, substituindo a densidade de energia de cada uma das componentes do Universo na equação de Friedmann (2.83), encontramos

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} (\rho_{r,0} a^{-4} + \rho_{m,0} a^{-3} + \rho_{\Lambda}) - \frac{kc^2}{a^2}. \quad (2.102)$$

Ao passo que multiplicando e dividindo a equação acima por H_0^2 , obtemos

$$H^2 = H_0^2 \left[\frac{8\pi G}{3H_0^2} (\rho_{r,0} a^{-4} + \rho_{m,0} a^{-3} + \rho_{\Lambda}) - \frac{kc^2 a^{-2}}{H_0^2} \right], \quad (2.103)$$

e definimos o parâmetro de curvatura, como segue

$$\Omega_{k,0} = -\frac{kc^2}{H_0^2} \quad (2.104)$$

Isso nos permite chegar em uma forma mais direta da equação de Friedmann, levando em consideração a definição de *redshift* (2.49), onde $(1+z) \propto a^{-1}$, assim

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{r,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{k,0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda,0}}. \quad (2.105)$$

sendo $\Omega_{k,0} = (1 - \Omega_{m,0} - \Omega_{r,0} - \Omega_{\Lambda,0})$ e $H(z)$ é chamado de parâmetro de Hubble.

2.7 Observáveis Cosmológicos

Os observáveis cosmológicos são ferramentas que utilizamos para o estudo do Universo. Tais entes físicos nos fornecem dados essenciais para a determinação de parâmetros cosmológicos. Nesta seção, apresentaremos alguns dos principais observáveis, do ponto de vista de seus aspectos observacionais, cujos resultados mais recentes contribuem para a validação do MCP.

- **Supernovas do tipo Ia (SNe):** São velas padronizáveis cujo brilho intrínseco pode ser calibrado de acordo com uma metodologia específica. A distância de luminosidade está diretamente ligada à medição do brilho do objeto, que é observado através

de seu fluxo. Portanto, se medirmos o fluxo e conhecermos a luminosidade, podemos determinar a distância. Supernovas do tipo Ia são eventos altamente energéticos que ocorrem em sistemas estelares binários, onde uma das estrelas é necessariamente uma anã branca e a outra é uma estrela maior, como uma gigante vermelha. Quando esses objetos superam o limite de Roche, ocorre a ruptura de maré da estrela menos densa, fazendo com que a anã branca acrete material de sua companheira. No entanto, a anã branca tem um limite de massa além do qual sua estrutura não consegue se sustentar – ou seja, a atração gravitacional no interior da estrela supera a pressão de radiação dos fótons, levando assim ao seu colapso – conhecido como limite de Chandrasekhar, aproximadamente $M_{\text{Ch}} = 1,44M_{\odot}$ (CHANDRASEKHAR, 1931). Quando a massa da anã branca ultrapassa esse limite, ela explode, produzindo uma supernova do tipo Ia. Este tipo de evento é extremamente energético e possui uma curva de luz bem definida, embora exija uma calibração muito cautelosa. Possuem uma luminosidade média de $L \approx 4 \times 10^9 L_{\odot}$, podendo ofuscar o brilho de todas as estrelas juntas de uma galáxia. Essas características nos permitiram observar objetos a distâncias relativamente maiores em comparação com estrelas variáveis do tipo Cefeidas, por exemplo, que são outra vela padrão (aliás, as Cefeidas podem ser usadas como meio de calibrar supernovas). Por isso, a primeira evidência de um Universo em aceleração veio das supernovas do Tipo Ia (PERLMUTTER *et al.*, 1999; RIESS *et al.*, 1998). A quantidade que, de fato, obtemos das observações destes objetos é uma grandeza chamada módulo de distância, que corresponde a um dos testes mais diretos e poderosos de modelos cosmológicos, devido sua relação direta com a distância de luminosidade d_L e o *redshift* z . O módulo de distância é definido como a diferença entre a magnitude aparente m e a magnitude absoluta do objeto M , como segue

$$\mu = m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L}{1 \text{Mpc}} \right) + 25. \quad (2.106)$$

Podemos observar as curvas de luz das supernovas do tipo Ia, na Figura 2.6. Na Figura 2.7, apresentamos os dados de módulo de distância μ , obtidos quando estes objetos são usados como observáveis cosmológicos.

- **Radiação cósmica de fundo (RCF):** No paradigma do MCP, o Universo se encontrava em um estado de densidade, temperaturas e pressão extremamente altas há cerca de 14 bilhões de anos. Esse evento é conhecido como Big Bang e considera-se que o Universo começou a se expandir e se resfriar a partir desse instante, logo após o período inflacionário primordial decorrido após o Big Bang. Esse período é conhecido como época da recombinação, e teria ocorrido quando o Universo tinha uma temperatura de aproximadamente $T \approx 3000K$ em um *redshift* aproximado

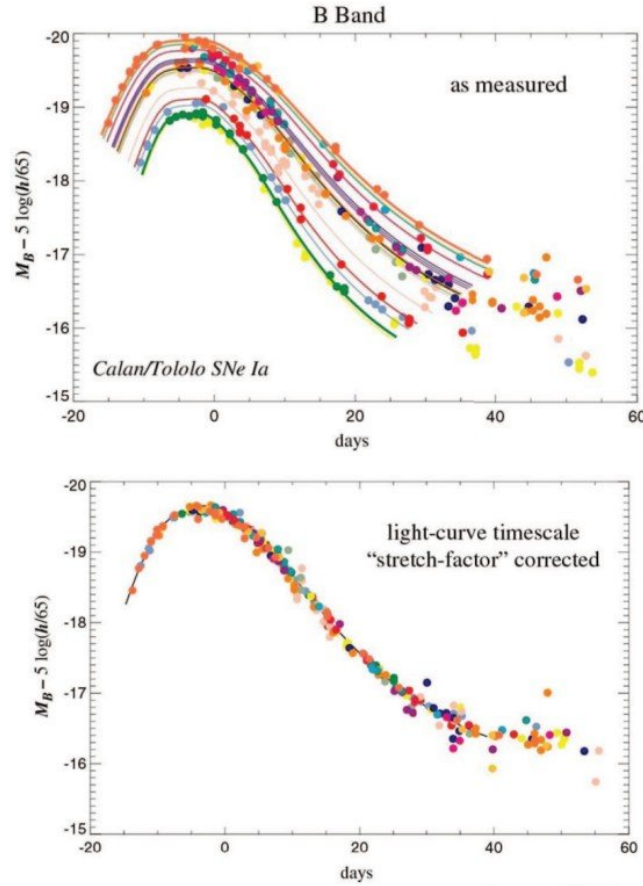


Figura 2.6: Curvas de luz de supernovas do Tipo Ia na banda B do levantamento Calán/Tololo. *Painel superior*: Observamos as diferenças nas luminosidades máximas das SNe. *Painel inferior*: Observamos as diferentes curvas de luz após calibração (MIQUEL, 2007).

de $z \approx 1090$. Logo depois, temos a fase onde os fótons param de interagir com os bárions e então a radiação se desacopla da matéria, a qual é conhecida como época do desacoplamento. Com isso, os fótons são capazes de viajar livremente pelo espaço, constituindo assim a RCF. Esta radiação é observada de todas as direções do céu e carrega informação do Universo primordial. A RCF apresenta um espectro de corpo negro, com uma temperatura hoje de aproximadamente $T \approx 2,726 \pm 0,002 K$ (MATHER *et al.*, 1990), como podemos ver na Figura 2.8. Embora a RCF aparenta ser aproximadamente isotrópica, ela apresenta anisotropias da ordem de $T \approx 10^{-5} K$, conforme mostra a Figura 2.9. Tais anisotropias surgem devido as perturbações acústicas que ocorriam anterior ao desacoplamento entre fótons e bárions no plasma primordial (BOND e EFSTATHIOU, 1984; PEEBLES e YU, 1970). Essas mesmas anisotropias podem ser observadas no espectro de potência de suas flutuações de temperatura, isto é, os picos que podem ser vistos na Figura

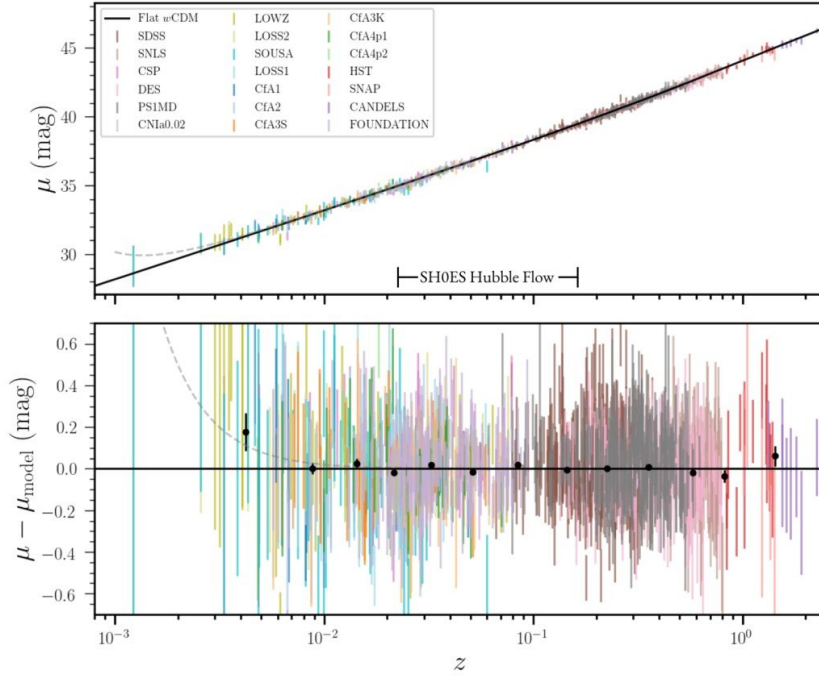


Figura 2.7: Diagrama de Hubble da colaboração Pantheon+ apresentando módulo de distância versus *redshift* de supernovas tipo Ia. A partir de dados deste tipo é utilizada a relação (2.106) para o cálculo de distâncias. Cada cor representa um compilado de dados e a linha tracejada em cinza é a tendência prevista por Hubble (BROUT *et al.*, 2022).

2.10. O ângulo característico destes picos é definido como

$$\theta_A = \frac{r_s(z_{\text{des}})}{d_A(z_{\text{des}})}, \quad (2.107)$$

com $r_s(z_{\text{des}})$, corresponde ao horizonte sonoro do pico, e é dado da seguinte forma⁴

$$r_s(z_{\text{des}}) = \int_{z_{\text{des}}}^{\infty} \frac{c_s}{H(z)} dz, \quad (2.108)$$

e d_A é dada pela expressão usual da distância de diâmetro angular, ao passo que, z_{des} indica o *redshift* onde ocorreu o desacoplamento entre fótons e bárions, $z_{\text{des}} \approx 1090$ (KOMATSU *et al.*, 2009) e c_s é a velocidade do som. A expressão do multipolo correspondente ao ângulo θ_A é dada por

$$l_A = \frac{\pi}{\theta_A} = \pi \frac{(1 + z_{\text{des}})d_A(z_{\text{des}})}{r_s(z_{\text{des}})}. \quad (2.109)$$

- **Oscilações acústicas de bárions:** As oscilações acústicas de bárions (BAO, do inglês *baryon acoustic oscillations*) surgiram devido aos efeitos competitivos da pres-

⁴Detalhes sobre a derivação desta fórmula podem ser conferidos em (AMENDOLA e TSUJIKAWA, 2010).

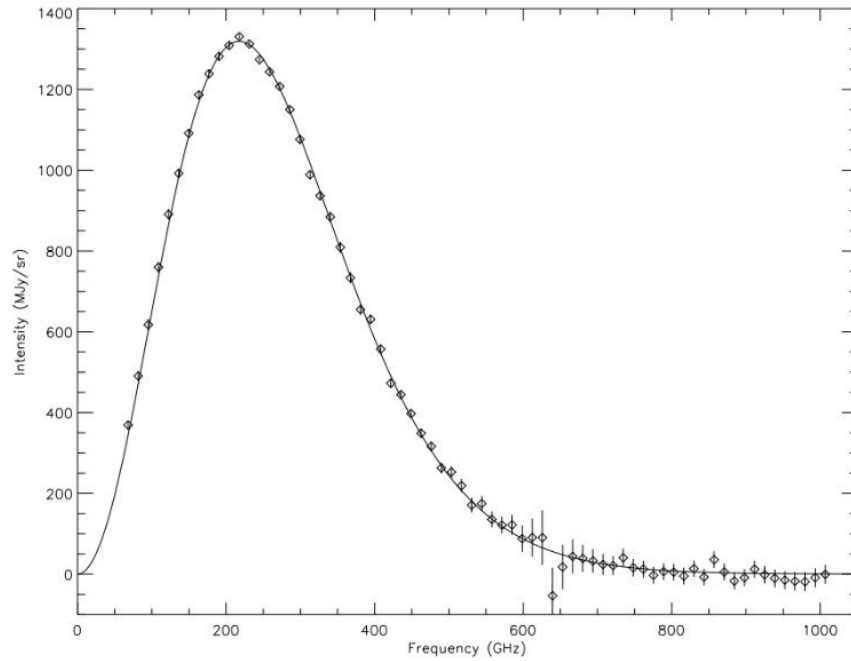


Figura 2.8: Espectro de corpo negro obtido pelo WMAP/FIRAS (FIXSEN, 2009).

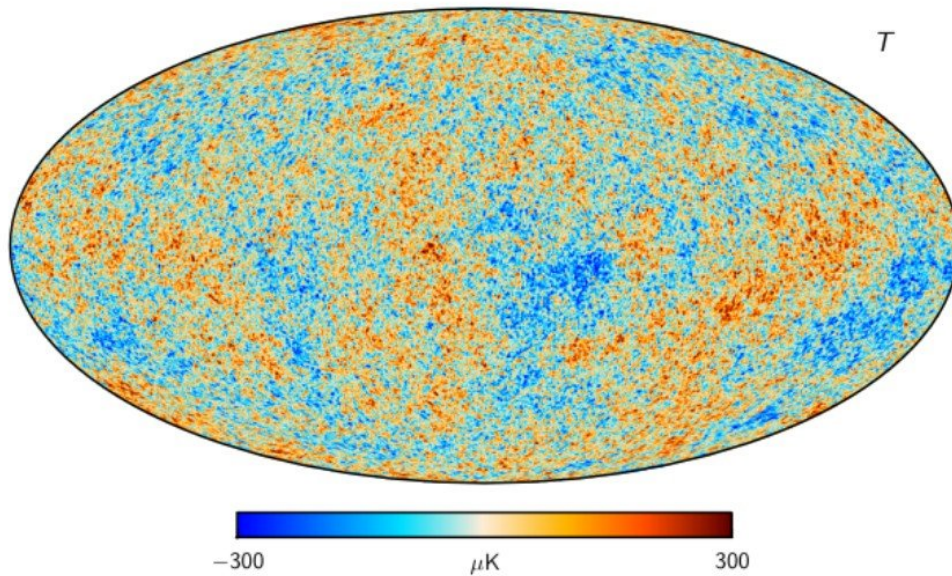


Figura 2.9: Mapa das flutuações de temperatura da RCF da Colaboração Planck (AKRAMI *et al.*, 2020).

são da radiação e da gravidade no Universo primordial. Quando fótons e bárions se desacoplaram, as ondas sonoras se congelaram, deixando uma escala fundamental na estrutura de larga escala do Universo (PEEBLES e YU, 1970; SUNYAEV e ZELDovich, 1970). Como essa escala permanece impressa na distribuição das galáxias, o

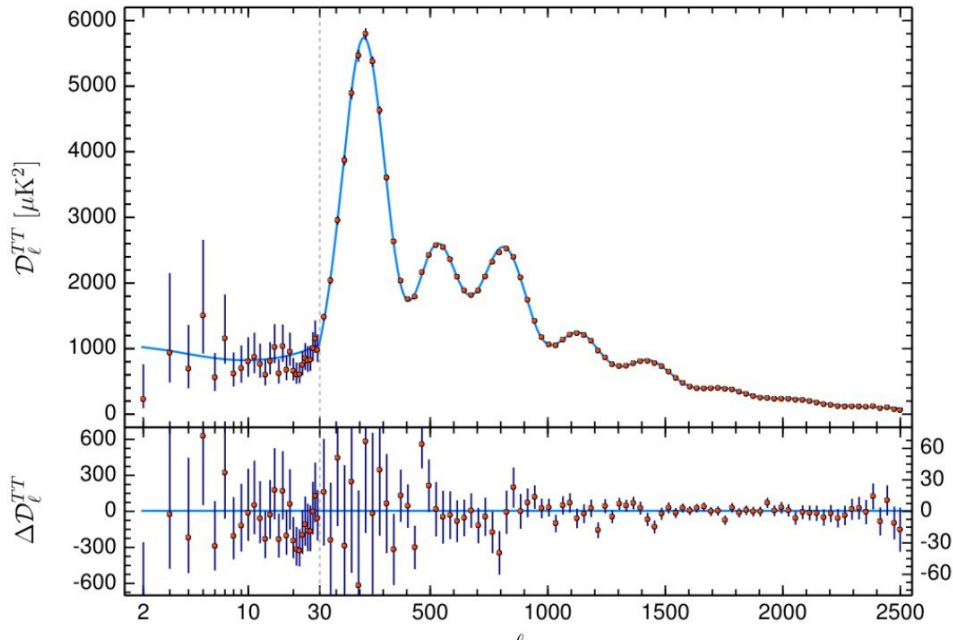


Figura 2.10: Espectro de potência de temperatura da RCF da Colaboração Planck (AKRAMI *et al.*, 2020).

BAO pode ser considerado uma régua padrão que nos permite testar modelos cosmológicos (NESSERIS e PERIVOLAROPOULOS, 2007). Quando combinado com as medições de RCF e SNe, podemos obter as melhores restrições para os parâmetros cosmológicos atuais, incluindo o parâmetro da equação de estado da energia escura e a curvatura espacial (ABDUL-KARIM *et al.*, 2025; ALAM *et al.*, 2021; WEINBERG *et al.*, 2013). Por meio, de dados fornecidos pelo SDSS (do inglês, *Sloan Digital Sky Survey*) foi possível obter a primeira detecção do sinal do BAO através da função de correlação de 2 pontos (PEEBLES, 1980), conforme mostra a Figura 2.11. Dessa maneira, podemos obter a escala acústica r_s dos bárions por meio do pico da função de correlação que está associado ao excesso de probabilidade de encontrar pares de galáxias separados por uma determinada distância – que corresponde à escala do horizonte acústico no *redshift* em que essas ondas acústicas foram congeladas. Tal escala característica é uma ferramenta de suma importância para restringir e discriminar modelos cosmológicos (EISENSTEIN *et al.*, 1998, 2005). É importante destacarmos que a distância percorrida pelo fluido fóton-bárion até o desacoplamento dos fótons determina a escala acústica das oscilações da RCF. A escala acústica bariônica, contudo, é definida a partir do momento em que os bárions param de ser arrastados pelos fótons e é calculada em um *redshift* um pouco diferente do z_{des} , que é o *redshift* de arraste (*drag*, em inglês), isto é, $z \equiv z_{\text{drag}}$, que é a época em que a velocidade dos bárions desacopla dos fótons (EISENSTEIN e

HU, 1998). Sendo assim, temos que a escala acústica é definida como

$$r_s(z_{\text{drag}}) = \int_{z_{\text{drag}}}^{\infty} \frac{c_s dz}{H(z)}. \quad (2.110)$$

com $c_s = \frac{c}{\sqrt{3}}$ é a velocidade do som e o *redshift* z_{drag} é definido como (AMENDOLA e TSUJIKAWA, 2010)

$$z_{\text{drag}} = \frac{1291\omega_m^{0,251}}{1 + 0,659\omega_m^{0,828}}(1 + b_1\omega_m^{b_2}), \quad (2.111)$$

sendo $b_1 = 0,31\omega_m^{0,419}(1 + 0,607\omega_m^{0,674})$, $b_2 = 0,238\omega_m^{0,223}$ e $\omega_m = \Omega_m h^2$, de tal modo que h é o parâmetro de Hubble hoje dividido por 100 km/s/Mpc. Os valores de z_{drag} e de $r_s(z_{\text{drag}})$ obtidos pelo Planck são, $z_{\text{drag}} = 1059.43 \pm 0.45$ e $r_s(z_{\text{drag}}) = 147.23 \pm 0.48\text{Mpc}$ (AGHANIM *et al.*, 2020). Com a escala acústica então, podemos obter restrições, r_s/D_V , para os parâmetros cosmológicos utilizando a escala de dilatação

$$d_V(z) = \left[(1+z)^2 d_A^2(z) \frac{cz}{H(z)} \right]^{1/3}. \quad (2.112)$$

Além disso, podemos conseguir informação dessa escala acústica transversalmente, por meio da função de correlação de 2 pontos angular, a qual chamamos de BAO angular e pode ser obtida através

$$\theta_{\text{BAO}}(z) = \frac{r_s(z_{\text{drag}})}{(1+z)d_A(z)}. \quad (2.113)$$

Podemos relacionar a distância comóvel radial ao modo transversal do BAO da seguinte maneira

$$\frac{d_M(z)}{r_s} = \frac{d_A(z)(1+z)}{r_s}, \quad (2.114)$$

d_A é a distância de diâmetro angular. Similarmente, podemos escrever o modo radial do BAO como

$$\frac{d_H(z)}{r_s} = \frac{c}{H(z)r_s}. \quad (2.115)$$

- **Ondas gravitacionais:** As ondas gravitacionais (GWs, do inglês *gravitational waves*) são ondulações no tecido do espaço-tempo que carregam energia e momento consigo. Ondas gravitacionais são produzidas por processos como colisões de objetos compactos, tais quais como binárias de buracos negros e estrelas de nêutrons, além de colapso de núcleos estelares, aglutinados de anãs brancas, ou mesmo pelo processo inflacionário primordial do Universo – este ainda não detectada observacionalmente no presente momento, bem como ondas gravitacionais geradas pelos dois casos anteriores. Estas ondas gravitacionais foram apresentadas como instrumentos de medida

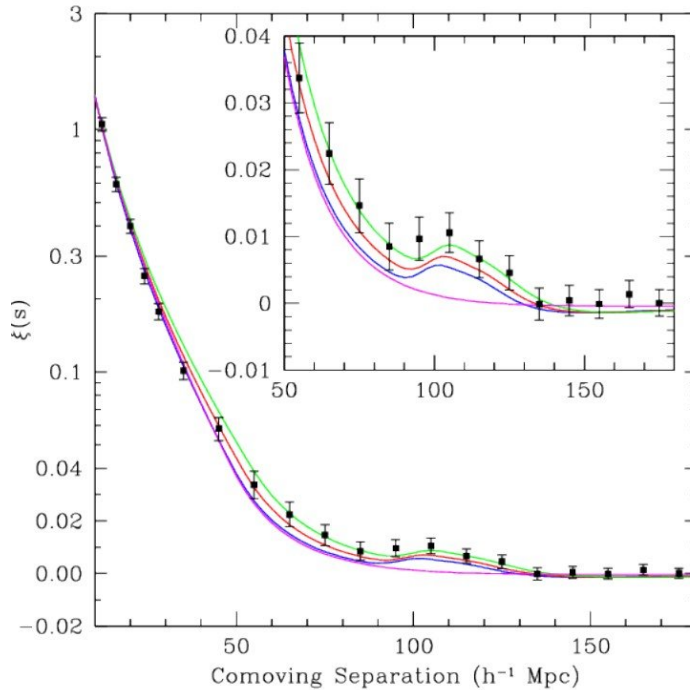


Figura 2.11: Função de correlação de 2 pontos (2PCF) de galáxias considerando dados do SDSS, onde detectou-se, pela primeira vez, o sinal do BAO em $z \simeq 0.3$ (EISENSTEIN *et al.*, 2005).

de distâncias cosmológicas em Schutz, 1986 (SCHUTZ, 1986). Neste trabalho, foi apontado que, para identificar a posição do objeto emissor no céu precisa ser feito um trabalho de triangulação, o que aumenta o erro associado à medida. Contudo, sabemos que existe um tipo de evento que pode nos dar a posição do sistema binário precisamente, que são as coalescências que possuem contraparte eletromagnética. Como podemos ver em (D'AVANZO, 2015), a contraparte eletromagnética desses eventos são conhecidas como “erupções de raios gama de curta duração”. O único evento de coalescência hoje que possui tanto a medida da onda gravitacional quanto sua contraparte eletromagnética, é o GW170817 (ABBOTT *et al.*, 2017a). Através do GW170817, já conseguimos obter uma medida para a Constante de Hubble, embora esta medida ainda esteja longe de podermos compara-la com as medidas atuais de alta precisão, como mostra a Figura 2.12.

As ondas gravitacionais foram detectadas pela primeira vez no ano de 2015 (ABBOTT *et al.*, 2016a). Elas podem ser úteis na Cosmologia pelo fato de se tratarem de fenômenos puramente ligados à relatividade geral (RG), assim fornecendo medidas de distâncias que não estão ligadas à escada de distância cósmica (DI VALENTINO *et al.*, 2021). Portanto, um conjunto de dados advindo das GWs podem contri-

buir para aprimorar as restrições sobre parâmetros cosmológicos, ajudando assim a construir uma cosmologia de precisão (ZHANG *et al.*, 2019). A Figura 2.13 nos mostra a ilustração do primeiro evento de onda gravitacional observado pelo LIGO. As formas de onda detectadas pelo LIGO Hanford (laranja) e pelo LIGO Livingston (azul) são sobrepostas abaixo das ilustrações dos buracos negros em fusão.

- **Cronômetros cósmicos:** Uma maneira de estimarmos o parâmetro de Hubble, $H(z)$, é através de medidas da diferença entre as idades de galáxias. Sendo este método proposto inicialmente por (JIMENEZ e LOEB, 2002), que consiste em medir a diferença na idade entre dois conjuntos de galáxias em evolução passiva, isto é, galáxias que não possuem mais formação estelar sendo, portanto, suficientemente antigas. Considerando esse método, a partir da equação (2.55), podemos obter o parâmetro de Hubble como segue

$$H(z) = -\frac{1}{1+z} \frac{dz}{dt}. \quad (2.116)$$

O parâmetro de Hubble inferido a partir desse método é independente de um modelo cosmológico, sendo assim uma de suas grandes vantagens. Ele depende apenas do pressuposto de modelos de síntese de população estelar, ou seja, parâmetros astrofísicos. Na Figura 2.14, mostramos os dados de $H(z)$ versus z obtidos através da idade diferencial de galáxias via Eq. 2.116.

2.8 Possíveis alternativas ao MCP

Nesta seção nos dedicaremos a apresentar alguns problemas em aberto com relação ao MCP. Também mostraremos algumas teorias alternativas ao MCP que se dedicam justamente a tentar resolver os problemas advindos deste modelo.

Nos últimos anos o modelo Λ CDM tem sido mostrado bem consistente com as observações realizadas. Contudo, embora ele tenha fornecido explicações robustas sobre diversas observações, esse modelo falha na hora de dar uma explicação física plausível para a energia escura e para a matéria escura. Sabemos apenas como esses elementos devem se comportar, mas não sabemos o que eles são, de fato. Ainda não temos, hoje, nenhuma física de partículas ou teoria fundamental que explique o comportamento de uma matéria que interage apenas gravitacionalmente, como a matéria escura. Da mesma maneira, a relatividade geral sozinha não é suficiente para descrevê-la a partir da matéria bariônica existente.

No caso da energia escura, por outro lado, a explicação mais usual que temos para ela é que esta seja a energia do vácuo. Pelo fato de sabermos que o vácuo possui oscilações quânticas, sendo portanto possível calcular qual seria a energia gerada por essas oscilações.

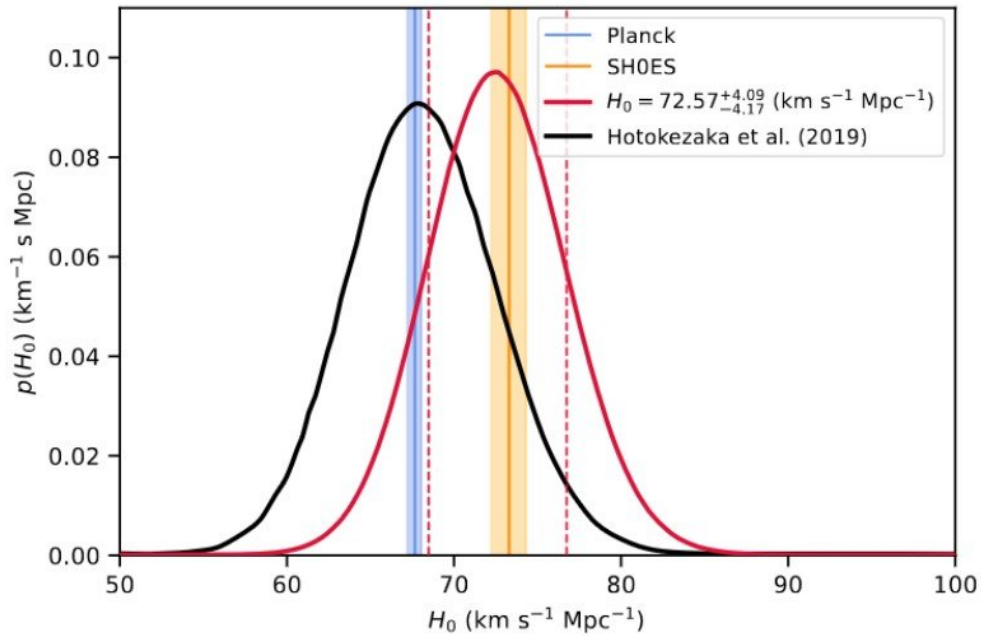


Figura 2.12: Constante de Hubble, H_0 , inferida a partir da onda gravitacional GW170817 (WANG *et al.*, 2023), representada pela curva em vermelho. Observamos uma incerteza alta para tal medição, que é ocasionada por conta de ter apenas um único evento de onda gravitacional sendo utilizada para o cálculo da Constante de Hubble. Representado em outras cores, temos diferentes medições da mesma constante, H_0 , para comparativo.

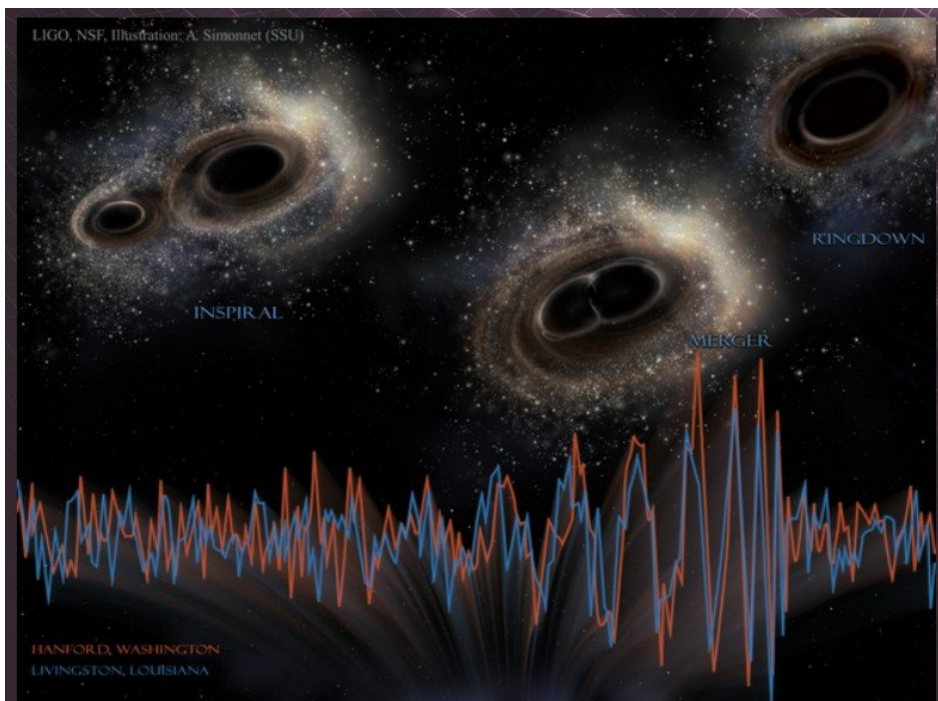


Figura 2.13: Ilustração do primeiro evento de onda gravitacional observado pelo LIGO (CALTECH, 2016).

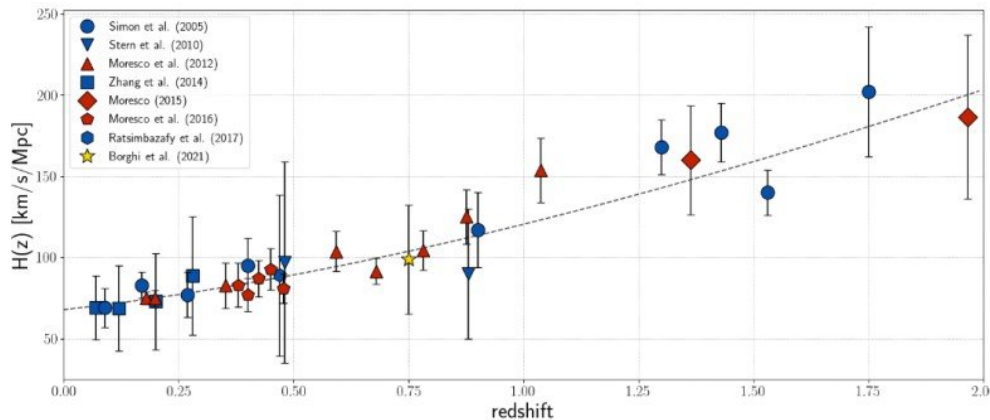


Figura 2.14: Medidas do parâmetros de Hubble, $H(z)$, obtidas com o método de cronômetros cósmicos (CC) versus *redshift* z (MORESCO *et al.*, 2022).

Porém, o problema é que o valor que se espera da teoria é de $\rho_\Lambda = 10^{74} \text{ GeV}^4$ (em unidades naturais, onde $c = 1$), só que esse valor é 121 ordens de grandeza maior do que o que é observado (COPELAND *et al.*, 2006).

Outra questão que surge com o Λ CDM é a coincidência cósmica (WEINBERG, 2001). Ela diz respeito ao fato de que as densidades de matéria e energia escuras Λ são da mesma ordem de grandeza no momento presente, enquanto a radiação e a curvatura são pelo menos 2 ordens de magnitude menores. De fato, na escala de Planck ($a \approx 10^{-32}$) sua razão é $\rho_\Lambda/\rho_m \approx 10^{-96}$. Embora o problema da coincidência possa ser interpretado como uma consequência das condições iniciais do Universo, ele também pode sugerir um mecanismo que estabelece uma relação entre as duas componentes.

Por fim, outro problema que surge com o cenário cosmológico padrão são as chamadas tensões cosmológicas. Apesar de as sondas cosmológicas concordarem amplamente com relação aos valores dos parâmetros de densidade, esse frequentemente não é o caso para a Constante de Hubble, H_0 . Em particular, o satélite Planck apresenta um valor de $H_0 = 67,36 \pm 0,54 \text{ Km/s/Mpc}$ (AGHANIM *et al.*, 2020) em 1σ para o Λ CDM plano, enquanto Pantheon+SH0ES encontra um valor para essa mesma constante de $H_0 = 73,6 \pm 1,1 \text{ Km/s/Mpc}$ (BROUT *et al.*, 2022) em 1σ também, o que se traduz em uma tensão de $\approx 5\sigma$ para a Constante de Hubble. Esse padrão se repete em outros estimadores, como RCF e escada cósmica de distância (Cefeida – SNe), do Universo primordial e tardio, e não desaparece nem mesmo em análises conjuntas, recebendo o nome de tensão de Hubble. A Figura (2.15) ilustra os valores de H_0 para as diferentes sondas observacionais.

Como vimos, existem questões que o modelo Λ CDM não consegue explicar, sendo necessário, portanto, explorarmos a possibilidade de uma física nova e estudar modelos

alternativos ao MCP. Em geral, podemos abordar modificações para a Cosmologia por dois caminhos: primeiramente, modificando a teoria gravitacional, ou seja, assumindo que a teoria da Relatividade Geral deve ser estendida. Essas são chamadas de teorias gravitacionais modificadas (FERREIRA, 2019). O segundo caminho consiste em formular novas teorias para as componentes escuras do Universo, principalmente para a componente de energia escura.

Diante disso, diversas teorias diferentes de energia escura foram propostas na literatura. A maneira mais habitual de modificar a energia escura é especificamente deixar $\omega_x = \omega_0$ como um parâmetro livre, com ω_0 uma constante, mas não necessariamente -1 . As restrições para este modelo em particular são amplas e, na maioria das vezes, colocam $\omega_0 \approx -1$, próximo a Λ CDM (ADAME *et al.*, 2025; BROUT *et al.*, 2022; ROSS *et al.*, 2015), embora em alguns casos, como o RCF+BAO, também seja possível encontrar uma preferência pela energia escura fantasma ($\omega < -1$) (ADAME *et al.*, 2025; AGHANIM *et al.*, 2020; MANTZ *et al.*, 2022). Outra classe importante de teoria da energia escura resulta da consideração de que a energia escura evolui com o tempo, $\omega_x = \omega_x(a)$. Muitas parametrizações foram propostas na literatura, como a parametrização de Barboza-Alcaniz (BARBOZA JR e ALCANIZ, 2008), bem como, a de Chevallier-Polaski-Linder (CPL) (CHEVALLIER e POLARSKI, 2001; LINDER, 2003). Mais modelos de energia escura incluem o tratamento da energia escura como um campo escalar, como modelos de quintessência (TSUJIKAWA, 2013). Modelos iniciais de energia escura também foram propostos como uma tentativa de resolver a tensão de Hubble (POULIN *et al.*, 2023).

2.9 Resumo

Neste capítulo, apresentamos as ferramentas matemáticas da teoria que fundamentam o MCP, partindo da linguagem da relatividade geral como teoria vigente da gravitação. Começamos pelos argumentos geométricos e condições de simetria que nos permitem derivar a métrica FLRW, que constitui uma das hipóteses mais essenciais do MCP, nos permitindo assim derivar as quantidades cosmológicas necessárias para descrever sua dinâmica e cinemática, assim como os observáveis cosmológicos de interesse, bem como o *redshift* de objetos distantes.

Também discutimos sobre o modelo Λ CDM, ou seja, MCP, que apresenta a melhor descrição teórica, atualmente, acerca dos dados observacionais de diversas origens e épocas – como no caso da RCF, bem como velas, réguas e relógios padrões, tais quais SNe, BAO e cronômetros cósmicos via idade de galáxias, respectivamente. Ainda assim, o Λ CDM possui alguns problemas relacionados às suas principais componentes, ou seja, a energia escura Λ e a matéria escura. O MCP, atualmente, não fornece uma base teórica fundamental para explicar a natureza destas duas componentes, embora sejam indispensáveis para a existência do modelo. Isto nos serve de motivação para buscar modelos

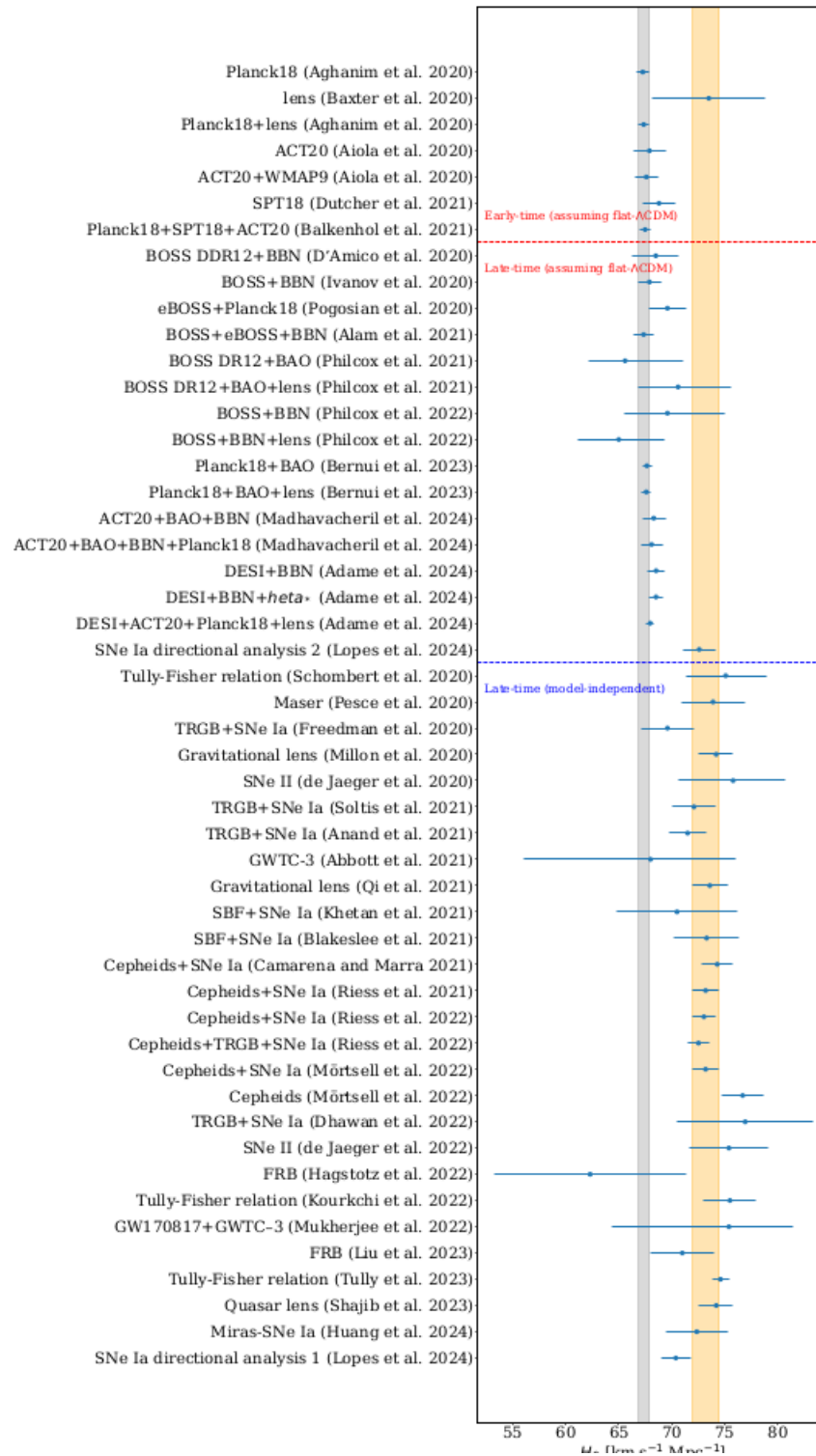


Figura 2.15: Medidas de H_0 obtidas na literatura recente. Na parte de cima do painel estão as medidas do Universo primordial e na parte intermediária se encontram resultados obtidos de dados do Universo tardio. Na parte de baixo temos a combinação destes resultados assumindo ou não um modelo cosmológico.

alternativos que possam nos ajudar a entender a natureza da matéria e energia escuras, duas componentes ainda inexplicadas e que compõem 95% do Universo. Em vista desses problemas do MCP, uma abordagem possível é desenvolver modelos alternativos que visem resolvê-los, testando a sua viabilidade diante dos dados observacionais. No entanto, outra abordagem consiste em testar hipóteses fundamentais que suportam o MCP. Além da RG e do PC, outro pressuposto é a constância de constantes fundamentais da física – as quais devem ter o mesmo valor no presente momento, quando comparadas a épocas diferentes do Universo, mantendo a mesma física fundamental ao longo de sua evolução. Portanto, nesta tese, nosso principal objetivo é explorar análises gerais sobre a velocidade da luz como uma maneira de testar um dos pressupostos básicos do MCP, utilizando observações cosmológicas disponíveis atualmente, bem como simulações de dados que esperamos obter nos próximos anos. Caso encontremos inconsistências entre o seu valor local – ou seja, medido em laboratórios terrestres e no Sistema Solar – e o seu valor em altos *redshifts*, teremos então um indício imediato de uma física além do MCP, possibilitando novas formulações sobre o nosso entendimento do Universo em grande escala.

Nos próximos capítulos, apresentaremos dois testes diferentes com relação a uma possível variabilidade da velocidade da luz⁵. No primeiro deles, descrito no capítulo 3, realizamos medidas da velocidade da luz em altos *redshifts* ($z \sim 1.5$), usando tanto observações atuais quanto simulações de dados futuros, a fim de comparar a precisão destas medidas e, assim, verificar o quanto podemos distinguir uma possível variação de seu valor local. No segundo trabalho (capítulo 4), nosso foco é impor vínculos sobre um modelo de velocidade da luz variável através da RDDC (Eq. 4.13), uma vez que ela se trata de uma das relações mais fundamentais da Cosmologia, por meio dos dados cosmológicos mais recentes hoje disponíveis.

⁵Gostaríamos de mencionar que nesses capítulos não consideramos $c = 1$.

Capítulo 3

Medindo a velocidade da luz com observações cosmológicas: resultados atuais e previsões.

Neste capítulo, apresentamos as análises relatadas em (SANTOS *et al.*, 2024), no qual medimos a velocidade da luz com observações atuais, como SNe, idades de galáxias, modo radial do BAO, bem como simulações de levantamentos futuros de *redshift* e ondas gravitacionais como sirenes-padrão.

Com efeito, uma possível variação espaço-temporal das constantes fundamentais da natureza tem se mostrado um tópico atual de pesquisa desde que a hipótese dos grandes números foi proposta por Dirac (DIRAC, 1937). Essa hipótese sugeria que as constantes universais adimensionais podem estar sujeitas a mudanças ao longo do tempo em relação à idade do Universo.

Qualquer parâmetro que é determinado experimentalmente e não pode ser previsto pelas respectivas teorias, em suma, é uma constante fundamental (UZAN, 2015). Isso faz com que o número de constantes fundamentais seja dependente da nossa atual compreensão do Universo. As leis podem estar mudando e, em particular, quantidades que são consideradas constantes da natureza podem estar variando com o tempo cosmológico. Os físicos há muito tempo consideram a possibilidade de uma constante gravitacional variável G (BRANS e DICKE, 1961; CANUTO *et al.*, 1977; DIRAC, 1937), uma carga do elétron e variável (BEKENSTEIN, 2003), uma evolução da razão da massa entre prótons e elétrons μ (SAFRONOVA *et al.*, 2018). Outro exemplo, de constante fundamental de particular importância para a física atômica, molecular e óptica, é a constante de estrutura fina α . Ou seja, há um grande esforço, que envolve muitos campos da física, empregado na determinação real das constantes fundamentais e das grandezas derivadas (MOHR e TAYLOR, 1999).

A hipótese de constância das constantes desempenha um papel importante, especial-

mente em Astronomia e Cosmologia, onde o *redshift* mede o *lookback time*, pois medidas de *redshift* dependem do modo como a luz se propaga – logo, depende das constantes fundamentais que regem essa propagação. A busca pela variação de constantes fundamentais é um assunto vasto que abrange muitas áreas da física (ver (UZAN, 2025), para mais detalhes). Portanto, ignorar a possibilidade de constantes variáveis poderia levar a uma visão distorcida do nosso Universo e, se tal variação for estabelecida, correções teriam que ser aplicadas. Neste contexto, investigações sobre a evolução espaço-temporal dessas constantes são cruciais, pois qualquer indício significativo a favor desta evolução apontaria uma evidência imediata para uma nova física (UZAN, 2003, 2011, 2024).

Testes cosmológicos da consistência de constantes fundamentais são muito escassos e menos precisos do que aqueles realizados em laboratórios terrestres e no Sistema Solar devido à dificuldade em obter dados cosmológicos em altos *redshifts*, que tornariam suas realizações possíveis. No entanto, é crucial ter cuidado ao utilizar tais modelos, pois eles podem desencadear problemas adicionais nas leis físicas sobre as quais essas constantes físicas foram construídas. Modelos VSL, por exemplo, são teorias nas quais a velocidade da luz é dinâmica e pode ter variado no passado. Estes modelos devem reproduzir o sucesso da Teoria da Relatividade Especial em explicar pelo menos a termodinâmica e o eletromagnetismo. Alguns desses modelos atendem a esses requisitos e podem fornecer soluções viáveis para problemas do MCP (ALBRECHT e MAGUEIJO, 1999; AVELINO e MARTINS, 1999b; BARROW, 1999; BARROW e MAGUEIJO, 1999a,b; BASSETT *et al.*, 2000; CLAYTON e MOFFAT, 1999, 2000, 2002; COSTA *et al.*, 2019; CRUZ e DA SILVA, 2018; ELLIS, 2007b; ELLIS e UZAN, 2005; FRANZMANN, 2017; GUPTA, 2020; LEE, 2021b; MAGUEIJO, 2000, 2003; MAGUEIJO e MOFFAT, 2008; MOFFAT, 1993, 2016; NASSIF e AMARO DE FARIA JR, 2012).

Alguns estudos recentes buscaram, sob essa motivação, possíveis evidências do modelo VSL e realizaram medidas da velocidade da luz com observações cosmológicas, obtendo, em sua maioria, evidências nulas para o primeiro, além de resultados em boa concordância com as medidas em laboratórios locais para o segundo (ALBERT *et al.*, 2020; BALCERZAK e DABROWSKI, 2014a,b; BALCERZAK *et al.*, 2017; CAI *et al.*, 2016; CAO *et al.*, 2017, 2018; CUZINATTO *et al.*, 2023b; LANG *et al.*, 2018; LEE, 2023a,b; LIU *et al.*, 2023b; MARTÍNEZ-HUERTA, 2017; MENDONÇA *et al.*, 2021; MUKHERJEE *et al.*, 2024; PAN *et al.*, 2020; QI *et al.*, 2014; RODRIGUES e BENGALY, 2022; SALZANO, 2017; SALZANO e DABROWSKI, 2017b; SALZANO *et al.*, 2015, 2016; WANG *et al.*, 2019; ZHANG *et al.*, 2024a; ZHANG e MENG, 2014; ZOU *et al.*, 2018). Em (RODRIGUES e BENGALY, 2022), por exemplo, os autores utilizaram dados da compilação de SNe da compilação Pantheon, além de medidas do parâmetro de Hubble obtidas por meio das idades diferenciais das galáxias e do modo radial do (BAO), para medir a velocidade da luz por meio da metodologia proposta por (SALZANO *et al.*, 2016). Os autores obtiveram um bom acordo com medidas locais da velocidade da luz, com uma precisão de

aproximadamente 5%.

Por esta razão, neste capítulo estendemos as análises realizadas em (RODRIGUES e BENGALY, 2022) para dados observacionais mais recentes de SNe e parâmetro de Hubble, além de estimar a precisão com a qual poderemos medir a velocidade da luz em outras épocas cosmológicas por meio de simulações de dados que esperamos obter futuramente. Para tanto, em nossas análises, produzimos simulações das medições do parâmetro de Hubble esperadas de próximos levantamentos de *redshift*, bem como medições de distância de luminosidade que são esperadas de futuras observações de eventos de GWs, por meio do método das sirenes-padrão, ou seja, medidas de distância de luminosidade de GWs com sua contraparte eletromagnética, fornecendo assim o seu *redshift* por meio de astronomia multimensageira (ABBOTT *et al.*, 2017a). É importante destacarmos que, embora a velocidade de propagação da onda gravitacional do evento GW170817 (ABBOTT *et al.*, 2017b) tenha sido medida precisamente como sendo a mesma que a velocidade da luz, o que confirma as previsões da teoria da relatividade geral (FLANAGAN e HUGHES, 2005), aqui buscamos uma abordagem diferente para medir a velocidade da luz por meio de GWs, como realizado em (RODRIGUES e BENGALY, 2022; SALZANO *et al.*, 2016), dado o advento das medições de sirenes-padrão que os próximos experimentos de GWs fornecerão.

3.1 Comentários sobre modelos VSL

Embora seja notável o sucesso das teorias VSL, podemos citar alguns comentários e questionamentos concernentes a tais modelos. Em seu artigo intitulado *c is the speed of light isn't?* (ELLIS e UZAN, 2005), George Ellis e Jean-Phillippe Uzan destacam como a velocidade da luz possui diferentes facetas e como uma variação da mesma acarretaria significativas mudanças na física como, por exemplo, no eletromagnetismo. Uma destas facetas é c_{EM} , ou seja, a velocidade de propagação da onda eletromagnética e a outra é c_{ST} , isto é, o fator de proporcionalidade entre o intervalo no espaço-tempo e $d\tau$. Nesse caso, o primeiro passo é definir com clareza qual das velocidades estará variando, mostrando como fica a relação entre as duas em tal contexto (já que $c_{EM} \neq c_{ST}$), por meio de uma Lagrangiana eletromagnética modificada de acordo com a definição de c_{EM} . Da mesma forma, também, faz se necessário deixar claro quais quantidades serão mantidas fixas quando assumirmos um ou outro aspecto da velocidade da luz como variável. Outra questão levantada pelos autores diz respeito ao fato de que, enquanto a RG for assumida como válida, teremos $c_{GW} = c_{ST}$, onde c_{GW} corresponde a velocidade das ondas gravitacionais.

Em (ELLIS, 2007b), o autor pontua que algumas implicações de uma velocidade da luz variável deveriam ser levadas em consideração, tais como:

- Para ser viável, qualquer teoria VSL que envolva uma velocidade de propagação de fótons variável deve necessariamente basear-se em algum outro método de medição de distâncias espaciais que não o radar, pois, este depende diretamente do valor da velocidade da luz. Portanto, a questão para qualquer teoria VSL específica proposta é: Qual proposta alternativa viável para a medição de distâncias é apresentada?
- Qualquer teoria VSL baseada em mudanças nas componentes do tensor métrico deve explicar como ela difere da RG no que diz respeito à relação entre as medições de tempo e espaço e o tensor métrico.
- Qualquer teoria VSL que envolva uma mudança na velocidade limite não será invariante de Lorentz; a forma como a invariância de Lorentz é quebrada deve ser explicitada. Se envolver uma alteração do grupo de Lorentz, deve-se deixar claro como a velocidade dinâmica limite é determinada.¹
- Qualquer teoria VSL que envolva uma mudança na velocidade de propagação do fóton deve eventualmente propor algumas equações diferentes das equações padrão de Maxwell para governar o eletromagnetismo e mostrar como isso leva a uma velocidade física da luz variável associada a uma solução ondulatória para essas equações.²
- Qualquer teoria VSL deve ser feita de forma consistente em termos de seus efeitos sobre todo o conjunto de equações físicas. Não se pode simplesmente permitir que c varie em algumas equações e não em outras; e a variação proposta em c nessas equações requer alguma explicação física viável para completar o conjunto de relações causais.

Os autores explicam que, para formular um modelo VSL, é necessário haver consistência entre o princípio variacional e a definição física da quantidade que se pretende variar. Nesse sentido, é interessante, antes de chamar um modelo de VSL, especificar qual velocidade da luz está sendo levada em consideração relacionando-a aos seus significados principais (c_{EM} e c_{ST}) através de equações pertinentes.

Outra questão apontada pelos autores diz respeito a limitação significativa das teorias VSL, no que diz respeito à ausência de uma formulação completa em relação ao eletromagnetismo. Segundo os autores qualquer proposta VSL deveria modificar ou estender as equações de Maxwell objetivando fornecer uma compreensão física consistente. Outro ponto está relacionado a estrutura temporal do modelo, onde em algumas formulações é

¹Destacamos que embora essa seja uma condição para a construção de teorias VSL, existem na literatura formulações VSL que são construídas de tal modo a preservar a invariância de Lorentz, a identidade de Bianchi e a termodinâmica, como no caso do modelo meVSL o qual discutiremos no capítulo 4.

²Como já relatado, na literatura, existem modelos VSL que satisfazem o sucesso da TRE em explicar pelo menos a termodinâmica e o eletromagnetismo, como veremos o modelo meVSL é um dentre esses modelos.

introduzido arbitrariamente um tempo de coordenada não apresentando nenhuma caracterização física de forma clara em contraposição ao tempo próprio definido pela métrica do espaço-tempo. Além disso, se a velocidade da luz é dinâmica sendo promovida, nesse caso, a um campo dinâmico é esperado que ela se acople a matéria resultando assim em novas interações. Dessa maneira vindo a ocasionar, por exemplo, a violação da universalidade da queda livre. Mediante esse cenário é importante que modelos VSL estejam atentos não somente as implicações cosmológicas mas também àquelas relacionadas ao Sistema Solar. Por último, os autores relatam a necessidade de uma teoria mais elaborada para incorporar a quebra da invariância de Lorentz, a qual normalmente é atribuída a modelos VSL e apresentada em várias propostas iniciais.

Entretanto, devemos notar que no contexto do modelo meVSL, o qual falaremos mais adiante sobre, esta parte da métrica FLRW onde a velocidade da luz variável reflete uma mudança na taxa do relógio através de hipersuperfícies, descrita pela função lapso³. Tal variação não constitui uma evolução dinâmica do campo, mas sim uma consequência da escolha de coordenadas, já que o tempo cósmico coincide com o tempo próprio de observadores comóveis devido ao postulado de Weyl. A variação da velocidade da luz, \tilde{c} , neste modelo é derivada a partir de um princípio variacional o qual inclui \tilde{c} de tal forma que esta não possui dinâmica própria, impondo uma restrição ao fator de escala $a(t)$, indicando assim que a variação não é um grau de liberdade independente. Fato esse, que torna possível construir modelos VSL invariantes de Lorentz em cada hipersuperfície. Esse ponto de vista, sob o qual o modelo é construído reformula o conceito VSL como uma manifestação da liberdade de calibre⁴ na relatividade geral, em que as leis físicas permanecem invariantes sob transformações suaves de coordenadas. Essa perspectiva de reconhecer \tilde{c} como uma quantidade dependente das coordenadas nos permite fazer uma nova interpretação do tempo cosmológico e de tensões observacionais como, por exemplo, a tensão de Hubble sem recorrer a novos campos físicos. Portanto, essa nova redefinição abre uma nova janela teórica na compreensão da expansão do Universo dentro de uma configuração relativística consistente.

3.2 Método

Na sequência, seguimos de perto o método proposto por (SALZANO *et al.*, 2015), para obtermos as medidas cosmológicas da velocidade da luz, usando conjuntos de dados diferentes. Tal método consiste em assumir um Universo plano descrito pela métrica (FLRW) (2.35), de modo que a distância de diâmetro angular seja dada pela equação (2.65)

$$d_A(z) = \frac{1}{(1+z)} \int_0^z \frac{cdz}{H(z)}, \quad (3.1)$$

³Essa função controla como o tempo é medido.

⁴Aqui, calibre se refere à liberdade de escolher a coordenada temporal.

sendo $c = c(z)$ a velocidade da luz, escrita aqui como uma função do *redshift* por uma questão de conveniência e $H(z)$ é o parâmetro de Hubble.

Derivando a Eq. 3.1 com respeito ao *redshift*, temos

$$\frac{\partial}{\partial z}[(1+z)d_A(z)] = \frac{c(z)}{H(z)}, \quad (3.2)$$

então, podemos escrever $c(z)$ como

$$c(z) = H(z)[(1+z)d'_A(z) + d_A(z)], \quad (3.3)$$

em que $d'_A(z)$ corresponde a primeira derivada da distância de diâmetro angular em relação ao *redshift*. Além disso, podemos obter as incertezas da Eq. 3.3, por meio de uma propagação de erro, dada a seguir

$$\begin{aligned} \sigma_{c(z)}^2 = & [(1+z)d'_A(z) + d_A(z)]^2 \sigma_{H(z)}^2 + [H(z)(1+z)]^2 \sigma_{d'_A(z)}^2 + \\ & + [H(z)]^2 \sigma_{d_A(z)}^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Sabemos que, no cenário do MCP, espera-se que $d_A(z)$ atinja seu valor máximo em torno de $z \sim 1,4 - 1,6$, dependendo dos parâmetros cosmológicos do modelo, por exemplo, o parâmetro de densidade da matéria e a Constante de Hubble. Portanto, quando calculamos a primeira derivada da distância de diâmetro angular neste *redshift* onde ela alcança o seu máximo (z_m), seu valor será zero (ou seja, $d'_A(z_m) = 0$). Assim, neste *redshift*, a Eq. 3.3 pode ser reescrita como

$$c(z_m) = d_A(z_m)H(z_m), \quad (3.5)$$

novamente, podemos obter as incertezas da Eq. 3.5 por meio de uma propagação de erro dada a seguir,

$$\sigma_{c(z_m)}^2 = (H(z)\sigma_{d_A(z)})^2 + (d_A(z)\sigma_{H(z)})^2. \quad (3.6)$$

A Eq. 3.5 nos leva a uma expressão para a velocidade da luz em tal *redshift* z_m que depende apenas da distância de diâmetro angular e do parâmetro de Hubble. Isto nos permite medi-la com maior precisão, pois seu valor não depende diretamente de $d'_A(z)$, reduzindo assim o “smearing effect”⁵ (SALZANO *et al.*, 2015) decorrente do cálculo numérico de derivadas, que aumentam as incertezas das análises significativamente. Salientamos, ainda, que este método só é válido para modelos planos FLRW, devido a degenerescência entre a velocidade da luz variável e a curvatura cósmica (SALZANO e DABROWSKI, 2017b; SALZANO *et al.*, 2016).

⁵A combinação de vários efeitos suaviza o perfil de $d_A(z)$: o platô bastante grande em torno de z_M ; a medição de $d_A(z)$ a partir de apenas alguns intervalos de *redshift* de um levantamento BAO; os erros mais a dispersão intrínseca das medições. A consequência final é a impossibilidade prática de determinar a localização do máximo.

3.3 Dados e simulações

Nesta seção apresentamos nossos dados e simulações usados para medir a velocidade da luz, especificamente SNe, ondas gravitacionais e o parâmetro de Hubble.

Acerca das SNe, nós utilizamos a compilação mais recente de SN, ou seja, o conjunto de dados Pantheon+SH0ES (BROUT *et al.*, 2022) (ver também (RIESS *et al.*, 2022; SCOLNIC *et al.*, 2022)), que nos fornece 1701 medições de curva de luz de 1550 objetos SN no intervalo de *redshift* $0,001 < z < 2,26$. Portanto, temos 1701 medições de magnitudes aparentes de SN, m_B , que podem ser combinadas com a determinação da magnitude absoluta M_B de SN dada por

$$M_B = -19.25 \pm 0.03, \quad (3.7)$$

a fim de calcular as suas distâncias de luminosidade através de

$$d_L(z) = 10^{\frac{m_B(z) - M_B - 25}{5}}. \quad (3.8)$$

Desta forma, podemos converter as distâncias de luminosidade em distâncias de diâmetro angular por meio da RDDC dada pela Eq. 2.73, tomando $d_A(z)$ em função de $d_L(z)$, reescrita como

$$d_A(z) = d_L(z)(1 + z)^{-2}. \quad (3.9)$$

É importante notar que, no caso de alguns modelos VSL a RDDC pode ser violada – conforme veremos no capítulo seguinte. No entanto, para todos os efeitos, neste capítulo tomaremos a RDDC usual como uma hipótese válida.

No que diz respeito às ondas gravitacionais, produzimos simulações de observações cosmológicas futuras, como 1000 medições de distância de luminosidade de eventos de GWs como sirenes-padrão, conforme esperado por experimentos como LIGO (ABBOTT *et al.*, 2024a) e o Einstein Telescope (ET) (BRANCHESI *et al.*, 2023).

Quanto as medidas do parâmetro de Hubble, $H(z)$, adotamos uma compilação de 30 medições obtidas a partir de idades diferenciais de galáxias e 18 medições do modo radial do BAO por parte do SDSS. Este conjunto de dados será doravante denominado CC, pois são comumente referidos na literatura como cronômetros cósmicos.

Da mesma forma, simulamos medições futuras de $H(z)$ esperadas de levantamentos de *redshift* em andamento, como o J-PAS (BENITEZ *et al.*, 2014), por meio também do modo radial do BAO. Nesse caso, produzimos 23 medidas simuladas, sendo então compatíveis com o número de medidas observacionais disponíveis atualmente do SDSS.

Para ambos os conjuntos de dados simulados, produzimos as medidas de $d_L(z)$ e $H(z)$ a partir de uma realização de um modelo fiducial Λ CDM plano, assumindo $\Omega_m = 0.334 \pm 0.018$ e $H_0 = 73.30 \pm 1.04 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, tal como o melhor ajuste obtido dos dados

de Pantheon+SH0ES de SNe, considerando que as incertezas dessas medidas seguem as especificações instrumentais de cada experimento em questão – bem como a distribuição de pontos observacionais por *redshifts* esperadas para cada observável em questão.

3.4 Processos Gaussianos

Processos Gaussianos (PG) é um método de regressão bayesiano e não-paramétrico. Esse método também é conhecido como processo de regressão com erros normalmente distribuídos e tem como objetivo estabelecer uma relação entre o conjunto de observações sendo capaz de produzir uma distribuição preditiva. Por esse motivo, na área de Cosmologia observacional, essa técnica poderosa vem sendo amplamente empregada com o intuito de modelar e analisar dados astronômicos e astrofísicos, viabilizando análises cosmológicas (BENGALY, 2022; DHAWAN *et al.*, 2021; GADBAIL *et al.*, 2024, 2025; JIANG *et al.*, 2024; REN *et al.*, 2022; SEIKEL *et al.*, 2012; SHAFIELOO *et al.*, 2012; YANG *et al.*, 2015; ZHANG *et al.*, 2024b, 2023).

Vamos considerar uma função f formada a partir de um PG. O valor de f quando avaliado em um ponto x é uma variável aleatória gaussiana com média $\mu(x)$ e variância $\text{Var}(x)$. O valor da função em x não é independente do valor da função em algum outro ponto x' (especialmente quando x e x' estão próximos um do outro), mas está relacionado por uma função de covariância $\text{cov}(f(x), f(x')) = k(x, x')$. Assim, a distribuição de funções pode ser descrita pelas seguintes quantidades (WILLIAMS e RASMUSSEN, 2006):

$$m(x) = \mathbb{E}[f(x)], \quad (3.10)$$

$$k(x, x') = \mathbb{E}[(f(x) - m(x))(f(x') - m(x')))], \quad (3.11)$$

Dessa maneira, podemos escrever o PG como:

$$f(x) \sim \mathcal{GP}(m(x), k(x, x')). \quad (3.12)$$

Neste processo, temos que a coleção de pontos de treino e pontos de teste forma uma distribuição gaussiana multivariada, a qual podemos escrever da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} y \\ f^* \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} \mu \\ \mu^* \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} K(X, X) + \sigma^2 I & K(X, X^*) \\ K(X^*, X) & K(X^*, X^*) \end{bmatrix} \right), \quad (3.13)$$

em que K é a matriz de covariância ou kernel e I é a matriz identidade.

As funções de covariância levam em conta as contribuições dos pontos de treinamento na previsão de valores esperados de teste, isso de acordo com a distância do kernel entre os pontos de treinamento x e os pontos de teste x' , portanto, são de fundamental importância

nos modelos de regressão. Existe uma ampla gama de funções de covariância possíveis. Por exemplo:

- **Exponencial quadrado** (SqExp, do inglês *Squared Exponential*): A função exponencial quadrática é um dos kernels mais amplamente utilizados devido à sua flexibilidade e diferenciabilidade infinita. Isso resulta em reconstruções muito suaves dos dados.

$$k(x, x') = \sigma_f^2 \exp\left(-\frac{(x - x')^2}{2\ell^2}\right), \quad (3.14)$$

- **Matern- ν** : Outra classe de função de covariância é a função da classe Matérn, que é dada por

$$k(x, x') = \sigma_f^2 \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{\sqrt{2\nu}|x - x'|}{l}\right)^\nu K_\nu\left(\frac{\sqrt{2\nu}|x - x'|}{l}\right), \quad (3.15)$$

onde Γ é a função Gama e K_ν é a função de Bessel de segunda ordem. Finitamente diferenciável e mais adequado para dados flutuantes ou ruidosos em comparação com o kernel SqExp. Um caso interessante para o aprendizado de máquina é o caso, em que temos $\nu = 7/2$, chamamos a função de covariância nesse caso de Matérn(7/2) (Mat72) e pode ser escrita da seguinte forma:

$$k(x, x') = \sigma_f^2 \exp\left[-\frac{\sqrt{7}|x - x'|}{\ell}\right] \left(1 + \frac{\sqrt{7}|x - x'|}{\ell} + \frac{14(x - x')^2}{5\ell^2} + \frac{7\sqrt{7}|x - x'|^3}{15\ell^3}\right). \quad (3.16)$$

Destacamos ainda, nas funções acima, que l e σ são os hiperparâmetros da reconstrução do PG. O hiperparâmetro l pode ser interpretado como sua variância, que fornece a largura da curva reconstruída e σ quantifica o quanto ela se desvia da média.

3.5 Metodologia

Aqui, descrevemos as etapas de nossa análise para obtermos $c(z_m)$ e suas respectivas incertezas $\sigma_{c(z_m)}$, como nas Eqs. 3.5 e 3.6, respectivamente. Primeiro, realizamos uma interpolação em toda a faixa de *redshift* coberta por esses conjuntos de dados. Para isso, seguimos a abordagem de (RODRIGUES e BENGALY, 2022) e reconstruímos $\{d_A(z), H(z)\}$, bem como suas respectivas derivadas $\{d'_A(z), H'(z)\}$. Para realizarmos as reconstruções de $d_A(z)$ e $H(z)$, usamos uma abordagem não-paramétrica, denominada de PG, com o pacote GAPP (SEIKEL *et al.*, 2012), para fins de obter $d_A(z)$ e $H(z)$ em função do *redshift* sem o pressuposto a priori de um modelo cosmológico em específico.

Com a finalidade de fazer uma comparação direta dos nossos resultados, então, assumimos dois kernels para realizar essas reconstruções, ou seja, SqExp e o Mat72. Consideramos, um número de bins de reconstrução $n = 250$ dentro de um intervalo de *redshift* $0,01 < z < 2,5$, nos quais otimizamos os hiperparâmetros do PG, em ambos os casos. Finalmente, podemos obter z_m no ponto em que as reconstruções produzem $d'_A \simeq 0$, e então calcularmos $c(z_m)$ e $\sigma_{c(z_m)}$ de acordo com as Eqs. 3.5 e 3.6. Mais detalhes sobre as reconstruções obtidas para cada caso são mostrados na seção 3.6.

3.6 Resultados

No painel superior da Figura 3.1, mostramos nossos resultados obtidos para $c(z_m)$ e $\sigma_{c(z_m)}$, quando consideramos o kernel SqExp. Em seguida, no painel inferior da mesma figura (3.1), apresentamos nossos resultados quando levamos em consideração o kernel Mat72 via PG. Os nossos resultados estão detalhados da seguinte forma: os círculos pretos correspondem aos dados combinados (CC+SNe), vermelhos (CC+GW do LIGO) e azuis (CC+GW do ET). Seguindo a mesma linha de cores, as cruzes representam os resultados para a combinação dos conjuntos de dados correspondentes com as simulações do J-PAS. As barras de erro representam um nível de confiança de 2σ .

Destacamos ainda que a linha horizontal magenta da Figura 3.1 nos mostra o valor de c medido localmente, isto é, $c = 2.998 \times 10^5 \text{ km s}^{-1}$. Dessa forma, podemos notar a concordância entre os nossos resultados e este valor local. Mais especificamente, notamos que os resultados obtidos com o kernel Mat72 se mostram ligeiramente mais compatíveis com esta medida local do que o SqExp.

Tabela 3.1: Resultados para as medições de $c(z_m)$ assumindo o kernel SqExp via PG. A primeira coluna exibe a combinação de conjuntos de dados, a segunda coluna mostra o valor de z_m reconstruído, a terceira coluna fornece as medições de $c(z_m)$ e suas incertezas em um nível de confiança de 1σ , em unidades de 10^5 km s^{-1} , e a quarta coluna fornece sua incerteza relativa, em porcentagem.

data-sets (CC+)	z_m	$c(z_m) \pm \sigma_{c(z_m)}$	incertezas (%)
+SNe (Pantheon+SH0ES)	1.77	3.319 ± 0.210	6.25
+GW (LIGO)	1.64	3.217 ± 0.067	2.08
+GW (ET)	1.63	3.140 ± 0.066	2.10
data-sets (CC+JPAS+)	z_m	$c(z_m) \pm \sigma_{c(z_m)}$	incertezas (%)
+SNe (Pantheon+SH0ES)	1.77	3.293 ± 0.203	6.16
+GW (LIGO)	1.64	3.190 ± 0.044	1.38
+GW (ET)	1.63	3.114 ± 0.043	1.38

Na tabela 3.1, apresentamos nossos resultados obtidos a partir das reconstruções via PG, quando consideramos o kernel SqExp. Podemos ver no topo da tabela a combinação dos dados atuais (CC+SNe), (CC+GW do LIGO) e (CC+GW do ET). Enquanto, na

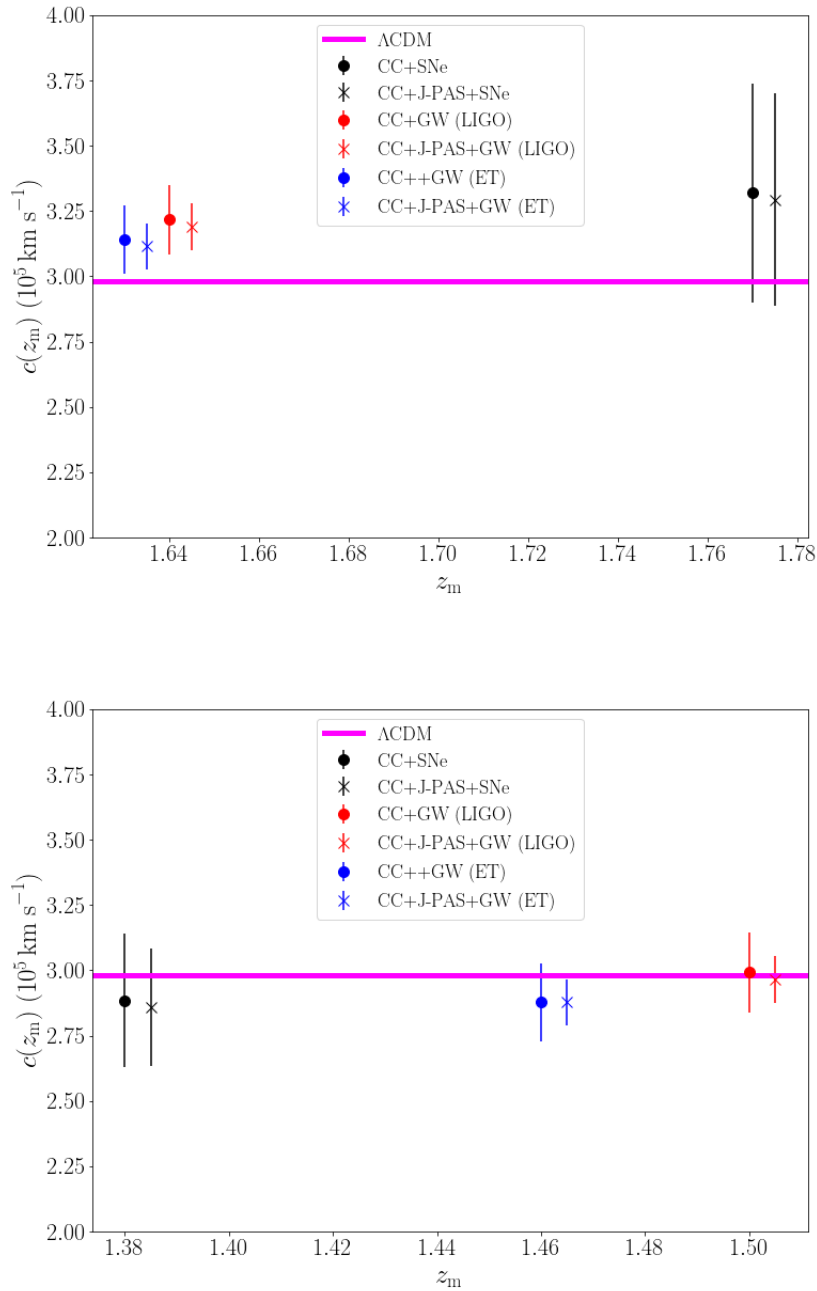


Figura 3.1: *Painel superior:* medições de $c(z_m)$, em função de z_m , obtidas assumindo o kernel SqExp via GP a partir da seguinte combinação de conjuntos de dados: CC+SNe (círculo preto), CC+GW do LIGO (círculo vermelho), CC+GW do ET (círculo azul). A combinação dos mesmos conjuntos de dados com $H(z)$ do J-PAS é indicada por estrelas pretas, vermelhas e azuis, respectivamente. *Painel inferior:* Igual ao painel superior, mas assumindo o kernel Mat72. As incertezas em todos os casos correspondem ao nível de confiança de 2σ e a linha horizontal magenta representa o valor previsto pelo cenário Λ CDM.

parte inferior da mesma tabela mostramos a combinação destes mesmos dados, porém incluindo as simulações de $H(z)$ do J-PAS. A tabela 3.2, nos mostra os resultados obtidos

Tabela 3.2: A mesma que a Tabela 3.1, mas assumindo o kernel Mat72 via PG.

data-sets (CC+)	z_m	$c(z_m) \pm \sigma_{c(z_m)}$	incertezas (%)
+SNe (Pantheon+SH0ES)	1.38	2.884 ± 0.128	4.45
+GW (LIGO)	1.50	2.992 ± 0.077	2.59
+GW (ET)	1.46	2.877 ± 0.074	2.58
data-sets (CC+JPAS+)	z_m	$c(z_m) \pm \sigma_{c(z_m)}$	incertezas (%)
+SNe (Pantheon+SH0ES)	1.38	2.859 ± 0.112	3.91
+GW (LIGO)	1.50	2.965 ± 0.045	1.52
+GW (ET)	1.46	2.851 ± 0.043	1.51

tanto na parte superior quanto inferior para os mesmos conjuntos de dados considerados na tabela (3.1), só que agora considerando o kernel Mat72.

Quando comparamos os resultados de $c(z_m)$ de ambas tabelas, para a combinação de dados (CC+SNe), percebemos uma precisão de $\sim 6.2\%$ (SqExp) e $\sim 4.5\%$ (Mat72). Notamos que, quando combinamos (CC+GW do LIGO) e (CC+GW do ET), a precisão melhorou ligeiramente para $\sim 2\%$ (SqExp) e $\sim 2.5\%$ (Mat72). Já quando incluímos as medições simuladas de $H(z)$ do J-PAS, para as combinações (CC+SNe), (CC+GW do LIGO) e (CC+GW do ET), encontramos que a precisão das medições de $c(z_m)$ é levemente melhorada no primeiro caso. Quando consideramos os dois últimos casos, conseguimos uma melhora significativa de $\sim 1.4\%$ (SqExp) e $\sim 1.5\%$ (Mat72). É válido mencionarmos que os resultados obtidos pelo LIGO e o ET são consistentes entre si em um nível sub-percentual.

Portanto, nossos resultados discutidos aqui demonstram que os dados observacionais futuros têm a capacidade de melhorar a precisão de medidas da velocidade da luz para um nível quase percentual. Portanto, poderemos realizar uma inferência mais precisa se o seu valor está efetivamente de acordo com as medições efetuadas em laboratórios locais, tal como previsto no modelo cosmológico padrão, ou se existe algum indício de uma nova física, caso se verifique o contrário.

3.7 Resumo

Neste capítulo, discutimos nossa metodologia, baseada no método proposto por (SALZANO *et al.*, 2015) e apresentada na Seção 3.5, para medir a velocidade da luz c . Nossas medidas do parâmetro de Hubble $H(z)$, foram obtidas a partir de uma compilação de idades de galáxias e medidas do modo radial de oscilações acústicas de bárions. Para obtermos medidas de distância de diâmetro angular, conforme necessário por este método, convertemos as distâncias de Supernovas do Tipo Ia do Pantheon+SH0ES, através da relação de dualidade de distâncias cósmicas. Para evitarmos a suposição de um modelo cosmológico em nossas análises, reconstruímos $d_A(z)$ e $H(z)$ através de Processos Gaussi-

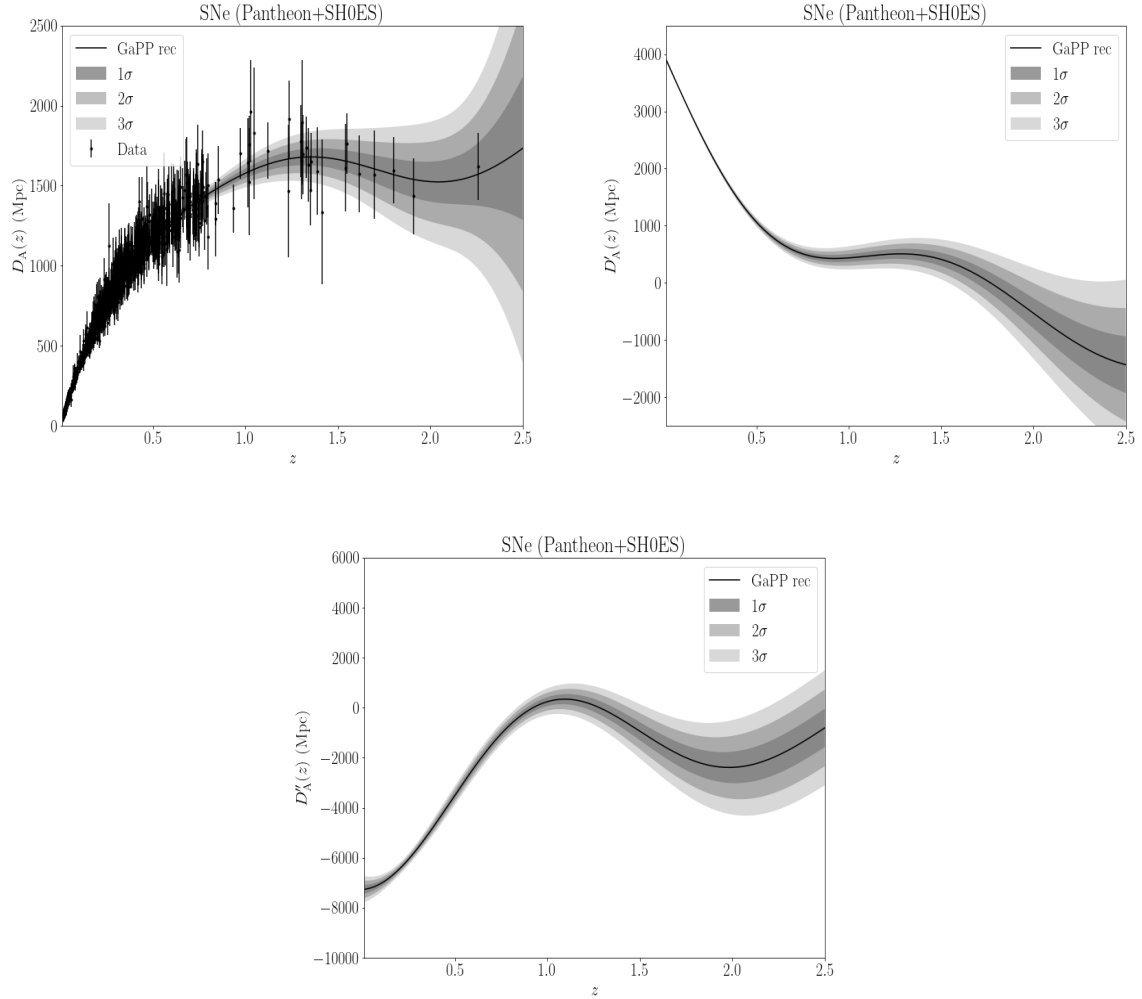


Figura 3.2: O painel superior esquerdo mostra a reconstrução dos Processos Gaussianos da distância de diâmetro angular, $d_A(z)$, conforme obtida pelas Eqs.(3.7) a (3.1), usando a compilação de Supernovas do Tipo Ia Pantheon+SH0ES. O painel superior direito exibe a reconstrução da derivada de primeira ordem, $d'_A(z)$, enquanto o painel central inferior representa a reconstrução da derivada de segunda ordem, $d''_A(z)$, ainda obtidas da mesma amostra observacional. Os pontos pretos com barras de erro no gráfico de $d_A(z)$, representam os dados observacionais, e as curvas cinzas denotam os níveis de confiança 1, 2 e 3 σ das reconstruções, respectivamente, do tom mais escuro para o mais claro. Todas as reconstruções foram realizadas considerando o kernel exponencial ao quadrado.

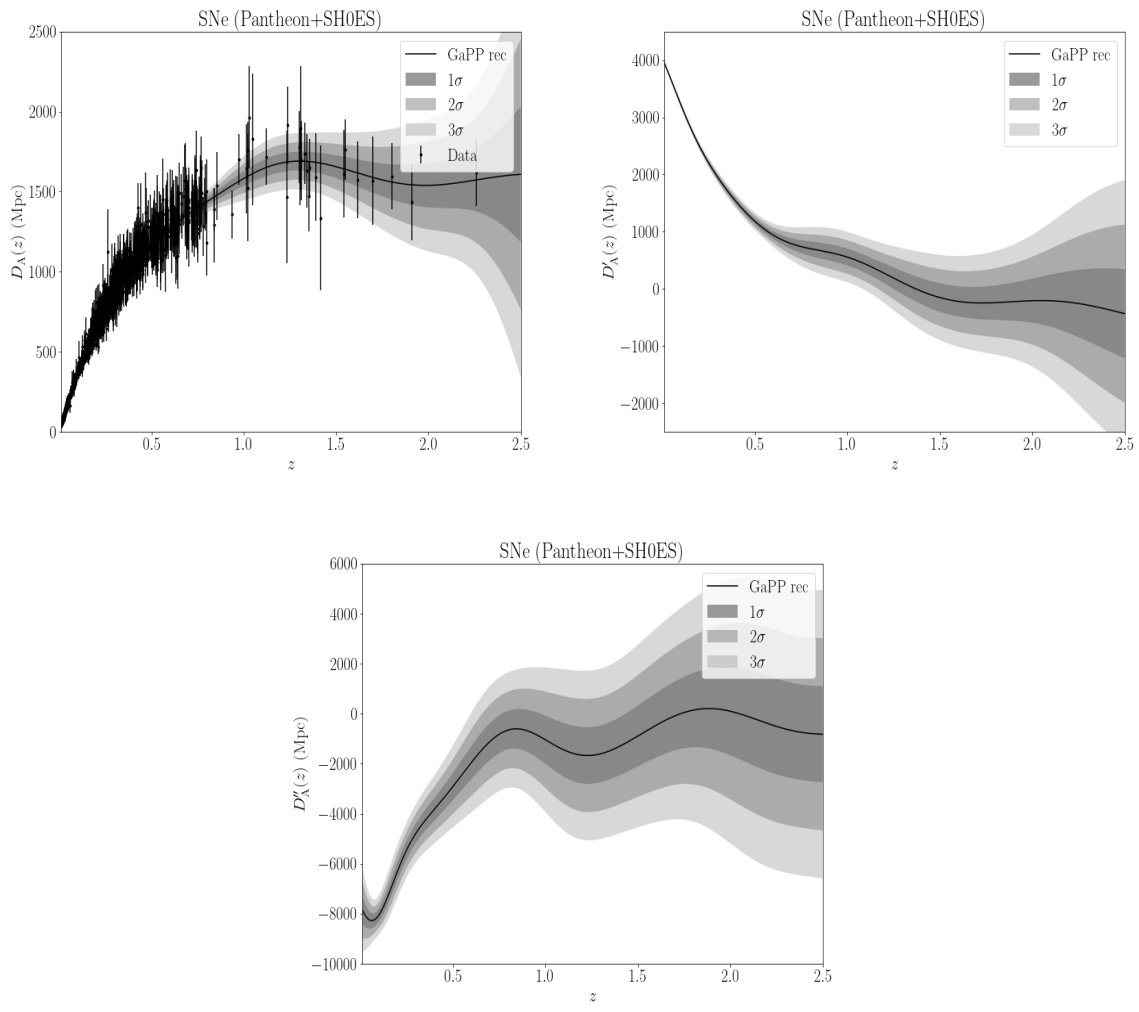


Figura 3.3: A mesma que a Fig. 3.2, mas assumindo o kernel Mat72 dos Processos Gaussianos.

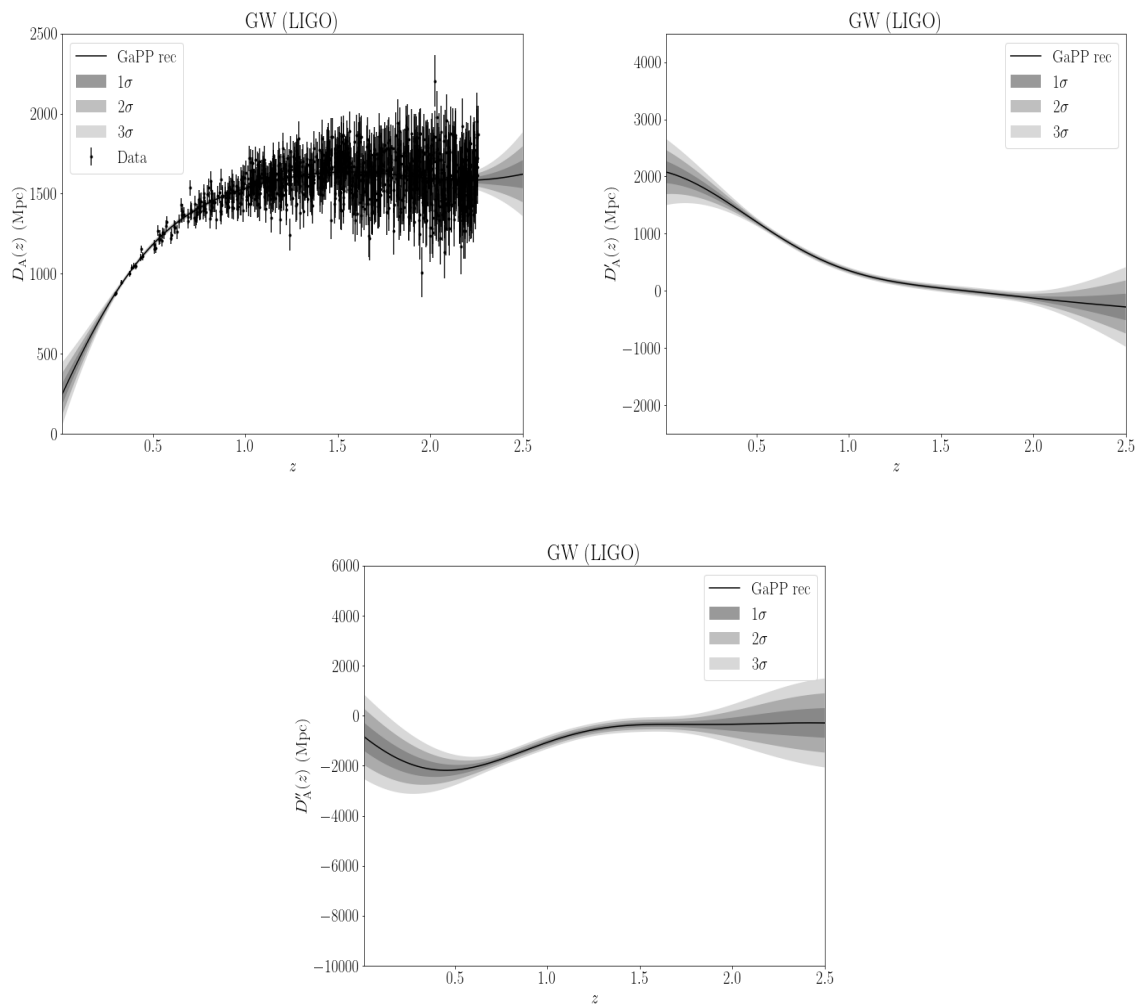


Figura 3.4: A mesma que a Fig. 3.2, mas válida para o conjunto de dados de ondas gravitacionais simuladas, assumindo as especificaoes do interferômetro LIGO.

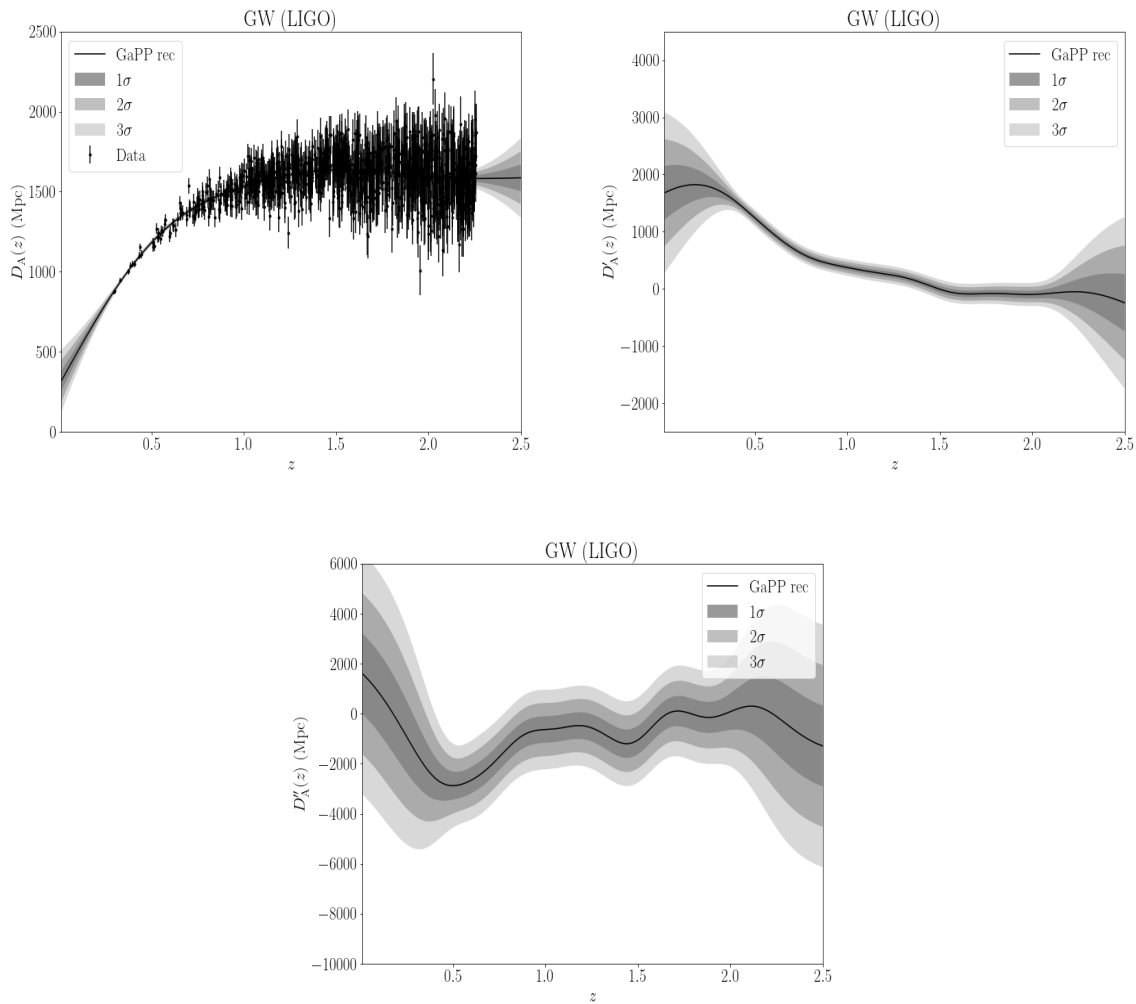


Figura 3.5: A mesma que a Fig. 3.4, mas assumindo o kernel Mat72 dos Processos Gaussianos, em vez disso

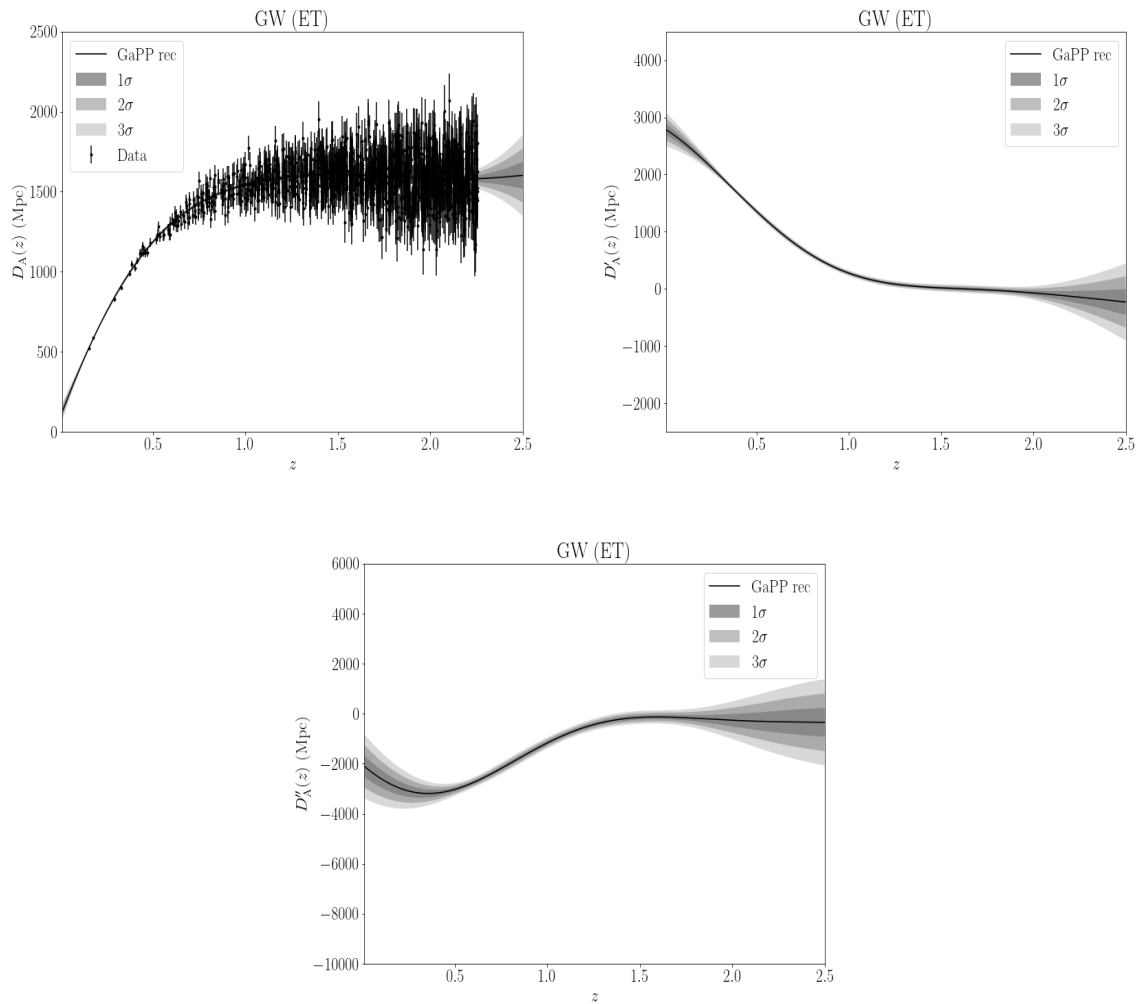


Figura 3.6: A mesma que a Fig. 3.4, mas válida para o conjunto de dados de ondas gravitacionais simuladas, assumindo as especificações do Einstein Telescope.

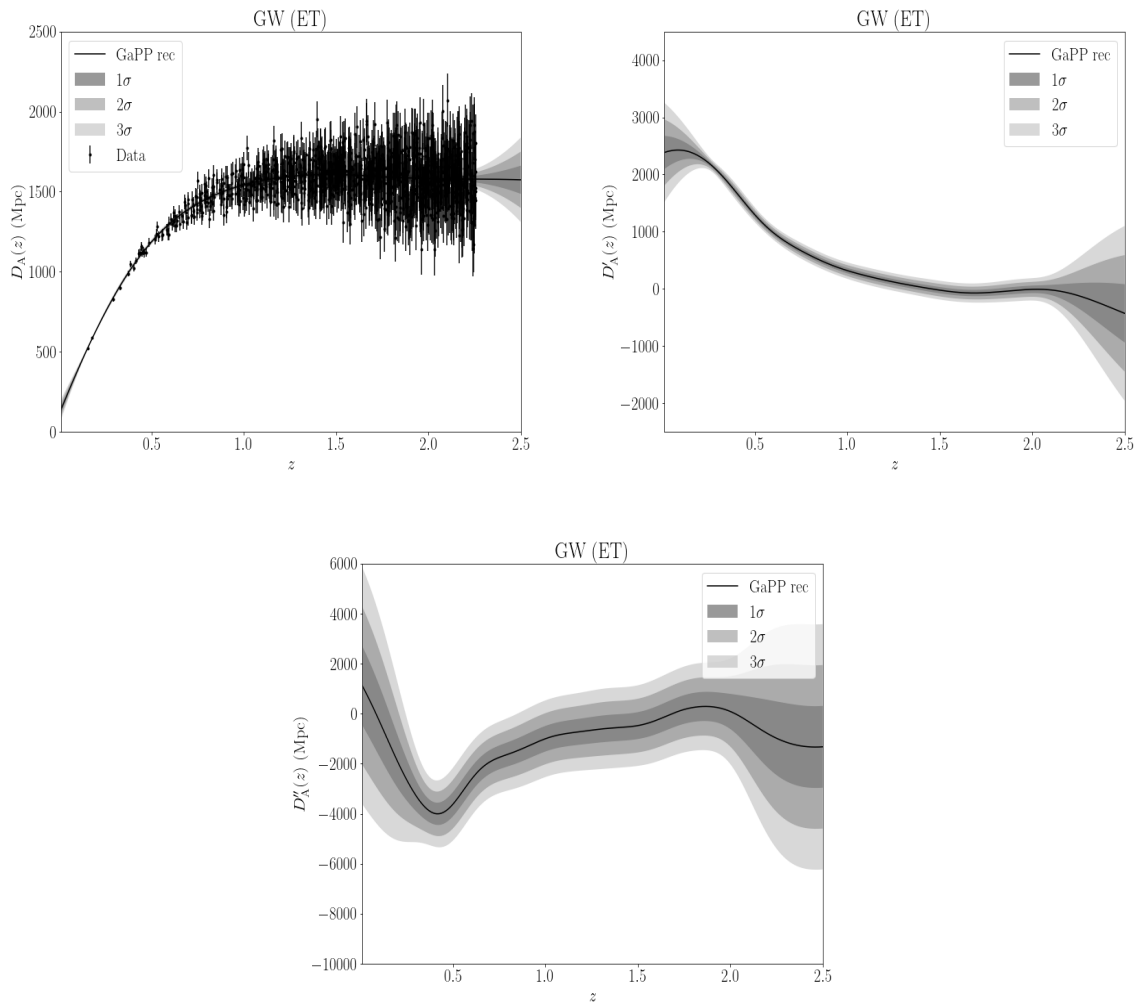


Figura 3.7: A mesma que a Fig. 3.6, mas assumindo o kernel Mat72 dos Processos Gaussianos, em vez disso.

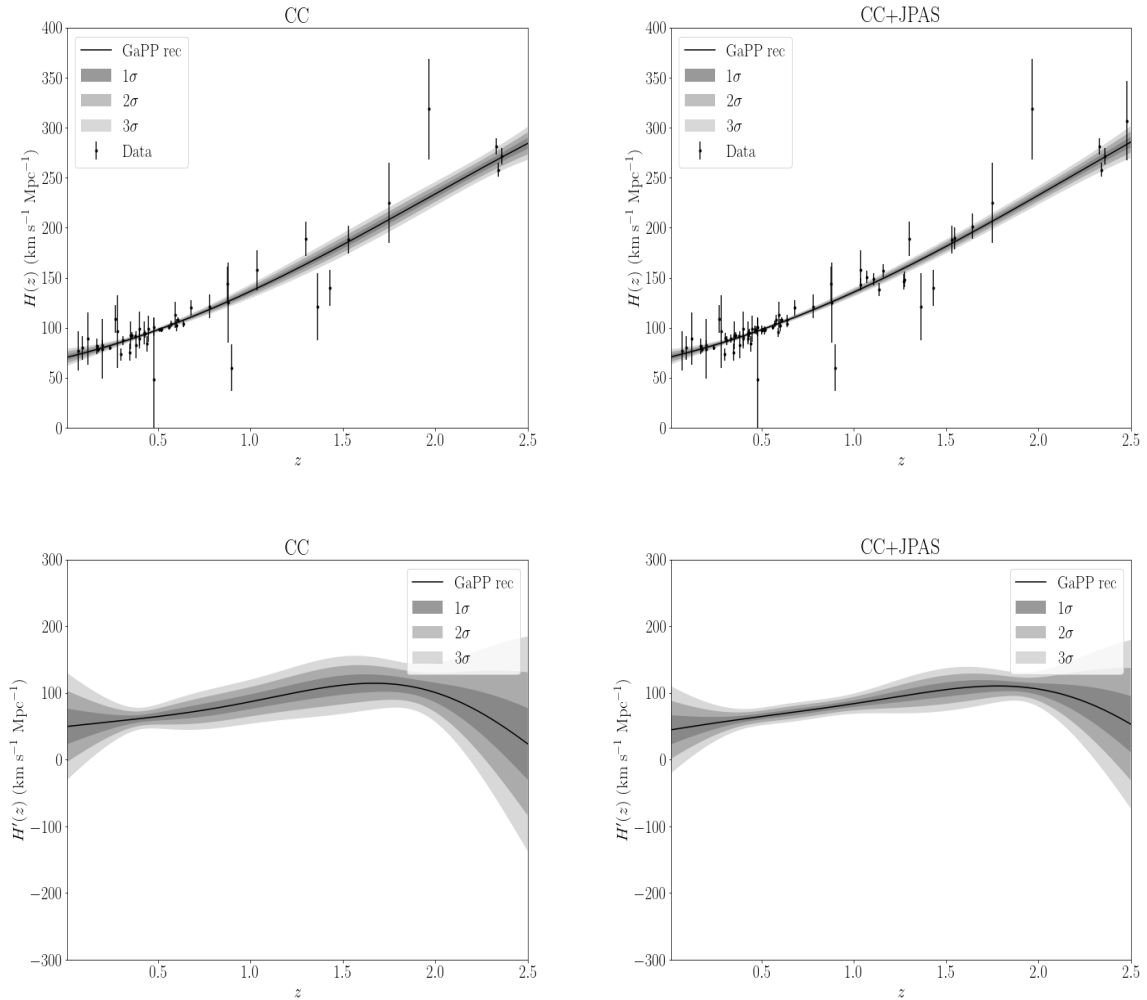


Figura 3.8: *Painel superior esquerdo*: Reconstrução do parâmetro de Hubble, $H(z)$, obtido a partir do conjunto de dados de cronômetros cósmicos. Os pontos pretos representam os pontos de dados com suas respectivas incertezas. *Painel superior direito*: Semelhante ao anterior, mas para cronômetros cósmicos combinados com o conjunto de dados simulados do J-PAS. *Painel inferior esquerdo*: A primeira derivada do parâmetro de Hubble, $H'(z)$, apenas a partir da amostra de cronômetros cósmicos. *Painel inferior direito*: Semelhante ao gráfico anterior, mas para cronômetros cósmicos com combinação do J-PAS. Como nos gráficos anteriores, as curvas cinzas denotam os níveis de confiança de 1, 2, e 3 σ das reconstruções, respectivamente, do tom mais escuro para o mais claro. Todos os resultados foram obtidos assumindo o kernel exponencial ao quadrado.

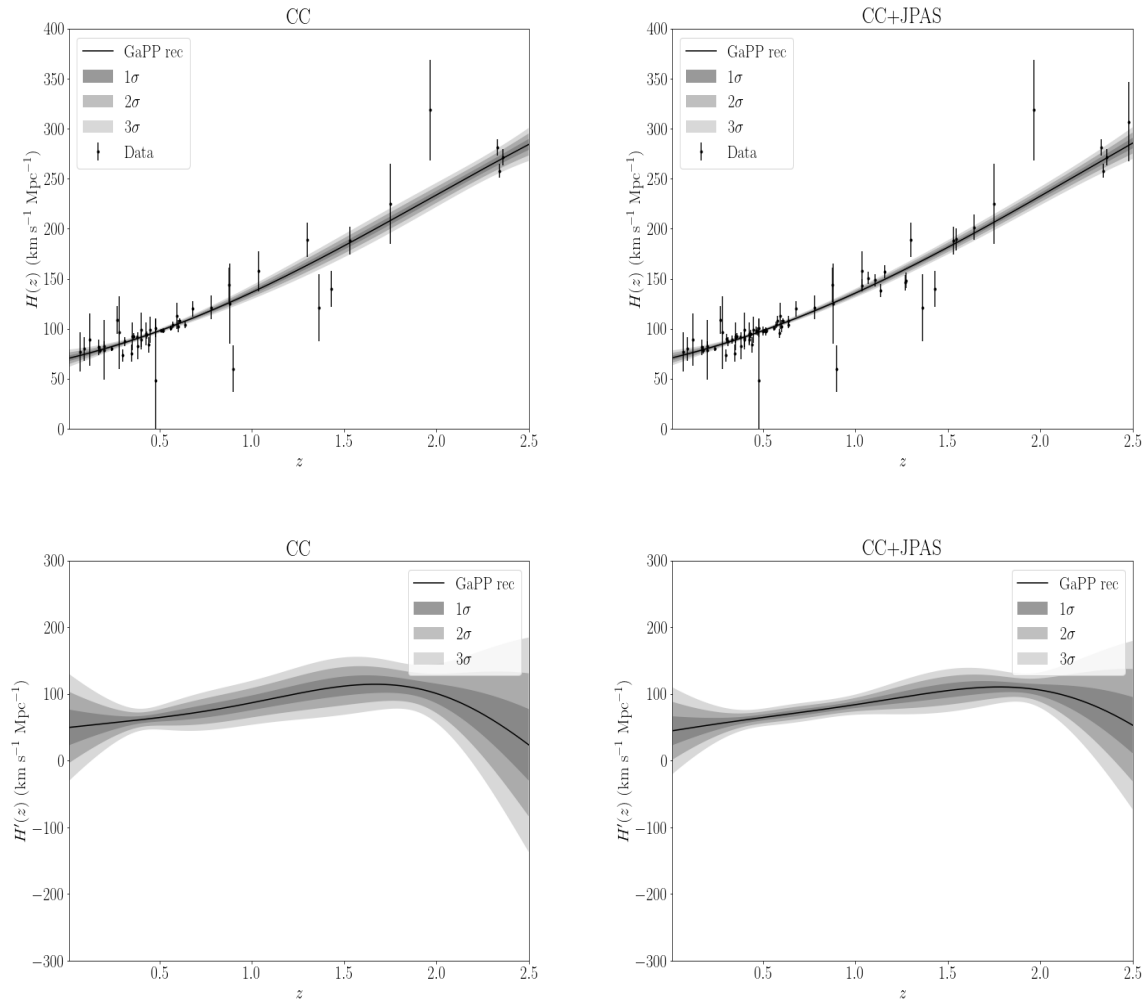


Figura 3.9: Semelhante à Fig. 3.8, mas assumindo o kernel Mat72 dos Processos Gaussianos, em vez disso

anos, uma abordagem não-paramétrica. Em seguida, estimamos a precisão de tal medição utilizando simulações de levantamentos futuros de *redshift* de galáxias, como o J-PAS, e de sirenes-padrão de experimentos com ondas gravitacionais, como nos casos do LIGO e do Einstein Telescope.

Nossos resultados mostram uma melhoria significativa entre as medidas atuais e futuras do valor da velocidade da luz, reduzindo nossas incertezas de 4–6% para cerca de 2–2.5% quando as simulações de ondas gravitacionais são consideradas, e para quase 1.5% quando as medições simuladas do J-PAS também são levadas em conta, em um intervalo de *redshift* de $1.4 < z < 1.8$. Esses números se mantêm independentemente da suposição sobre o kernel de reconstrução, o número de bins para cada reconstrução etc. Em particular, nossos resultados mostram a capacidade da próxima geração de observações cosmológicas em termos de realizar um teste poderoso de física fundamental. Descobrimos, a partir das nossas análises, que tal combinação de conjuntos de dados, juntamente com a abordagem estatística aqui implantada, será capaz de fornecer uma medição de precisão em nível percentual da velocidade da luz em escalas cosmológicas – algo ainda inédito no presente momento.

Capítulo 4

Restrições sobre o modelo de velocidade da luz minimamente estendido através da relação de dualidade de distância cósmica

Neste capítulo apresentamos as nossas análises relatadas em (SANTOS *et al.*, 2025), onde testamos a viabilidade do modelo meVSL através da RDDC comparando as medições da distância de diâmetro angular d_A fornecidas pelo BAO transversal (2D) e anisotrópico (3D) de diferentes levantamentos, como SDSS, DES e DESI, em combinação com as medições da distância de luminosidade d_L de SNe da compilação Pantheon+SH0ES.

4.1 Relação de dualidade de distâncias cósmicas (RDDC)

Na Seção 2.5, descrevemos algumas das diferentes definições de medidas de distâncias comumente utilizadas em Cosmologia, que são a distância de luminosidade $d_L(z)$ e distância de diâmetro angular $d_A(z)$. As suas definições estão conectadas pela equação (2.73), como segue

$$d_L(z) = d_A(z)(1+z)^2, \quad (4.1)$$

chamada de relação de dualidade de distâncias cósmicas (RDDC), dada pela primeira vez por Etherington (ETHERINGTON, 1933). A RDDC é considerada válida para quaisquer teorias métricas gerais da gravidade, em qualquer contexto, baseada em duas hipóteses fundamentais. O número de fótons é conservado durante a evolução cósmica (ELLIS, 2007a, 1971) e a gravidade é descrita por uma teoria métrica com fótons viajando ao longo de geodésicas nulas únicas na geometria Riemanniana.

Por ser independente de modelo cosmológico, a RDDC serve como uma ferramenta essencial para verificar a consistência em observações cosmológicas. O acoplamento de fótons com partículas desconhecidas (BASSETT e KUNZ, 2004), a extinção de fótons pela poeira intergaláctica (CORASANITI, 2006), fótons que não viajam ao longo de geodésicas nulas (SCHNEIDER *et al.*, 2017; SCHULLER e WERNER, 2017), a variação de constantes fundamentais como a constante de estrutura fina (BORA e DESAI, 2021; GONÇALVES *et al.*, 2020) e a velocidade da luz (ELLIS, 2007b)¹, podem levar a uma violação da RDDC. Portanto, testes observacionais da RDDC constituem uma investigação crucial do modelo padrão, bem como da física fundamental.

Destacamos aqui algumas abordagens, na literatura recente, que foram projetadas e adotadas para testar a validade da RDDC no contexto de alguns objetos astrofísicos. Por exemplo, explosões de raios gama (GRBs) foram usadas para testar a validade da RDDC, pois podem ser usadas como velas padrão e fornecem distâncias de luminosidade em altos *redshifts* (HOLANDA e BUSTI, 2014). A partir de ondas gravitacionais como sirenes-padrão, a distância de luminosidade pode ser obtida sem a necessidade de uma escada de distâncias cósmicas, servindo assim como um teste para a RDDC (ARJONA *et al.*, 2021; QI *et al.*, 2019; YANG *et al.*, 2019). Quanto à radiação cósmica de fundo (RCF), qualquer desvio de seu espectro de corpo negro resultaria em uma violação da RDDC (ELLIS *et al.*, 2013). Dados de SNe também foram usados como fonte de distância de luminosidade para testar a RDDC, como em (BASSETT e KUNZ, 2004).

Notavelmente, também, SNe fortemente lenteadas podem, fornecer tanto a distância de luminosidade quanto a distância do diâmetro angular, permitindo assim um teste de RDDC (RENZI *et al.*, 2021). Outra maneira de testar a RDDC é por meio da relação entre a fração de massa de gás de aglomerados de galáxias (GCs) obtida através do efeito Sunyaev-Zeldovich (f_{SZE}) e através do brilho da superfície de raios X (f_{X}), que é dado por $f_{\text{SZE}}/f_{\text{X}} = d_{\text{L}}/(d_{\text{A}}(1+z)^2) \equiv \eta(z)$ (HOLANDA *et al.*, 2012a). Combinações de diferentes sondas cosmológicas foram usadas para testar a RDDC, por exemplo, as medições de distância de luminosidade e distância de diâmetro angular de SNe e GCs, respectivamente (GONCALVES *et al.*, 2012; HOLANDA *et al.*, 2010, 2012b; LI *et al.*, 2011; MENG *et al.*, 2012; YANG *et al.*, 2013), além de observações mais recentes de galáxias HII e distâncias de luminosidade SNe com as distâncias de diâmetro angular de estruturas ultracompactas em quasares de rádio (QSO) (LIU *et al.*, 2021, 2023a). Todas essas análises não mostraram desvios estatisticamente significativos da RDDC padrão, considerando a limitação dos dados observacionais.

No entanto, é importante revisitar a RDDC à luz da quantidade e qualidade dos dados observacionais que se tornaram disponíveis recentemente. Aqui, consideramos uma nova amostra de medições de oscilação acústica bariônica (BAO) fornecidas pelo Dark Energy Spectroscopic Instrument (ABDUL-KARIM *et al.*, 2025; ADAME *et al.*, 2025), junta-

¹Para uma ampla revisão sobre este tópico, encaminhamos o leitor interessado para (UZAN, 2024).

mente com medições existentes do Sloan Digital Sky Survey (SDSS) (ALCANIZ *et al.*, 2017; CARVALHO *et al.*, 2016, 2020; DE CARVALHO *et al.*, 2018, 2021; DES BOURBOUX *et al.*, 2020; GIL-MARÍN *et al.*, 2016; HOU *et al.*, 2021) e do Dark Energy Survey (DES) (ABBOTT *et al.*, 2024b), como réguas padrão, fornecendo-nos assim $d_A(z)$, juntamente com compilações recentes de SNe do Pantheon+ e SH0ES (BROUT *et al.*, 2022; RIESS *et al.*, 2022) como a sonda de $d_L(z)$. Em (FAVALE *et al.*, 2024), os autores exploraram a consistência da RDDC usando essa combinação de conjuntos de dados, relatando indícios de um potencial desvio desta relação dentro de um nível de confiança de $\sim 2\sigma$, onde os autores atribuíram a possíveis tensões entre SNe e BAO, ou talvez devido à inconsistências internas entre os subconjuntos de dados de BAO. Mais recentemente, em (TEIXEIRA *et al.*, 2025), foi demonstrado que desvios da RDDC poderiam resolver a tensão de H_0 .

Outra possível explicação para este resultado baseia-se em processos físicos mais exóticos. Em um modelo proposto recentemente, o modelo de velocidade da luz variável minimamente estendida (meVSL) (LEE, 2021b), temos $\tilde{c}(z) \propto (1+z)^{-b/4}$, que implica em uma mudança na frequência de fótons que leva a uma violação da RDDC padrão (LEE, 2021a)². Escolhemos esta formulação VSL porque ela mantém a lei de evolução de temperatura da RCF, $T \propto a^{-1}$, que é bem restringida por dados observacionais (AP *et al.*, 2020; GIARÈ *et al.*, 2025). Neste contexto, testamos a validade da RDDC investigando se há evolução da função $\eta(z) = d_L(z)/[(1+z)^2 d_A(z)]$ em função do *redshift*, onde adotamos diferentes combinações dos dados mencionados anteriormente para restringir o parâmetro b do modelo meVSL, conforme explicaremos a seguir.

4.2 Distâncias no modelo meVSL

Nesta seção nos dedicamos a fornecer o embasamento teórico sob o qual é construído o modelo meVSL de acordo com (LEE, 2021a). Segundo o autor para que uma teoria VSL seja viável essa no mínimo deve satisfazer o sucesso da TRE, incluindo ao menos o eletromagnetismo e a termodinâmica. Com essa finalidade, o autor, adotou a suposição de que a velocidade da luz, \tilde{c} , varia com o fator de escala, ou seja, $\tilde{c}[a]$. Destacando ainda que o modelo surge naturalmente se não houver suposições adicionais sobre a dilatação do tempo cosmológico na métrica FLRW.

A abordagem consiste em assumir um Universo plano descrito pela métrica FLRW onde o parâmetro de Hubble reduzido e a aceleração podem ser escritos como

$$E^2(a) = \frac{H^2(a)}{H_0^2} = (\Omega_{m0}a^{-3} + \Omega_{X0}a^{-3(1+\omega)})a^{\frac{b}{2}} \equiv E(a)^{(RG)^2} a^{\frac{b}{2}} \quad (4.2)$$

²Para formulações alternativas de modelos de velocidade da luz variável na literatura, veja (GUPTA, 2023; NGUYEN, 2025).

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G_0}{3} \left[\left(1 - \frac{b}{2}\right) \rho_{m0} a^{-3} + \left(1 + 3\omega - \frac{b}{2}\right) \rho_{X0} a^{-3(1+\omega)} \right] a^{\frac{b}{2}}, \quad (4.3)$$

onde b é um parâmetro do modelo de meVSL que muda a velocidade da luz como

$$\tilde{c}(z) = \tilde{c}_0(1+z)^{-\frac{b}{4}}, \quad (4.4)$$

em que \tilde{c}_0 representa o valor atual da velocidade da luz, conforme medido em laboratórios da Terra. A Eq. (4.4) descreve as variações conjuntas de todas as constantes físicas relacionadas para satisfazer a invariância de Lorentz, a termodinâmica e a identidade de Bianchi. A Tabela 4.1 mostra as evoluções cosmológicas tanto em constantes físicas quanto em quantidades entre diferentes modelos VSL. Os resultados na última coluna vêm do meVSL.

A distância própria d_p no modelo meVSL, para qualquer curvatura cósmica, é dada por

$$d_p = a(t) \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} \equiv a(t) f(r) \begin{cases} a(t) \sin^{-1} r \rightarrow k = 1 \\ a(t) r \rightarrow k = 0 \\ a(t) \sinh^{-1} r \rightarrow k = -1 \end{cases}, \quad (4.5)$$

sendo que o *redshift*, no modelo meVSL é o mesmo da RG. Enquanto, a distância comóvel $d_C(z)$ é dada por

$$d_C \equiv a(t) \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}} = \frac{\tilde{c}_0}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E^{(\text{GR})}(z')} = d_C^{\text{GR}}(z), \quad (4.6)$$

sendo que o raio de Hubble é idêntico tanto no modelo meVSL quanto na RG, assim como o *redshift*. Portanto, as distâncias comóveis tanto na RG quanto no meVSL também são as mesmas.

Além disso, podemos definir a distância comóvel transversal d_M no meVSL de acordo com

$$d_M(z) = d_M^{(\text{GR})}(z) = \begin{cases} \frac{\tilde{c}_0}{H_0} \frac{1}{\sqrt{\Omega_{K0}}} \sinh \left(\sqrt{\Omega_{K0}} \frac{H_0}{\tilde{c}_0} d_C \right) \rightarrow \Omega_{K0} > 0 \\ d_C \rightarrow \Omega_{K0} = 0 \\ \frac{\tilde{c}_0}{H_0} \frac{1}{\sqrt{|\Omega_{K0}|}} \sinh \left(\sqrt{|\Omega_{K0}|} \frac{H_0}{\tilde{c}_0} d_C \right) \rightarrow \Omega_{K0} < 0 \end{cases}, \quad (4.7)$$

e \tilde{c}_0 representa novamente o valor atual da velocidade da luz, em todos os casos acima.

Como vimos as distâncias $d_C(z)$ e $d_M(z)$ são iguais no modelo meVSL, já que estamos assumindo um Universo plano. No entanto, para obtermos a distância de luminosidade no modelo meVSL, é necessário que essas distâncias sejam reexaminadas a partir de suas definições. Assim, têm-se que a luminosidade observada, L_0 , detectada na época atual difere da luminosidade absoluta, L_s , da fonte emitida no *redshift*. Dito isso, podemos

escrever a conservação do fluxo \mathcal{F} da fonte para o observador como

$$\mathcal{F} = \frac{L_s}{4\pi d_L^2(z)} = \frac{L_0}{4\pi d_M^2(z_0)}. \quad (4.8)$$

A luminosidade absoluta, $L_s \equiv \Delta E_1/\Delta t_1$, é definida pela razão de energia entre a luz emitida ΔE_1 e o intervalo de tempo dessa emissão Δt_1 . Além disso, a luminosidade observada também pode ser escrita como $L_0 \equiv \Delta E_0/\Delta t_0$. Assim, podemos reescrever a distância de luminosidade usando a Eq.(4.8) como

$$d_L^2(z) = \frac{L_s}{L_0} d_M^2(z_0), \quad (4.9)$$

$$d_L^2(z) = \frac{\Delta E_1}{\Delta E_0} \cdot \frac{\Delta t_0}{\Delta t_1} d_M^2(z_0). \quad (4.10)$$

Já que temos

$$\frac{\Delta E_1}{\Delta E_0} = \frac{\tilde{h}_1 \tilde{\nu}_1}{\tilde{h}_0 \tilde{\nu}_0} = \frac{\tilde{\nu}_1^{(\text{GR})}}{\tilde{\nu}_0^{(\text{GR})}} = (1+z), \quad \frac{\Delta t_0}{\Delta t_1} = \frac{\tilde{\nu}_1^{(\text{GR})}(1+z)^{-\frac{b}{4}}}{\tilde{\nu}_0^{(\text{GR})}} = (1+z)^{1-\frac{b}{4}}, \quad (4.11)$$

podemos derivar a relação entre a distância de luminosidade e a distância comóvel transversal da seguinte forma

$$d_L(z) = (1+z)^{1-\frac{b}{8}} d_M(z) = (1+z)^{2-\frac{b}{8}} d_A(z). \quad (4.12)$$

Tabela 4.1: Evoluções cosmológicas em grandezas físicas e constantes de vários modelos VSL. NC significa não considerado (LEE, 2021b).

c	G	\hbar	λ	ν	m	k_B	T	e	α	Reference
$c_0 a^{-1/2}$	$G_0 a^{-1}$	$\hbar_0 a^{3/2}$	$\lambda_0 a$	$\nu_0 a^{-3/2}$	$m_0 a$	NC	NC	$e_0 a^{1/2}$	const	(PETIT, 1988b, 1995; PETIT e D'AGOSTINI, 2008)
$c_0 a^n$	const	$\hbar_0 a^n$	const	$\nu_0 a^n$	const	const	$T_0 a^{2n}$	const	$\alpha_0 a^{-2n}$	(ALBRECHT e MAGUELJO, 1999; BARROW, 1999)
$c_0 a^{-1/4}$	const	NC	$\lambda_0 a$	$\nu_0 a^{-5/4}$	$m_0 a^{1/2}$	const	$T_0 a^{-5/4}$	NC	NC	(SHOJAIE e FARHOUDI, 2006, 2007)
$c_0 a^n$	const	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	NC	(BALCERZAK e DABROWSKI, 2014a,b; QI <i>et al.</i> , 2014)
$c_0 a^{b/4}$	$G_0 a^b$	$\hbar_0 a^{-b/4}$	$\lambda_0 a$	$\nu_0 a^{-1+b/4}$	$m_0 a^{-b/2}$	const	$T_0 a^{-1}$	$e_0 a^{-b/4}$	$\alpha_0 a^{-b/4}$	meVSL

4.3 Análises

Adiante, descrevemos os conjuntos de dados observacionais utilizados neste capítulo e nossa metodologia para testar a validade da RDDC.

Considerando a Eq. 4.12, temos que, neste modelo meVSL, a RDDC padrão é modificada da seguinte forma

$$\eta(z) \equiv \frac{d_L}{d_A(1+z)^2} = (1+z)^{-\frac{b}{8}}. \quad (4.13)$$

Na Eq. 4.13, b denota o parâmetro que mede a variação da velocidade da luz. Logo,

Tabela 4.2: Os pontos de dados de BAO 3D usados neste trabalho.

Survey	z	D_A/r_d	References
DES Y6	0.85	10.58 ± 0.21	(ABBOTT <i>et al.</i>, 2024b)
BOSS DR12	0.32	6.5986 ± 0.1337	(GIL-MARÍN <i>et al.</i>, 2016)
BOSS DR12	0.57	9.389 ± 0.103	(GIL-MARÍN <i>et al.</i>, 2016)
eBOSS DR16Q	1.48	12.18 ± 0.32	(HOU <i>et al.</i>, 2021)
Ly α -F eBOSS DR16	2.334	$11.25^{+0.36}_{-0.33}$	(DES BOURBOUX <i>et al.</i>, 2020)
LRG1 DESI Y2	0.51	8.998 ± 0.1375	(ABDUL-KARIM <i>et al.</i>, 2025)
LRG2 DESI Y2	0.71	10.144 ± 0.1376	(ABDUL-KARIM <i>et al.</i>, 2025)
LRG3+ELG1 DESI Y2	0.93	11.178 ± 0.1101	(ABDUL-KARIM <i>et al.</i>, 2025)
ELG2 DESI Y2	1.32	11.898 ± 0.2100	(ABDUL-KARIM <i>et al.</i>, 2025)
QSO DESI Y2	1.48	12.306 ± 0.4813	(ABDUL-KARIM <i>et al.</i>, 2025)
Ly α -F DESI Y2	2.33	11.708 ± 0.2909	(ABDUL-KARIM <i>et al.</i>, 2025)

desvios estatisticamente significativos de $b = 0$, ou equivalentemente de $\eta(z) = 1$, implicaria em uma violação da RDDC e uma evidência favorável a este modelo meVSL. Portanto, restringimos esse parâmetro b através da RDDC usando observações cósmicas e métodos estatísticos que serão detalhados a seguir.

4.3.1 Dados

Consideramos a compilação mais recente de SNe, ou seja, o conjunto de dados Pantheon+ e SHOES ([BROUT *et al.*, 2022](#)) (ver também ([RIESS *et al.*, 2022](#))), assim como na seção 3.3, a fim de calcular suas distâncias de luminosidade de acordo com

$$d_L(z) = 10^{\frac{m_B(z) - M_B - 25}{5}}, \quad (4.14)$$

onde

$$M_B = -19.25 \pm 0.03. \quad (4.15)$$

Para calcular a distância de diâmetro angular, utilizamos medições do BAO obtidas a partir do agrupamento em larga escala de objetos cósmicos e medidas por muitos diferentes levantamentos tais como SDSS, DES e DESI, conforme apresentado abaixo. Similarmente a ([FAVALE *et al.*, 2024](#)), adotamos dois conjuntos de dados distintos de BAO, que consistem em medições do sinal do BAO anisotrópico (tridimensional) e transversal (bidimensional), que de agora em diante chamaremos de BAO 3D e BAO 2D, respectivamente, conforme listado nas Tabelas 4.2 (BAO 3D) e 4.3 (BAO 2D). Observe que a subamostra BAO 3D do DESI foi atualizada para sua versão mais recente, denominada DESI Y2 ³ ([ABDUL-KARIM *et al.*, 2025](#)).

³Convertemos as medições da subamostra BAO 3D DESI DR2, bem como suas incertezas, que são dadas por D_M/r_d para D_A/r_d , conforme apresentado na Tabela 4.2.

Tabela 4.3: Os pontos de dados de BAO 2D usados neste trabalho.

Survey	z	θ_{BAO} [deg]	References
SDSS DR12	0.110	19.8 ± 3.26	(DE CARVALHO <i>et al.</i> , 2021)
SDSS DR7	0.235	9.06 ± 0.23	(ALCANIZ <i>et al.</i> , 2017)
SDSS DR7	0.365	6.33 ± 0.22	(ALCANIZ <i>et al.</i> , 2017)
SDSS DR10	0.450	4.77 ± 0.17	(CARVALHO <i>et al.</i> , 2016)
SDSS DR10	0.470	5.02 ± 0.25	(CARVALHO <i>et al.</i> , 2016)
SDSS DR10	0.490	4.99 ± 0.21	(CARVALHO <i>et al.</i> , 2016)
SDSS DR10	0.510	4.81 ± 0.17	(CARVALHO <i>et al.</i> , 2016)
SDSS DR10	0.530	4.29 ± 0.30	(CARVALHO <i>et al.</i> , 2016)
SDSS DR10	0.550	4.25 ± 0.25	(CARVALHO <i>et al.</i> , 2016)
SDSS DR11	0.570	4.59 ± 0.36	(CARVALHO <i>et al.</i> , 2020)
SDSS DR11	0.590	4.39 ± 0.33	(CARVALHO <i>et al.</i> , 2020)
SDSS DR11	0.610	3.85 ± 0.31	(CARVALHO <i>et al.</i> , 2020)
SDSS DR11	0.630	3.90 ± 0.43	(CARVALHO <i>et al.</i> , 2020)
SDSS DR11	0.650	3.55 ± 0.16	(CARVALHO <i>et al.</i> , 2020)
DES Y6	0.850	2.932 ± 0.068	(ABBOTT <i>et al.</i> , 2024b)
BOSS DR12Q	2.225	1.77 ± 0.31	(DE CARVALHO <i>et al.</i> , 2018)

4.3.2 Metodologia

A distância de diâmetro angular d_A , usada neste trabalho é derivada de medições de BAO. Os dados de BAO fornecem o tamanho angular do horizonte sonoro na época de arrasto dos bárions, como bem detalhamos na Seção 2.7, definido como

$$\theta(z) = \frac{r_d}{d_M(z)}, \quad (4.16)$$

em vários *redshifts*. Dessa maneira, podemos considerar o r_d medido nessa época como uma régua padrão (AGHANIM *et al.*, 2020).

É interessante notarmos que os dados de BAO transversais (2D), listados na Tabela 4.3, são fornecidos em termos de θ_{BAO} , então, podemos convertê-los em medidas de distância de diâmetro angular usando a seguinte relação

$$d_A(z) = \frac{r_d}{(1+z)\theta_{\text{BAO}}} \quad (4.17)$$

e podemos obter suas respectivas incertezas por meio de uma propagação de erro padrão, conforme segue,

$$\sigma_{d_A(z)}^2 = \left[\frac{r_d}{\theta_{\text{BAO}}^2(z)(1+z)} \right]^2 \sigma_{\theta_{\text{BAO}}(z)}^2 + \left[\frac{1}{\theta_{\text{BAO}}(z)(1+z)} \right]^2 \sigma_{r_d}^2. \quad (4.18)$$

No caso dos dados do BAO anisotrópico (3D), listados na Tabela 4.2, podemos obter $d_A(z)$ simplesmente multiplicando $D_A(z)/r_d$ pelo valor de r_d , de modo que suas respectivas

incertezas sejam obtidas por

$$\sigma_{d_A(z)}^2 = [r_d]^2 \sigma_{(D_A(z)/r_d)}^2 + \left[\frac{D_A(z)}{r_d} \right]^2 \sigma_{r_d}^2. \quad (4.19)$$

Na literatura, de fato, foi demonstrado que quando os dados de BAO são calibrados através de SNe, estes preferem r_d significativamente menor do que quando calibrados usando as medidas da radiação cósmica de fundo ou nucleossíntese primordial (AYLOR *et al.*, 2019; BERNAL *et al.*, 2016). Por esse motivo, o valor do horizonte sonoro r_d que adotamos neste trabalho, a menos que indicado de outra forma, consiste nos valores mais bem ajustados de sondas cosmológicas de baixo z (SNe e BAO) ao assumir um H_0 a priori do SH0ES (a partir de valores e dados de 2018), ou seja, $r_d = 136,4 \pm 3,5 \text{Mpc}$ (AGHANIM *et al.*, 2020).

Por outro lado, vale destacar que realizamos nossas análises também para o r_d melhor ajuste da RCF do Planck ($r_d = 147,05 \pm 0,3 \text{Mpc}$), o que levou a incertezas muito altas dos nossos resultados. Isso se deve porque esse valor não é consistente com a suposição implícita de H_0 que fazemos ao usar o valor da magnitude absoluta SNe, como na Eq. (4.15), fornecida pelo Pantheon+ e SH0ES, que está a $\sim 5\sigma$ do nível de confiança de distância da medição de H_0 da RCF (para uma discussão recente sobre este tópico consultar (KEIL *et al.*, 2025)). Optamos, portanto, por trabalhar com o $r_d = 136,4 \pm 3,5 \text{Mpc}$, porque a medição da Constante de Hubble pelo SH0ES assume apenas cosmografia, enquanto as medições da Constante de Hubble do Planck (e, conseqüentemente o horizonte sonoro) precisam assumir ΛCDM ou outros modelos de energia escura.

Nosso próximo passo agora é obter $\eta(z)$. Portanto, chamamos novamente a função definida como

$$\eta(z) = \frac{d_L(z)}{(1+z)^2 d_A(z)}, \quad (4.20)$$

cuja propagação de erros pode ser obtida através

$$\sigma_{\eta(z)}^2 = \left[\frac{1}{(1+z)^2 d_A(z)} \right]^2 \sigma_{d_L(z)}^2 + \left[\frac{d_L(z)}{(1+z)^2 d_A^2(z)} \right]^2 \sigma_{d_A(z)}^2, \quad (4.21)$$

em que as incertezas da distância de diâmetro angular correspondem às Eqs. (4.18) e (4.19) para os casos BAO 2D e 3D, respectivamente. A incerteza da distância da luminosidade é dada por

$$\sigma_{d_L(z)} = \frac{\log(10)}{5} 10^{\frac{m_B(z) - M_B - 25}{5}} \sigma_{m_B(z)}. \quad (4.22)$$

Para obtermos $\eta(z)$, precisamos de medidas de distância de SNe e BAO exatamente no mesmo *redshift*, o que geralmente não está disponível. Isso se deve a escassez de objetos astrofísicos confiáveis para os quais ambas as distâncias possam ser determinadas

de forma independente e precisa. Assim, para contornar esse problema, reconstruímos as medidas de distância de luminosidade d_L das SNe, através de PG, usando o conhecido código GAPP (SEIKEL *et al.*, 2012). Ou seja, realizamos uma interpolação nos dados de SNe por meio de 2400 bins no intervalo de redshift $0.1 < z < 2.5$, nos permitindo assim obter medidas de $d_L(z)$ nos mesmos *redshifts* em que existem medidas de $d_A(z)$ de BAO. Otimizamos os hiperparâmetros dos PG nesta análise, porém, sem definir *priors* específicos para essas quantidades, utilizando o kernel exponencial quadrático (SqExp, conforme definido no capítulo anterior).

A etapa final de nossa análise consiste em estimar o parâmetro b do modelo meVSL. Portanto, realizamos uma minimização do χ^2 , onde a função de distribuição de verossimilhança é dada por $\mathcal{L} \propto e^{-\chi^2/2}$, de acordo com

$$\chi^2 = \sum_i \frac{[\eta_i(z) - (1 + z_i)^{-b/8}]^2}{\sigma_{\eta_i(z)}^2}, \quad (4.23)$$

para b , assumindo um prior plano em $-3 \leq b \leq 3$, e o índice i denotando cada inferência $\eta(z)$, ou seja, o número de pontos de dados BAO na amostra correspondente. Este prior é amplo o suficiente para abranger pelo menos as regiões de confiança de 3σ para qualquer combinação de conjuntos de dados, o que justifica sua escolha. A fim de realizar esta análise, dividimos os dados em cinco subamostras diferentes, especificamente (i) uma subamostra com a combinação dos dados 2D+3D BAO (DESI), (ii) uma subamostra com os dados 2D+3D BAO (SDSS), (iii) uma subamostra apenas com os dados 2D BAO, bem como (iv) os dados 3D BAO (DESI) e (v) 3D BAO (SDSS), da mesma forma que em (FAVALE *et al.*, 2024).

Além disso, realizamos outro teste do χ^2 , para todas as subamostras BAO, em relação à RDDC padrão, por meio de

$$\chi^2 = \sum_i \frac{[\eta_i(z) - \eta_0]^2}{\sigma_{\eta_i(z)}^2}. \quad (4.24)$$

Nesta segunda abordagem, assumimos um valor constante para a parametrização RDDC (η_0) (DE BERNARDIS *et al.*, 2006; UZAN *et al.*, 2004). Fizemos isso, por dois motivos: primeiro, é o caso mais simples para uma função matemática descrever tal desvio e, segundo, não é dependente do *redshift*, portanto, podemos comparar estes resultados com a parametrização anterior.

4.4 Resultados

Na Figura 4.1, mostramos a reconstrução da distância de luminosidade, $d_L(z)$ via Processos Gaussianos obtida pelas Eqs. 4.14, 4.15 e 4.22, utilizando o kernel SqExp. A dis-

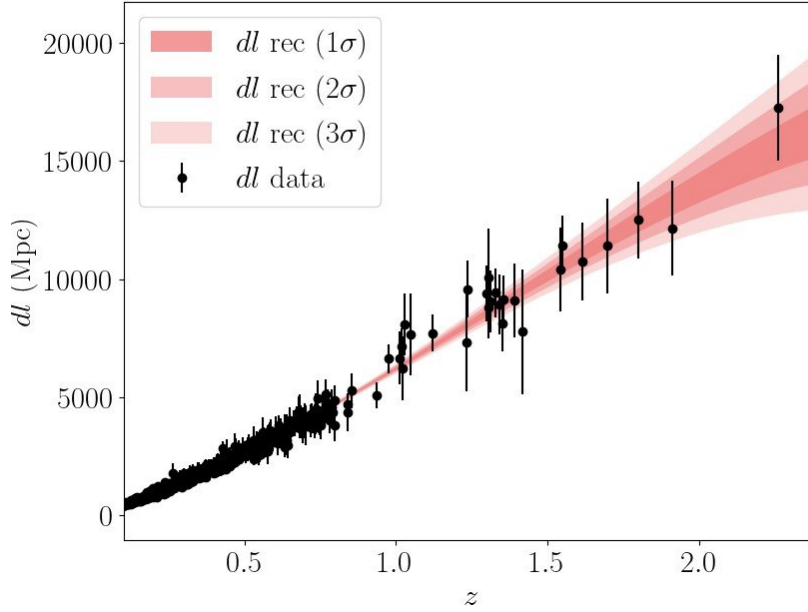


Figura 4.1: Reconstrução da distância de luminosidade, $d_L(z)$, via Processos Gaussianos, conforme obtida pelas Eqs. 4.14, 4.15 e 4.22, usando o kernel SqExp. Os pontos pretos com barras de erro no gráfico $d_L(z)$ representam os dados observacionais, e as curvas rosa denotam os níveis de confiança 1, 2, e 3σ das reconstruções, respectivamente, do tom mais escuro para o mais claro.

tribuição $\eta(z)$ de todos os pontos, em função do *redshift*, pode ser encontrada na Figura 4.2. No painel, mostramos a distribuição completa, onde os pontos azuis correspondem à combinação de SNe e BAO 3D (SDSS), os pontos vermelhos correspondem à combinação de SNe e BAO 2D e os pontos magenta correspondem à combinação de SNe com BAO 3D (DESI).

Tabela 4.4: Resultados do melhor ajuste para b , como em $\eta(z) = (1+z)^{-b/8}$. A primeira coluna exibe a combinação de conjuntos de dados, a segunda coluna fornece os valores de melhor ajuste para b e suas incertezas em 1σ , a terceira coluna representa o χ^2 reduzido, denominado χ_ν^2 , e a quarta coluna fornece o seu desvio de $b = 0$.

data-sets (SNe+)	$b \pm \sigma_b$	χ_ν^2	dev ($b = 0$)
2D+3D BAO (DESI)	-0.147 ± 0.142	1.274	1.04σ
2D+3D BAO (SDSS)	-0.281 ± 0.177	1.208	1.59σ
2D BAO	-0.911 ± 0.255	0.776	3.57σ
3D BAO (DESI)	0.173 ± 0.174	0.587	0.99σ
3D BAO (SDSS)	0.268 ± 0.256	0.134	1.05σ

Na Figura 4.3 mostramos as verossimilhanças normalizadas para o parâmetro b , obtidas por meio da Eq. 4.23 para cada um dos conjuntos de dados considerados aqui. No painel superior da figura temos os resultados para a combinação de dados SNe junta-

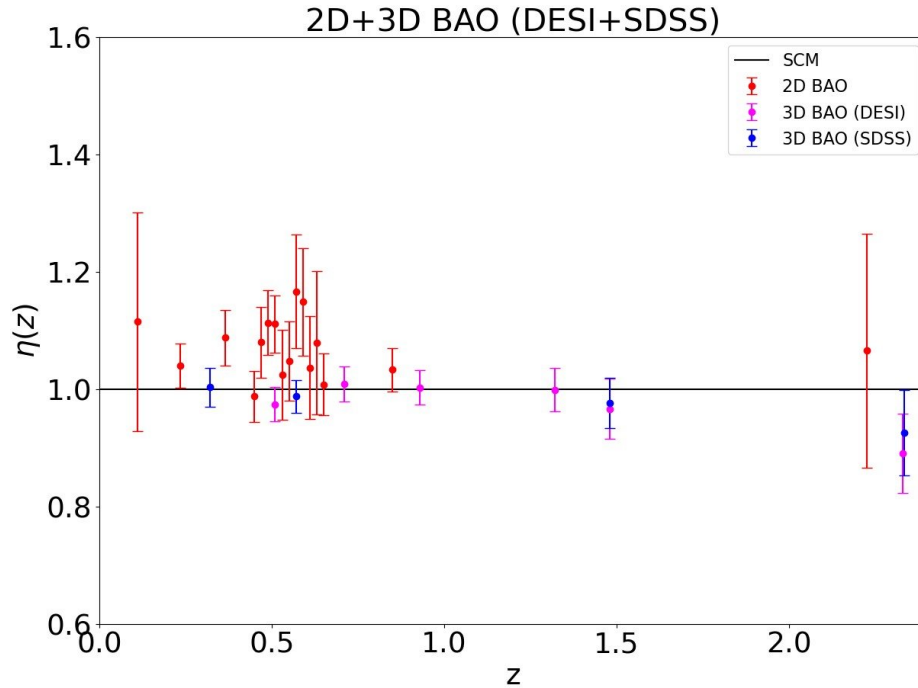


Figura 4.2: Medições de $\eta(z)$ com um nível de confiança de 2σ obtidas a partir dos dados de SNe Pantheon+ e SH0ES com os dados de BAO conjuntos (2D, 3D BAO (DESI) e 3D BAO (SDSS)). Os pontos de dados azul, vermelho e magenta representam os dados SNe combinados com o 3D BAO (SDSS), SNe com 2D BAO e SNe com 3D BAO (DESI), respectivamente. A linha horizontal representa a RDC padrão, ou seja, $\eta(z) = 1$.

Tabela 4.5: Resultados do melhor ajuste para η_0 , como em $\eta(z) = \eta_0 = \text{constant}$. A primeira coluna exibe a combinação de conjuntos de dados, a segunda coluna fornece os valores de melhor ajuste para η_0 e suas incertezas em 1σ , a terceira coluna representa o χ^2 reduzido, denominado χ_ν^2 , e a quarta coluna fornece o seu desvio de $\eta_0 = 1$.

data-sets (SNe+)	$\eta_0 \pm \sigma_{\eta_0}$	χ_ν^2	dev ($\eta_0 = 1$)
2D+3D BAO (DESI)	1.021 ± 0.010	1.118	2.09σ
2D+3D BAO (SDSS)	1.029 ± 0.011	1.005	2.64σ
2D BAO	1.055 ± 0.014	0.637	3.93σ
3D BAO (DESI)	0.988 ± 0.014	0.658	0.86σ
3D BAO (SDSS)	0.987 ± 0.018	0.339	0.72σ

mente com a amostra conjunta 2D+3D BAO (SDSS) representados pela linha tracejada azul, SNe+BAO 2D pela linha contínua vermelha e SNe juntamente com a amostra conjunta 2D+3D BAO (DESI) pela linha tracejada magenta. Em seguida, no painel inferior, apresentamos os resultados para os dados combinados SNe+ BAO 3D SDSS dados pela linha tracejada azul e SNe+BAO 3D DESI pela linha contínua vermelha. A linha vertical representa o caso para a RDC padrão, isto é, $b = 0$.

A partir da Eq. 4.24, obtivemos as verossimilhanças normalizadas para o parâmetro η_0 , para cada um dos conjuntos de dados considerados aqui, como nos mostra a Figura 4.4. Podemos conferir os resultados para a combinação de dados SNe juntamente com a amos-

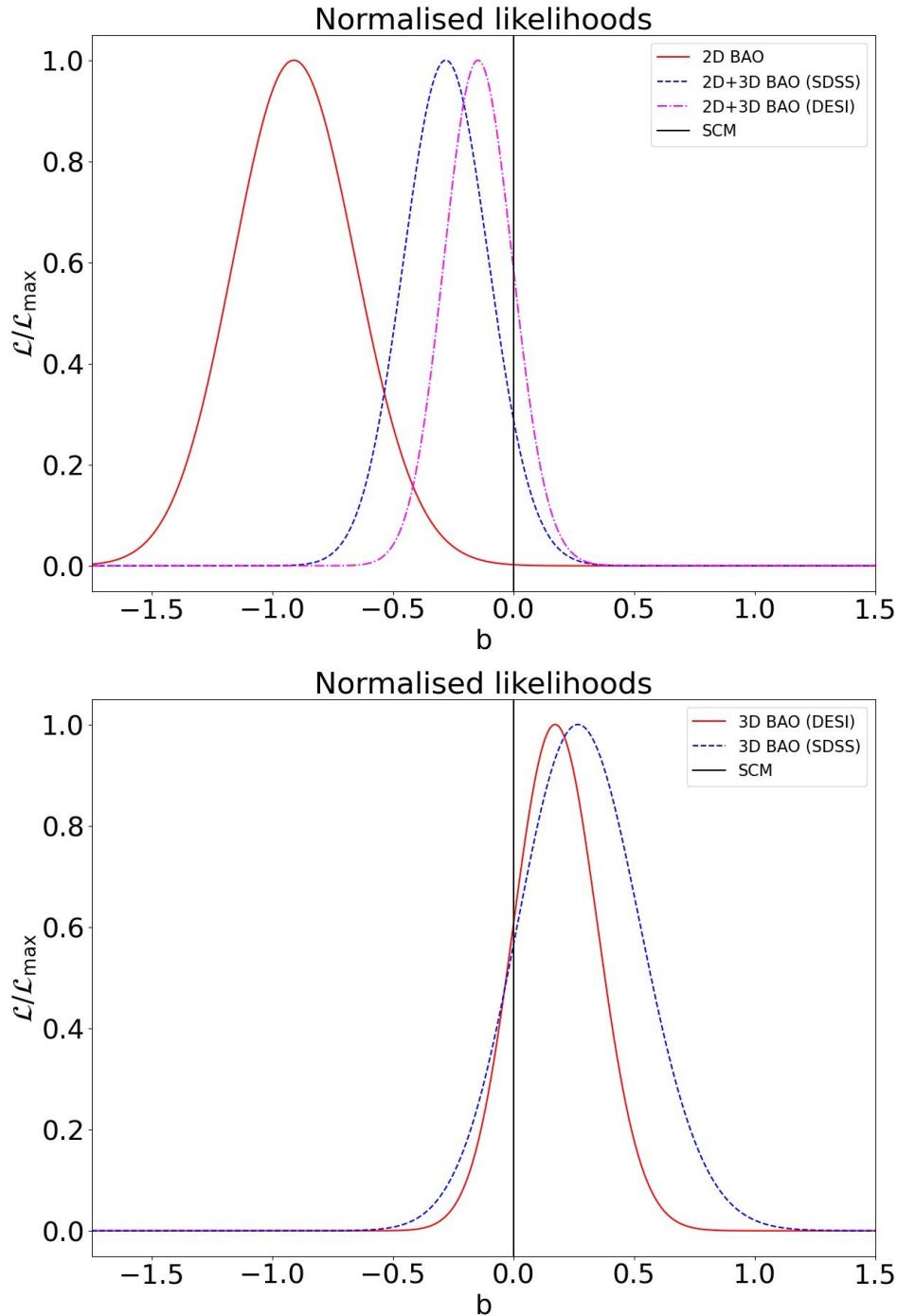


Figura 4.3: As verossimilhanças normalizadas para o parâmetro b assumindo SNe juntamente com (*painel superior:*) amostra conjunta 2D+3D BAO (SDSS) (linha tracejada azul), BAO 2D (linha contínua vermelha) e amostra conjunta 2D+3D BAO (DESI) (linha tracejada-pontilhada magenta), (*painel inferior:*) BAO 3D (SDSS, linha tracejada azul) e BAO 3D (DESI, linha contínua vermelha). A linha vertical denota o caso da RDC padrão, ou seja, $b = 0$.

tra conjunta 2D+3D BAO (SDSS) representados pela linha tracejada azul, SNe+BAO 2D pela linha contínua vermelha e SNe juntamente com a amostra conjunta 2D+3D BAO (DESI) pela linha tracejada magenta, no painel superior da figura. Já no painel inferior,

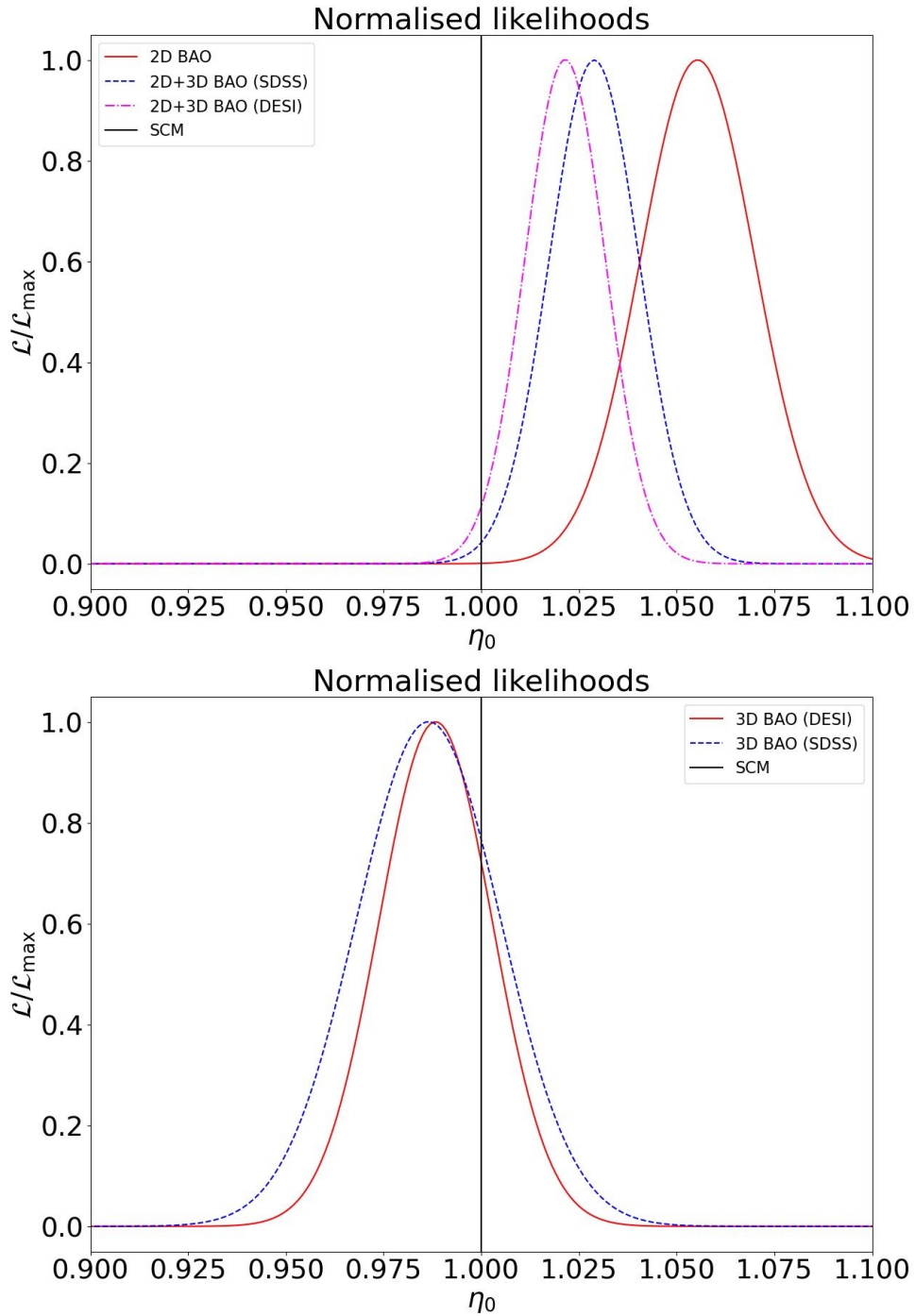


Figura 4.4: As verossimilhanças normalizadas para o parâmetro η_0 assumindo SNe juntamente com (*painel superior:*) amostra conjunta 2D+3D BAO (SDSS) (linha tracejada azul), BAO 2D (linha contínua vermelha) e amostra conjunta 2D+3D BAO (DESI) (linha tracejada-pontilhada magenta), (*painel inferior:*) BAO 3D (SDSS, linha tracejada azul) e BAO 3D (DESI, linha contínua vermelha). A linha vertical denota o caso da RDDC padrão, ou seja, $\eta_0 = 1.0$.

temos os resultados para os dados combinados SNe+ BAO 3D SDSS dados pela linha tracejada azul e SNe+BAO 3D DESI pela linha contínua vermelha. A linha vertical representa o caso para a RDDC padrão, isto é, $\eta_0 = 1$.

Na Tabela 4.4, mostramos os melhores ajustes e o desvio de 1σ (segunda e terceira colunas, respectivamente) que encontramos para o parâmetro b do modelo meVSL em relação a cada subamostra de BAO usada (primeira coluna). Como podemos ver na terceira coluna, o χ^2 reduzido depende de uma faixa aceitável, próxima da unidade. Na quarta coluna, podemos encontrar o desvio do melhor ajuste em relação ao cenário em que a RDDC é válida (ou seja, $b = 0$). Em quase todos os casos, o desvio é em torno de 1σ , tornando os resultados completamente compatíveis com a validade da RDDC. O desvio mais discrepante pode ser encontrado para a subamostra composta apenas pelos dados 2D. Este resultado é compatível com trabalhos recentes como (FAVALE *et al.*, 2024), que mostram algumas características particulares quando o BAO angular é usado. Para melhor abordar esta questão, investigações adicionais serão realizadas em trabalhos futuros – especialmente sob a luz de uma possível discrepância entre os valores de r_d favorecidos pelo BAO 2D e 3D, além da tensão de H_0 .

Conforme mencionado na seção anterior, também realizamos a análise assumindo uma parametrização de $\eta(z) = \eta_0$ e os resultados podem ser encontrados na Tabela 4.5. Mostramos os melhores ajustes e o desvio de 1σ em relação a cada subamostra de BAO utilizada. Também podemos encontrar o desvio do melhor ajuste em relação ao cenário em que a RDDC é válida (ou seja, $\eta_0 = 1$). Embora as combinações de dados 2D + 3D BAO (DESI) e 2D + 3D BAO (SDSS) apresentem um ligeiro desvio da validade da RDDC, o desvio mais discrepante também pode ser encontrado para a subamostra composta apenas pelos dados 2D. Os gráficos correspondentes para cada uma das análises anteriores podem ser encontrados nas Figuras 4.3 e 4.4.

4.5 Resumo

Neste capítulo, investigamos a relação de dualidade da distância cósmica (RDDC) comparando medições de distância de diâmetro angular, fornecidas pelos dados de oscilações acústicas bariônicas (BAO) transversais (bidimensionais, 2D) e anisotrópicos (tridimensionais, 3D) do SDSS e DESI, com medições de distância de luminosidade da compilação Pantheon+ e SH0ES de Supernovas tipo Ia (SNe). A reconstrução via Processos Gaussianos é empregada nos dados de SN para combinar $d_L(z)$ das SNe com os *redshifts* de $d_A(z)$ do BAO, de modo que possamos calcular $\eta(z)$ em cada *redshift* onde há dados de BAO.

Realizamos nossas análises sob a perspectiva de duas abordagens. Por um lado, verificamos o chamado modelo da velocidade minimamente estendida (meVSL), onde a relação é modificada como $\eta(z) = (1+z)^{-b/8}$, e por outro lado, assumimos uma função constante simples $\eta(z) = \eta_0$, onde o caso $\eta_0 = 1$ recupera a RDDC padrão. Em ambos os casos, estimamos o valor de melhor ajuste, para o parâmetro b e para o parâmetro η_0 , usando o estimador de máxima verossimilhança. No primeiro caso, encontramos $b = 0$ dentro de

1.6σ de nível de confiança para todas as combinações de dados, exceto para o caso SNe + BAO 2D, cujo desvio de $b = 0$ se encontra em 3.57σ . Na segunda abordagem, também verificamos os resultados para η_0 , encontrando resultados com conclusões semelhantes em comparação com a anterior. Encontramos um desvio máximo de $\eta_0 = 1$ em 2.6σ para a maioria das combinações de dados, exceto, novamente, para o caso SNe + BAO 2D, onde este desvio é de $\sim 4\sigma$.

Tais resultados podem ser atribuídos a sistemáticas não contabilizadas no BAO 2D, bem como a inconsistências internas entre os conjuntos de dados do BAO 2D e 3D, por exemplo, a preferência por diferentes valores de r_d , conforme sugerido em (CARVALHO *et al.*, 2016). Em (ANSELMINI *et al.*, 2019), os autores mostraram que ajustar a função de correlação de dois pontos enquanto fixa os parâmetros cosmológicos e de amortecimento não linear, que é parâmetro σ_0 ⁴ que aparece na Eq. 4 do artigo, em valores fiduciais leva a uma subestimação dos erros por um fator de dois, o que certamente poderia atenuar a tensão entre as medições do BAO 3D e 2D. Além disso, vários estudos relataram as discordâncias entre as medidas de BAO obtidas a partir do BAO bidimensional (2D, transversal ou angular) e do BAO tridimensional (3D ou anisotrópico) (ANSELMINI *et al.*, 2019; FAVALE *et al.*, 2024). Portanto, a importância da evidência para o modelo meVSL no caso do BAO 2D com SNe ainda está em debate, e investigações adicionais serão realizadas para esclarecer se isso se deve degenerescência dos *priors* de calibradores de distância, à discordância interna entre os conjuntos de dados disponíveis ou a uma indicação de uma nova física além do modelo padrão.

⁴Este parâmetro serve para suavizar o pico do BAO devido ao deslocamento das galáxias durante a evolução.

Capítulo 5

Conclusões e perspectivas

O Modelo Cosmológico Padrão mostra-se consistente com a maioria dos dados observacionais, porém, ainda apresenta algumas inconsistências. Por exemplo, alguns problemas fundamentais da Cosmologia moderna, como os problemas da singularidade, horizonte e curvatura, coincidência cósmica, entre outros. Foram encontradas inconsistências, além disso, dentro do modelo padrão, como no caso da tensão de Hubble entre dados observacionais da RCF e SNe. Dessa forma, esses problemas nos motivam constantemente na busca de soluções alternativas ao modelo padrão. Assumir que as constantes físicas podem ter variado em algum momento no passado, ou ainda estão variando no presente, é uma dessas possíveis soluções alternativas. Por este motivo, devemos investigar o estado observacional das variações das constantes fundamentais (UZAN, 2003). Nesse sentido, dentre os diversos cenários alternativos, as teorias VSL têm se mostrado candidatas em potencial para revisitar os fundamentos do MCP, uma vez que propõem uma velocidade da luz dinâmica e que poderia ter variado no passado.

É difícil, atualmente, encontrar um consenso geral sobre a formulação de uma teoria VSL unificada. Os esforços atuais exploram exclusivamente as implicações da variável c , em um sentido mais amplo. Conforme classificadas em (MAGUEIJO, 2003), as teorias VSL podem ser amplamente categorizadas em extremas ou quebra brusca da simetria de Lorentz (ALBRECHT e MAGUEIJO, 1999; BARROW, 1999), bimétricas (CLAYTON e MOFFAT, 1999; KURSUNOGLU, 2002), dependentes de cor (AMELINO-CAMELIA, 2002) e invariantes de Lorentz (MOFFAT, 1993, 2005). Teorias bimétricas, por exemplo, como (CLAYTON e MOFFAT, 1999; KURSUNOGLU, 2002), são invariantes de Lorentz. Elas são concebidas com base na ideia de que, mesmo que a velocidade de partículas sem massa seja diferente, todos os princípios da Relatividade Especial são preservados em cada setor. O modelo VSL para o qual a variação de \tilde{c} acompanha as variações conjuntas de todas as constantes físicas relacionadas para satisfazer a invariância de Lorentz, termodinâmica, identidade de Bianchi, chamamos de modelo minimamente estendido (meVSL) (LEE, 2021b). Além de modelos como o meVSL, existem propostas nas quais as constantes físicas variam com o tempo cósmico, uma das quais é conhecida como Acoplamentos Físi-

cos Covariantes (CPC) (CUZINATTO *et al.*, 2023a, 2022, 2023c). Em (ELLIS e UZAN, 2005), os autores realizam uma discussão bem interessante com relação as várias facetas que apresenta a velocidade da luz, enfatizando o cuidado que se deve ter ao indicar claramente qual velocidade estará variando e quais quantidades serão mantidas fixas quando for assumido um ou outro aspecto da velocidade da luz como variável quando for proposto um modelo VSL.

A investigação da variabilidade das constantes físicas fundamentais é de suma importância, pois qualquer desvio estatisticamente significativo das medições locais exigiria imediatamente uma reformulação do modelo cosmológico padrão. No Capítulo 3, seguimos o método proposto por (SALZANO *et al.*, 2015) e medimos o valor da velocidade da luz com observações cosmológicas, a fim de verificar se ele é consistente com valores obtidos em experimentos realizados em laboratórios terrestres (ou no Sistema Solar), bem como a precisão desta medida. Para tal, utilizamos dados observacionais atuais de Supernovas do tipo Ia da compilação Pantheon+ e SH0ES, em conjunto com cronômetros cósmicos, além de simulações de medidas de distância de luminosidade obtidas das sirenes-padrão, nomeadamente de ondas gravitacionais, em conjunto com medidas do parâmetro de Hubble de levantamentos de *redshifts* futuros.

Por meio de uma reconstrução dos Processos Gaussianos, descobrimos que a precisão dessas medições pode ser melhorada de aproximadamente 6% para 1,5 – 2%, à luz dessas observações futuras. Este resultado demonstra que seremos capazes de realizar uma medição cosmológica de uma constante física fundamental com precisão sem precedentes, o que nos ajudará a comprovar se seu valor é realmente consistente com as medições locais, conforme previsto pelo modelo padrão da Cosmologia.

Em propostas como o modelo de velocidade da luz variável minimamente estendido (meVSL) (LEE, 2021b), espera-se que a relação entre a distância de luminosidade (d_L) e a distância de diâmetro angular (d_A), ou seja, a relação de dualidade da distância cósmica (RDDC), se desvie de $\eta(z) \equiv d_L(z)/d_A(z)(1+z)^{-2} = 1$, tornando-se uma poderosa sonda de uma potencial variação de constantes fundamentais. No Capítulo 4, portanto, testamos a viabilidade do modelo meVSL por meio da RDDC, comparando as medições de d_A , fornecidas pelas observações de oscilações acústicas bariônicas (BAO) transversais (2D) e anisotrópicas (3D) de diferentes levantamentos, como SDSS, DES e DESI, em combinação com medições de d_L da compilação de Supernovas tipo Ia do Pantheon+ e SH0ES. A reconstrução dos Processos Gaussianos é empregada nos dados SN para combinar d_A com d_L no mesmo *redshift*.

Não encontramos desvio da relação RDDC padrão dentro do nível de confiança de 1-2,6 σ ao considerarmos SNe com amostras de BAO 2D e 3D combinadas, bem como ao considerarmos SNe com BAO 3D combinadas. No entanto, quando apenas SNe e BAO 2D são considerados, encontramos um desvio de $\sim 4\sigma$ da RDDC padrão. Contudo, tal resultado pode ser devido a algumas tensões discutidas recentemente entre os conjuntos

de dados SNe e BAO, especialmente em baixos *redshifts*, além de possíveis inconsistências entre os conjuntos de dados BAO individualmente. Sendo assim, nossos resultados ainda não são capazes de confirmar ou refutar a validade deste modelo em específico.

Portanto, os vínculos cosmológicos obtidos sobre uma possível variação de constantes físicas fundamentais nessa tese se mostram consistentes com o Modelo Cosmológico Padrão, embora tenhamos encontrado um desvio em potencial do Modelo Padrão para o caso SNe+BAO 2D. Concomitantemente, os resultados potencializam o interesse pela pesquisa observacional utilizando medidas de BAO como réguas padrão e SNe como velas padrão, estimulando assim para um maior entendimento da física fundamental, bem como os erros sistemáticos relacionados na obtenção dos dados. Futuras observações em altos *redshifts* z de CC, BAO, SNe e outros observáveis devem ser capazes de fornecer restrições mais rígidas em valores mais altos de *redshifts*. Como perspectivas, planejamos testar o modelo meVSL com dados de DESY5 SNe e uma amostra mais recente de BAO 2D (MENOTE e MARRA, 2022). Exploraremos a tensão da Constante de Hubble H_0 no contexto do modelo meVSL e uma possível violação da RDDC. Realizaremos também testes de violação da invariância de Lorentz com Gamma-Ray Bursts (GRBs), bem como um teste da variabilidade da constante gravitacional de Newton G utilizando SNe e lentes gravitacionais fortes. Para tanto, vamos utilizar métodos estatísticos baseados em reconstruções não paramétricas, com o intuito de realizar nossas análises com o mínimo de pressupostos a priori sobre o modelo cosmológico vigente.

Referências Bibliográficas

- ABBOTT, B. P., ABBOTT, R., ABBOTT, T., et al., 2016a, “GW150914: First results from the search for binary black hole coalescence with Advanced LIGO”, *Physical Review D*, v. 93, n. 12, pp. 122003.
- ABBOTT, B. P., ABBOTT, R., ABBOTT, T. D., et al., 2016b, “Observation of gravitational waves from a binary black hole merger”, *Physical review letters*, v. 116, n. 6, pp. 061102.
- ABBOTT, B. P., ABBOTT, R., ABBOTT, T. D., et al., 2017a, “GW170817: observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral”, *Physical review letters*, v. 119, n. 16, pp. 161101.
- ABBOTT, B. P., ABBOTT, R., ABBOTT, T., et al., 2017b, “Gravitational waves and gamma-rays from a binary neutron star merger: GW170817 and GRB 170817A”, *The Astrophysical Journal Letters*, v. 848, n. 2, pp. L13.
- ABBOTT, R., ABBOTT, T., ACERNESE, F., et al., 2024a, “GWTC-2.1: Deep extended catalog of compact binary coalescences observed by LIGO and Virgo during the first half of the third observing run”, *Physical Review D*, v. 109, n. 2, pp. 022001.
- ABBOTT, T. M., AGUENA, M., ALARCON, A., et al., 2022, “Dark Energy Survey Year 3 results: Cosmological constraints from galaxy clustering and weak lensing”, *Physical Review D*, v. 105, n. 2, pp. 023520.
- ABBOTT, T., ADAMOW, M., AGUENA, M., et al., 2024b, “Dark energy survey: A 2.1% measurement of the angular baryonic acoustic oscillation scale at redshift $z_{\text{eff}} = 0.85$ from the final dataset”, *Physical Review D*, v. 110, n. 6, pp. 063515.
- ABDUL-KARIM, M., AGUILAR, J., AHLEN, S., et al., 2025, “DESI DR2 Results II: Measurements of Baryon Acoustic Oscillations and Cosmological Constraints”, *arXiv preprint arXiv:2503.14738*.
- ADAME, A., AGUILAR, J., AHLEN, S., et al., 2025, “DESI 2024 VI: cosmological constraints from the measurements of baryon acoustic oscillations”, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2025, n. 02, pp. 021.

- AGHANIM, N., OTHERS, 2020, “Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters”, *Astron. Astrophys.*, v. 641, pp. A6.
- AKRAMI, Y., ARROJA, F., ASHDOWN, M., et al., 2020, “Planck 2018 results-X. Constraints on inflation”, *Astronomy & Astrophysics*, v. 641, pp. A10.
- ALAM, S., AUBERT, M., AVILA, S., et al., 2021, “Completed SDSS-IV extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: Cosmological implications from two decades of spectroscopic surveys at the Apache Point Observatory”, *Physical Review D*, v. 103, n. 8, pp. 083533.
- ALBERT, A., ALFARO, R., ALVAREZ, C., et al., 2020, “Constraints on Lorentz invariance violation from HAWC observations of gamma rays above 100 TeV”, *Physical Review Letters*, v. 124, n. 13, pp. 131101.
- ALBRECHT, A., MAGUEIJO, J., 1999, “Time varying speed of light as a solution to cosmological puzzles”, *Physical Review D*, v. 59, n. 4, pp. 043516.
- ALBRECHT, A., STEINHARDT, P. J., 1982, “Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking”, *Physical Review Letters*, v. 48, n. 17, pp. 1220.
- ALCANIZ, J. S., CARVALHO, G. C., BERNUI, A., et al., 2017, “Measuring baryon acoustic oscillations with angular two-point correlation function”. In: *Gravity and the Quantum: Pedagogical Essays on Cosmology, Astrophysics, and Quantum Gravity*, Springer, pp. 11–19.
- ALEXANDER, S. H. S., 2000, “On the varying speed of light in a brane induced FRW universe”, *JHEP*, v. 11, pp. 017. doi: 10.1088/1126-6708/2000/11/017.
- AMELINO-CAMELIA, G., 2002, “Relativity in spacetimes with short-distance structure governed by an observer-independent (Planckian) length scale”, *International Journal of Modern Physics D*, v. 11, n. 01, pp. 35–59.
- AMENDOLA, L., TSUJIKAWA, S., 2010, *Dark energy: theory and observations*. Cambridge University Press.
- ANSELMINI, S., CORASANITI, P.-S., SANCHEZ, A. G., et al., 2019, “Cosmic distance inference from purely geometric BAO methods: Linear Point standard ruler and Correlation Function Model Fitting”, *Physical Review D*, v. 99, n. 12, pp. 123515.
- AP, B. C., GONZALEZ, J. E., OTHERS, 2020, “Is there evidence for a hotter Universe?” *The European Physical Journal. C, Particles and Fields.*, v. 80, n. 10.

- ARJONA, R., LIN, H.-N., NESSERIS, S., et al., 2021, “Machine learning forecasts of the cosmic distance duality relation with strongly lensed gravitational wave events”, *Physical Review D*, v. 103, n. 10, pp. 103513.
- AVELINO, P. P., MARTINS, C. J. A. P., 1999a, “Does a varying speed of light solve the cosmological problems?” *Phys. Lett. B*, v. 459, pp. 468–472. doi: 10.1016/S0370-2693(99)00694-2.
- AVELINO, P. P., MARTINS, C. J. A. P., 2003, “Cosmic numbers: A Physical classification for cosmological models”, *Phys. Rev. D*, v. 67, pp. 027302. doi: 10.1103/PhysRevD.67.027302.
- AVELINO, P., MARTINS, C., 1999b, “Does a varying speed of light solve the cosmological problems?” *Physics Letters B*, v. 459, n. 4, pp. 468–472.
- AYLOR, K., JOY, M., KNOX, L., et al., 2019, “Sounds discordant: Classical distance ladder and Λ CDM-based determinations of the cosmological sound horizon”, *The Astrophysical Journal*, v. 874, n. 1, pp. 4.
- BALCERZAK, A., DABROWSKI, M. P., 2014a, “Redshift drift in varying speed of light cosmology”, *Physics Letters B*, v. 728, pp. 15–18.
- BALCERZAK, A., DABROWSKI, M. P., 2014b, “A statefinder luminosity distance formula in varying speed of light cosmology”, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2014, n. 06, pp. 035.
- BALCERZAK, A., DABROWSKI, M. P., SALZANO, V., 2017, “Modelling spatial variations of the speed of light”, *Annalen der Physik*, v. 529, n. 9, pp. 1600409.
- BARBOZA JR, E., ALCANIZ, J., 2008, “A parametric model for dark energy”, *Physics Letters B*, v. 666, n. 5, pp. 415–419.
- BARROW, J. D., 1999, “Cosmologies with varying light speed”, *Physical Review D*, v. 59, n. 4, pp. 043515.
- BARROW, J. D., MAGUEIJO, J., 1999a, “Solutions to the quasi-flatness and quasi-lambda problems”, *Physics Letters B*, v. 447, n. 3-4, pp. 246–250.
- BARROW, J. D., MAGUEIJO, J., 1999b, “Solving the flatness and quasi-flatness problems in Brans-Dicke cosmologies with a varying light speed”, *Classical and Quantum Gravity*, v. 16, n. 4, pp. 1435.
- BASSETT, B. A., KUNZ, M., 2004, “Cosmic distance-duality as a probe of exotic physics and acceleration”, *Physical Review D*, v. 69, n. 10, pp. 101305.

- BASSETT, B. A., LIBERATI, S., MOLINA-PARIS, C., et al., 2000, “Geometrodynamics of variable-speed-of-light cosmologies”, *Physical Review D*, v. 62, n. 10, pp. 103518.
- BAUMANN, D., 2022, *Cosmology*. Cambridge University Press.
- BEKENSTEIN, J. D., 2003, “Fine-structure constant variability: surprises for laboratory atomic spectroscopy and cosmological evolution of quasar spectra”, *arXiv preprint astro-ph/0301566*.
- BELINCHON, J. A., 2000, “Cosmological models with variable ‘constants’”, *Int. J. Theor. Phys.*, v. 39, pp. 1669–1686. doi: 10.1023/A:1003644614145.
- BENGALY, C., 2022, “A null test of the Cosmological Principle with BAO measurements”, *Physics of the Dark Universe*, v. 35, pp. 100966.
- BENITEZ, N., DUPKE, R., MOLES, M., et al., 2014, “J-PAS: the Javalambre-physics of the accelerated universe astrophysical survey”, *arXiv preprint arXiv:1403.5237*.
- BERNAL, J. L., VERDE, L., RIESS, A. G., 2016, “The trouble with H_0 ”, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2016, n. 10, pp. 019.
- BOND, J. R., EFSTATHIOU, G., 1984, “Cosmic background radiation anisotropies in universes dominated by nonbaryonic dark matter”, *Astrophysical Journal, Part 2-Letters to the Editor (ISSN 0004-637X)*, vol. 285, Oct. 15, 1984, p. L45-L48. Research supported by the Science and Engineering Research Council of England and NASA., v. 285, pp. L45–L48.
- BORA, K., DESAI, S., 2021, “Constraints on the variation of fine structure constant from joint SPT-SZ and XMM-Newton observations”, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2021, n. 02, pp. 012.
- BRANCHESI, M., MAGGIORE, M., ALONSO, D., et al., 2023, “Science with the Einstein Telescope: a comparison of different designs”, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2023, n. 07, pp. 068.
- BRANS, C., DICKE, R. H., 1961, “Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation”, *Physical review*, v. 124, n. 3, pp. 925.
- BROUT, D., SCOLNIC, D., POPOVIC, B., et al., 2022, “The Pantheon+ analysis: cosmological constraints”, *The Astrophysical Journal*, v. 938, n. 2, pp. 110.
- CAI, R.-G., GUO, Z.-K., YANG, T., 2016, “Dodging the cosmic curvature to probe the constancy of the speed of light”, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2016, n. 08, pp. 016.

- CALTECH, L., 2016, “What are Gravitational Waves?” Available on line at: <https://www.ligo.caltech.edu/page/what-are-gw>.
- CANUTO, V., ADAMS, P., HSIEH, S.-H., et al., 1977, “Scale-covariant theory of gravitation and astrophysical applications”, *Physical Review D*, v. 16, n. 6, pp. 1643.
- CAO, S., BIESIADA, M., JACKSON, J., et al., 2017, “Measuring the speed of light with ultra-compact radio quasars”, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2017, n. 02, pp. 012.
- CAO, S., QI, J., BIESIADA, M., et al., 2018, “Testing the speed of light over cosmological distances: the combination of strongly lensed and unlensed type Ia supernovae”, *The Astrophysical Journal*, v. 867, n. 1, pp. 50.
- CARVALHO, G., BERNUI, A., BENETTI, M., et al., 2016, “Baryon acoustic oscillations from the SDSS DR10 galaxies angular correlation function”, *Physical Review D*, v. 93, n. 2, pp. 023530.
- CARVALHO, G., BERNUI, A., BENETTI, M., et al., 2020, “The transverse baryonic acoustic scale from the SDSS DR11 galaxies”, *Astroparticle Physics*, v. 119, pp. 102432.
- CHANDRASEKHAR, S., 1931, “The maximum mass of ideal white dwarfs”, *Astrophysical Journal*, vol. 74, p. 81, v. 74, pp. 81.
- CHEVALLIER, M., POLARSKI, D., 2001, “Accelerating universes with scaling dark matter”, *International Journal of Modern Physics D*, v. 10, n. 02, pp. 213–223.
- CLAYTON, M., MOFFAT, J., 1999, “Dynamical mechanism for varying light velocity as a solution to cosmological problems”, *Physics Letters B*, v. 460, n. 3-4, pp. 263–270.
- CLAYTON, M., MOFFAT, J., 2000, “Scalar-tensor gravity theory for dynamical light velocity”, *Physics Letters B*, v. 477, n. 1-3, pp. 269–275.
- CLAYTON, M., MOFFAT, J., 2002, “Vector field mediated models of dynamical light velocity”, *International Journal of Modern Physics D*, v. 11, n. 02, pp. 187–205.
- COPELAND, E. J., SAMI, M., TSUJIKAWA, S., 2006, “Dynamics of dark energy”, *International Journal of Modern Physics D*, v. 15, n. 11, pp. 1753–1935.
- CORASANITI, P. S., 2006, “The impact of cosmic dust on supernova cosmology”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 372, n. 1, pp. 191–198.

- COSTA, R., CUZINATTO, R. R., FERREIRA, E. G., et al., 2019, “Covariant c-flation: A variational approach”, *International Journal of Modern Physics D*, v. 28, n. 09, pp. 1950119.
- CRUZ, C. N., DA SILVA, F. A., 2018, “Variation of the speed of light and a minimum speed in the scenario of an inflationary universe with accelerated expansion”, *Physics of the Dark Universe*, v. 22, pp. 127–136.
- CUZINATTO, R. R., GUPTA, R. P., POMPEIA, P. J., 2023a, “Dynamical analysis of the covarying coupling constants in scalar–tensor gravity”, *Symmetry*, v. 15, n. 3, pp. 709.
- CUZINATTO, R., GUPTA, R., HOLANDA, R., et al., 2022, “Testing a varying- Λ model for dark energy within co-varying physical couplings framework”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 515, n. 4, pp. 5981–5992.
- CUZINATTO, R., DE MELO, C., NEVES, J. C., 2023b, “Shadows of black holes at cosmological distances in the co-varying physical couplings framework”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 526, n. 3, pp. 3987–3993.
- CUZINATTO, R., HOLANDA, R., PEREIRA, S., 2023c, “Observational constraints on varying fundamental constants in a minimal CPC model”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 519, n. 1, pp. 633–640.
- D’AVANZO, P., 2015, “Short gamma-ray bursts: A review”, *Journal of High Energy Astrophysics*, v. 7, pp. 73–80.
- DE BERNARDIS, F., GIUSARMA, E., MELCHIORRI, A., 2006, “CONSTRAINTS ON DARK ENERGY AND DISTANCE DUALITY FROM SUNYAEV–ZEL’DOVICH EFFECT AND CHANDRA X-RAY MEASUREMENTS”, *International Journal of Modern Physics D*, v. 15, n. 05, pp. 759–766.
- DE CARVALHO, E., BERNUI, A., CARVALHO, G., et al., 2018, “Angular Baryon Acoustic Oscillation measure at $z=2.225$ from the SDSS quasar survey”, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2018, n. 04, pp. 064.
- DE CARVALHO, E., BERNUI, A., AVILA, F., et al., 2021, “BAO angular scale at $z_{\text{eff}}=0.11$ with the SDSS blue galaxies”, *Astronomy & Astrophysics*, v. 649, pp. A20.
- DES BOURBOUX, H. D. M., RICH, J., FONT-RIBERA, A., et al., 2020, “The completed SDSS-IV extended baryon oscillation spectroscopic survey: baryon acoustic oscillations with $\text{Ly}\alpha$ forests”, *The Astrophysical Journal*, v. 901, n. 2, pp. 153.

- DHAWAN, S., ALSING, J., VAGNOZZI, S., 2021, “Non-parametric spatial curvature inference using late-Universe cosmological probes”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, v. 506, n. 1, pp. L1–L5.
- DI VALENTINO, E., MENA, O., PAN, S., et al., 2021, “In the realm of the Hubble tension—a review of solutions”, *Classical and Quantum Gravity*, v. 38, n. 15, pp. 153001.
- DIRAC, P. A., 1937, “The cosmological constants”, *Nature*, v. 139, n. 3512, pp. 323–323.
- DODWELL, G. F., DAVIDSON, C. R., 1924, “Determination of the deflection of light by the sun’s gravitational field from observations made at Cordillo Downs, South Australia, during the total eclipse of 1922 September 21”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. 84, p. 150*, v. 84, pp. 150.
- DRUMMOND, I. T., 1999, “Variable light cone theory of gravity”, (8).
- EINSTEIN, A., 1911, “On The influence of gravitation on the propagation of light”, *Annalen Phys.*, v. 35, pp. 898–908. doi: 10.1002/andp.200590033.
- EINSTEIN, A., 1916, “The foundation of the general theory of relativity.” *Annalen Phys.*, v. 49, n. 7, pp. 769–822. doi: 10.1002/andp.19163540702.
- EINSTEIN, A., 1915, “Die feldgleichungen der gravitation”, *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, pp. 844–847.
- EINSTEIN, A., 1917, “Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie”. In: *Das Relativitätsprinzip: Eine Sammlung von Abhandlungen*, Springer, pp. 130–139.
- EISENSTEIN, D. J., HU, W., 1998, “Baryonic features in the matter transfer function”, *The Astrophysical Journal*, v. 496, n. 2, pp. 605.
- EISENSTEIN, D. J., HU, W., TEGMARK, M., 1998, “Cosmic complementarity: H_0 and Ω_M from combining cosmic microwave background experiments and redshift surveys”, *The Astrophysical Journal*, v. 504, n. 2, pp. L57.
- EISENSTEIN, D. J., ZEHAVI, I., HOGG, D. W., et al., 2005, “Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of SDSS luminous red galaxies”, *The Astrophysical Journal*, v. 633, n. 2, pp. 560.
- ELLIS, G. F., 2007a, “On the definition of distance in general relativity: IMH Etherington (Philosophical Magazine ser. 7, vol. 15, 761 (1933))”, *General Relativity and Gravitation*, v. 39, n. 7, pp. 1047–1052.

- ELLIS, G. F., 2007b, “Note on varying speed of light cosmologies”, *arXiv preprint astro-ph/0703751*.
- ELLIS, G. F., UZAN, J.-P., 2005, “ c is the speed of light, isnât it?” *American journal of physics*, v. 73, n. 3, pp. 240–247.
- ELLIS, G. F., POLTIS, R., UZAN, J.-P., et al., 2013, “Blackness of the cosmic microwave background spectrum<? format?> as a probe of the distance-duality relation”, *Physical Review D—Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, v. 87, n. 10, pp. 103530.
- ELLIS, G., 1971. “General Relativity and Cosmology, International School of Physics, Enrico Fermi-Course XLVII”. .
- ETHERINGTON, I., 1933, “LX. On the definition of distance in general relativity”, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, v. 15, n. 100, pp. 761–773.
- FAVALE, A., GÓMEZ-VALENT, A., MIGLIACCIO, M., 2024, “Quantification of 2D vs 3D BAO tension using SNIa as a redshift interpolator and test of the Etherington relation”, *Physics Letters B*, v. 858, pp. 139027.
- FERREIRA, P. G., 2019, “Cosmological tests of gravity”, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, v. 57, n. 1, pp. 335–374.
- FIXSEN, D. J., 2009, “The temperature of the cosmic microwave background”, *The Astrophysical Journal*, v. 707, n. 2, pp. 916.
- FLANAGAN, E. E., HUGHES, S. A., 2005, “The basics of gravitational wave theory”, *New Journal of Physics*, v. 7, n. 1, pp. 204.
- FRANZMANN, G., 2017, “Varying fundamental constants: a full covariant approach and cosmological applications”, *arXiv preprint arXiv:1704.07368*.
- FRIEDMAN, A., 1922, “Über die krümmung des raumes”, *Zeitschrift für Physik*, v. 10, n. 1, pp. 377–386.
- GADBAIL, G. N., MANDAL, S., SAHOO, P., 2024, “Gaussian process approach for model-independent reconstruction of $f(q)$ gravity with direct Hubble measurements”, *The Astrophysical Journal*, v. 972, n. 2, pp. 174.
- GADBAIL, G. N., MANDAL, S., SAHOO, P., et al., 2025, “Reconstruction of the scalar field potential in nonmetricity gravity through Gaussian processes”, *Physics Letters B*, v. 860, pp. 139232.

- GIARÈ, W., TEIXEIRA, E. M., MELCHIORRI, A., et al., 2025, “Resilience and implications of adiabatic CMB cooling”, *Physics of the Dark Universe*, v. 49, pp. 101999.
- GIL-MARÍN, H., PERCIVAL, W. J., VERDE, L., et al., 2016, “The clustering of galaxies in the SDSS-III Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: RSD measurement from the power spectrum and bispectrum of the DR12 BOSS galaxies”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, p. stw2679.
- GONCALVES, R. S., HOLANDA, R. F., ALCANIZ, J. S., 2012, “Testing the cosmic distance duality with X-ray gas mass fraction and supernovae data”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, v. 420, n. 1, pp. L43–L47.
- GONÇALVES, R. S., LANDAU, S., ALCANIZ, J. S., et al., 2020, “Variation in the fine-structure constant and the distance-duality relation”, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2020, n. 06, pp. 036.
- GUPTA, R. P., 2020, “Cosmology with relativistically varying physical constants”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 498, n. 3, pp. 4481–4491.
- GUPTA, R. P., 2023, “JWST early Universe observations and Λ CDM cosmology”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 524, n. 3, pp. 3385–3395.
- GUTH, A. H., 1987, “Inflationary Universe: a possible solution to the horizon and flatness problems”, *Quantum Cosmology*, v. 3, pp. 139.
- HEYMANS, C., TRÖSTER, T., ASGARI, M., et al., 2021, “KiDS-1000 Cosmology: Multi-probe weak gravitational lensing and spectroscopic galaxy clustering constraints”, *Astronomy & Astrophysics*, v. 646, pp. A140.
- HOBSON, M. P., EFSTATHIOU, G. P., LASENBY, A. N., 2006, *General relativity: an introduction for physicists*. Cambridge university press.
- HOLANDA, R., BUSTI, V., 2014, “Probing cosmic opacity at high redshifts with gamma-ray bursts”, *Physical Review D*, v. 89, n. 10, pp. 103517.
- HOLANDA, R., LIMA, J. A. S. D., RIBEIRO, M. B., 2010, “Testing the distance–duality relation with galaxy clusters and type Ia supernovae”, *The Astrophysical Journal Letters*, v. 722, n. 2, pp. L233.
- HOLANDA, R., GONCALVES, R., ALCANIZ, J., 2012a, “A test for cosmic distance duality”, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2012, n. 06, pp. 022.

- HOLANDA, R., LIMA, J. A. S. D., RIBEIRO, M. B., 2012b, “Probing the cosmic distance-duality relation with the Sunyaev-Zelâdovich effect, X-ray observations and supernovae Ia”, *Astronomy & Astrophysics*, v. 538, pp. A131.
- HOU, J., SÁNCHEZ, A. G., ROSS, A. J., et al., 2021, “The completed SDSS-IV extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey: BAO and RSD measurements from anisotropic clustering analysis of the quasar sample in configuration space between redshift 0.8 and 2.2”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 500, n. 1, pp. 1201–1221.
- HUBBLE, E., 1929, “A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae”, *Proceedings of the national academy of sciences*, v. 15, n. 3, pp. 168–173.
- JIANG, J.-Q., PEDROTTI, D., DA COSTA, S. S., et al., 2024, “Nonparametric late-time expansion history reconstruction and implications for the Hubble tension in light of recent DESI and type Ia supernovae data”, *Physical Review D*, v. 110, n. 12, pp. 123519.
- JIMENEZ, R., LOEB, A., 2002, “Constraining cosmological parameters based on relative galaxy ages”, *The Astrophysical Journal*, v. 573, n. 1, pp. 37.
- KEIL, F., NESSERIS, S., TUTUSAUS, I., et al., 2025, “Probing the Distance Duality Relation with Machine Learning and Recent Data”, *arXiv preprint arXiv:2504.01750*.
- KNOBEL, C., 2012, “An introduction into the theory of cosmological structure formation”, *arXiv preprint arXiv:1208.5931*.
- KOMATSU, E., DUNKLEY, J., NOLTA, M., et al., 2009, “Five-year wilkinson microwave anisotropy probe* observations: cosmological interpretation”, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, v. 180, n. 2, pp. 330.
- KURSUNOGLU, B. N., 2002, “Variable Speed of Light Cosmology”. In: *Quantum Gravity, Generalized Theory of Gravitation, and Superstring Theory-Based Unification*, Springer, pp. 3–8.
- LANG, R. G., MARTÍNEZ-HUERTA, H., DE SOUZA, V., 2018, “Limits on the Lorentz Invariance Violation from UHECR astrophysics”, *The Astrophysical Journal*, v. 853, n. 1, pp. 23.
- LEE, S., 2021a, “Cosmic distance duality as a probe of minimally extended varying speed of light”, *arXiv preprint arXiv:2108.06043*.

- LEE, S., 2021b, “The minimally extended varying speed of light (meVSL)”, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2021, n. 08, pp. 054.
- LEE, S., 2023a, “Constraining minimally extended varying speed of light by cosmological chronometers”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 522, n. 3, pp. 3248–3255.
- LEE, S., 2023b, “Constraint on the minimally extended varying speed of light using time dilations in Type Ia supernovae”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 524, n. 3, pp. 4019–4023.
- LEMAÎTRE, G., 1927, “Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques”, *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, A47*, p. 49-59, v. 47, pp. 49–59.
- LEMAÎTRE, G., 1931, “A homogeneous universe of constant mass and increasing radius accounting for the radial velocity of extra-galactic nebulae”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. 91*, p. 483-490, v. 91, pp. 483–490.
- LESZCZYNSKA, K., DABROWSKI, M. P., DENKIEWICZ, T., 2019, “Varying constants driven baryogenesis”, *Eur. Phys. J. C*, v. 79, n. 3, pp. 222. doi: 10.1140/epjc/s10052-019-6744-1.
- LI, Z., WU, P., YU, H., 2011, “Cosmological-model-independent tests for the distance–duality relation from galaxy clusters and type ia supernova”, *The Astrophysical Journal Letters*, v. 729, n. 1, pp. L14.
- LINDE, A. D., 1987, “A new inflationary universe scenario: a possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems”. In: *Quantum Gravity*, Springer, pp. 185–195.
- LINDER, E. V., 2003, “Exploring the expansion history of the universe”, *Physical review letters*, v. 90, n. 9, pp. 091301.
- LIU, T., CAO, S., ZHANG, S., et al., 2021, “Revisiting the cosmic distance duality relation with machine learning reconstruction methods: the combination of HII galaxies and ultra-compact radio quasars”, *The European Physical Journal C*, v. 81, n. 10, pp. 903.
- LIU, T., CAO, S., MA, S., et al., 2023a, “What are recent observations telling us in light of improved tests of distance duality relation?” *Physics Letters B*, v. 838, pp. 137687.

- LIU, Y., CAO, S., BIESIADA, M., et al., 2023b, “Measuring the speed of light with updated Hubble diagram of high-redshift standard candles”, *The Astrophysical Journal*, v. 949, n. 2, pp. 57.
- MAGUEIJO, J., 2000, “Covariant and locally Lorentz-invariant varying speed of light theories”, *Physical Review D*, v. 62, n. 10, pp. 103521.
- MAGUEIJO, J., 2003, “New varying speed of light theories”, *Reports on Progress in Physics*, v. 66, n. 11, pp. 2025.
- MAGUEIJO, J., MOFFAT, J. W., 2008, “Comments on ‘Note on varying speed of light theories’”, *General Relativity and Gravitation*, v. 40, n. 8, pp. 1797–1806.
- MANTZ, A. B., MORRIS, R. G., ALLEN, S. W., et al., 2022, “Cosmological constraints from gas mass fractions of massive, relaxed galaxy clusters”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 510, n. 1, pp. 131–145.
- MARTÍNEZ-HUERTA, H., 2017, “Potential constraints on Lorentz invariance violation from the HAWC TeV gamma-rays”, *arXiv preprint arXiv:1708.03384*.
- MATHER, J. C., CHENG, E., EPLEE JR, R., et al., 1990, “A preliminary measurement of the cosmic microwave background spectrum by the Cosmic Background Explorer (COBE) satellite”, *Astrophysical Journal, Part 2-Letters (ISSN 0004-637X)*, vol. 354, May 10, 1990, p. L37-L40., v. 354, pp. L37–L40.
- MENDONÇA, I., BORA, K., HOLANDA, R., et al., 2021, “A search for the variation of speed of light using galaxy cluster gas mass fraction measurements”, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2021, n. 11, pp. 034.
- MENG, X.-L., ZHANG, T.-J., ZHAN, H., et al., 2012, “Morphology of galaxy clusters: A cosmological model-independent test of the cosmic distance–duality relation”, *The Astrophysical Journal*, v. 745, n. 1, pp. 98.
- MENOTE, R., MARRA, V., 2022, “Baryon acoustic oscillations in thin redshift shells from BOSS DR12 and eBOSS DR16 galaxies”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 513, n. 2, pp. 1600–1608.
- MIDY, P., PETIT, J.-P., 1999, “Scale invariant cosmology”, *International Journal of Modern Physics D*, v. 8, n. 03, pp. 271–289.
- MIQUEL, R., 2007, “Cosmology with type-Ia supernovae”, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 40, n. 25, pp. 6743.

- MOFFAT, J. W., 1993, “Superluminary universe: A Possible solution to the initial value problem in cosmology”, *International Journal of Modern Physics D*, v. 2, n. 03, pp. 351–365.
- MOFFAT, J., 2005, “Variable speed of light cosmology and bimetric gravity: An Alternative to standard inflation”, *International Journal of Modern Physics A*, v. 20, n. 06, pp. 1155–1162.
- MOFFAT, J., 2016, “Variable speed of light cosmology, primordial fluctuations and gravitational waves”, *The European Physical Journal C*, v. 76, n. 3, pp. 130.
- MOHR, P. J., TAYLOR, B. N., 1999, “CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 1998”, *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, v. 28, n. 6, pp. 1713–1852.
- MORESCO, M., AMATI, L., AMENDOLA, L., et al., 2022, “Unveiling the Universe with emerging cosmological probes”, *Living Reviews in Relativity*, v. 25, n. 1, pp. 6.
- MUKHANOV, V. F., 2005, *Physical foundations of cosmology*. Cambridge university press.
- MUKHERJEE, P., RODRIGUES, G., BENGALY, C., 2024, “Examining the validity of the minimal varying speed of light model through cosmological observations: Relaxing the null curvature constraint”, *Physics of the Dark Universe*, v. 43, pp. 101380.
- NASSIF, C., AMARO DE FARIA JR, A., 2012, “Variation of the speed of light with temperature of the expanding universe”, *Physical Review D: Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, v. 86, n. 2, pp. 027703.
- NESSERIS, S., PERIVOLAROPOULOS, L., 2007, “Crossing the phantom divide: theoretical implications and observational status”, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2007, n. 01, pp. 018.
- NGUYEN, H. K., 2025, “A mechanism to generate varying speed of light via Higgs-dilaton coupling: theory and cosmological applications”, *The European Physical Journal C*, v. 85, n. 4, pp. 393.
- PAN, Y., QI, J., CAO, S., et al., 2020, “Model-independent constraints on Lorentz invariance violation: implication from updated Gamma-ray burst observations”, *The Astrophysical Journal*, v. 890, n. 2, pp. 169.

- PEDRAM, P., JALALZADEH, S., 2008, “Quantum cosmology with varying speed of light: Canonical approach”, *Phys. Lett. B*, v. 660, pp. 1–6. doi: 10.1016/j.physletb.2007.11.098.
- PEEBLES, P. J., YU, J., 1970, “Primeval adiabatic perturbation in an expanding universe”, *Astrophysical Journal*, vol. 162, p. 815, v. 162, pp. 815.
- PEEBLES, P., 1980, “The large-scale structure of the universe”, *Large-Scale Structure of the Universe by Phillip James Edwin Peebles. Princeton University Press.*
- PERLMUTTER, S., ALDERING, G., GOLDHABER, G., et al., 1999, “Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae”, *The Astrophysical Journal*, v. 517, n. 2, pp. 565.
- PETIT, J.-P., 1988a, “Cosmological model with variable light velocity: the interpretation of red shifts”, *Modern Physics Letters A*, v. 3, n. 18, pp. 1733–1744.
- PETIT, J.-P., 1988b, “An interpretation of cosmological model with variable light velocity”, *Modern Physics Letters A*, v. 3, n. 16, pp. 1527–1532.
- PETIT, J.-P., 1995, “Twin universes cosmology”, *Astrophysics and space science*, v. 226, n. 2, pp. 273–307.
- PETIT, J. P., D’AGOSTINI, G., 2008, “Bigravity: A Bimetric model of the Universe with variable constants, including VSL (variable speed of light)”, *arXiv preprint arXiv:0803.1362*.
- POULIN, V., SMITH, T. L., KARWAL, T., 2023, “The Ups and Downs of Early Dark Energy solutions to the Hubble tension: A review of models, hints and constraints circa 2023”, *Physics of the Dark Universe*, v. 42, pp. 101348.
- QI, J.-Z., ZHANG, M.-J., LIU, W.-B., 2014, “Observational constraint on the varying speed of light theory”, *Physical Review D*, v. 90, n. 6, pp. 063526.
- QI, J.-Z., CAO, S., ZHENG, C., et al., 2019, “Testing the Etherington’s distance duality relation at higher redshifts: the combination of radio quasars and gravitational waves”, *arXiv preprint arXiv:1902.01988*.
- REN, X., YAN, S.-F., ZHAO, Y., et al., 2022, “Gaussian processes and effective field theory of $f(T)$ gravity under the H_0 tension”, *The Astrophysical Journal*, v. 932, n. 2, pp. 131.
- RENZI, F., HOGG, N. B., MARTINELLI, M., et al., 2021, “Strongly lensed supernovae as a self-sufficient probe of the distance duality relation”, *Physics of the Dark Universe*, v. 32, pp. 100824.

- RIESS, A. G., FILIPPENKO, A. V., CHALLIS, P., et al., 1998, “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant”, *The astronomical journal*, v. 116, n. 3, pp. 1009.
- RIESS, A. G., YUAN, W., MACRI, L. M., et al., 2022, “A comprehensive measurement of the local value of the Hubble constant with 1 km s⁻¹ Mpc⁻¹ uncertainty from the Hubble Space Telescope and the SH0ES team”, *The Astrophysical journal letters*, v. 934, n. 1, pp. L7.
- RODRIGUES, G., BENGALY, C., 2022, “A model-independent test of speed of light variability with cosmological observations”, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2022, n. 07, pp. 029.
- ROSS, A. J., SAMUSHIA, L., HOWLETT, C., et al., 2015, “The clustering of the SDSS DR7 main Galaxy sample—I. A 4 per cent distance measure at $z=0.15$ ”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 449, n. 1, pp. 835–847.
- RYDEN, B., 2016, *Introduction to cosmology*. Cambridge University Press.
- SAFRONOVA, M., BUDKER, D., DEMILLE, D., et al., 2018, “Search for new physics with atoms and molecules”, *Reviews of Modern Physics*, v. 90, n. 2, pp. 025008.
- SALZANO, V., 2017. “How to reconstruct a varying speed of light signal from baryon acoustic oscillations surveys”. .
- SALZANO, V., DABROWSKI, M. P., 2017a, “Statistical hierarchy of varying speed of light cosmologies”, *Astrophys. J.*, v. 851, n. 2, pp. 97. doi: 10.3847/1538-4357/aa9cea.
- SALZANO, V., DABROWSKI, M. P., 2017b, “Statistical hierarchy of varying speed of light cosmologies”, *The Astrophysical Journal*, v. 851, n. 2, pp. 97.
- SALZANO, V., DĄBROWSKI, M. P., LAZKOZ, R., 2015, “Measuring the speed of light with Baryon Acoustic Oscillations”, *Physical Review Letters*, v. 114, n. 10, pp. 101304.
- SALZANO, V., DĄBROWSKI, M. P., LAZKOZ, R., 2016, “Probing the constancy of the speed of light with future galaxy survey: The case of SKA and Euclid”, *Physical Review D*, v. 93, n. 6, pp. 063521.
- SANTOS, J., BENGALY, C., MORAIS, J., et al., 2024, “Measuring the speed of light with cosmological observations: current constraints and forecasts”, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2024, n. 11, pp. 062.

- SANTOS, J., BENGALY, C., GONÇALVES, R. S., 2025, “Current constraints on the minimally extended varying speed of light model through the cosmic distance duality relation”, *arXiv preprint arXiv:2505.15768*.
- SCHNEIDER, J., SCHULLER, F. P., STRITZELBERGER, N., et al., 2017, “Gravitational closure of weakly birefringent electrodynamics”, *arXiv preprint arXiv:1708.03870*.
- SCHULLER, F. P., WERNER, M. C., 2017, “Etherington’s distance duality with birefringence”, *Universe*, v. 3, n. 3, pp. 52.
- SCHUTZ, B. F., 1986, “Determining the Hubble constant from gravitational wave observations”, *Nature*, v. 323, n. 6086, pp. 310–311.
- SCOLNIC, D., BROUT, D., CARR, A., et al., 2022, “The Pantheon+ analysis: the full data set and light-curve release”, *The Astrophysical Journal*, v. 938, n. 2, pp. 113.
- SCOLNIC, D. M., JONES, D., REST, A., et al., 2018, “The complete light-curve sample of spectroscopically confirmed SNe Ia from Pan-STARRS1 and cosmological constraints from the combined pantheon sample”, *The Astrophysical Journal*, v. 859, n. 2, pp. 101.
- SECCO, L. F., SAMUROFF, S., KRAUSE, E., et al., 2022, “Dark Energy Survey Year 3 results: Cosmology from cosmic shear and robustness to modeling uncertainty”, *Physical Review D*, v. 105, n. 2, pp. 023515.
- SEIKEL, M., CLARKSON, C., SMITH, M., 2012, “Reconstruction of dark energy and expansion dynamics using Gaussian processes”, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2012, n. 06, pp. 036.
- SHAFIELOO, A., KIM, A. G., LINDER, E. V., 2012, “Gaussian process cosmography”, *Physical Review D: Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, v. 85, n. 12, pp. 123530.
- SHOJAIE, H., FARHOUDI, M., 2006, “A cosmology with variable c ”, *Canadian journal of physics*, v. 84, n. 10, pp. 933–944.
- SHOJAIE, H., FARHOUDI, M., 2007, “A varying- c cosmology”, *Canadian Journal of Physics*, v. 85, n. 12, pp. 1395–1408.
- SLIPHER, V. M., 1912, “On the spectrum of the nebula in the Pleiades”, *Lowell Observatory Bulletin*, vol. 2, pp. 26–27, v. 2, pp. 26–27.

- SUNYAEV, R. A., ZELDOVICH, Y. B., 1970, “Small-scale fluctuations of relic radiation”, *Astrophysics and Space Science*, v. 7, n. 1, pp. 3–19.
- TEIXEIRA, E. M., GIARÈ, W., HOGG, N. B., et al., 2025, “Implications of distance duality violation for the H_0 tension and evolving dark energy”, *Physical Review D*, v. 112, n. 2, pp. 023515.
- TSUJIKAWA, S., 2013, “Quintessence: a review”, *Classical and Quantum Gravity*, v. 30, n. 21, pp. 214003.
- UZAN, J.-P., 2003, “The fundamental constants and their variation: observational and theoretical status”, *Reviews of modern physics*, v. 75, n. 2, pp. 403.
- UZAN, J.-P., 2011, “Varying constants, gravitation and cosmology”, *Living reviews in relativity*, v. 14, n. 1, pp. 1–155.
- UZAN, J.-P., 2015, “The stability of fundamental constants”, *Comptes Rendus. Physique*, v. 16, n. 5, pp. 576–585.
- UZAN, J.-P., 2024, “Fundamental constants: from measurement to the universe, a window on gravitation and cosmology”, *arXiv preprint arXiv:2410.07281*.
- UZAN, J.-P., 2025, “Fundamental constants: from measurement to the universe, a window on gravitation and cosmology”, *Living Reviews in Relativity*, v. 28, n. 1, pp. 1–330.
- UZAN, J.-P., AGHANIM, N., MELLIER, Y., 2004, “Distance duality relation from x-ray and Sunyaev-Zel’dovich observations of clusters”, *Physical Review D&Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology*, v. 70, n. 8, pp. 083533.
- WANG, D., ZHANG, H., ZHENG, J., et al., 2019, “A model independent constraint on the temporal evolution of the speed of light”, *arXiv preprint arXiv:1904.04041*.
- WANG, Y.-Y., TANG, S.-P., JIN, Z.-P., et al., 2023, “The late afterglow of GW170817/GRB 170817A: a large viewing angle and the shift of the Hubble constant to a value more consistent with the local measurements”, *The Astrophysical Journal*, v. 943, n. 1, pp. 13.
- WEINBERG, D. H., MORTONSON, M. J., EISENSTEIN, D. J., et al., 2013, “Observational probes of cosmic acceleration”, *Physics reports*, v. 530, n. 2, pp. 87–255.
- WEINBERG, S., 1972, “Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity”, .

- WEINBERG, S., 2001, “The cosmological constant problems”. In: *Sources and Detection of Dark Matter and Dark Energy in the Universe: Fourth International Symposium Held at Marina del Rey, CA, USA February 23–25, 2000*, pp. 18–26. Springer.
- WEINBERG, S., 2008, *Cosmology*. OUP Oxford.
- WILLIAMS, C. K., RASMUSSEN, C. E., 2006, *Gaussian processes for machine learning*, v. 2. MIT press Cambridge, MA.
- YANG, T., GUO, Z.-K., CAI, R.-G., 2015, “Reconstructing the interaction between dark energy and dark matter using Gaussian Processes”, *Physical Review D*, v. 91, n. 12, pp. 123533.
- YANG, T., HOLANDA, R., HU, B., 2019, “Constraints on the cosmic distance duality relation with simulated data of gravitational waves from the Einstein Telescope”, *Astroparticle Physics*, v. 108, pp. 57–62.
- YANG, X., YU, H.-R., ZHANG, Z.-S., et al., 2013, “An improved method to test the Distance–Duality relation”, *The Astrophysical Journal Letters*, v. 777, n. 2, pp. L24.
- ZHANG, C.-Y., HONG, W., WANG, Y.-C., et al., 2024a, “A stochastic approach to reconstructing the speed of light in cosmology”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 534, n. 1, pp. 56–69.
- ZHANG, H., LIU, Y., YU, H., et al., 2024b, “Constraints on cosmological models from quasars calibrated with type Ia supernova by a Gaussian process”, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 530, n. 4, pp. 4493–4500.
- ZHANG, H., WANG, Y.-C., ZHANG, T.-J., et al., 2023, “Kernel selection for gaussian process in cosmology: with approximate Bayesian computation rejection and nested sampling”, *The Astrophysical Journal Supplement Series*, v. 266, n. 2, pp. 27.
- ZHANG, J.-F., ZHANG, M., JIN, S.-J., et al., 2019, “Cosmological parameter estimation with future gravitational wave standard siren observation from the Einstein Telescope”, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, v. 2019, n. 09, pp. 068.
- ZHANG, P., MENG, X., 2014, “SNe data analysis in variable speed of light cosmologies without cosmological constant”, *Modern Physics Letters A*, v. 29, n. 24, pp. 1450103.

- ZOU, X.-B., DENG, H.-K., YIN, Z.-Y., et al., 2018, “Model-independent constraints on Lorentz invariance violation via the cosmographic approach”, *Physics Letters B*, v. 776, pp. 284–294.