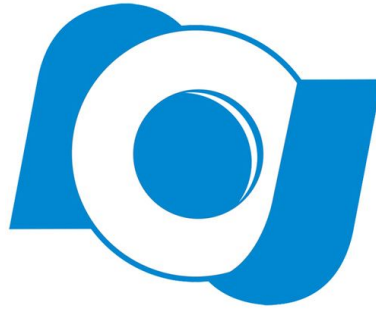


OBSERVATÓRIO NACIONAL  
MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO - MCTI  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ASTRONOMIA



**Investigação da influência de efeitos instrumentais e  
atmosféricos na astrometria de imagens CCD**

ALUNO: JONATÃ ARCAS SILVA  
ORIENTADOR: DR. JULIO IGNACIO BUENO DE CAMARGO  
CO-ORIENTADOR: DR. CARLOS ALBERTO GUERRERO PEÑA

RIO DE JANEIRO  
03 DE ABRIL DE 2025

JONATÃ ARCAS SILVA

INVESTIGAÇÃO DA INFLUÊNCIA DE EFEITOS  
INSTRUMENTAIS E ATMOSFÉRICOS NA ASTROMETRIA DE  
IMAGENS CCD

*Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em  
Astronomia do Observatório Nacional como requisito parcial  
para a obtenção do grau de **Mestre** em Astronomia.*

**Orientador:** Julio Ignacio Bueno de Camargo  
**Co-orientador:** Carlos Alberto Guerrero Peña

RIO DE JANEIRO - RJ  
2025

# Agradecimentos

Início agradecendo ao prof.º Julio Camargo por todo o ensino e paciência durante o desenvolvimento deste projeto de pesquisa. As ideias do prof.º Julio são muito valiosas e ele é uma grande pessoa. Tenho muito a aprender com ele e espero que trabalhemos juntos por um longo período!

Também agradeço imensamente ao meu co-orientador, prof.º Carlos Guerrero. Sua paciência ajudou-me a aprender bastante sobre a área de instrumentação astronômica, o que me deixa muito feliz. Espero continuar aprendendo e cumprir as expectativas para a continuação do projeto e para projetos futuros.

Gostaria de expressar minha profunda gratidão ao Observatório Nacional pela oportunidade de realizar meu mestrado nesta renomada instituição. É inegável que o ON é uma das maiores referências em pesquisa astronômica no país, mas, além disso, estar aqui representa a realização de um sonho pessoal. O apoio às atividades de pesquisa, a participação em eventos científicos e o convívio com pesquisadores de excelência na área da Astronomia têm sido fundamentais para a minha formação acadêmica e profissional, e tudo isso foi possível graças ao ON.

Agradeço muito também a todos os pesquisadores e às pesquisadoras, servidores e servidoras, e aos trabalhadores e trabalhadoras do ON. Todos são pessoas muito amigáveis e amorosas. Gostaria de fazer um agradecimento especial à Christianne Garnier, que muito me ajudou durante este período. Sua ajuda não foi o simples cumprimento de seu trabalho, mas ela nos protege como mãe. Obrigado pelo ombro, Chris! Também agradeço muito a Giane Boldrim, por toda a sua paciência comigo e por todos os conselhos.

É também com profunda gratidão que agradeço ao Laboratório Nacional de Astrofísica. A colaboração do LNA foi muitíssimo importante para o prosseguimento deste projeto. Agradeço muito ao Saulo Gargaglioni pela disponibilidade de enviar dados que foram essenciais para o desenvolvimento do mestrado. Também agradeço muito o apoio de todos os servidores e trabalhadores pelo apoio nas missões de observação que participei neste período. Um abraço especial a todas e todos!

Um agradecimento especial também aos pesquisadores, colegas e amigos do Grupo do Rio. O aprendizado com todos tem sido de grande valor e espero continuar aprendendo e contribuindo com o grupo. Tenho certeza de que abraço a todos quando agradeço ao coordenador da colaboração, o prof.º Roberto Vieira Martins.

Agradeço também à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e à Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ) pelo apoio financeiro durante o período de desenvolvimento deste projeto.

Impossível esquecer dos grandes amigos e amigas que fiz no ON. Gostaria de agradecê-los por todo o apoio! Estar com vocês é um frescor nestes tempos difíceis e vocês ajudam a tornar a vida mais leve. Vejo sempre com alegria seus projetos e toda a sua inteligência e esforço são uma grande inspiração para mim. Um abraço a todas e todos, tanto da casa branca, como também do prédio.

Por fim, agradeço aos meus pais e familiares por toda a paciência, suporte e amor.

Prometo a todos que, quando o abacateiro que plantei no ON começar a dar seus frutos, estaremos todos reunidos na sua sombra, compartilhando os abacates!

## Resumo

O maior avanço da Astrometria moderna no óptico foi o catálogo Gaia. Ele solucionou problemas que há muito desafiavam os esforços na construção de catálogos de referência com posições precisas, livres do acúmulo de erros sistemáticos. Isso permite que telescópios de médio e pequeno porte sejam usados de maneira mais eficiente para a determinação de posições de pequenos corpos do Sistema Solar. Essas posições necessitam de constante monitoramento e as observações são feitas, na maior parte das vezes, por esse tipo de telescópio. A obtenção de posições precisas desse tipo de objeto astronômico permite que suas efemérides sejam mais acuradas, o que tem como consequência a melhor predição de eventos relacionados a seu estudo, tais como as ocultações estelares.

A solução na parte do catálogo de referência das posições lança responsabilidade sobre a redução astrométrica. O melhoramento deste quesito envolve melhor conhecimento dos efeitos instrumentais e atmosféricos que influenciam na determinação das posições dos objetos celestes. Com esse intuito, uma boa alternativa é o uso de simulações ópticas da instrumentação astronômica para reprodução, manipulação e medição desses efeitos.

Neste trabalho, usamos o simulador óptico KrakenOS para reproduzir dois instrumentos largamente usados para a observação e obtenção de medidas de posição de pequenos corpos do Sistema Solar. São dois telescópios do Observatório do Pico dos Dias (OPD/LNA): o Perkin-Elmer de 1.6-m (PE1.6-m) e o Boller-Chivens de 0.6-m (BC0.6-m). O objetivo é criar uma ferramenta que reproduza uma imagem astronômica baseada totalmente na simulação, que leve em consideração a óptica dos instrumentos. A imagem astronômica simulada deve conter todas as características de uma imagem astronômica real, inclusive a reprodução do fluxo das fontes astronômicas, efeitos atmosféricos e das contagens relacionadas com os ruídos presentes nesta imagem. Além disso, o texto aborda a importância de considerar efeitos como desalinhamentos dos componentes do instrumento e a refração atmosférica, que podem afetar as posições das estrelas nas imagens. A ferramenta desenvolvida visa melhorar a precisão das reduções astrométricas, caracterizando melhor os sistemas ópticos e monitorando seu comportamento ao longo do tempo.

Por fim, apresentamos os resultados desta ferramenta, comparando-os com uma imagem astronômica real. As fontes reproduzidas na imagem apresentam um fluxo baseado em uma PSF gaussiana e têm distribuição visual no campo do CCD (do inglês, *Charge-coupled device*) equivalente às da imagem real. Também foram reproduzidos os efeitos da turbulência atmosférica, baseados em modelos de turbulência de Kolmogorov, mas esse quesito necessita de aperfeiçoamentos.

## Abstract

The greatest advancement in modern optical Astrometry has been the Gaia catalog. It solved long-standing challenges in the construction of reference catalogs with precise positions, free from the accumulation of systematic errors. This allows medium and small telescopes to be used more efficiently for determining the positions of small Solar System bodies. These positions require constant monitoring, and observations are mostly made using this type of telescope. Obtaining precise positions for these astronomical objects enables more accurate ephemerides, which in turn improves the prediction of events related to their study, such as stellar occultations.

The solution provided by the reference catalog for positions places responsibility on astrometric reduction. Improving this aspect involves a better understanding of instrumental and atmospheric effects that influence the determination of celestial object positions. To this end, a good alternative is the use of optical simulations of astronomical instrumentation to reproduce, manipulate, and measure these effects.

In this work, we used the KrakenOS optical simulator to reproduce two instruments widely used for observing and obtaining position measurements of small Solar System bodies. These are two telescopes from the Pico dos Dias Observatory (OPD/LNA): the 1.6-m Perkin-Elmer (PE1.6-m) and the 0.6-m Boller-Chivens (BC0.6-m). The goal is to create a tool that generates an astronomical image entirely based on simulation, taking into account the optics of the instruments. The simulated astronomical image should include all the characteristics of a real astronomical image, including the reproduction of the flux from astronomical sources, atmospheric effects, and counts related to the noise present in the image. Additionally, the text addresses the importance of considering effects such as misalignments of instrument components and atmospheric refraction, which can affect the positions of stars in the images. The developed tool aims to improve the accuracy of astrometric reductions by better characterizing optical systems and monitoring their behavior over time.

Finally, we present the results of this tool, comparing them with a real astronomical image. The sources reproduced in the image have a flux based on a Gaussian PSF and a visual distribution in the CCD (Charge-coupled device) field equivalent to that of the real image. The effects of atmospheric turbulence, based on Kolmogorov turbulence models, were also reproduced, although this aspect requires further refinement.

# Sumário

Sumário	i
Lista de Figuras	iii
Lista de Tabelas	ix
<b>1</b> Introdução	<b>1</b>
<b>2</b> Astrometria	<b>3</b>
2.1 Dispositivos de carga acoplada	4
2.2 Catálogos astrométricos	11
2.3 Algoritmo de centragem	12
2.3.1 Fococentro	13
2.3.2 Momento modificado	13
2.3.3 Método do fotogravicentro	14
2.3.4 Funções contínuas - PSF: limites de precisão para a centragem	14
2.3.5 Precisão dos ajustes	21
2.4 Conceitos da redução de observações	32
<b>3</b> Telescópios	<b>47</b>
3.1 Resolução e poder de coleta de luz	47
3.1.1 Efeitos de difração	47
3.1.2 Turbulência atmosférica	53
3.2 Convenção de sinais	59
3.3 Equações do traçado de raio meridional	61
3.4 Equação paraxial da refração	62
3.5 Elementos de duas superfícies refratoras	65
3.6 Formação de imagem em telescópios refratores	68
3.7 Equação paraxial da reflexão	69
3.8 Elementos de duas superfícies refletoras	70
3.9 Formação de imagem em telescópios refletores	72
3.10 Magnitude limite de um telescópio	73
3.11 Tipos de telescópios e aberrações ópticas	75
3.11.1 Telescópios refratores	76
3.11.2 Telescópio gregoriano	77
3.11.3 Telescópio newtoniano	77
3.11.4 Telescópio Cassegrain	78
3.11.5 Telescópios Ritchey-Chrétien	78

3.11.6	Telescópios catadióptricos . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Simulações ópticas</b>	<b>81</b>
4.1	Conceitos de óptica geométrica . . . . .	81
4.1.1	Tipos de raios . . . . .	82
4.2	Kraken Optical Simulator - KrakenOS . . . . .	82
4.2.1	Sistema de coordenadas e convenção de sinais . . . . .	83
4.2.2	<i>Workflow</i> com o KrakenOS . . . . .	83
4.2.3	Exemplo da criação de um sistema óptico . . . . .	84
4.2.4	Definição de raios . . . . .	86
4.2.5	Pupila do sistema . . . . .	88
4.2.6	Diagrama de pontos . . . . .	91
4.3	Aberrações ópticas . . . . .	92
<b>5</b>	<b>Metodologia</b>	<b>99</b>
5.1	Objetivos . . . . .	99
5.2	Rotinas para modelagem dos telescópios . . . . .	100
5.3	Rotinas para imagem com uma fonte . . . . .	104
5.4	Rotinas para reprodução dos ruídos . . . . .	107
5.4.1	Ruído de leitura . . . . .	108
5.4.2	Corrente de escuro . . . . .	109
5.4.3	Contagens de fundo de céu . . . . .	111
5.4.4	Características atmosféricas . . . . .	112
5.5	Imagem astronômica de uma simulação óptica . . . . .	114
<b>6</b>	<b>Análise e Resultados</b>	<b>120</b>
6.1	Análise da imagem com fonte única . . . . .	120
6.2	Análise da imagem de campo completo . . . . .	121
6.2.1	Comparação visual . . . . .	121
6.2.2	Características da imagem de campo . . . . .	122
6.3	Funcionamento do telescópio modelado . . . . .	126
6.4	Discussão dos resultados . . . . .	128
<b>7</b>	<b>Conclusões e comentários</b>	<b>131</b>
<b>A</b>	<b>Telescópios do OPD</b>	<b>133</b>

# Lista de Figuras

2.1	Arranjo esquemático que demonstra a operação de CCD. A carga é transferida pelas linhas de pixel até uma coluna que os registra. Depois é transferida para um leitor horizontal que converte a carga em ADU ( <i>analog-to-digital units</i> ). Figura: Keim (2020). . . . .	5
2.2	Imagens de <i>bias</i> tomada no contexto das observações do dia 13 de junho de 2020, no telescópio BC 0.6-m (IAG) do Observatório do Pico dos Dias. A câmera usada foi a Ikon-10127. Os observadores da noite foram o Dr. Marcelo Assafin, o Dr. Sérgio Santos Filho e Jonatã Arcas Silva. Abaixo, a distribuição de contagens na linha central da imagem. . . . .	6
2.3	Relação entre os fótons e as contagens. É possível perceber que somente para contagens próximas a 26000 ADU a não-linearidade aparece. Figura: Howell (2006). . . . .	7
2.4	Imagem de corrente de escuro tomada a partir de um dispositivo com sistema de resfriamento. Figura: Howell (2006). . . . .	8
2.5	Imagens de <i>flat-field</i> tomada no contexto das observações do dia 13 de junho de 2020, no telescópio BC 0.6-m (IAG) do Observatório do Pico dos Dias. O tempo de exposição da imagem é de 70 s, usando o filtro I. A câmera usada foi a Ikon-10127. Os observadores da noite foram o Dr. Marcelo Assafin, o Dr. Sérgio Santos Filho e Jonatã Arcas Silva. Abaixo, está incluído o perfil da linha central da imagem.	9
2.6	Eficiência quântica em cada um dos quatro canais do instrumento em uso no Observatório do Pico dos Dias (OPD), a SPARC4 (Rodrigues et al., 2012). Em azul, a eficiência quântica medida pela equipe, em verde, a mesma quantidade fornecida pelo fabricante e em vermelho, a estimativa de incerteza devido a desalinhamentos mecânicos e estabilização da luz. O instrumento é composto por quatro câmeras CCD, com canais em quatro bandas: g, r, i e z (próximas às bandas do SDSS). Figura: (Bernardes et al., 2018). . . . .	10
2.7	Ilustração esquemática da metodologia de ponderamento usada no método do fotogravicentro. Percebemos que um pixel mais brilhante, porém afastado do centro da fonte (maior agrupamento de píxeis), pode desviar o centróide. Por isso, ao ser considerada também a distância entre os píxeis, evita-se esse desvio. Figura: Assafin (2023).	15

2.8	Ilustração que mostra o caso contínuo de uma distribuição de valores, tal como acontece em um CCD. Na esquerda, vemos o caso real em um CCD, em que o número de contagens ADU representa a altura do pixel. Na direita, temos um exemplo de uma função contínua gaussiana, representando o ajuste que fazemos. . . . .	16
2.9	Vizualização de uma fonte astronômica em uma imagem (Figura 2.9a) e o ajuste gaussiano (Figura 2.9b) ajustado nela. . . . .	16
2.10	Na esquerda, vemos o resíduo entre as imagens na Figura 2.9a no sentido imagem menos ajuste. Na direita, temos a comparação de uma linha central entre o ajuste, a imagem e o resíduo. . . . .	17
2.11	Ilustração da gaussiana elíptica em três dimensões. . . . .	18
2.12	Análise gráfica para entendimento da influência dos coeficientes $\alpha$ e $\beta$ na função lorentziana. . . . .	19
2.13	Análise gráfica para entendimento do parâmetro de dispersão da PSF lorentziana, com $\alpha$ e $\beta$ fixos e $\gamma$ variando. . . . .	19
2.14	Perfil da PSF Moffat. . . . .	20
2.15	Análise gráfica para entendimento da influência do coeficiente $\alpha$ na PSF Moffat. . . . .	21
2.16	Análise gráfica para entendimento da influência do coeficiente $\beta$ na PSF Moffat. . . . .	21
2.17	Comparação de duas fontes bem amostradas. Porém na esquerda vemos uma em que as contagens do objeto superam as contagens de fundo de céu. Desse modo, podemos considerar para esse caso $c \gg B$ . No caso da direita, um objeto fraco tem suas contagens dominadas pelas contagens de fundo de céu. Será levado em conta, então, que $B \gg c$ . Figura: Romanishin (2006). . . . .	24
2.18	Efeito de paralaxe. Na figura, o ângulo $\pi$ é a paralaxe, $a$ é a distância da Terra para o baricentro do Sistema Solar e a distância $r$ é aquela entre o baricentro do Sistema Solar e a fonte. . . . .	34
2.19	Efeito do tempo de luz. Estão consideradas a posição aparente em $a$ , dada por $\mathbf{p}(T)$ , que representa a posição em função do tempo $T$ de emissão da luz do objeto celeste. Durante o tempo de viagem da luz, a posição vai de $a$ para $a'$ . Figura baseada em Butkevich and Lindegren (2014). . . . .	35
2.20	Ilustração do sistema Terra-Lua com uma estrela distante, considerada no infinito. A luz da estrela que chega ao sistema está contida no plano Sol-Terra-Estrela. . . . .	39
2.21	Efeito de aberração em relação às coordenadas distribuídos na esfera celeste com o vetor de velocidade da Terra $\mathbf{v} = [-29.83135988, -4.767550817, -2.066490272]$ km/h. . . . .	40
2.22	Representação dos referenciais envolvidos no estudo da aberração. O referencial do observador é $(x', y', z', t')$ , com velocidade constante $v$ em relação ao referencial da fonte $(x, y, z, t)$ . . . . .	40
2.23	Modelo de camadas atmosféricas esféricas. Figura: Kovalevsky (2002). . . . .	43
2.24	Projeção gnomônica. Figura: Green (1985). . . . .	45

3.1	Difração de uma fenda pequena. Pontos $A$ e $B$ representam as bordas da fenda e $P$ representa um ponto sobre um anteparo qualquer. Figura: Hecht (2012).	48
3.2	Ilustração para explicação da fórmula da difração (Born and Wolf, 2013), também conhecida como construção da zona de Fresnel (Saha, 2007). Figura: Born and Wolf (2013)	49
3.3	Na esquerda, temos um padrão de difração de Fraunhofer de uma abertura retangular em uma dimensão. Na direita, vemos o mesmo padrão, mas agora em duas dimensões. Figura: Saha (2007).	51
3.4	Na esquerda, temos um padrão de difração de Fraunhofer de uma abertura circular em uma dimensão. Na direita, vemos o mesmo padrão, mas agora em duas dimensões. Figura: Saha (2007).	53
3.5	Comparação entre os perfis em uma dimensão da gaussiana e de Fraunhofer.	53
3.6	Comparação entre os perfis em duas dimensão da gaussiana (esquerda) e da difração de Fraunhofer (direita).	54
3.7	Onda plana propagando-se através de múltiplas camadas turbulentas. Na Figura, $L_1$ e $L_2$ representam tamanhos de telescópios, com suas respectivas aberturas, $D_1$ e $D_2$ . Figura: Saha (2007).	57
3.8	Largura à meia altura (FWHM). Comparação entre as PSFs de uma fonte fraca (esquerda) e uma fonte brilhante (direita). A linha tracejada abaixo demarca as contagens de fundo de céu. A figura demonstra que, independente da fonte, ambas têm o mesmo <i>seeing</i> . Figura: Romanishin (2006).	58
3.9	Refração em uma superfície esférica. O sistema na figura mostra como são definidos a orientação e o sentidos dos sinais para a explicação dos sistemas ópticos usados na Astronomia, descritos neste capítulo. Figura: Schroeder (1999).	59
3.10	Ilustração sobre os tipos de raios definidos para um sistema óptico formado por uma superfície esférica refratora. Figura: Malacara et al. (2003).	60
3.11	Raio meridional. Figura: Malacara et al. (2003).	61
3.12	Pontos conjugados na região paraxial. Os pares de pontos $B$ e $B'$ , $Q$ e $Q'$ são pontos conjugados. Figura: Schroeder (1999).	64
3.13	Magnificação angular. Figura: Schroeder (1999).	65
3.14	Exemplo de um sistema óptico formado por uma lente espessa, formada por duas superfícies.	66
3.15	Imagem formada por uma lente espessa ideal. Um exemplo da formação da imagem por lentes. Todos os raios do objeto $Q$ são refratados e formam uma imagem em $Q'$ . Figura: Jenkins et al. (1937).	68
3.16	Esquema simples de um telescópio refrator. Figure: Born and Wolf (2013).	68
3.17	Reflexão de uma superfície esférica. $B$ e $B'$ são os pontos conjugados do eixo óptico.	69
3.18	Esquema simplificado do traçado de raio em dois telescópios refletor, (3.18a) um Cassegrain, e outro (3.18b) um Gregoriano. Figura: Born and Wolf (2013).	71

3.19	Desenho esquemático de um telescópio newtoniano. Figura: Born and Wolf (2013). . . . .	73
3.20	Forma de algumas superfícies cônicas. Malacara et al. (2003). . . . .	75
3.21	Diferentes raios em um telescópio refrator gerado a partir de uma simulação óptica. À esquerda, temos o desenho óptico de um telescópio refrator. Na direita, vemos um diagrama de pontos de raios de diferentes cores gerados a partir de uma simulação óptica. . . . .	76
3.22	Telescópio gregoriano. Figura: Malacara et al. (2003). . . . .	77
3.23	Telescópio newtoniano. Figura: Malacara et al. (2003). . . . .	77
3.24	Telescópio Cassegrain. Figura: Malacara et al. (2003). . . . .	78
3.25	Telescópio PE 1.60m do Observatório do Pico dos Dias (OPD/LNA). O telescópio é do tipo Ritchey-Chrétien. . . . .	79
3.26	Fotos dos telescópios brasileiros no Observatório do Pico dos Dias. O desenho óptico de ambos é do tipo Ritchey-Chrétien. Fotos: Ina (2024). . . . .	79
3.27	Esquema do sistema Schmidt-Cassegrain. Figura: Smith (2008). . . . .	80
4.1	Convensão de sinais no KrakenOS. Figura adaptada de Herrera Vazquez and Guerrero (2023). . . . .	83
4.2	Exemplo de criação de um sistema óptico. Figura adaptada de Herrera Vazquez and Guerrero (2023). . . . .	85
4.3	Exemplo de criação de uma lente simples. . . . .	87
4.4	Representação dos cossenos diretores. Figura adaptada de Herrera Vazquez and Guerrero (2023). . . . .	88
4.5	Raio com comprimento de onda de $0.4 \mu\text{m}$ introduzido em um sistema óptico. . . . .	89
4.6	Resultado da montagem do telescópio PE1.6-m, simulado com o KrakenOS. . . . .	91
4.7	Resultado da montagem do telescópio PE1.6-m, exemplificando o uso do traçado dos raios, simulado com o KrakenOS. . . . .	91
4.8	Na figura da esquerda, vemos o diagrama de pontos do telescópio PE1.6-m. Com a função <i>PupilCalc()</i> definimos três arranjos de raios hexapolares. À direita, vemos o mesmo diagrama, mas agora demarcando o limite de difração do telescópio, determinado pelo disco de Airy. . . . .	92
4.9	Exemplo do diagrama de pontos introduzindo a aberração esférica no telescópio PE1.6-m. No centro da figura é possível ver o limite de difração do telescópio. . . . .	94
4.10	Exemplo do diagrama de ponto do telescópio PE1.6-m, agora introduzindo a coma. . . . .	95
4.11	Efeitos da coma na determinação do centróide. . . . .	96
4.12	Análise gráfica dos efeito dos polinômios de Zernike na fase da frente de onda da luz. Figura: Malacara et al. (2003). . . . .	97
4.13	Astigmatismo no telescópio PE1.6-m, introduzido com o KrakenOS. . . . .	97
5.1	Exemplo do desenho óptico do telescópio BC0.6-m feito com o KrakenOS. . . . .	102

5.2	Imagem real do aglomerado aberto ESO518-03. As observações foram feitas no telescópio BC0.6-m do OPD, na noite do dia 13 de junho de 2020. Os observadores da noite foram Dr. Marcelo Assafin, Dr. Sérgio Santos-Filho e Jonatã Arcas Silva. . . . .	104
5.3	Distribuição de pontos no plano imagem do telescópio BC0.6-m. . . . .	106
5.4	Acima, vemos a formação de uma fonte sem a inclusão de ruídos gerada a partir de uma simulação óptica. Abaixo, vemos a distribuição de pontos em toda a imagem. As contagens em zero, mostram a falta dos ruídos. . . . .	107
5.5	Imagem com as contagens de <i>bias</i> mais o ruído de leitura. . . . .	109
5.6	Imagem incluindo as contagens de corrente de escuro. . . . .	110
5.7	Imagem incluindo as contagens de fundo de céu. . . . .	112
5.8	Resultado do processo de transformação dos raios no plano imagem do KrakenOS para fluxo no CCD, agora com as contagens referentes aos ruídos incluídas nas contagens. . . . .	113
5.9	Turbulência reproduzida em uma parte do campo. . . . .	114
5.10	Imagem com as máscaras de turbulência atmosféricas na posição de cada fonte. Importante destacar, as fontes ainda não estão colocadas aqui, somente as contagens relacionadas aos ruídos, desenvolvidos nas seções anteriores. . . . .	115
5.13	Imagem simulada com o KrakenOS composta por estrelas identificadas no campo do aglomerado aberto ESO518-03, com posições calculadas a partir da redução astrométrica obtida com a task de astrometria do PRAIA (Assafin, 2023). Nessa imagem não há a introdução de ruído. . . . .	117
5.11	Fluxograma da função <code>posicoes_reais()</code> para formação de imagem no plano focal do telescópio simulado. . . . .	118
5.12	Resultado da distribuição de estrelas no plano imagem. . . . .	119
5.14	Imagem simulada com o KrakenOS composta por estrelas identificadas no campo do aglomerado aberto ESO518-03, agora com a introdução das contagens referentes às rotinas que reproduzem os ruídos. . . . .	119
6.1	Fonte única com contagens de fundo de céu, bias, corrente de escuro e turbulência atmosférica. . . . .	120
6.2	Perfil radial no centróide em $(x, y)$ e resultado da largura a meia altura da imagem com fonte única. . . . .	121
6.3	Comparação visual entre a imagem real do aglomerado aberto ESO518-03 e a imagem simulada. . . . .	122
6.4	Escolhemos a mesma estrela nas duas imagens. Na esquerda, o campo de estrelas da imagem real e na direita, da imagem simulada . . . . .	123
6.5	Na esquerda, vemos um recorte da imagem real com uma estrela de magnitude 13.62. Na direita, a estrela com posição equivalente. . . . .	124
6.6	Na esquerda, vemos um recorte da imagem real com uma estrela de magnitude 13.62. Na direita, a estrela com posição equivalente na imagem simulada. . . . .	124
6.7	Perfil radial em $x$ e $y$ da estrela na imagem real. . . . .	125
6.8	Perfil radial em $x$ e $y$ da estrela na imagem simulada. . . . .	125

6.9	Campo de estrelas aplicando o desfoque, aberração óptica de primeiro grau. . . . .	126
6.10	Campo de estrelas aplicando o astigmatismo, aberração óptica de segundo grau. . . . .	127
6.11	Campo de estrelas aplicando o coma, aberração óptica de terceiro grau. . . . .	127
A.1	Capa do documento com a planta do desenho óptico do telescópio PE1.6-m, do Observatório do Pico dos Dias (OPD/LNA). . . . .	133
A.2	Página do documento contendo a planta do desenho óptico do telescópio PE1.6-m do Observatório do Pico dos Dias (OPD/LNA). Documento cedido por Saulo Gargaglioni (OPD/LNA). . . . .	134
A.3	Capa do documento que contém instruções sobre a instrumentação e a planta do desenho óptico do telescópio BC0.6-m do Observatório do Pico dos Dias (OPD/LNA). Documento cedido por Saulo Gargaglioni (OPD/LNA). . . . .	135
A.4	Primeira página contendo a planta do desenho óptico do telescópio BC0.6-m do Observatório do Pico dos Dias (OPD/LNA). Documento cedido por Saulo Gargaglioni (OPD/LNA). . . . .	136
A.5	Folha com importantes medidas do desenho óptico do telescópio BC0.6-m do Observatório do Pico dos Dias (OPD/LNA). Documento cedido por Saulo Gargaglioni (OPD/LNA). . . . .	137

# Lista de Tabelas

3.1	Constantes de conicidade para os tipos de superfícies cônicas. . . . .	75
5.1	Medidas das separações das superfícies do telescópio PE1.6-m. . . . .	100
5.2	Características do espelho primário do telescópio PE1.6-m. . . . .	101
5.3	Características do espelho secundário do telescópio PE1.6-m. . . . .	101
5.4	Medidas das separações das superfícies do telescópio BC0.6-m. . . . .	101
5.5	Características do espelho primário do telescópio BC0.6-m. . . . .	102
5.6	Características do espelho secundário do telescópio BC0.6-m. . . . .	102
6.1	Largura a meia altura, fluxo e magnitude estimada da fonte única. . .	121
6.2	Valores de entrada na variável <code>field()</code> para cada intervalo de magnitudes das estrelas no campo. . . . .	122
6.3	Largura a meia altura, fluxo e magnitude estimada da fonte da imagem real medido com o IRAF (Tody, 1986). . . . .	123
6.4	Largura a meia altura, fluxo e magnitude estimada da fonte da imagem simulada medido com o IRAF (Tody, 1986). . . . .	123
6.5	Largura a meia altura nos perfis radiais em $(x, y)$ das fontes nas imagens real (Figura 6.7) e simulada (Figura 6.8). . . . .	125
6.6	Valores introduzidos nos polinômios de Zernike para a introdução das aberrações ópticas de desfoque (Figura 6.9), astigmatismo (Figura 6.10) e coma (Figura 6.11). Os coeficientes são baseados na notação de Noll (1976) (Sotelo Burke, 2022). . . . .	128

# Capítulo 1

## Introdução

A Astrometria tem avançado significativamente, proporcionando posições cada vez mais precisas de objetos celestes. Os métodos de centragem são bem estabelecidos, mas, apesar dos grandes esforços, os catálogos de referência enfrentavam limitações que comprometiam a eficácia da técnica. Um desses desafios envolvia erros sistemáticos nos sistemas de posição.

Com o lançamento do catálogo Gaia ([Brown, 2021](#)), esse problema foi solucionado, graças à determinação precisa das posições estelares, à consistência interna dessas posições, à inercialidade do referencial baseado nelas, além da ampla cobertura (i.e., sempre haverá estrelas Gaia em campos com FOVs - do inglês *Field of View*, ou campo de visada - de, por exemplo,  $10' \times 10'$ , em qualquer região do céu). Isso possibilita o uso mais eficiente de telescópios de médio porte para a determinação de posições. Portanto, o catálogo Gaia se tornou uma referência astrométrica de alta acurácia e precisão, essencial para quaisquer medidas que dele dependam.

As observações de pequenos corpos do Sistema Solar ainda são realizadas majoritariamente a partir de telescópios terrestres. A astrometria desses objetos, em grande parte, é feita com telescópios de pequeno e médio porte. Utilizando as estrelas de referência do catálogo Gaia, a precisão na determinação das posições desses corpos celestes melhorou substancialmente. Contudo, a manutenção de órbitas precisas, especialmente para os objetos mais distantes do Sol, exige observações contínuas. Um exemplo disso, e tema de atuação de nosso grupo, é o estudo de pequenos corpos através de ocultações estelares. A previsão precisa de quando e onde esses eventos ocorrerão, seja da Terra ou em órbitas próximas (telescópios espaciais), depende do conhecimento detalhado da órbita do corpo ([Assafin, M. et al., 2010](#)).

Vale ressaltar que a astrometria de altíssima precisão da missão Gaia impulsiona e permite melhorias significativas na metrologia espacial baseada em observações terrestres. Este trabalho busca explorar isso de maneira inovadora, através da simulação de imagens CCD, ou seja, uma imagem do céu obtida com esse tipo de dispositivo, que se aproxima ao máximo das imagens reais, utilizando um simulador óptico que considera todas as influências do sistema instrumental usado na observação.

Suponhamos, então, que tenhamos uma imagem CCD de uma região específica do céu obtida por observação. Com as estrelas Gaia dessa mesma região como ponto de referência, e dispondo dos dados tanto do telescópio quanto do detector utilizados — como o Pelkin-Elmer de 1.6-m do Observatório do Pico dos Dias, equipado com a câmera Ixon4335 —, além de informações sobre magnitude, cor e

parâmetros astrométricos das estrelas Gaia, e dados atmosféricos (pressão, umidade, temperatura), é possível gerar uma imagem sintética muito próxima daquela que seria obtida em uma observação real. Os dados instrumentais (telescópio + detector) são inseridos no simulador óptico KrakenOS (Herrera et al., 2022a), onde o catálogo Gaia serve como um ‘céu teórico’, sem efeitos atmosféricos. As posições das estrelas Gaia são ajustadas por modelos rigorosos para compensar a diferença entre a época do catálogo e a época da observação.

A partir desse ponto, temos dois cenários possíveis: (i) a imagem simulada corresponde à observada em todos os aspectos, ou (ii) existem discrepâncias entre as imagens simulada e observada. No segundo e mais provável cenário, ajustes serão feitos nos parâmetros do KrakenOS para aproximar o máximo possível a imagem simulada da observada. Essas diferenças, no contexto da astrometria, refletem distorções nas medidas de distância entre estrelas na imagem observada em comparação com as distâncias ideais da imagem simulada.

O que diferencia esta abordagem é que, ao invés de usar polinômios genéricos para corrigir essas distorções, modificamos a posição física dos elementos ópticos, ajustando modelos numéricos que representam características específicas do sistema óptico, como coma, astigmatismo, distorções e curvatura de campo (Herrera et al., 2022a). Essa abordagem permite uma caracterização mais precisa do sistema instrumental, aplicando correções apenas onde são necessárias e possibilitando o monitoramento contínuo do comportamento do instrumento ao longo do tempo.

Também é importante mencionar efeitos que podem se sobrepor nesta análise. Um exemplo simples é a correção do *tilt* do CCD e os efeitos residuais da refração atmosférica. No entanto, com parâmetros fotométricos e atmosféricos adequados, é possível estimar o deslocamento da posição estelar na vertical em relação ao horizonte do observador. A comparação com a imagem observada nos permitirá determinar se a correção pela refração é suficiente ou se o ajuste do *tilt* pelo KrakenOS é também necessário. Neste caso, estamos falando da refração geral, não especificamente da refração cromática diferencial (Kovalevsky, 2002).

Nesta dissertação, apresentaremos a construção desta ferramenta que busca contribuir para as reduções astrométricas. No Capítulo 2, discutiremos detalhes fundamentais da astrometria aplicada às posições de objetos astronômicos em imagens CCD. A influência dos instrumentos na formação de uma imagem astronômica será abordada no Capítulo 3. Como a ferramenta desenvolvida se baseia em uma simulação óptica, o funcionamento do software utilizado será explorado no Capítulo 4. O processo de criação da imagem simulada será descrito passo a passo no Capítulo 5, e a análise dos resultados obtidos será analisada no Capítulo 6.

## Capítulo 2

# Astrometria

Astrometria pode ser definida como sendo a aplicação de um conjunto de técnicas para se determinar propriedades dinâmicas, cinemáticas e geométricas dos corpos celestes (Kovalevsky, 2002). Determinação das posições desses objetos, bem como das variações dessas posições, é parte das tarefas astrométricas. Nela estão incluídas técnicas observacionais, instrumentação, processamento e análise de dados e referenciais celestes. Apesar de ser um ramo da Astronomia fundamentalmente técnico e prático, é complementado por uma base físico-teórica importante. Os conhecimentos de óptica e o comportamento da luz, mecânica celeste, relatividade, sistemas de referência, astrofísica e estatística são alguns dos quais podemos nos basear para o bom manejo da técnica. Todo esse domínio científico contribui para o processo de redução de dados adquiridos por instrumentos astronômicos, traduzindo esses dados em quantidades físicas usadas na interpretação de diversos fenômenos. Na óptica, por exemplo, a compreensão do comportamento da luz ao atravessar a atmosfera terrestre e os instrumentos astronômicos permite corrigir aberrações e garantir a precisão nas medições de posição de objetos celestes. Já a mecânica celeste oferece as equações que descrevem o movimento dos corpos celestes, sendo essencial para prever órbitas e fenômenos como ocultações estelares. A relatividade, por sua vez, corrige as medições de posição, levando em conta a aberração e a deflexão da luz causada por objetos massivos. Na astrofísica, o conhecimento da física estelar, combinado com as medições astrométricas de distância e movimento próprio, permite calcular luminosidades e compreender a evolução estelar. Além disso, técnicas estatísticas avançadas são empregadas para processar grandes volumes de dados astrométricos, eliminando ruídos e aumentando a precisão das medições, o que é crucial em projetos como o da missão Gaia. Assim, todas essas áreas contribuem para a confiabilidade e a interpretação correta dos resultados astrométricos, possibilitando um entendimento profundo dos fenômenos astronômicos.

Como base da metrologia astronômica, a Astrometria é essencial para todos os campos da Astronomia. Ela é aplicada em estudos como a dinâmica do Sistema Solar (Tanga et al., 2023, Arlot, 2007), o movimento estelar — seja em estrelas binárias (Penoyre et al., 2022a,b) ou em grupos, como aglomerados (Hunt and Reffert, 2023) — e a dinâmica da própria Galáxia. Um exemplo é a missão Gaia (Brown, 2021), cujos dados revelaram estruturas galácticas antes inimagináveis (Helmi et al., 2018). Além disso, a astrometria é crucial para determinar distâncias na vizinhança solar e para métodos de detecção de exoplanetas (Feng, 2024).

Medidas, como é comum em ciência, devem vir acompanhadas das respecti-

vas incertezas. Nesse ponto, é importante distinguirmos os conceitos de precisão e acurácia. A precisão descreve a capacidade de um instrumento reproduzir, sob as mesmas condições, as quantidades observadas e a acurácia representa o quanto essas medidas desviam dos valores esperados como verdadeiros. Desse modo, a precisão pode ser aumentada pelo melhoramento da resolução e da sensibilidade dos instrumentos. A acurácia é melhorada a partir da modelagem de todos os efeitos sistemáticos que possam enviesar a medida e isso é feito a partir do processo de redução que pode envolver presciência adicional, como conhecimento de temperatura e umidade do local de observação, distorções ópticas no instrumento, além da acurácia do referencial que admitimos não ser um problema com o uso de dados astrométricos recentes da missão Gaia (Kovalevsky and Seidelmann, 2011).

Os parâmetros astrométricos são as posições  $\alpha$  e  $\delta$ , os movimentos próprios  $\mu_\alpha$  e  $\mu_\delta$  e a paralaxe  $\pi$ . Para quantificá-los, um referencial é estabelecido e realizado através de observações de objetos tão distantes que não são detectados seus movimentos próprios, tais como rádio-fontes extragalácticas compactas (Charlot et al., 2020). Com a astrometria oriunda da missão Gaia, podemos usar as posições relativas entre esses objetos com aquelas de interesse para obter uma astrometria relativa. Nesse tipo de astrometria, a astrometria Gaia é usada para traduzir coordenadas sobre o CCD em coordenadas celestes ascensão reta e declinação.

Hoje em dia, o imageamento direto (imagem CCD de uma região do céu que contém estrelas Gaia e o objeto de interesse) é um dos principais métodos para determinação das posições astronômicas de observações feitas a partir de telescópios no solo. Os dispositivos de carga acoplada (CCD, do inglês *Charge-coupled device*) são a “régua” astrométrica usada para fazermos as medições. Por isso, na primeira seção deste capítulo, falaremos sobre eles. Depois, apresentaremos alguns conceitos sobre sistemas de coordenadas, seguidos de metodologias usadas para determinação dos centróides nos objetos de uma imagem astronômica. Por fim, destacaremos correções relevantes no processo de redução astrométrica.

## 2.1 Dispositivos de carga acoplada

A invenção do CCD revolucionou a Astronomia moderna. A invenção de 1969 dos pesquisadores Willard S. Boyle e George E. Smith, do laboratório Bell, logo encontrou uma aplicação científica, quando o Instituto do Telescópio Espacial (hoje, *Space Telescope Science Institute*) e do JPL/NASA (*Jet Propulsion Lab*), introduziram nos projetos do telescópio Hubble e para a sonda da missão Galileo (McLean et al., 2008). Hoje em dia, são empregados nas diversas áreas e são uma importante ferramenta para os parâmetros metrológicos da Astronomia na banda óptica: astrometria, fotometria e espectroscopia. Com o advento dessa tecnologia, importantes passos foram cumpridos, como, por exemplo, a possibilidade da missão Gaia (Brown, 2021).

O mecanismo que gera a carga a partir de fótons é descrito pelo efeito fotoelétrico. Cada pixel é composto por silício, que tem um intervalo de energia. Os fótons que caem em um CCD estimulam o silício de cada pixel. Cada fóton absorvido libera um elétron da camada de valência do silício, movendo-o para a banda de condução. Na camada de condução, os elétrons podem ser coletados para o processo de leitura. Na Figura 2.1 podemos ver que os elétrons livres são lidos na direção das linhas do esquema do CCD. Todo o processo é controlado por um circuito de controle em

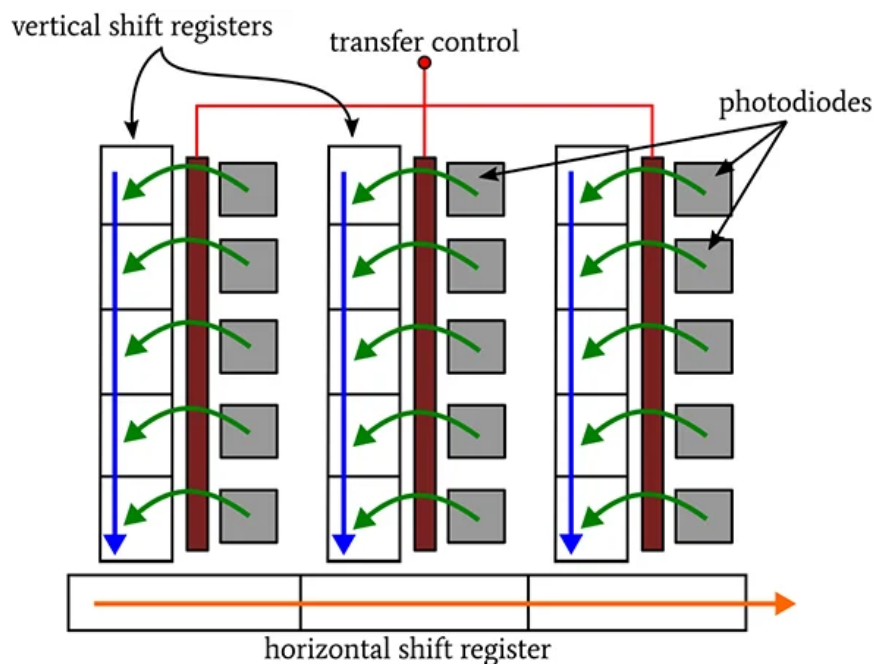


Figura 2.1. Arranjo esquemático que demonstra a operação de CCD. A carga é transferida pelas linhas de pixel até uma coluna que os registra. Depois é transferida para um leitor horizontal que converte a carga em ADU (*analog-to-digital units*). Figura: Keim (2020).

série com as colunas, aplicando uma diferença de potencial. Enquanto tomamos uma imagem, há acumulação de cargas em cada pixel e o circuito faz com que elas permaneçam nele. Após o término do tempo de exposição, o circuito abre e temos a leitura das cargas, onde cada coluna de pixel é lida sucessivamente. Nessa etapa, as cargas são convertidas em um número digital e depois convertidas em contagens em unidades de ADU (*analog-to-digital units*). A quantidade de cargas para produzir 1 ADU é determinada pelo ganho do dispositivo. O processo do tempo de leitura pode levar alguns minutos, a depender do tipo de dispositivo.

Alguns parâmetros importantes que caracterizam um dispositivo CCD são seu ruído de leitura, o ganho, sua corrente de escuro e sua eficiência quântica, além do tamanho do pixel. Um resumo conciso de cada um dos parâmetros, com suas correções para imagens de ciência, quando as houver, será dado nos parágrafos a seguir.

O ruído de leitura está relacionado com o número de elétrons introduzidos na imagem final depois da leitura do dispositivo. Consiste em dois componentes inseparáveis. O primeiro está relacionado com a conversão de cargas para ADU. O circuito que é responsável por essa conversão produz uma distribuição estatística de possíveis respostas centradas em torno de uma média. Então, considerando a leitura de um mesmo pixel duas vezes, cada uma delas com a mesma carga, haverá uma resposta levemente diferente entre elas. O outro componente é aquele devido à própria eletrônica do instrumento, que introduz elétrons em todo o processo, gerando flutuações aleatórias. O nível médio do ruído introduzido por esses dois componentes é o ruído de leitura e está limitado às propriedades eletrônicas do dispositivo (Howell, 2006).

Por causa de todo o processo, são introduzidos alguns efeitos sistemáticos rela-

cionados a esse ruído. Seu significado em uma imagem astronômica são contagens espúrias. As imagens de calibrações usadas para o conhecimento deste tipo de ruído são os *bias*. Seu objetivo é permitir a determinação do nível das contagens relacionadas a esse tipo de ruído, caracterizar os efeitos sistemáticos e seu nível no conjunto de dados que representam a imagem. As imagens de *bias* são tomadas com tempo de exposição mínimo permitido pelo dispositivo, com o *shutter* da câmera mantido fechado. Esperamos com isso obter somente as contagens devidas à leitura do CCD. Tomamos a média das contagens do conjunto de imagens de *bias* e subtraímos da imagem crua (Howell, 2006). Um exemplo desse tipo de imagem está na Figura 2.2. A câmera usada foi a Ikon-10127, com contagens médias de 1300.

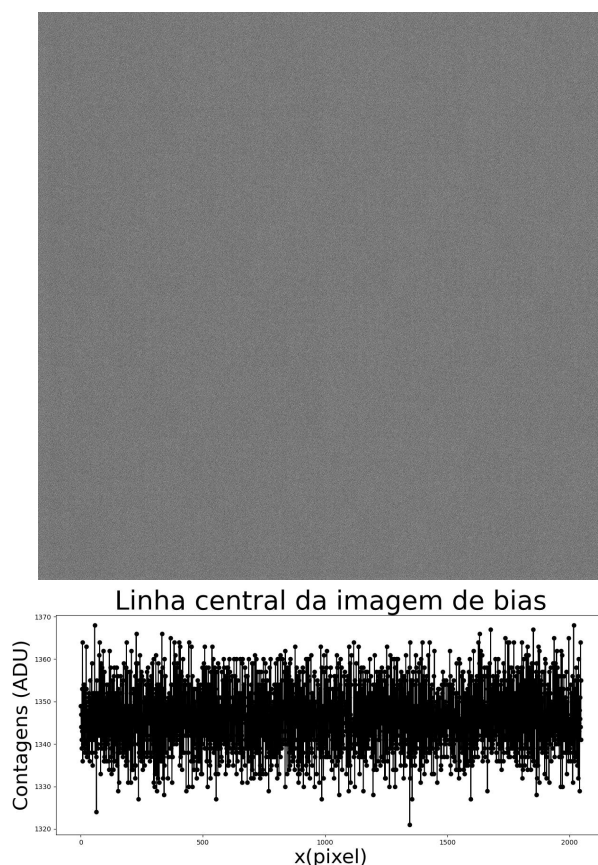


Figura 2.2. Imagens de *bias* tomada no contexto das observações do dia 13 de junho de 2020, no telescópio BC 0.6-m (IAG) do Observatório do Pico dos Dias. A câmera usada foi a Ikon-10127. Os observadores da noite foram o Dr. Marcelo Assafin, o Dr. Sérgio Santos Filho e Jonatã Arcas Silva. Abaixo, a distribuição de contagens na linha central da imagem.

O ganho é uma propriedade do CCD que determina como as cargas ( $e^-$ ) serão convertidas em contagens (ADU). É uma constante até valores elevados de cargas e é dado em unidades de elétrons/ADU. Uma das grandes vantagens dos CCDs é que sua resposta é linear para um grande intervalo de valores. Linearidade significa que temos uma simples relação linear entre os valores de entrada (as cargas) e os valores de saída (as contagens ADU). Nesse intervalo de linearidade, podemos descrever a

relação com a seguinte expressão:

$$I = \frac{q}{G}, \quad (2.1)$$

onde  $I$  é o valor das contagens (em ADU),  $G$  é o ganho e  $q$  são os valores das cargas. A Figura 2.3 mostra o intervalo de linearidade de um CCD. Percebemos que o intervalo vai de 500 até 26000 ADU. O nível de saturação está em 32767 ADU (Howell, 2006). O intervalo de não-linearidade em dispositivos CCDs é cerca de 1% de todo o *range* dinâmico. Isso significa que o brilho absoluto de uma estrela desconhecida será preciso dentro desta marca (Janesick, 2001).

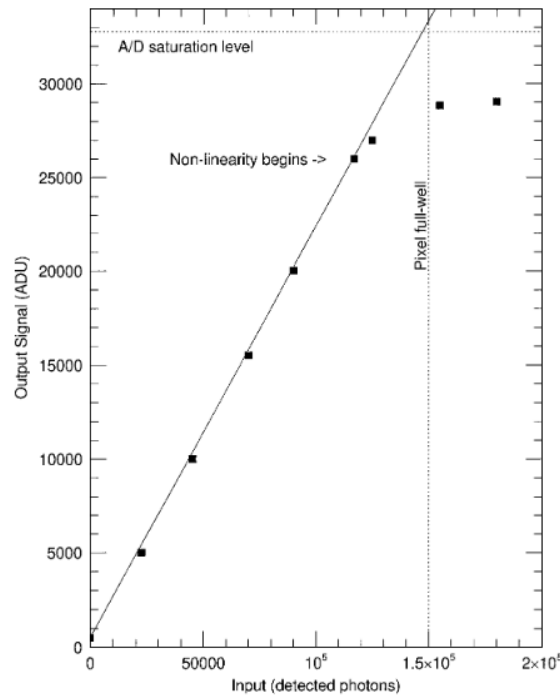


Figura 2.3. Relação entre os fótons e as contagens. É possível perceber que somente para contagens próximas a 26000 ADU a não-linearidade aparece. Figura: Howell (2006).

Todo material com temperatura acima do zero absoluto produzirá algum ruído térmico. Nos CCDs, esse tipo de ruído está associado a efeitos sistemáticos caracterizados pela corrente de escuro. Ela acontece neles porque, quando a agitação térmica é suficientemente alta, os elétrons ficam livres na camada de valência e também são coletados pelo potencial que conduz as cargas no dispositivo. Desse modo, quando há a leitura, os elétrons da corrente de escuro tornam-se parte das contagens da imagem. A depender do equipamento, um tempo de exposição de 15 minutos de uma fonte fraca pode incluir até 1800 elétrons adicionais em cada pixel do CCD (Howell, 2006). Durante a leitura da imagem, essa carga não é separada daquela de interesse científico.

Uma primeira maneira de minimizar os efeitos sistemáticos relacionados com a corrente de escuro é acoplar ao CCD um sistema de resfriamento para manter o dispositivo em temperatura entre  $-100$  e  $-70^{\circ}\text{C}$ . Mesmo assim, algumas contagens relacionadas com este tipo de ruído são introduzidas na imagem de interesse e seus efeitos sistemáticos não podem ser negligenciados. Imagens de corrente de escuro

permitted nos conhecermos o ruído térmico introduzido nas contagens de uma imagem CCD. Um exemplo desse tipo de imagem está na Figura 2.4. As imagens são tomadas com o *shutter* da câmera fechado com o mesmo tempo de exposição das imagens cruas. Uma maneira de atenuarmos os efeitos sistemáticos ainda resultantes deste tipo de ruído é subtrairmos da imagem crua uma média das imagens de corrente de escuro. Como os efeitos sistemáticos devido ao ruído de leitura também estão incluídos nas contagens de corrente de escuro, quando estas imagens são obtidas, as imagens de *bias* não são necessárias (Howell, 2006).

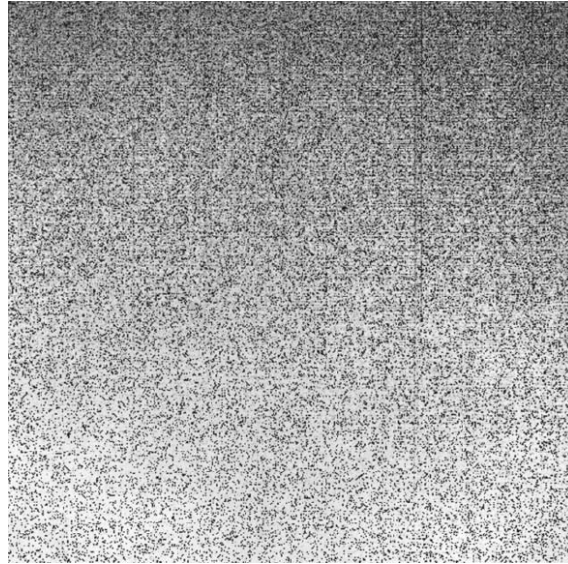


Figura 2.4. Imagem de corrente de escuro tomada a partir de um dispositivo com sistema de resfriamento. Figura: Howell (2006).

A resposta de cada pixel de um CCD não é igual, ou seja, caso dois píxeis sejam atingidos pelo mesmo sinal, sua leitura não será a mesma. Essa diferença é causada por pequenas variações nas dimensões entre os píxeis. Em escalas maiores, a falta de uniformidade é causada por pequenas variações na espessura do silício através do chip (Howell, 2006). Também pode ser necessário corrigir qualquer iluminação não uniforme no detector, tal como a vinhetagem. Essas variações podem ser de até 10% sobre todo o CCD. Para atenuar esses problemas, fazemos a normalização das imagens cruas pela imagem de *flat-field*. Para tomarmos esse tipo de imagem, iluminamos o CCD de maneira uniforme. O *flat-field* pode ser tomado de diferentes formas, tais como os *flat-field* de crepúsculo, *flat-field* de céu, *flat-field* de domo. Nesse último, uma lâmpada ilumina um anteparo branco dentro do domo para que sejam tomadas algumas imagens. É necessário fazermos uma análise das imagens tomadas para escolhermos o tempo de exposição dos *flat-field*. Uma imagem assim deve ter a melhor uniformidade possível. Por isso, evitamos contagens muito altas para não sairmos do regime de linearidade do CCD. Contagens muito baixas também não nos ajudam, pois elas também não serão representativas. Escolhemos um tempo de exposição no qual as contagens no centro da imagem representem pelo menos a metade da saturação do CCD e verificamos alguma uniformidade nas contagens sobre ele todo. No caso dos *flat-fields* tomamos a moda das contagens de todas as imagens para termos uma imagem representativa (Howell, 2006). A Figura 2.5 é um exemplo desse tipo de imagem de calibração.

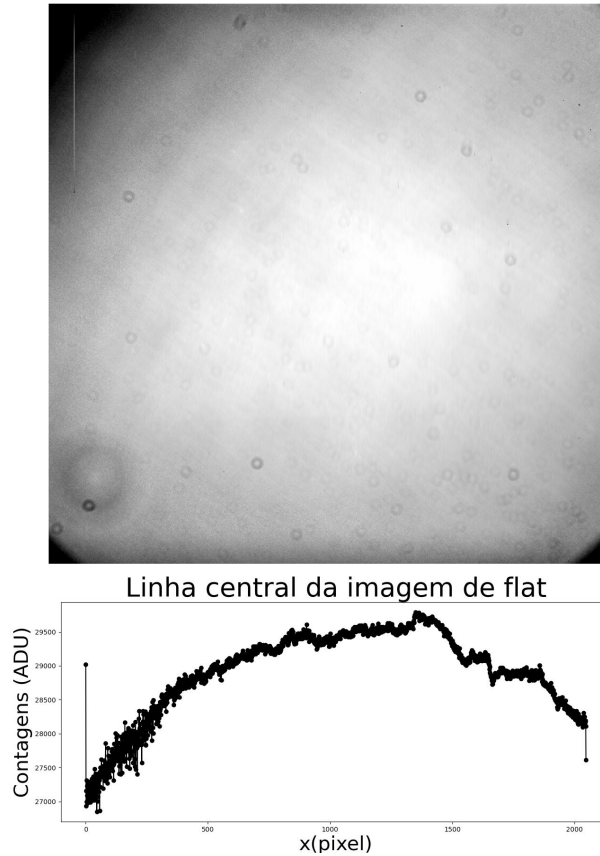


Figura 2.5. Imagens de *flat-field* tomada no contexto das observações do dia 13 de junho de 2020, no telescópio BC 0.6-m (IAG) do Observatório do Pico dos Dias. O tempo de exposição da imagem é de 70 s, usando o filtro I. A câmera usada foi a Ikon-10127. Os observadores da noite foram o Dr. Marcelo Assafin, o Dr. Sérgio Santos Filho e Jonatã Arcas Silva. Abaixo, está incluído o perfil da linha central da imagem.

Considerando  $n_i$  o número de fótons incidentes em um detector e  $n_0$  o número de fótons realmente detectados, a eficiência quântica é a relação entre estas duas quantidades, ou seja (Schroeder, 1999):

$$Q = \frac{n_0}{n_i}. \quad (2.2)$$

O resultado da Equação 2.2 é, em geral, expresso em termos percentuais (multiplicando-se o valor por 100%). Na Figura 2.6, vemos a caracterização da eficiência quântica do instrumento em uso no Observatório do Pico dos Dias (OPD), a SPARC4, da sigla em inglês para *Simultaneous Polarimeter and Rapid Camera in 4 bands* (Rodrigues et al., 2012). Perceba que, para os equipamentos mais recentes, a eficiência quântica atinge cerca de 80% nos comprimentos de onda de 400 a 700 nm.

O tamanho do pixel de um equipamento CCD também é um limitador da quantidade de luz captada por ele. A regra geral é que, quanto maior um pixel (tanto em área, como em altura), maior será a capacidade dele de coletar e armazenar luz (Howell, 2006). Portanto, uma das características de um detector é a função de modulação de transferência (MTF, do inglês *modular transfer function*), caracteri-

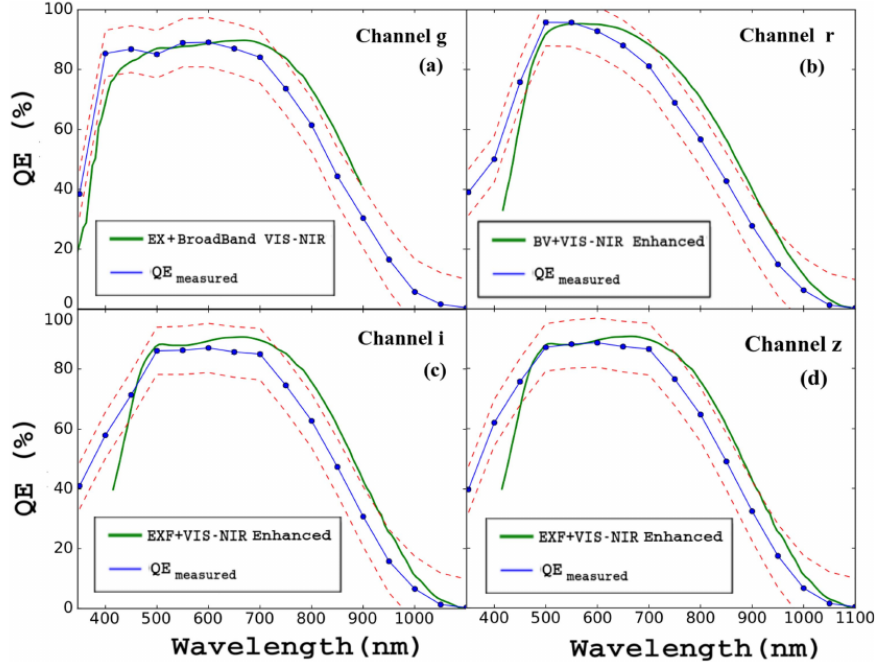


Figura 2.6. Eficiência quântica em cada um dos quatro canais do instrumento em uso no Observatório do Pico dos Dias (OPD), a SPARC4 (Rodrigues et al., 2012). Em azul, a eficiência quântica medida pela equipe, em verde, a mesma quantidade fornecida pelo fabricante e em vermelho, a estimativa de incerteza devido a desalinhamentos mecânicos e estabilização da luz. O instrumento é composto por quatro câmeras CCD, com canais em quatro bandas: g, r, i e z (próximas às bandas do SDSS). Figura: (Bernardes et al., 2018).

zada pelo tamanho do pixel. Essa função é basicamente a medida da mudança de contraste entre um objeto e um nível médio de contagens na imagem (como, por exemplo, as contagens de fundo de céu) (Schroeder, 1999).

Em coordenadas retangulares, a MTF é dada por:

$$T(\nu_x, \nu_y) = A \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} i(x, y) e^{-2\pi i(\nu_x x + \nu_y y)} dx dy, \quad (2.3)$$

onde  $\nu_x = \nu \sin \gamma$ ,  $\nu_y = \nu \cos \gamma$ , com  $\nu$  representando a frequência normalizada da frente de onda e  $\gamma$  pode receber qualquer valor conveniente para um caso especial, desde que a PSF seja simétrica,  $i(x, y)$  representa a altura e  $A$  é um fator de normalização (Schroeder, 1999).

Considerando um pixel retangular de lados  $a$  e  $b$  nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, podemos determinar a MTF por definir uma abertura retangular, do seguinte modo:

$$i(x, y) = 1, \quad |x| \leq a/2, \quad \text{e} \quad |y| \leq b/2, \quad (2.4)$$

$$= 0, \quad |x| \geq a/2, \quad \text{ou} \quad |y| \geq b/2, \quad (2.5)$$

onde o centro do pixel é dado para  $x = y = 0$ . Substituindo as condições nas Equações 2.4 e 2.5 na Equação 2.3, a MTF normalizada para esse caso será dada por (Schroeder, 1999):

$$T_a(\nu) = \text{sinc}(\pi\nu_x a) \text{sinc}(\pi\nu_y b), \quad (2.6)$$

onde é definida a função  $\text{sinc} = \sin(z)/z$ , e  $\nu$  é a frequência da luz.

O desempenho de todo o sistema pode ser obtido em termos de uma quantidade chamada razão sinal/ruído (SNR). O sinal é equivalente a quantidade de fótons detectados por um pixel e vamos denotá-la como  $n_s$ . Considerando que o sinal é armazenado um grande número de vezes sob condições idênticas, a média do sinal é  $\langle n_s \rangle$  com flutuações estatísticas no número de elétrons detectados. Como se trata de uma distribuição poissônica, a variância também é dada por  $\langle n_s \rangle$  e o desvio padrão é  $\sqrt{\langle n_s \rangle}$ . Considerando condições reais de detecção, contendo detecção de fundo de céu, contagens de corrente de escuro, o SNR é dado pela seguinte relação (Schroeder, 1999):

$$SNR = \frac{\langle n_s \rangle}{\sqrt{\langle n_s \rangle + \langle n_b \rangle + \langle n_d \rangle}}, \quad (2.7)$$

onde  $\langle n_s \rangle$  é relativo à fonte,  $\langle n_b \rangle$  ao fundo de céu e  $\langle n_d \rangle$  são contagens introduzidas devido ao detector, tais como contagens de corrente de escuro e ruído de leitura. A precisão da medida de SNR é dada por (Schroeder, 1999):

$$\sigma_{SNR} = \frac{1}{SNR}. \quad (2.8)$$

Portanto, para observações com precisão de 1% no SNR, é preciso que se alcance  $SNR=100$ .

Consideremos dois casos limites, o primeiro de um detector ideal, ou seja, sem considerar contagens de fundo de céu e corrente de escuro, e outro em que o sinal do fundo de céu é predominante em relação ao sinal da fonte (fonte fraca). Seja  $S$  e  $B$  os sinais incidentes da fonte e do fundo de céu, respectivamente. Se o tempo de exposição for  $t$  e a eficiência quântica for  $Q$ , para cada caso, o SNR será dado como:

$$SNR = \sqrt{SQ t}, \quad B \ll S, \quad (2.9)$$

$$SNR = \sqrt{SQ t} \sqrt{S/B}, \quad B \gg S. \quad (2.10)$$

## 2.2 Catálogos astrométricos

Os catálogos astrométricos realizam os três eixos coordenados, como preconizado por um dado sistema de referência. O sistema de referência correntemente adotado é o ICRS (*International Celestial Reference System*) (Arias et al., 1995). A realização corrente e mais relevante do ICRS em comprimentos de onda rádio é o ICRF3 (Charlot et al., 2020). A realização corrente e mais relevante em comprimentos de onda ópticos é o Gaia-CRF3 (Klioner et al., 2022). Ambos ICRF3 e Gaia-CRF3 devem, segundo a resolução B3 da XXXI Assembleia Geral da IAU (AGO/2021), ser usados como o padrão fundamental para astrometria em seus respectivos domínios de comprimentos de onda.

A tríade de eixos não deve possuir rotação em relação à matéria distante do Universo, como determinado pelo ICRS. Todo referencial, e por consequência o catálogo astrométrico, deve ter três qualidades principais: inercialidade, coerência e acessibilidade.

Inercialidade significa que os eixos coordenados não possuem rotação com relação à matéria distante do Universo. Nos catálogos astrométricos antigos, os eixos eram fixados baseando-se na dinâmica da Terra e na dinâmica de corpos do Sistema Solar

(Feissel and Mignard, 1998). A mudança mais relevante imposta pelo ICRS diz respeito ao conceito usado para a materialização dos eixos coordenados, que agora não mais dependem de modelos precisos de movimentos de corpos do Sistema Solar e da definição do equinócio por meio do equador celeste e da eclíptica (Feissel and Mignard, 1998).

A coerência de um catálogo astrométrico refere-se à propriedade na qual um subconjunto qualquer de objetos em um catálogo materializa no céu os mesmos eixos coordenados que o conjunto completo de dados do catálogo. A ausência de coerência leva à presença de erros sistemáticos no catálogo.

Em termos de acessibilidade, um catálogo astrométrico precisa que suas posições sejam distribuídas por toda a esfera celeste, com uma grande quantidade de objetos e cujas magnitudes sejam acessíveis para a maioria dos instrumentos em solo ou no espaço. A partir desse quesito, a densidade de objetos no catálogo aumenta, permitindo que haja maior possibilidade de que sejam usados como objetos de referência para astrometria relativa. Essa foi uma das maiores dificuldades dos catálogos astrométricos. Somente com o *Gaia*-CRF3 uma quantidade expressiva de objetos de referência teve suas posições determinadas (Klioner et al., 2022). Para efeitos de comparação, uma das materializações do ICRS foi o catálogo HIPPARCOS, que contava com cerca de 118 218 fontes astronômicas de referência espalhadas por toda a esfera celeste (Perryman et al., 1997). Admitindo que a área total da esfera celeste seja aproximadamente 41 253 graus quadrados ( $A_{esfera} = 4\pi(180/\pi)^2 = 41252.96$ ), a densidade de objetos é de aproximadamente 3 objetos por grau quadrado ( $118218/41253 = 2.87$ ). Desse modo, se levarmos em conta uma região da esfera celeste que tenha 6 minutos de arco de lado ( $6' = 0.1^\circ$ ), sua área será cerca de 0.01 grau quadrado, e baseando-se numa distribuição poissoniana das fontes pela esfera celeste, a probabilidade de encontrarmos uma fonte deste catálogo é de aproximadamente 3% ( $P = 1 - e^{-0.0287} = 0.0283 \times 100\% = 2.83\%$ , onde 0.0287 é o número esperado de estrelas em um campo de 0.01 grau quadrado). Considerando o catálogo astrométrico Gaia com 1.8 bilhões de objetos (Lindgren et al., 2021), abordando pelo mesmo cálculo e considerando uma distribuição uniforme de estrelas por toda a esfera celeste, a densidade de objetos é de cerca de 40 mil fontes astrométricas de referência por grau quadrado. Tomando a região da esfera celeste com 6 minutos de arco, temos uma média de 436.3 estrelas de referência nessa área. Portanto, a probabilidade de encontrarmos uma estrela de referência nessa região é muito próxima de 100% ( $P = 1 - e^{-436.6} \approx 1 \times 100\% \approx 100\%$ ).

## 2.3 Algoritmo de centragem

No contexto de imagens astronômicas, parte importante das medidas astrométricas nos dias de hoje é feita com os CCDs. O passo inicial para as medidas é a determinação precisa do centróide da fonte em uma imagem. Para alcançar a precisão necessária, um algoritmo de centragem é aplicado para a determinação da posição do objeto astronômico de interesse a partir da distribuição de luz.

Os algoritmos de centragem desempenham um papel crucial na astrometria. Na construção de grandes levantamentos, cada medida conta para a boa determinação da posição dos objetos catalogados. Nos catálogos de referência, a medida precisa das coordenadas equatoriais vai definir a qualidade e a coerência de toda uma classe de estudos astronômicos dependentes deles. No contexto da astrometria de pequenos

corpos do Sistema Solar, a precisão da medição é a causa do bom modelamento dinâmico do movimento do corpo, tal como a boa determinação de sua órbita, além de ser essencial para estudos que dependam do conhecimento de suas efemérides, tais como as ocultações estelares.

A escolha de um algoritmo de centragem depende do cenário a que estamos envolvidos. Fatores como qualidade da imagem, tipo de fonte e recursos computacionais envolvidos são importantes para essa escolha. Métodos simplificados, tais como os algoritmos de momento e momento modificado, podem ser usados a depender dos recursos computacionais. Para cenários mais complexos, uma função de espalhamento de pontos (PSF, do inglês *Point Spread Function*) garante uma maior precisão (Stone, 1989).

Exploraremos de maneira sucinta, alguns desses algoritmos mais utilizados na astrometria a partir do solo, tendo como objetivo principal saber qual a melhor precisão que podemos obter uma vez adotada a PSF. Isso nos ajuda a saber quão próximos, ou não, estamos de obter o melhor que o instrumento pode oferecer e, como consequência, refinar nossos modelos de redução de dados.

### 2.3.1 Fotocentro

A determinação do fotocentro é o primeiro dos algoritmos de centragem a ser apresentado. Após a identificação de um objeto astronômico de interesse em uma imagem, é determinada uma abertura ao redor dele. A partir daqui, é calculado o centro da distribuição da luz, de modo análogo ao cálculo do centro de massa, com cada posição de pixel ponderada pelo número de contagens. Consideremos  $(x, y)$  a posição do pixel e  $I(x, y)$  o número de contagens nele. A posição do centróide  $(x_c, y_c)$  será determinada como:

$$x_c = \frac{\sum xI(x, y)}{\sum I(x, y)}, \quad (2.11)$$

$$y_c = \frac{\sum yI(x, y)}{\sum I(x, y)}. \quad (2.12)$$

A principal vantagem desse método de centragem é o pouco dispêndio computacional envolvido na determinação do centróide. A desvantagem envolve a sensibilidade a possíveis fontes contaminantes. Uma segunda desvantagem é a sensibilidade ao nível do fundo de céu (Stone, 1989).

### 2.3.2 Momento modificado

Baseado no método de determinação de fotocentro (também chamado de momento), o método de momento modificado faz um corte no nível de fundo de céu em toda a imagem para depois fazer a determinação do centróide. Seja  $T$  o nível de corte de fundo de céu que determinamos e  $b$  o nível de fundo de céu. As contagens em cada pixel  $I(x, y)$  passam pela seguinte regra:

$$I(x, y) = I(x, y) - b, \quad \text{se } I(x, y) \geq T, \quad (2.13)$$

$$I(x, y) = 0, \quad \text{se } I(x, y) < T. \quad (2.14)$$

Por esse método, elimina-se o maior problema do algoritmo anterior, que é o nível do fundo de céu. Porém, ainda permanece a sensibilidade a fontes que invadem a abertura escolhida (Stone, 1989).

### 2.3.3 Método do fotogravicentro

O método de centragem do fotogravicentro é baseado no algoritmo de momento modificado. Nele, além de levar em consideração o valor das contagens em cada pixel, o agrupamento de píxeis também é usado na ponderação. Isso diminui a sensibilidade à luz de fontes relativamente próximas ou quando a parte do fluxo se sobrepõe à abertura do alvo de interesse. Esse método é inovador e está disponível na task de astrometria do PRAIA (do inglês *Package for the Reduction of Astronomical Image* - Assafin, 2023).

Consideremos como  $(j, i)$  o pixel associado a posição  $(x, y)$  dentro de uma abertura contida em quadrado de tamanho  $(N_x, N_y)$ . Seja  $C(j, i)$  as contagens em ADU acima do nível de corte de fundo de céu  $T$ . Nesse método, o critério usado para o corte no nível de fundo de céu segue uma estatística de quartis, usando o primeiro quartil dos píxeis mais brilhantes. Sob esse critério, ainda é feito um ponderamento nos píxeis baseado na distância entre eles, ou seja, os píxeis mais agrupados serão privilegiados na determinação do centróide. Um exemplo ilustrativo está na Figura 2.7. O ponderamento de distância dos píxeis  $w(j, i)$  segue a seguinte regra:

$$w(j, i) = \frac{1}{\sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_y} [x(j, i) - x(m, k)]^2 + [y(j, i) - y(m, k)]^2}. \quad (2.15)$$

O centróide  $(x_c, y_c)$  é determinado da seguinte forma:

$$x_c = \frac{\sum_{j=1}^{N_x} \sum_{i=1}^{N_y} w(j, i) C(j, i) x(j, i)}{\sum_{j=1}^{N_x} \sum_{i=1}^{N_y} w(j, i) C(j, i)}, \quad (2.16)$$

$$y_c = \frac{\sum_{j=1}^{N_x} \sum_{i=1}^{N_y} w(j, i) C(j, i) y(j, i)}{\sum_{j=1}^{N_x} \sum_{i=1}^{N_y} w(j, i) C(j, i)}. \quad (2.17)$$

### 2.3.4 Funções contínuas - PSF: limites de precisão para a centragem

Em observações a partir do solo, é natural a limitação dada pelo *seeing* no que diz respeito à resolução angular. Ainda, o espalhamento causado por esse efeito (*seeing*), faz com que a luz de uma fonte puntiforme espalhe-se sobre vários píxeis do CCD, permitindo que nos seja possível expressar, através de uma função contínua, aquilo que aparece de forma discreta sobre o detector: a distribuição do fluxo.

Como a leitura do CCD ocorre de maneira discreta, cada pixel armazena um número inteiro de contagens. Em outras palavras, as contagens registradas por cada pixel refletem a quantidade de fótons que ali incidiram: quanto maior o número de fótons recebidos, maior a contagem ADU. Dado que o espalhamento da luz de uma fonte pontual resulta em uma distribuição contínua sobre o detector, nosso objetivo é ajustar uma função matemática contínua a esse fenômeno físico, aproximando o comportamento discreto registrado pelo CCD à natureza contínua da distribuição do fluxo.

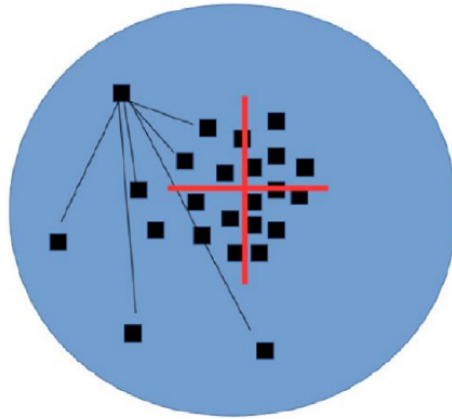


Figura 2.7. Ilustração esquemática da metodologia de ponderamento usada no método do fotogramétrico. Percebemos que um pixel mais brilhante, porém afastado do centro da fonte (maior agrupamento de píxeis), pode desviar o centróide. Por isso, ao ser considerada também a distância entre os píxeis, evita-se esse desvio. Figura: Assafin (2023).

O ajuste de uma tal função, chamada de PSF (do inglês, *Point Spread Function*) nos dá, ao mesmo tempo, tanto o fluxo do objeto como o seu centróide. A precisão com a qual esse centróide é determinado sobre o CCD representa o limite inferior (numericamente falando) da precisão com a qual a posição de um objeto poderá ser determinada. Expressar matematicamente essa precisão para algumas PSFs mais comuns é importante, tanto para realizarmos observações que nos permitam atingir objetivos pré-determinados (por exemplo, posição de um dado objeto com precisão melhor que 20 milissegundos de arco), além de entendermos o que é necessário fazer a fim de extrair o máximo de informações que a imagem pode oferecer.

### Ajuste gaussiano

O ajuste gaussiano é o primeiro dos algoritmos elencados neste capítulo que faz uso de uma PSF. O caso circular deste ajuste é representado como na ilustração na Figura 2.8. À esquerda, temos a representação da discretização das contagens no CCD e, à direita, a função contínua.

A função contínua que representa esse caso está na Equação 2.18:

$$G(x, y) = B + he^{-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.18)$$

onde  $B$  são as contagens de fundo de céu,  $h$  é a altura,  $(x_0, y_0)$  é seu centro e  $\sigma$  representa a dispersão da função em torno do centro.

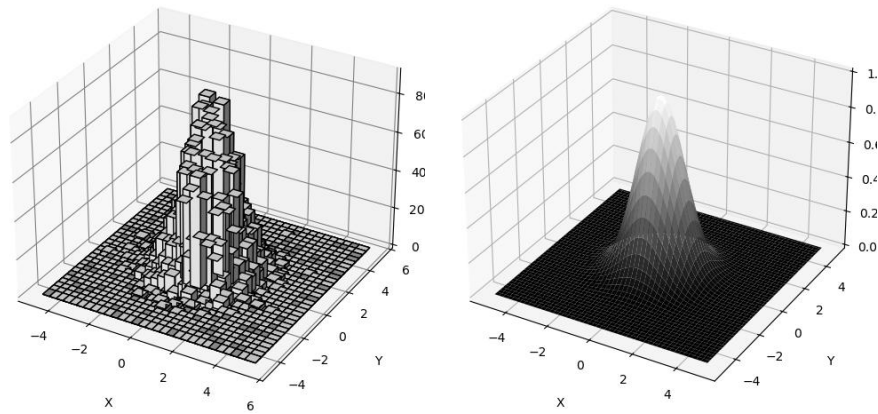
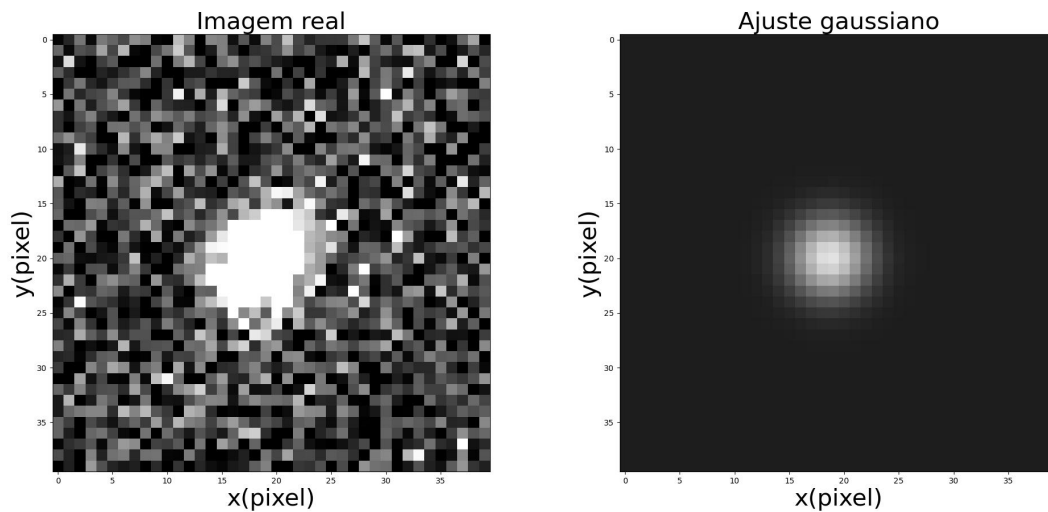


Figura 2.8. Ilustração que mostra o caso contínuo de uma distribuição de valores, tal como acontece em um CCD. Na esquerda, vemos o caso real em um CCD, em que o número de contagens ADU representa a altura do pixel. Na direita, temos um exemplo de uma função contínua gaussiana, representando o ajuste que fazemos.



(a) Imagem de uma estrela real.

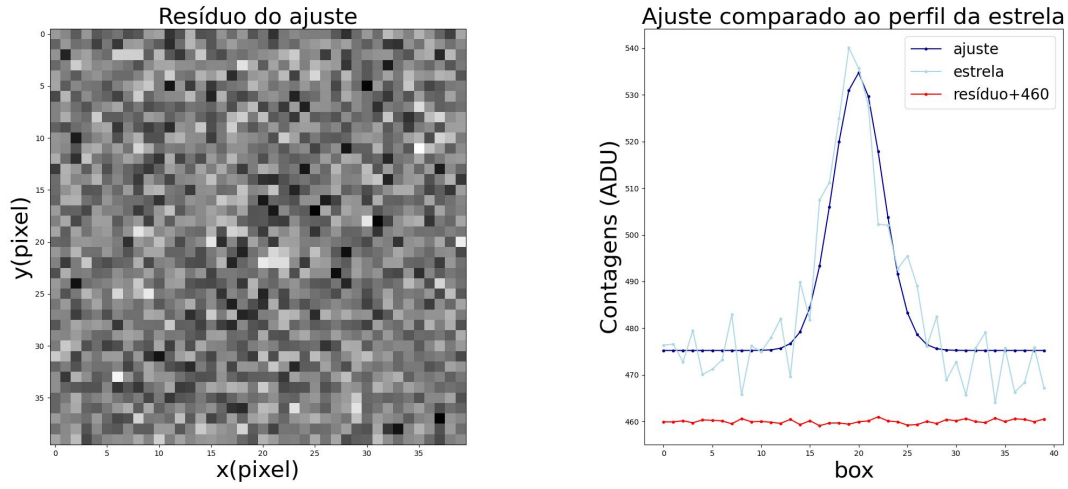
(b) Ajuste gaussiano em duas dimensões.

Figura 2.9. Visualização de uma fonte astronômica em uma imagem (Figura 2.9a) e o ajuste gaussiano (Figura 2.9b) ajustado nela.

Um breve exemplo do ajuste gaussiano circular é apresentado nas Figuras 2.9 e 2.10. Nele, vemos a imagem real de uma estrela (Figura 2.9a) e um ajuste gaussiano (Figura 2.9b). Os parâmetros da gaussiana foram ajustados na estrela da imagem real. O resíduo do ajuste está na Figura 2.10a. Por fim, comparamos as contagens da linha que passa pelo centro de cada uma das imagens.

No caso de objetos celestes que não têm, necessariamente, simetria circular, temos uma alternativa no que diz respeito à gaussiana circular. A gaussiana elíptica (Figura 2.11) pode descrever melhor a distribuição de fluxo destas fontes.

Sua equação leva em conta a diferença no comprimento dos eixos, característica



(a) Resíduo imagem - ajuste.

(b) Comparação das contagens na linha central das imagens da estrela, real e ajuste.

Figura 2.10. Na esquerda, vemos o resíduo entre as imagens na Figura 2.9a no sentido imagem menos ajuste. Na direita, temos a comparação de uma linha central entre o ajuste, a imagem e o resíduo.

da base elíptica (Assafin, 2023):

$$G(x, y) = B + he^{-\frac{A(x-x_0)^2 + B(x-x_0)(y-y_0) + C(y-y_0)^2}{2}}. \quad (2.19)$$

Na Equação 2.19, os termos  $A$ ,  $B$  e  $C$  são (Assafin, 2023):

$$A = \left(\frac{\cos(\theta)}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin(\theta)}{b}\right)^2, \quad (2.20)$$

$$B = -2 \cos(\theta) \sin(\theta) \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right), \quad (2.21)$$

$$C = \left(\frac{\cos(\theta)}{b}\right)^2 + \left(\frac{\sin(\theta)}{a}\right)^2, \quad (2.22)$$

onde os valores  $a$ ,  $b$  e  $\theta$  vêm do ajuste dos coeficientes  $A$ ,  $B$  e  $C$ , estando  $a$  e  $b$  relacionados aos semi-eixos maior e menor da elipse (portanto, à dispersão da PSF) e  $\theta$  à orientação do semi-eixo maior em relação ao eixo  $x$  do CCD, de acordo com o

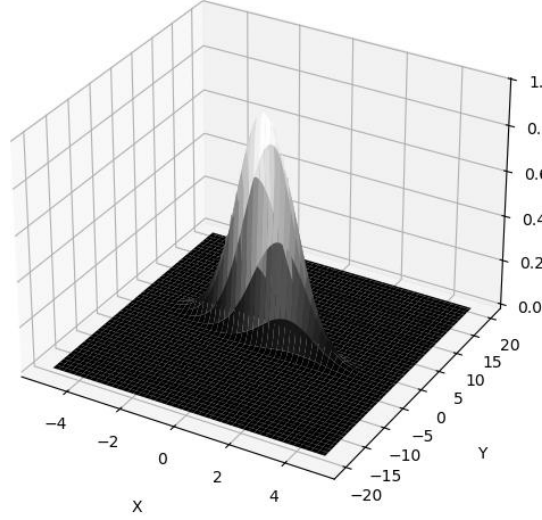


Figura 2.11. Ilustração da gaussiana elíptica em três dimensões.

seguinte (Assafin, 2023):

$$a = -\frac{\sqrt{2(B^2 - 4AC)(A + C + \sqrt{(A - C)^2 + B^2})}}{B^2 - 4AC}, \quad (2.23)$$

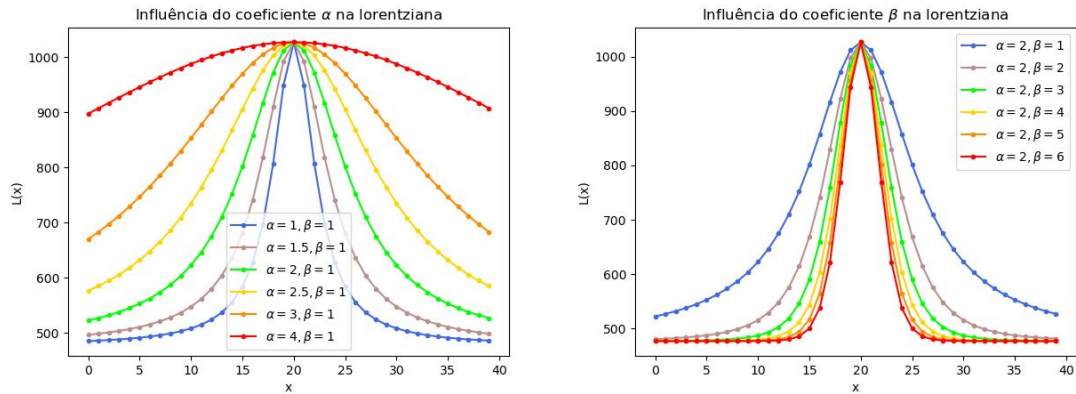
$$b = -\frac{\sqrt{2(B^2 - 4AC)(A - C + \sqrt{(A - C)^2 + B^2})}}{B^2 - 4AC}, \quad (2.24)$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{(C-A-\sqrt{(A-C)^2+B^2})}{B}\right) & \text{se } B \neq 0, \\ 0 & \text{se } B = 0, A < C, \\ 90^\circ & \text{se } B = 0, A > C. \end{cases} \quad (2.25)$$

### Ajuste lorentziano

Uma possibilidade para PSF são os ajustes lorentzianos. A lorentziana circular pode ser vista na Equação 2.26, onde  $B$  são as contagens de fundo de céu,  $h$  a altura da PSF,  $(x_0, y_0)$  é a posição do centro,  $\alpha$  e  $\beta$  são coeficientes característicos desse ajuste e  $\gamma$  é a sua dispersão (Figura 2.13) (Assafin, 2023).

$$L(x, y) = B + \frac{h}{\left(\frac{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{\frac{\alpha}{2}}}{\gamma^\alpha} + 1\right)^\beta}. \quad (2.26)$$



(a) Variação do coeficiente  $\alpha$ , com  $\beta$  e  $\gamma$  fixos. (b) Variação do coeficiente  $\beta$ , com  $\alpha$  e  $\gamma$  fixos.

Figura 2.12. Análise gráfica para entendimento da influência dos coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  na função lorentziana.

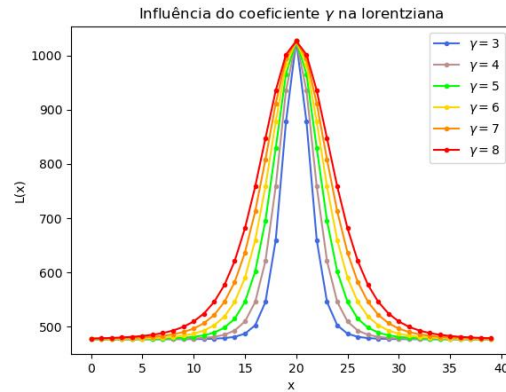


Figura 2.13. Análise gráfica para entendimento do parâmetro de dispersão da PSF lorentziana, com  $\alpha$  e  $\beta$  fixos e  $\gamma$  variando.

Sobre os coeficientes característicos da lorentziana, temos a Figura 2.12 que ajuda a exemplificar a sua influência no ajuste. Na Figura 2.12a, fixamos os valores de  $\gamma$  e  $\beta$ , e variamos o valor de  $\alpha$ . É possível perceber como a função é sensível a esse coeficiente na parte próxima ao cume do gráfico. Quando aumentamos o valor de  $\alpha$ , há uma maior abertura da função neste local. Por sua vez, quando fixamos  $\gamma$  e  $\alpha$ , e variamos  $\beta$ , temos o resultado na Figura 2.12b. Conseguimos perceber como agora há uma maior influência na parte de baixo da função, nas caudas (‘asas’) da PSF.

A lorentziana elíptica é escrita como na Equação 2.27. Nela, valem as mesmas relações das Equações em 2.22 e 2.25, da gaussiana elíptica.

$$L(x, y) = B + \frac{h}{([A(x - x_0)^2 + B(x - x_0)(y - y_0) + C(y - y_0)^2]^{\frac{\alpha}{2}} + 1)^\beta}. \quad (2.27)$$

### Ajuste Moffat

Apesar de ser larga e eficientemente usada, em muitos casos um perfil gaussiano pode não ser a melhor escolha para a descrição de uma PSF. Essa distribuição tem,

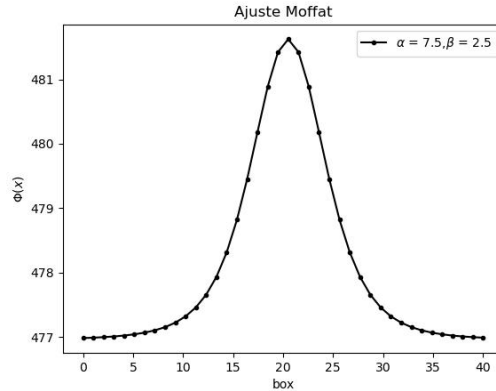


Figura 2.14. Perfil da PSF Moffat.

mesmo que pouca, algumas dificuldades em descrever perfis de distribuição de fluxo que levem em consideração a turbulência atmosférica e a presença de aberrações instrumentais, além de perfis variáveis nas contagens de fundo de céu por toda imagem (Moffat, 1969). Por isso, uma distribuição alternativa que leva em consideração esses parâmetros foi desenvolvida, conhecida como ajuste ou PSF Moffat.

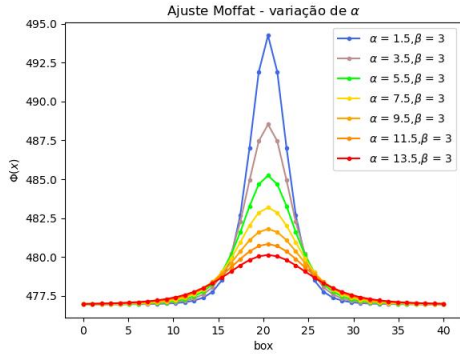
A expressão matemática que descreve essa distribuição é (Trujillo et al., 2001):

$$\Phi(x, y) = \frac{\beta - 1}{\pi\alpha^2} \left[ 1 + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{\alpha^2} \right]^{-\beta}, \quad (2.28)$$

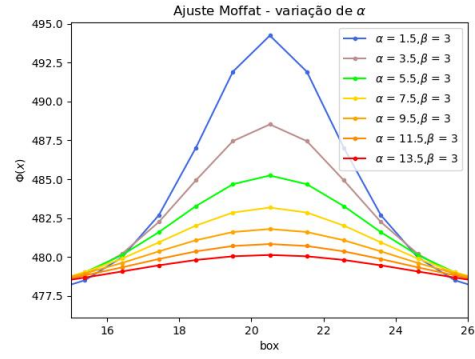
onde  $\beta$  é um parâmetro ajustado e  $\alpha$  é o parâmetro de largura da PSF. Seu perfil pode ser visto na Figura 2.14.

O parâmetro  $\alpha$  está diretamente relacionado à largura da PSF. Podemos ver isso na Figura 2.15. Perceba a sensibilidade do ajuste quando fixamos o valor de  $\beta$  e variamos o parâmetro  $\alpha$  (Figura 2.15a). Na figura da direita (Figura 2.15b) destacamos o aumento da largura da PSF com o aumento do parâmetro  $\alpha$ . Logicamente, isso acontece porque esse parâmetro tem proporcionalidade direta com a largura à meia altura do ajuste (FWHM, do inglês *Full Width at Half Maximum*), como será demonstrado a seguir (Seção 2.3.5).

O modelo de PSF Moffat é utilizado para descrever de forma mais adequada as variações no fundo do céu, especialmente para objetos mais fracos. Na Figura 2.16, observamos a sensibilidade do ajuste em relação ao parâmetro  $\beta$ . As Figuras em 2.16 ilustram como o perfil da PSF se adapta tanto ao fluxo de objetos brilhantes quanto ao de objetos mais fracos. Além disso, ao examinarmos a Figura 2.16b, notamos que a sensibilidade ao fundo de céu é aprimorada, pois o ajuste proporciona uma transição mais precisa entre o fluxo do alvo e o fluxo do fundo de céu.

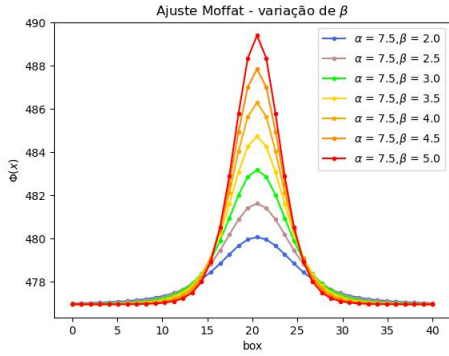


(a) Perfil da PSF Moffat para diferentes parâmetros  $\alpha$ .

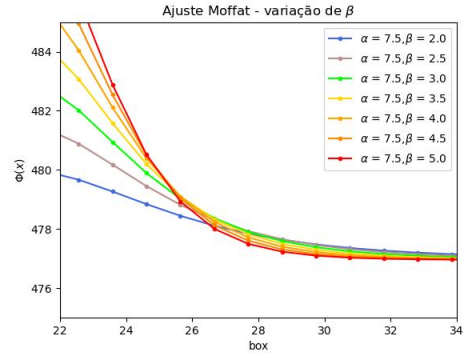


(b) Figura aumentada na região da cauda da PSF Moffat para diferentes parâmetros  $\alpha$ .

Figura 2.15. Análise gráfica para entendimento da influência do coeficiente  $\alpha$  na PSF Moffat.



(a) Perfil da PSF Moffat para diferentes parâmetros  $\beta$ .



(b) Figura aumentada na região da cauda da PSF Moffat para diferentes parâmetros  $\beta$ .

Figura 2.16. Análise gráfica para entendimento da influência do coeficiente  $\beta$  na PSF Moffat.

### 2.3.5 Precisão dos ajustes

A determinação das posições de objetos celestes tem limitações ligadas à instrumentação astronômica, à natureza eletrônica do CCD e ao fato, caso consideremos observações feitas do solo, devido à atmosfera. As limitações interferem na precisão obtida nas medidas de centróide  $(x, y)$  e são propagadas para o cálculo das coordenadas  $(\alpha, \delta)$ .

Para iniciarmos a discussão sobre a determinação da incerteza no centróide de uma fonte sobre o CCD, consideremos a equação que determina as contagens de um objeto sobre um pixel (King, 1983):

$$cf_i + ab = \eta_i, \quad (2.29)$$

onde temos que  $c$  é o número de contagens esperado para um objeto, o fundo de céu por unidade de área é dado por  $b$ ,  $f$  é a fração de contagens sobre o pixel  $i$  considerado, onde  $\sum f_i = 1$ , e  $\eta_i$  é o total de contagens contido nesse pixel.

Considerando que  $a$  representa a área total do pixel, observamos que o valor total do fundo de céu já está incluído na equação, o que nos permite simplificá-la da seguinte forma:

$$cf_i + B = \eta_i, \quad (2.30)$$

considerando que  $B = ab$ , com unidade de contagens. No decorrer dessa seção, nosso trabalho envolverá o desenvolvimento da Equação 2.30. Levando em conta que os fótons em um CCD têm uma distribuição poissônica, a variância das contagens será dada seguindo as regras dessa distribuição, ou seja:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\eta_i) &= \mathcal{E}(\eta_i) \\ &= cf_i + B, \end{aligned} \quad (2.31)$$

portanto, podemos escrever que  $\sigma_{\eta_i}^2 = \text{Var}(\eta_i)$  e devemos levar em consideração que cada termo relevante na observação será ponderado pela raiz quadrada de  $\sigma_{\eta_i}$ , como veremos a seguir.

Para encontrarmos a precisão nos termos da Equação 2.29, consideremos a forma diferencial dela, escrita do seguinte modo:

$$\delta\eta_i = \delta cf_i + c \frac{\partial f_i}{\partial x} \delta x + c \frac{\partial f_i}{\partial y} \delta y. \quad (2.32)$$

Considerando a ponderação pelo termo da raiz quadrada da variância  $\sigma_{\eta_i}^2$  (ou seja, o desvio padrão  $\sigma_{\eta_i}$ ), escrevemos na forma matricial da seguinte maneira:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{f_1}{\sigma_{\eta_1}} & c \frac{\partial f_1}{\partial x} & c \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{f_2}{\sigma_{\eta_2}} & c \frac{\partial f_2}{\partial x} & c \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{f_N}{\sigma_{\eta_N}} & c \frac{\partial f_N}{\partial x} & c \frac{\partial f_N}{\partial y} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \delta c \\ \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} \delta\eta_1 \\ \sigma_{\eta_1} \\ \delta\eta_2 \\ \sigma_{\eta_2} \\ \vdots \\ \delta\eta_N \\ \sigma_{\eta_N} \end{bmatrix}}_Y, \quad (2.33)$$

onde teremos a solução por mínimos quadrados escrita da seguinte forma (Vuolo, 1996):

$$\begin{aligned} [A]X &= Y \\ [A^T A]X &= [A^T]Y \\ X &= [A^T A]^{-1}[A^T]Y. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Levando em conta que  $\sigma_{\eta_i}^2$  é a variância do total de contagens em um pixel ( $\eta_i$ ), temos do resultado da Equação 2.31, que  $\sigma_{\eta_i}^2 = cf_i + B$ . Na solução das equações normais (segunda linha da Equação 2.34), tomando a simetria do problema, os termos da diagonal principal da matriz  $[A^T A]$  são não nulos e dados por: (King,

1983, Banda-Huarca, 2020):

$$\sum \frac{f_i^2}{cf_i + B}, \quad (2.35)$$

$$c^2 \sum \frac{1}{cf_i + B} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x} \right)^2, \quad (2.36)$$

$$c^2 \sum \frac{1}{cf_i + B} \left( \frac{\partial f_i}{\partial y} \right)^2, \quad (2.37)$$

e a raiz quadrada do inverso deles representa as incertezas que estamos procurando (King, 1983, Vuolo, 1996). Especificamente para a incerteza no centróide  $(x, y)$ , são consideradas as Equações 2.36, para  $x$  e 2.37, para  $y$ . Também com base na simetria, temos que  $\partial f_i / \partial x = \partial f_i / \partial y$  nessas equações e por isso, desenvolveremos o caso para  $x$ , equivalente para  $y$ .

Comparemos a precisão na determinação do centróide em dois casos, um em que o número de contagens do objeto domina o número de contagens do fundo de céu, ou seja  $c \gg B$ . Esse caso é o da direita na Figura 2.17. Nesse caso, trataremos do seguinte modo:

$$\begin{aligned} & c^2 \sum \frac{1}{cf_i + B} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x} \right)^2 \\ \Rightarrow & c^2 \sum \frac{1}{cf_i + B} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x} \right)^2 \\ \Rightarrow & \sum \frac{1}{f_i} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x} \right)^2 \\ \Rightarrow & c \sum \frac{1}{f_i} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Já no caso das contagens do fundo de céu dominarem, podemos ver o objeto fraco à esquerda da Figura 2.17. Agora, temos que  $B \gg c$  e a Equação 2.36 será desenvolvida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & c^2 \sum \frac{1}{cf_i + B} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x} \right)^2 \\ \Rightarrow & c^2 \sum \frac{1}{B} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x} \right)^2 \\ \Rightarrow & c^2 \sum \frac{1}{B} \left( \frac{\partial f_i}{\partial x} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Uma hipótese importante a ser considerada é que temos objetos bem amostrados na imagem. Com isso, poderemos considerar que a distribuição de fluxo está sobre uma área bem maior que a área de um único pixel. Portanto, a distribuição de fluxo do objeto sobre o CCD pode ser aproximada por uma função contínua e o resultado nas Equações 2.38 e 2.39 será reescrito:

$$\Rightarrow \int \int \frac{1}{\Phi} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 dx dy, \quad (2.40)$$

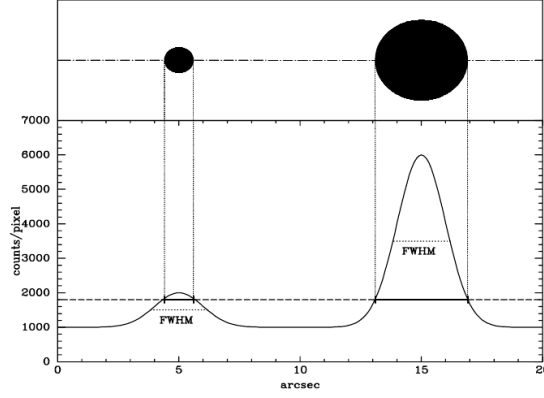


Figura 2.17. Comparação de duas fontes bem amostradas. Porém na esquerda vemos uma em que as contagens do objeto superam as contagens de fundo de céu. Desse modo, podemos considerar para esse caso  $c \gg B$ . No caso da direita, um objeto fraco tem suas contagens dominadas pelas contagens de fundo de céu. Será levado em conta, então, que  $B \gg c$ . Figura: [Romanishin \(2006\)](#).

$$\Rightarrow \frac{c^2}{B} \iint \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 dx dy. \quad (2.41)$$

Com base na discussão anterior, vemos que a variância será dada pela diagonal principal da matriz  $[A^T A]^{-1}$  ([Vuolo, 1996](#)), que representa o inverso dos resultados encontrados nas Equações 2.40 (para predominância das contagens da fonte) e 2.41 (para predominância das contagens de fundo de céu), dada a hipótese considerada no parágrafo anterior. Para cada um dos casos, ela será dada por:

$$\sigma_{x(\text{fonte})}^2 = \frac{1}{\iint \frac{1}{\Phi} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 dx dy} \Rightarrow \sigma_{x(\text{fonte})} = \frac{1}{\sqrt{\iint \frac{1}{\Phi} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 dx dy}}, \quad (2.42)$$

$$\sigma_{x(\text{céu})}^2 = \frac{1}{\frac{c^2}{B} \iint \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 dx dy} \Rightarrow \sigma_{x(\text{céu})} = \frac{1}{\sqrt{\frac{c^2}{B} \iint \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 dx dy}}, \quad (2.43)$$

onde os desvios padrão são  $\sigma_{x(\text{fonte})}$  (Equação 2.42), que representa a incerteza procurada quando há predominância das contagens da fonte, e  $\sigma_{x(\text{céu})}$  (Equação 2.43), que representa a incerteza procurada quando há predominância das contagens de fundo de céu. A seguir, desenvolvemos essas equações para cada uma das PSFs circulares apresentadas na Seção 2.3.4.

### Caso gaussiano

Começando pelo caso gaussiano, vamos considerar como  $\Phi(x, y)$  a expressão da PSF normalizada:

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.44)$$

Considerando o caso da dominância das contagens da fonte sobre o fundo de céu, o integrando da Equação 2.40 para o caso da PSF gaussiana será:

$$\frac{1}{\Phi} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 = \frac{(x-x_0)^2}{2\pi\sigma^6} e^{-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2\sigma^2}}. \quad (2.45)$$

Portanto, teremos o seguinte:

$$\Rightarrow \frac{c}{2\pi\sigma^6} \int \int (x - x_0)^2 e^{-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2\sigma^2}} dx dy. \quad (2.46)$$

Vamos escrever a integral da seguinte forma:

$$\Rightarrow \frac{c}{2\pi\sigma^6} \int \int (x - x_0)(x - x_0) e^{-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2\sigma^2}} dx dy, \quad (2.47)$$

e para  $dx$ , resolvemos por partes:

$$\begin{aligned} u &= (x - x_0), & du &= dx, \\ v &= -\sigma^2 e^{-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2\sigma^2}}, & dv &= (x - x_0) e^{-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2\sigma^2}}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Resolvendo por partes:

$$\begin{aligned} &= \int (x - x_0)(x - x_0) e^{-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \left[ -2\sigma^2 (x - x_0)^2 e^{-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2\sigma^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} (-\sigma^2) e^{-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2\sigma^2}} dx, \end{aligned} \quad (2.49)$$

como a primeira parte do lado esquerdo da equação vai a zero, ficamos com o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} &= \int (x - x_0)(x - x_0) e^{-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2\sigma^2}} dx. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Voltando à integral 2.47, e fazendo os devidos cancelamentos, temos o seguinte resultado:

$$\frac{c}{2\pi\sigma^4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{2\sigma^2}} dx dy. \quad (2.51)$$

Resolveremos essa equação, fazendo a substituição por coordenadas polares, da seguinte maneira:

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2, \quad dx dy = r dr d\theta, \quad (2.52)$$

$$\Rightarrow \frac{c}{2\pi\sigma^4} \int_0^{2\pi} \int_{+\infty}^0 e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} r dr d\theta. \quad (2.53)$$

substituindo:  $u = \frac{r^2}{2\sigma^2}$ ,  $du = \frac{2r}{2\sigma^2} dr = du = \frac{r}{\sigma^2} dr$ , ficamos com:

$$= \frac{c}{2\pi\sigma^4} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} \sigma^2 e^{-u} du = \frac{c}{\sigma^2} \int_0^{+\infty} e^{-u} du = \frac{c}{\sigma^2}. \quad (2.54)$$

Portanto:

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Phi} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 dx dy = \frac{c}{\sigma^2}. \quad (2.55)$$

para o caso gaussiano circular.

Usando a equação para a incerteza procurada (Equação 2.42), escrevemos para esse caso:

$$\sigma_{x(\text{fonte})} = \frac{\sigma}{\sqrt{c}}. \quad (2.56)$$

Podemos avaliar um exemplo numérico a partir daqui. Considerando a Equação 2.7, se  $\langle n_s \rangle = c$ , e considerando que as contagens de fundo de céu são bem maiores que as outras contagens envolvidas nela, a equação pode ser reescrita como  $SNR = \sqrt{c}$  (Howell, 2006). Nesse caso, podemos reescrever a Equação 2.56:

$$\sigma_{x(\text{fonte})} = \frac{\sigma}{SNR}. \quad (2.57)$$

Além disso, temos a relação entre o parâmetro de dispersão da PSF com a largura à meia altura, dada por:

$$FWHM = 2\sqrt{2 \ln 2} \sigma \Rightarrow \sigma = \frac{FWHM}{\sqrt{2 \ln 2}}, \quad (2.58)$$

e, enfim, escrevemos a incerteza procurada para o ajuste, com as devidas substituições:

$$\sigma_{x(\text{fonte})} = \frac{FWHM}{2\sqrt{\ln 2}} \frac{1}{SNR}. \quad (2.59)$$

Considerando um SNR de 100, com *seeing* de 1".5 (valor típico nas observações feitas no sítio do Observatório do Pico dos Dias, OPD/LNA), temos o seguinte:

$$\begin{aligned} \sigma_{x(\text{fonte})} &= \frac{FWHM}{2\sqrt{2 \ln 2}} \frac{1}{SNR} \Rightarrow \\ \sigma_{x(\text{fonte})} &= \frac{1''.5}{2\sqrt{2 \ln 2}} \frac{1}{100} = 0''.006. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Então, com um bom valor para o SNR, nosso limite de precisão chega a 0''.006.

Considerando agora a dominância das contagens de fundo de céu, vamos desenvolver para a gaussiana, a Equação 2.41. Agora, seja o integrando dado por:

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 = \frac{(x - x_0)^2}{4\pi^2 B \sigma^8} e^{-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{\sigma^2}}. \quad (2.61)$$

Teremos, então, a seguinte integral para resolver:

$$= \frac{c^2}{4\pi^2 B \sigma^8} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_0)^2 e^{-\frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{\sigma^2}} dx dy. \quad (2.62)$$

Sabendo que a equação exponencial pode ser escrita como  $e^{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]/\sigma^2} = e^{(x-x_0)^2/\sigma^2} e^{(y-y_0)^2/\sigma^2}$ , vamos separar a integral e resolvê-la para cada variável:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_0)^2 e^{-(x-x_0)^2/\sigma^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-y_0)^2/\sigma^2} dy. \quad (2.63)$$

A integral em  $y$  será:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-y_0)^2/\sigma^2} dy = \sigma \sqrt{\pi}, \quad (2.64)$$

e em  $x$ , temos o seguinte:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_0)^2 e^{-(x-x_0)^2/\sigma^2} dx = \sigma^3 \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (2.65)$$

Voltando à Equação 2.62, e substituindo os resultados das integrais, temos o resultado:

$$= \frac{c^2}{B} \int \int \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 dx dy = \frac{c^2}{4\pi^2 B \sigma^4} \frac{\sigma \sqrt{\pi} \sigma \sqrt{\pi}}{2} = \frac{c^2}{8\pi B \sigma^4}. \quad (2.66)$$

Neste caso, portanto, a incerteza procurada (Equação 2.43) será:

$$\begin{aligned} \sigma_{x(\text{céu})}^2 &= \frac{8\pi B \sigma^4}{c^2} \Rightarrow \\ \sigma_{x(\text{céu})} &= \frac{2\sqrt{2\pi B} \sigma^2}{c}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

A Equação 2.67 demonstra que, no caso da dominância do fundo de céu, a precisão da medida do centróide é perdida proporcionalmente ao quadrado do  $\sigma$  da gaussiana.

### Caso lorentziano

Seguindo a ordem de apresentação dos ajustes de PSF, vamos analisar agora com respeito ao ajuste da lorentziana circular. Escrevemos a expressão em sua forma normalizada:

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{\pi\gamma} \frac{1}{\left[ 1 + \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{\gamma^2} \right]}, \quad (2.68)$$

onde  $\gamma$  é o parâmetro de largura da PSF, que significa a meia largura à meia altura (HWHM), que é metade da largura à meia altura (Price-Whelan et al., 2018). Esse caso é o mesmo da Equação 2.26, com  $B = 0$ ,  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$  e  $h = 1/\pi\gamma$ . A largura à meia altura pode ser encontrada pela seguinte relação (Trujillo et al., 2001):

$$\Phi\left(r = \frac{FWHM}{2}\right) = \frac{1}{2}\Phi(0). \quad (2.69)$$

Tomemos que  $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$  e façamos:

$$\Phi\left(r = \frac{FWHM}{2}\right) = \frac{1}{\pi\gamma} \frac{1}{\left[ 1 + \frac{FWHM^2}{4\gamma^2} \right]}, \quad (2.70)$$

e também:

$$\frac{1}{2}\Phi(r = 0) = \frac{1}{2} \frac{1}{\pi\gamma}. \quad (2.71)$$

Igualando as Equações 2.71 e 2.70, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{1}{\pi\gamma} &= \frac{1}{\pi\gamma} \frac{1}{\left[1 + \frac{FWHM^2}{4\gamma^2}\right]} \\
\frac{1}{2} \frac{1/\gamma}{\pi\gamma} &= \frac{1/\gamma}{\pi\gamma} \frac{1}{\left[1 + \frac{FWHM^2}{4\gamma^2}\right]} \\
\frac{1}{2} &= \frac{1}{\left[1 + \frac{FWHM^2}{4\gamma^2}\right]} \\
2 &= \left[1 + \frac{FWHM^2}{4\gamma^2}\right] \\
FWHM^2 &= 4\gamma^2 \\
FWHM &= 2\gamma,
\end{aligned} \tag{2.72}$$

e, portanto:

$$HWHM = \frac{FWHM}{2} = \gamma. \tag{2.73}$$

Determinamos o integrando da Equação 2.40 para esse caso e substituímos na integral:

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Phi} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 dx dy = \frac{4c}{\pi\gamma^5} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-x_0)^2}{\left[1 + \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{\gamma^2}\right]^3} dx dy. \tag{2.74}$$

Fazendo as devidas substituições para coordenadas polares,  $(x-x_0) = r \cos(\theta)$ ,  $(y-y_0) = r \sin(\theta)$  e  $r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2$ , temos:

$$= \frac{4c}{\pi\gamma^5} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r^2 \cos^2 \theta}{\left[1 + \frac{r^2}{\gamma^2}\right]^3} = \frac{4c}{\pi\gamma^5} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^{+\infty} \frac{r^3}{\left[1 + \frac{r^2}{\gamma^2}\right]^3}. \tag{2.75}$$

As soluções das partes angular e radial, respectivamente, são:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi, \tag{2.76}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{r^3}{\left[1 + \frac{r^2}{\gamma^2}\right]^3} = \frac{\gamma^4}{4}. \tag{2.77}$$

Então, nosso resultado será:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Phi} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 dx dy = \frac{4c}{\pi\gamma^5} \pi \frac{\gamma^4}{4} = \frac{c}{\gamma}. \tag{2.78}$$

Usamos novamente a Equação 2.42 para análise do limite de incerteza que podemos alcançar.

$$\sigma_{x(\text{fonte})} = \sqrt{\frac{\gamma}{c}}. \tag{2.79}$$

Novamente, podemos fazer uma análise numérica do limite de precisão esperado para esse ajuste. Levando em consideração a Equação 2.73 e a mesma relação para o SNR considerada na dominância das contagens da fonte ( $SNR = \sqrt{c}$ ), podemos escrever a seguinte equação:

$$\sigma_{x(\text{fonte})} = \sqrt{\frac{FWHM}{2}} \frac{1}{SNR}, \quad (2.80)$$

onde, substituiremos por  $FWHM = 1''.5$  e  $SNR = 100$ :

$$\sigma_{x(\text{fonte})} = \sqrt{\frac{1''.5}{2}} \frac{1}{100} = 0''.009 \quad (2.81)$$

Considerando a predominância das contagens de fundo de céu para esse caso, usaremos a Equação 2.41, com o seguinte integrando:

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 = \frac{4c^2}{B\pi^2\gamma^6} \frac{(x-x_0)^2}{\left[1 + \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{\gamma^2}\right]^4}. \quad (2.82)$$

Nossa integral é, então:

$$= \frac{4c^2}{B\pi^2\gamma^6} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-x_0)^2}{\left[1 + \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{\gamma^2}\right]^4} dx dy. \quad (2.83)$$

Novamente, faremos as substituições para coordenadas polares e nossa integral fica escrita:

$$\begin{aligned} &= \frac{4c^2}{B\pi^2\gamma^6} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{r^2 \cos^2 \theta}{\left[1 + \frac{r^2}{\gamma^2}\right]} r dr d\theta \\ &= \frac{4c^2}{B\pi^2\gamma^6} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^{+\infty} \frac{r^3}{\left[1 + \frac{r^2}{\gamma^2}\right]} dr. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Com os resultados da parte angular e radial, respectivamente:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi, \quad (2.85)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{r^3}{\left[1 + \frac{r^2}{\gamma^2}\right]} dr = \frac{\gamma^4}{12}. \quad (2.86)$$

E, por fim, resulta na seguinte precisão:

$$\frac{c^2}{B} \iint \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 dx dy = \frac{4c^2}{B\pi^2\gamma^6} \frac{\pi \frac{\gamma^4}{12}}{12} = \frac{c^2}{3\pi B\gamma^2}. \quad (2.87)$$

Novamente, no caso em que há dominância do fundo de céu, o grau do parâmetro de dispersão da PSF é o mesmo do termo das contagens. Isso pode ser visto na equação seguinte, que desenvolvemos da Equação 2.43:

$$\sigma_{x(\text{céu})} = \sqrt{3\pi B} \frac{\gamma}{c}. \quad (2.88)$$

### Caso Moffat

Para o ajuste Moffat usaremos também sua PSF normalizada (Trujillo et al., 2001):

$$\Phi(x, y) = \frac{(\beta - 1)}{\pi\alpha^2} \left[ 1 + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{\alpha^2} \right]^{-\beta}, \quad (2.89)$$

onde  $\alpha$  é o parâmetro de largura ou dispersão da PSF e  $\beta$  é um parâmetro de ajuste. Considerando o caso em que há dominância das contagens da fonte, usamos a Equação 2.40 e temos a seguinte integral:

$$\int \int \frac{1}{\Phi} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 dx dy = \frac{4\beta^2(\beta - 1)c}{\pi\alpha^6} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x - x_0)^2}{\left[ 1 + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{\alpha^2} \right]^{\beta+2}} dx dy. \quad (2.90)$$

Usando, mais uma vez, as transformações para coordenadas polares,  $(x - x_0) = r \cos(\theta)$ ,  $(y - y_0) = r \sin(\theta)$  e  $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ , resolveremos a seguinte integral:

$$= \frac{4\beta^2(\beta - 1)c}{\pi\alpha^6} \int_0^{+\infty} \frac{r^2}{\left[ 1 + \frac{r^2}{\alpha^2} \right]^{\beta+2}} r dr \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta. \quad (2.91)$$

Os resultados das partes radial e angular, respectivamente:

$$\int_0^{+\infty} \frac{r^2}{\left[ 1 + \frac{r^2}{\alpha^2} \right]^{\beta+2}} r dr = \frac{\alpha^4}{2\beta(\beta + 1)}, \quad (2.92)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \pi. \quad (2.93)$$

Finalmente, temos o resultado:

$$\int \int \frac{1}{\Phi} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 dx dy = \frac{4\beta^2(\beta - 1)c}{\pi\alpha^6} \frac{\alpha^4}{2\beta(\beta + 1)} = \frac{2\beta c (\beta - 1)}{\alpha^2 (\beta + 1)}. \quad (2.94)$$

O limite de precisão que podemos alcançar com o ajuste Moffat também pode ser encontrado usando a Equação 2.42:

$$\sigma_{x(\text{fonte})} = \alpha \sqrt{\frac{(\beta + 1)}{\beta c (\beta - 1)}}, \quad \beta \neq 1. \quad (2.95)$$

Isso também fica evidente quando analisamos graficamente (Figura 2.15). Vemos que quanto menor o parâmetro  $\alpha$ , menor a dispersão do ajuste e, portanto, maior a precisão da medida.

A análise do limite numérico para a precisão será feita substituindo o termo de dispersão da PSF pela largura à meia altura. Podemos encontrá-la da seguinte maneira. Consideremos  $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$  na Equação 2.89 e também a igualdade na Equação 2.69. Calculando ambos os lados da equação, usando a função do ajuste Moffat (Equação 2.89), teremos para o lado esquerdo:

$$\begin{aligned} \Phi \left( r = \frac{FWHM}{2} \right) &= \frac{\beta - 1}{\pi\alpha^2} \left[ 1 + \frac{\left( \frac{FWHM}{2} \right)^2}{\alpha^2} \right]^{-\beta} \\ &= \frac{\beta - 1}{\pi\alpha^2} \left[ 1 + \frac{FWHM^2}{4\alpha^2} \right]^{-\beta}, \end{aligned} \quad (2.96)$$

e para o lado direito da equação:

$$\frac{1}{2}\Phi(0) = \frac{\beta - 1}{\pi\alpha^2}. \quad (2.97)$$

Com ambos os desenvolvimentos, igualamos os resultados e fazemos:

$$\begin{aligned} \frac{\beta - 1}{\pi\alpha^2} \left[ 1 + \frac{FWHM^2}{4\alpha^2} \right]^{-\beta} &= \frac{1}{2} \frac{\beta - 1}{\pi\alpha^2} \\ \frac{\beta - 1}{\pi\alpha^2} \left[ 1 + \frac{FWHM^2}{4\alpha^2} \right]^{-\beta} &= \frac{1}{2} \frac{\beta - 1}{\pi\alpha^2} \\ \left( \left[ 1 + \frac{FWHM^2}{4\alpha^2} \right]^{-\beta} \right)^{\frac{1}{-\beta}} &= \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{-\beta}} \\ \left[ 1 + \frac{FWHM^2}{4\alpha^2} \right] &= \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{-\beta}} \\ \left[ 1 + \frac{FWHM^2}{4\alpha^2} \right] &= 2^{\frac{1}{\beta}} \\ \frac{FWHM^2}{4\alpha^2} &= 2^{\frac{1}{\beta}} - 1 \\ FWHM^2 &= 4\alpha^2(2^{\frac{1}{\beta}} - 1) \\ FWHM &= 2\alpha\sqrt{2^{\frac{1}{\beta}} - 1}. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Portanto, o parâmetro de dispersão da PSF Moffat será dado por:

$$\alpha = \frac{FWHM}{2\sqrt{2^{\frac{1}{\beta}} - 1}}, \quad (2.99)$$

e considerando,  $SNR = \sqrt{c}$  e considerando  $\beta = 5.0$ , termo com menor dispersão na Figura 2.16a. Tomando  $FWHM = 1''.5$  e  $SNR = 100$ , teremos:

$$\begin{aligned} \sigma_{x(\text{fonte})} &= \frac{FWHM}{2\sqrt{2^{\frac{1}{\beta}} - 1}} \frac{1}{SNR} \sqrt{\frac{(\beta + 1)}{\beta(\beta - 1)}} \Rightarrow \\ \sigma_{x(\text{fonte})} &= \frac{1''.5}{2\sqrt{2^{\frac{1}{5.0}} - 1}} \frac{1}{100} \sqrt{\frac{(5.0 + 1)}{5.0(5.0 - 1)}} = 0''.010, \end{aligned} \quad (2.100)$$

alcançando, assim, um limite de  $0''.010$ .

Levando em consideração uma fonte com dominância das contagens de fundo de céu, vamos para o caso de uso da Equação 2.41. Teremos a seguinte integral a ser resolvida:

$$\frac{c^2}{B} \int \int \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 dx dy = \frac{4c^2\beta^2(\beta - 1)^2}{B\pi^2\alpha^8} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x - x_0)^2}{\left[ 1 + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{\alpha^2} \right]^{2(\beta + 1)}} dx dy. \quad (2.101)$$

Fazendo as substituições para coordenadas polares, podemos substituí-las e separar as partes angular e radial da integral:

$$= \frac{4c^2\beta^2(\beta-1)^2}{B\pi^2\alpha^8} \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)d\theta \int_0^{+\infty} \frac{r^3}{\left[1 + \frac{r^2}{\alpha^2}\right]^{2(\beta+1)}} dr. \quad (2.102)$$

Os resultados para essas partes são, respectivamente:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta)d\theta = \pi, \quad (2.103)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{r^3}{\left[1 + \frac{r^2}{\alpha^2}\right]^{2(\beta+1)}} dr = \frac{\alpha^4}{4\beta(2\beta+1)}. \quad (2.104)$$

E voltando à integral original, substituindo os resultados:

$$\frac{c^2}{B} \int \int \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 dx dy = \frac{4c^2\beta^2(\beta-1)^2}{\pi^2\alpha^8} \pi \frac{\alpha^4}{4\beta(2\beta+1)} = \frac{\beta c^2(\beta-1)^2}{B\pi\alpha^4(2\beta+1)}. \quad (2.105)$$

Colocando, finalmente, a análise sobre a incerteza procurada (Equação 2.43), vemos que a precisão do ajuste Moffat tem comportamento parecido com o ajuste gaussiano, no sentido de que a precisão da medida é proporcional ao quadrado do parâmetro de dispersão da PSF, como podemos ver a seguir:

$$\sigma_{x(\text{céu})} = \frac{\alpha^2}{c(\beta-1)} \sqrt{\frac{B\pi(2\beta+1)}{\beta}}. \quad (2.106)$$

## 2.4 Conceitos da redução de observações

A direção aparente dos objetos na esfera celeste não é a direção na qual a luz foi emitida. Efeitos que influenciam a direção real de visada antes da entrada da luz no instrumento são, entre outros, refração devido à atmosfera terrestre, aberração estelar, turbulência atmosférica, paralaxe, extinção e avermelhamento e tempo de luz. Ainda, alguns desses efeitos alteram as posições relativas de objetos comparadas com as dadas em catálogos estelares ou efemérides planetárias. Neste capítulo, começaremos com a descrição vetorial das posições e movimentos próprios dos objetos na esfera celeste, passando pelas transformações geométricas (ligadas à projeção gnomônica e paralaxe), concluindo com efeitos ópticos no pequeno deslocamento dos alvos sobre o CCD. Nossa intenção, além de apresentarmos conceitos e equações importantes de efeitos que alteram a posição relativa entre objetos, é quantificar essa alteração em alguns casos e entendermos o quão significativo (ou não) é levá-los em consideração.

### Determinação vetorial da posição e movimentos próprios

Consideremos a esfera celeste com raio  $r$  e as coordenadas equatoriais celestes  $(\alpha, \delta)$ . Seja também o vetor  $\mathbf{p}$  escrito em termos de coordenadas cartesianas, ou seja,  $\mathbf{p} = (x, y, z)$ . O vetor  $\mathbf{p}$  escrito em termos das coordenadas equatoriais será:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \cos(\delta) \\ \sin(\alpha) \cos(\delta) \\ \sin(\delta) \end{bmatrix}. \quad (2.107)$$

Para recuperarmos as coordenadas equatoriais em termos das coordenadas cartesianas, basta seguir os seguintes passos, para  $\alpha$  e  $\delta$ , respectivamente:

$$\frac{y}{x} = \frac{r \sin(\alpha) \cos(\delta)}{r \cos(\alpha) \cos(\delta)} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha) \quad \therefore \alpha = \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \quad (2.108)$$

E, lembrando que,  $z = r \sin(\delta)$  e a projeção de  $\mathbf{p}$  sobre o equador celeste é  $p = r \cos(\delta)$ , e seu módulo  $|\mathbf{p}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , fazemos:

$$\frac{z^2}{p^2} = \frac{r^2 \sin^2(\delta)}{r^2 \cos^2(\delta)} = \frac{\sin^2(\delta)}{\cos^2(\delta)} = \tan^2(\delta) \Rightarrow \quad (2.109)$$

$$\frac{\sin(\delta)}{\cos(\delta)} = \tan(\delta) \quad (2.110)$$

$$\therefore \delta = \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right). \quad (2.111)$$

Tomando como referencial o baricentro do Sistema Solar, teremos o seguinte movimento:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \dot{\mathbf{p}} \Delta t. \quad (2.112)$$

A variável  $\dot{\mathbf{p}}$  é a variação de movimento em relação a um intervalo de tempo  $\Delta t$ . Ela depende da variação das coordenadas  $(\alpha, \delta)$  no plano da esfera celeste. A derivada temporal da variável é, então, escrita da seguinte forma:

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = r \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dt} + r \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \delta} \frac{d\delta}{dt} + \dot{r} \mathbf{p}. \quad (2.113)$$

Analisaremos essa equação. Podemos determinar  $\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \alpha}$  e  $\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \delta}$ . Levando em consideração o vetor 2.107, sua variação em relação às coordenadas equatoriais será:

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \alpha} = r \begin{bmatrix} -\sin(\alpha) \cos(\delta) \\ \cos(\alpha) \cos(\delta) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.114)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \delta} = r \begin{bmatrix} -\cos(\alpha) \sin(\delta) \\ -\sin(\alpha) \sin(\delta) \\ \cos(\delta) \end{bmatrix}. \quad (2.115)$$

A variação temporal das coordenadas de ascensão reta e declinação,  $(\alpha, \delta)$  é o movimento próprio, e sua notação é:

$$\mu_\alpha = \frac{d\alpha}{dt}, \quad (2.116)$$

$$\mu_\delta = \frac{d\delta}{dt}. \quad (2.117)$$

Temos que o vetor  $\mathbf{r}$  é a distância entre o centro do nosso referencial e a fonte astronômica e tem módulo  $r$ . Podemos escrevê-lo em termos da paralaxe  $\pi$ , efeito geométrico aparente de deslocamento angular causado pela posição relativa entre o astro e o observador. A Figura 2.18 ilustra o efeito. Nela, a distância entre a Terra e o baricentro do Sistema Solar é  $a$ , dada em unidades astronômicas (UA) e  $r$  é dada

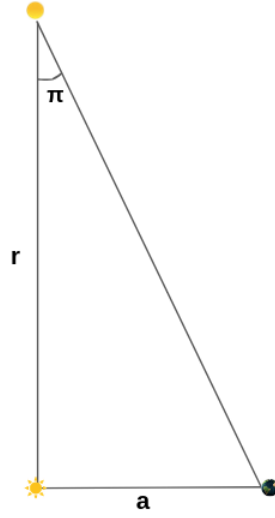


Figura 2.18. Efeito de paralaxe. Na figura, o ângulo  $\pi$  é a paralaxe,  $a$  é a distância da Terra para o baricentro do Sistema Solar e a distância  $r$  é aquela entre o baricentro do Sistema Solar e a fonte.

em quilômetros (km). Pela figura, temos que  $\tan(\pi) = a/r$  (Murray and Eichhorn, 1984). Porém, como o ângulo de paralaxe é muito pequeno, fazemos  $\tan(\pi) \approx \pi$ . Desse modo, chegamos ao seguinte resultado:

$$\pi = \frac{a}{r}. \quad (2.118)$$

Colocando  $r$  em evidência na Equação 2.113, substituímos o resultado da paralaxe e ficamos com:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} = r \left[ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \delta} \frac{d\delta}{dt} + \frac{\dot{r}}{r} \mathbf{p} \right] \Rightarrow \\ \dot{\mathbf{p}} &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} = r \left[ \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \delta} \frac{d\delta}{dt} + \frac{\pi v_r}{a} \mathbf{p} \right], \end{aligned} \quad (2.119)$$

onde  $\dot{r} = v_r$  é a velocidade radial do objeto, com sentido positivo no sentido de  $\mathbf{r}$ , apontando para fora da esfera celeste. A equação geral do movimento será, então:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + r \left[ \mu_\alpha \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \alpha} + \mu_\delta \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \delta} + \frac{\pi v_r}{a} \mathbf{p} \right] \Delta t. \quad (2.120)$$

As unidades dos termos da equação geral do movimento são:  $[\mathbf{p}, \mathbf{p}_0] = \text{mas}$  (do inglês, *mili-arcsecond*),  $[r] = \text{UA}$ ,  $[\mu_\alpha, \mu_\delta] = \text{mas/ano}$ ,  $[\partial \mathbf{p} / \partial \alpha, \partial \mathbf{p} / \partial \delta]$  são adimensionais,  $[\pi] = \text{mas}$ ,  $[v_r] = \text{km/ano}$  (quilômetro por ano),  $[a] = \text{UA}$  e  $[\Delta t] = \text{ano}$ , definido pela data juliana (1 ano = 365.25 dias). Para que haja coerência nas unidades desta equação, devemos determinar uma constante de conversão delas. Multiplicamos o último termo dentro do colchete pela constante  $k = 1.49 \times 10^8 / \text{mas}$  para que as unidades do termo todo estejam em mas/ano. As unidades angulares deverão ser escritas em termos de radianos e a velocidade radial deverá ter unidades UA/ano. Como as unidades angulares foram dadas em mas, devemos multiplicar

uma constante  $f = (0''.001/3600) \times (\pi/180)$  rad/mas. Portanto, a equação geral do movimento é finalmente escrita, com  $[\mathbf{p}, \mathbf{p}_0] = \text{rad}$ :

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + rf \left[ \mu_\alpha \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \alpha} + \mu_\delta \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \delta} + \frac{k\pi v_r}{a} \mathbf{p} \right] \Delta t. \quad (2.121)$$

### Tempo de luz

O efeito de tempo de luz acontece devido à velocidade finita da luz (Butkevich and Lindegren, 2014). Por causa desse limite, a posição observada de um objeto celeste não representa a posição verdadeira dele no momento da observação. A posição observada num dado instante  $\tau_0$  é aquela que o corpo ocupava em  $\tau_0 - \tau$ , onde  $\tau$  é o tempo levado para a luz percorrer desde a posição de emissão até a posição de recepção. Devido ao efeito e ao movimento dos objetos em relação ao baricentro do Sistema Solar, a posição observada e a posição verdadeira são diferentes. A posição do vetor baricêntrico  $\mathbf{p}$  de uma estrela pode ser representada por um movimento retilíneo uniforme (Figura 2.19), numa dada época  $T$ , escrita da seguinte forma (Butkevich and Lindegren, 2014):

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + (T - T_0)\mathbf{v}, \quad (2.122)$$

onde  $\mathbf{p}_0$  é a posição baricêntrica do mesmo objeto numa época inicial  $T_0$  e  $\mathbf{v}$  é a sua velocidade.

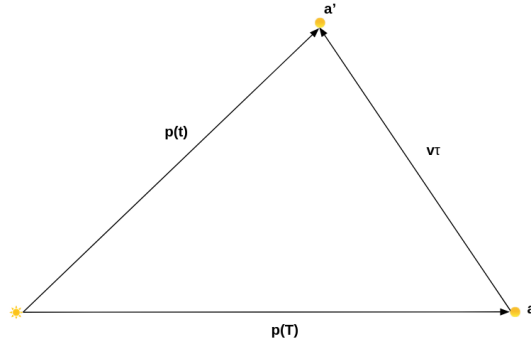


Figura 2.19. Efeito do tempo de luz. Estão consideradas a posição aparente em  $a$ , dada por  $\mathbf{p}(T)$ , que representa a posição em função do tempo  $T$  de emissão da luz do objeto celeste. Durante o tempo de viagem da luz, a posição vai de  $a$  para  $a'$ . Figura baseada em Butkevich and Lindegren (2014).

Como o efeito do tempo de luz é causado devido ao limite da velocidade da luz, devemos agora distinguir dois tipos de tempo:  $T$  como o tempo de emissão, ou seja, quando o sinal é emitido pela estrela, e  $t$ , que é o tempo de observação, quando o mesmo sinal é detectado pelo observador. Os dois momentos no tempo são conectados pela equação do tempo de luz (Butkevich and Lindegren, 2014):

$$t = T + \frac{\mathbf{p}(T)}{c}, \quad (2.123)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz. Usando a Equação 2.122, podemos tomar a diferença entre os vetores de posição baricêntrica nos dois momentos do tempo:

$$\mathbf{p}(T) = \mathbf{p}(t) - \tau\mathbf{v}, \quad (2.124)$$

onde o tempo de viagem da luz, ou simplesmente tempo de luz, é dado por:

$$\tau = t - T. \quad (2.125)$$

Algo interessante sobre a Equação 2.124 é que a direção de uma estrela no tempo de observação  $t$  é dada pelo vetor de posição baricêntrico  $\mathbf{p}(T)$ , no tempo da emissão  $T$ , como pode ser visto na Figura 2.19. A posição da direção no tempo de observação  $\mathbf{p}(t)$  não é a direção observável. Por isso, devemos diferenciar posições observáveis como aparentes  $\mathbf{p}$  e posições verdadeiras  $\mathbf{p}_0$  como quantidades não observáveis.

Como exemplo de como podemos transformar posições verdadeiras em posições aparentes, tomemos  $T_1$  e  $T_2$  dois tempos de emissão distintos, a posição verdadeira é dada por:

$$\mathbf{p}_0(T_2) = \mathbf{p}_0(T_1) + (T_2 - T_1)\mathbf{v}_0, \quad (2.126)$$

onde,  $\mathbf{v}_0$  é a velocidade verdadeira do astro. Como sabemos que  $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0(T)$  (Butkevich and Lindegren, 2014) e usando a definição do tempo de luz (Equação 2.125), podemos reescrever a Equação 2.126:

$$\mathbf{p}(T_2) = \mathbf{p}(T_1) + [(t_2 - t_1) - (\tau_2 - \tau_1)]\mathbf{v}_0. \quad (2.127)$$

Nesse caso, colocamos todos os termos em quantidades aparentes, menos a velocidade verdadeira  $\mathbf{v}_0$ .

Para mudança da velocidade aparente para a velocidade verdadeira, lembremos do fato de que o vetor velocidade é, por definição, a derivada temporal do vetor posição, não importando se o tempo de emissão ou o tempo de observação é usado quando calculamos. Tomemos, portanto, da seguinte forma (Butkevich and Lindegren, 2014):

$$\mathbf{v}_0 = \frac{d\mathbf{p}_0(T)}{dT} = \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt}, \quad (2.128)$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{p}_0(T)}{dT}. \quad (2.129)$$

Estes são os vetores velocidade verdadeira  $\mathbf{v}_0$  e aparente  $\mathbf{v}$ . As relações entre eles podem ser escritas usando a regra da cadeia, da seguinte forma:

$$\mathbf{v}_0 = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \frac{dt}{dT} \Rightarrow \mathbf{v}_0 = \mathbf{v} \frac{dt}{dT}, \quad (2.130)$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{p}_0}{dT} \frac{dT}{dt} \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 \frac{dT}{dt}. \quad (2.131)$$

As derivadas  $dt/dT$  e  $dT/dt$  podem ser melhor entendidas usando a Equação 2.123. Derivando a equação em relação a  $T$ , teremos:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dT} &= \frac{dT}{dT} + \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{p}_0(T)}{dT} \Rightarrow \\ \frac{dt}{dT} &= 1 + \frac{v_{0r}}{c}, \end{aligned} \quad (2.132)$$

onde  $v_{0r}$  é a variação da distância baricêntrica verdadeira. Como é uma componente radial, chamemos-la de velocidade radial. Agora, derivamos a mesma equação, mas

em relação a  $t$ :

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= \frac{dt}{dt} - \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{p}_0(T)}{dt} \Rightarrow \\ \frac{dT}{dt} &= 1 - \frac{v_r}{c},\end{aligned}\tag{2.133}$$

onde, agora,  $v_r$  é a variação baricêntrica aparente da distância com respeito ao tempo de observação. Substituindo as Equações 2.132 e 2.133 nas Equações 2.128 e 2.129, teremos a velocidade aparente escrita em termos da velocidade aparente e vice-versa, que é o nosso objetivo:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0(1 - v_{0r}/c)^{-1},\tag{2.134}$$

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(1 - v_r/c)^{-1}.\tag{2.135}$$

E, por fim, substituímos a Equação 2.135 na Equação 2.127, para obtermos a posição aparente em termos de todas as quantidades aparentes, considerando o tempo de luz (Butkevich and Lindegren, 2014):

$$\mathbf{p}(T_2) = \mathbf{p}(T_1) + [(t_2 - t_1) - (\tau_2 - \tau_1)] \frac{\mathbf{v}}{(1 - v_r/c)}.\tag{2.136}$$

Para avaliarmos a importância do tempo de luz na precisão dos parâmetros astrométricos, precisamos definir três fatores de escala relacionados com a mudança na distância aparente ( $f_D$ ), tempo aparente ( $f_T$ ) e velocidade aparente ( $f_V$ ) (Butkevich and Lindegren, 2014). Podemos escrever os três fatores em função dos parâmetros astrométricos da seguinte forma:

$$f_T = \frac{\pi_0 t + 2\tau_A}{\pi_0 t + \tau_A(1 + Z - \mu_{0r}t)} \quad (\text{fator temporal}),\tag{2.137}$$

$$f_D = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\mu_{0r}t f_T + (\mu_0^2 + \mu_{0r}^2)(t f_T)}} \quad (\text{fator de distância}),\tag{2.138}$$

$$f_V = \frac{1}{1 + (\tau_A/\pi_0)[\mu_{0r}(f_D - 1) + f_D(\mu_0^2 + \mu_{0r}^2)t f_T]} \quad (\text{fator de velocidade}).\tag{2.139}$$

Os termos que aparecem nos fatores de escala são:

$$Z = \sqrt{1 + (t + 2\tau_A/\pi_0)\mu_0^2 t + (2 + \mu_{0r}t)\mu_{0r}t},\tag{2.140}$$

além de que,  $\tau_A$  é o tempo de luz escrito em termos da unidade astronômica ( $\tau_A = a/c = 499.004789$  s),  $\mu_0 = [(\mu_\alpha \cos \delta)^2 + \mu_\delta^2]^{-1/2}$  e  $\mu_{0r}$  é a componente radial do movimento próprio verdadeiro ( $\mu_0 = v_r \pi/a$ ) (Butkevich and Lindegren, 2014).

O tempo de luz pode ser ignorado quando seus efeitos observáveis são pequenos em comparação com a precisão astrométrica requerida. Consideremos o efeito na posição angular de um astro como  $\Delta\theta$  e no movimento próprio  $\Delta\mu$  (Equações 2.141 e 2.142). Seja  $\sigma_\theta$  e  $\sigma_\mu$  as precisões que desejamos alcançar. As condições para que o tempo de luz seja negligenciável são quando  $\Delta\theta \ll \sigma_\theta$  e  $\Delta\mu \ll \sigma_\mu$ , onde  $\Delta\theta$  e  $\Delta\mu$  serão dados por (Butkevich and Lindegren, 2014):

$$\Delta\theta = \frac{\mu^3 \tau_A}{2\pi} t^2,\tag{2.141}$$

$$\Delta\mu = \frac{\mu^3 \tau_A}{\pi} t.\tag{2.142}$$

Baseando-se nas Equações 2.141 e 2.142, reescrevemos (Butkevich and Lindegren, 2014):

$$t^2 \ll \frac{2\pi\sigma_\theta}{\mu^3\tau_A}, \quad (2.143)$$

$$t \ll \frac{\pi\sigma_\mu}{\mu^3\tau_A}. \quad (2.144)$$

Em algumas ocasiões é necessário ignorar o tempo de luz. Isso acontece porque o modelo retílineo linear assume que os parâmetros astrométricos estão descrevendo o exato estado de movimento estelar. Caso estas condições não sejam compatíveis, por exemplo, quanto às incertezas dos parâmetros, a direta aplicação de modelo cinemático simplificado pode resultar em erros e resultados fisicamente absurdos (Butkevich and Lindegren, 2014). Um exemplo simples acontece quando a paralaxe medida é menor que a paralaxe verdadeira, enquanto outros parâmetros astrométricos têm erros negligenciáveis. A distância determinada a partir da paralaxe medida será muito maior que a verdadeira e, então, a velocidade transversal calculada para este caso será superestimada. Além disso, se a paralaxe medida for muito pequena, tendendo a zero, a velocidade transversal baseada nela tenderá ao infinito, o que é um resultado fisicamente impossível, pois essa velocidade não pode ser maior que a velocidade da luz. Em termos dos parâmetros astrométricos, a restrição para a paralaxe será:

$$\pi > \tau_A(\mu_r + \sqrt{\mu^2 + \mu_r^2}), \quad (2.145)$$

onde o termo  $\mu_r$  se refere ao movimento próprio radial aparente (Butkevich and Lindegren, 2014). Qualquer paralaxe abaixo deste limite é fisicamente sem sentido porque resulta em um movimento verdadeiro superestimado.

## Deflexão da luz

Na presença de um campo gravitacional, o caminho da luz é curvo. A curvatura do caminho da luz implica que a direção de visada do observador não é a mesma daquela em que a luz foi emitida. Consideremos a Figura 2.20. Nela, a luz de uma estrela distante chega ao sistema Terra-Lua. Os vetores unitários representados são o  $\mathbf{p}_0$ , vetor da posição heliocêntrica do geocentro,  $\mathbf{p}_1$ , a posição geocêntrica da estrela e  $\mathbf{p}_2$ , o vetor  $\mathbf{p}_1$  corrigido pela deflexão. Dado que a trajetória da luz está contida no plano Sol-Terra-Estrela, temos a seguinte relação:

$$\mathbf{p}_0 \times \mathbf{p}_1 = \hat{\eta} \sin(\phi), \quad (2.146)$$

$$\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2 = \hat{\eta} \sin(\Delta\phi). \quad (2.147)$$

A partir daqui, podemos fazer:

$$\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_0 \times \mathbf{p}_1 \frac{\sin(\Delta\phi)}{\sin(\phi)} \Rightarrow \quad (2.148)$$

$$\mathbf{p}_1 \cdot (\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2) - \mathbf{p}_2 \cdot (\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_1) = [-\mathbf{p}_0 \cdot (\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_1) + \mathbf{p}_1 \cdot (\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_0)] \frac{\sin(\Delta\phi)}{\sin\phi}, \quad (2.149)$$

onde usamos a propriedade do produto vetorial  $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = B\mathbf{A}C - C\mathbf{A}B$  no desenvolvimento. Vamos fazer três considerações. Primeira,  $\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = \cos(\Delta\phi)$

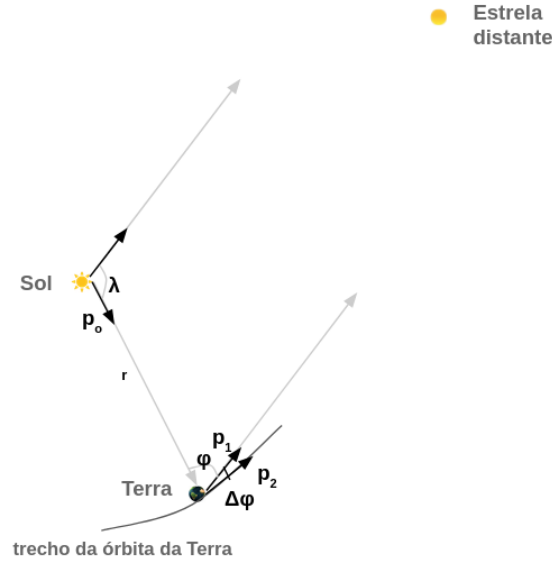


Figura 2.20. Ilustração do sistema Terra-Lua com uma estrela distante, considerada no infinito. A luz da estrela que chega ao sistema está contida no plano Sol-Terra-Estrela.

como  $\Delta\phi$  é muito pequeno, podemos considerar  $\cos(\Delta\phi) \approx 1$ . Segunda, a razão  $\sin(\Delta\phi)/\sin(\phi) \approx \Delta\phi$ , pela mesma justificativa. Terceira, consideremos (Kovalovsky and Seidelmann, 2011):

$$\Delta\phi = \frac{2GM}{rc^2} \frac{1 + \cos(\phi)}{\sin(\lambda)}, \quad (2.150)$$

onde  $G$  é a constante gravitacional,  $M$  é a massa da estrela e  $c$  é a velocidade da luz. Substituindo na Equação 2.149, ficamos com:

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 = [-\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1 \cdot (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_0)] \frac{2GM}{rc^2} \frac{1 + \cos(\phi)}{\sin(\lambda) \sin(\phi)}. \quad (2.151)$$

Levando em consideração que  $\lambda + \phi \approx 180^\circ$ , a parte do denominador  $\sin(\lambda) \sin(\phi) = \sin(180^\circ - \phi) \sin(\phi) = \sin^2(\phi)$ . Reescrevemos:

$$\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 = [-\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1 \cdot (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_0)] \frac{2GM}{rc^2} \frac{1 + \cos(\phi)}{\sin^2(\phi)} \Rightarrow \quad (2.152)$$

$$= [-\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1 \cdot (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_0)] \frac{2GM}{rc^2} \frac{1}{1 - \cos(\phi)} \Rightarrow \quad (2.153)$$

$$\therefore \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + [\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1 \cdot (\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_0)] \frac{2GM}{rc^2} \frac{1}{1 + \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_0}. \quad (2.154)$$

### Efeito de aberração

Sempre devemos ter em mente que o observador está em movimento com uma velocidade relativa a um dado referencial fixo. A mudança aparente na direção geométrica de um corpo celeste devido ao seu movimento ao redor do baricentro do Sistema Solar, chamamos de aberração estelar. Quando falamos de corpos do Sistema Solar, é preciso levar em consideração também o movimento do alvo observado

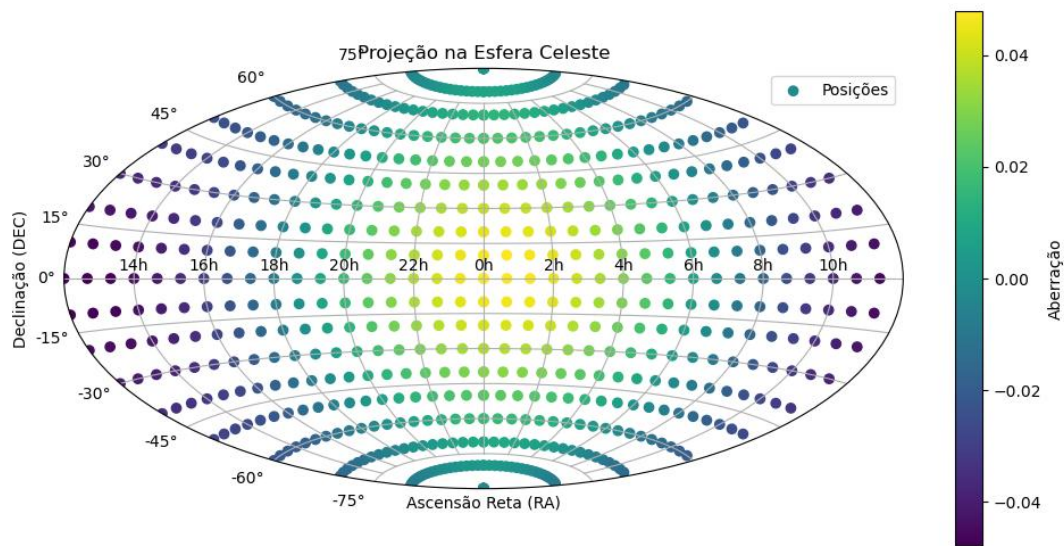


Figura 2.21. Efeito de aberração em relação às coordenadas distribuídos na esfera celeste com o vetor de velocidade da Terra  $\mathbf{v} = [-29.83135988, -4.767550817, -2.066490272]$  km/h.

e essas correções levam em conta o tempo de luz, ou seja, o tempo necessário para que a luz saia da fonte emissora e chegue ao observador.

Um exemplo do efeito está considerado na Figura 2.21. No desenvolvimento do exemplo, o vetor velocidade da Terra é  $\mathbf{v} = [-29.83135988, -4.767550817, -2.066490272]$  km/h. A aberração é o desvio angular da posição da estrela, considerando um campo de  $5'.6 \times 5'.6$ , considerando a variação da posição da Terra com a velocidade dada.

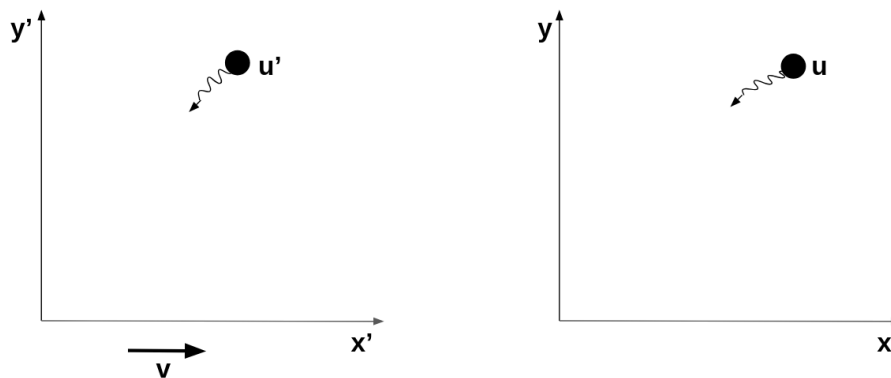


Figura 2.22. Representação dos referenciais envolvidos no estudo da aberração. O referencial do observador é  $(x', y', z', t')$ , com velocidade constante  $v$  em relação ao referencial da fonte  $(x, y, z, t)$ .

Após as correções de movimento próprio, paralaxe e deflexão, são aplicadas a correção de aberração. Aqui, consideraremos as correções de aberração de uma fonte em que não conhecemos o tempo de luz. Sejam dois referenciais inerciais (Figura 2.22), um deles contendo um observador  $\mathbf{O}'$ , que se move com velocidade constante  $v$  em relação ao referencial da fonte. As coordenadas no observador são  $(x', y', z', t')$  e as coordenadas no referencial da estrela são  $(x, y, z, t)$ :

Para iniciarmos, sejam as transformações de Lorentz:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (2.155)$$

$$y' = y, \quad (2.156)$$

$$z' = z, \quad (2.157)$$

$$t' = \frac{t - \left(\frac{v}{c^2}x\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.158)$$

A velocidade em relação ao referencial do observador será:

$$u'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\Delta t - \Delta x \frac{v}{c^2}}, \quad (2.159)$$

$$u'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y}{\Delta t - \Delta x \frac{v}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - u_x \frac{v}{c^2}}. \quad (2.160)$$

Ao fazermos a razão entre as duas, temos a fórmula relativística da aberração:

$$\tan(\theta') = \frac{u'_x}{u'_y} = \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{u_x - v} = \frac{c \sin(\theta) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{c \cos(\theta) - v}, \quad (2.161)$$

onde  $\theta'$  é o ângulo entre a direção de deslocamento do observador e a direção de visada com aberração e  $\theta$  é o ângulo entre a direção de deslocamento do observador e a direção real do objeto no céu. Retendo-se apenas ao termo em 1<sup>a</sup> ordem para  $v/c$ , tem-se:

$$\tan(\theta') = \frac{c \sin(\theta)}{c \cos(\theta) - v} \Rightarrow \quad (2.162)$$

$$\sin(\theta') \cos(\theta) - \frac{v}{c} \sin(\theta') \Rightarrow \quad (2.163)$$

$$\cos(\theta') \sin(\theta) = \sin(\theta' - \theta) \Rightarrow \frac{v}{c} \sin(\theta'), \quad (2.164)$$

que é a descrição clássica da aberração:  $\Delta\theta = (v/c) \sin(\theta')$ . Vamos escrever agora na velocidade medida no referencial do observador na forma vetorial<sup>1</sup>:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u}'_{\mathbf{x}} + \mathbf{u}'_{\mathbf{y}}, \quad (2.165)$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{\mathbf{x}} &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v}, \\ \mathbf{u}_{\mathbf{y}} &= \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathbf{x}}, \end{cases} \quad (2.166)$$

que são as projeções vetoriais do vetor velocidade  $\mathbf{u}$  em  $\mathbf{v}$ . Desse modo, usando as Equações 2.159 e 2.160, temos:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{\mathbf{x}} &= \frac{\mathbf{u}_{\mathbf{x}} - \mathbf{v}}{1 - \mathbf{u}_{\mathbf{x}} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c^2}} = \frac{\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v} - \mathbf{v}}{1 - \mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c^2}}, \\ \mathbf{u}_{\mathbf{y}} &= \frac{\left(\mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v}\right) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c^2}}. \end{cases} \quad (2.167)$$

<sup>1</sup>A Equação 2.165 pode ser encontrada em: [https://en.wikipedia.org/wiki/Velocity-addition\\_formula](https://en.wikipedia.org/wiki/Velocity-addition_formula)

Portanto, substituindo na Equação 2.165, chegamos em:

$$\mathbf{u}' = \frac{\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{v^2} - \mathbf{v} + \left( \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v} \right) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c^2}}. \quad (2.168)$$

Tomando-se o fator de Lorentz como:  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ , e fazendo as devidas substituições:

$$\mathbf{u}' = \frac{1}{1 - \mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c^2}} \left[ \gamma^{-1} \mathbf{u} - \mathbf{v} \left( 1 - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right) \right]. \quad (2.169)$$

Tomando-se como  $\mathbf{u}' = -c\mathbf{p}'$  o vetor velocidade da luz no referencial do observador, onde  $\mathbf{p}'$  é o vetor unitário da posição da estrela com a aberração, e  $\mathbf{u} = -c\mathbf{p}$  o vetor velocidade da luz no referencial do observador, onde  $\mathbf{p}$  é o vetor unitário considerando a posição da estrela sem a aberração, fazemos:

$$\begin{aligned} -c\mathbf{p}' &= \frac{1}{1 + \mathbf{p} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c}} \left[ -\gamma^{-1} c\mathbf{p} - \mathbf{v} \left( 1 - \frac{\gamma}{\gamma + 1} \frac{(-c\mathbf{p}) \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right) \right], \\ \mathbf{p}' &= \frac{1}{1 + \mathbf{p} \cdot \frac{\mathbf{v}}{c}} \left[ \gamma^{-1} \mathbf{p} - \frac{\mathbf{v}}{c} \left( 1 + \frac{\gamma}{\gamma + 1} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}}{c} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.170)$$

### Refração atmosférica

Quando a frente de onda chega na atmosfera, ainda há o desvio devido às diferentes camadas dela, respeitando a lei de Snell. Seja  $n$  o índice de refração e  $dn$  o índice infinitesimal da borda da camada atmosférica subsequente ao caminho do raio. Também definimos como  $z$  a distância zenital de chegada do raio e  $dz$  um pequeno deslocamento angular dessa coordenada. Pela lei da refração, teremos (Kovalevsky, 2002):

$$n \sin(z) = (n + dn) \sin(z + dz). \quad (2.171)$$

O desvio total do raio será dado por (Kovalevsky, 2002):

$$R = z - z_0, \quad (2.172)$$

onde  $z_0$  é a distância zenital aparente e  $z$ , a distância zenital real, caso não houvesse atmosfera. Desse modo, podemos escrever:  $z = z_0 + R$ . Considerando  $n = 1$  fora da camada atmosférica plana, podemos reescrever a lei de refração como:

$$\sin(z) = n_0 \sin(z_0), \quad (2.173)$$

onde  $n_0$  é o índice de refração da camada. Podemos escrever a equação de  $R$  da seguinte maneira (Kovalevsky, 2002):

$$R = (n_0 - 1) \tan(z_0). \quad (2.174)$$

Porém, o modelo que considera a atmosfera composta de camadas planas não alcança os níveis de precisão necessários à astrometria moderna. Vamos considerar, então, o modelo de atmosfera com camadas esféricas (Figura 2.23).

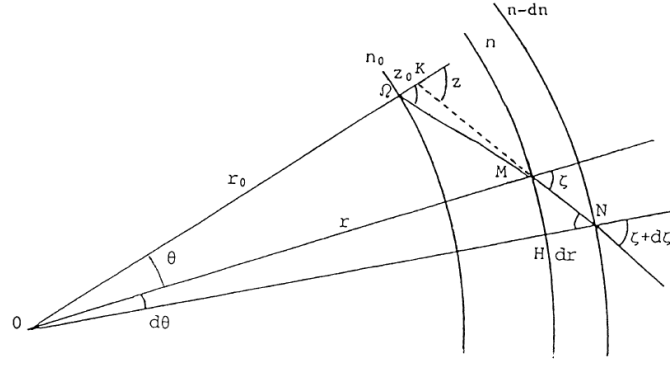


Figura 2.23. Modelo de camadas atmosféricas esféricas. Figura: [Kovalevsky \(2002\)](#).

Considere o triângulo  $OMN$  na figura. Como o somatório dos ângulos internos deste triângulo é  $180^\circ$ , temos que  $N = (\zeta - 180^\circ) - d\theta + 180^\circ = \zeta - d\theta$ . Seguindo a lei dos senos, escrevemos:

$$\frac{\sin(180^\circ - \zeta)}{r + dr} = \frac{\sin(\zeta - d\theta)}{r}, \quad (2.175)$$

e, desenvolvendo ([Kovalevsky, 2002](#)):

$$r \sin(\zeta) = (r + dr) \sin(\zeta - d\theta). \quad (2.176)$$

Com base na lei de Snell, fazemos para a camada em  $N$ :

$$(n - dn) \sin(\zeta + d\zeta) = n \sin(\zeta - d\theta). \quad (2.177)$$

Substituindo  $\sin(\zeta - d\theta)$  da Equação 2.177 na Equação 2.176, temos ([Kovalevsky, 2002](#)):

$$rn \sin(\zeta) = (n - dn)(r + dr) \sin(\zeta + d\zeta), \quad (2.178)$$

o que demonstra a invariância do produto  $nr \sin(\zeta)$ , pois o valor à direita na equação anterior é o mesmo que  $n_0 r_0 \sin(z_0)$ .

Na Figura 2.23, tomemos o triângulo  $OKM$ . No ponto  $\Omega$ , que representa o ponto em que a direção de visada do observador toca a camada mais baixa da atmosfera, a distância zenital  $z$  depende do ângulo  $\zeta$  através da relação  $z = \theta + \zeta$ . Escrevendo na forma infinitesimal, temos:

$$d\zeta = dz - d\theta. \quad (2.179)$$

E o triângulo  $MNH$ , chegamos na seguinte relação ([Bassallo, 2017](#)):

$$\tan(90^\circ - \zeta) = \frac{dr}{r d\theta} \Rightarrow d\theta = \frac{\tan(\zeta)}{r} dr. \quad (2.180)$$

Substituindo o valor de  $d\zeta$  da Equação 2.178 pelo obtido na 2.179 e o valor de  $d\theta$  da Equação 2.180, obtemos:

$$n \sin(\zeta) dr - r \sin(\zeta) dn + rn \cos(\zeta) \left( dz - \frac{\tan(\zeta)}{r} \right) = \quad (2.181)$$

$$-n \sin(\zeta) dn + rn \cos(\zeta) dz = 0. \quad (2.182)$$

E essa equação nos mostra que:

$$dz = \frac{\tan(\zeta)}{n} dn. \quad (2.183)$$

Portanto, a refração é definida pela integral de  $dz$  partindo do chão até o espaço aberto como (Kovalevsky, 2002):

$$R = z - z_0 = - \int_{n_0}^1 \frac{\tan(\zeta)}{n} dn, \quad (2.184)$$

onde  $n_0$  é o índice de refração da camada mais próxima do solo. Usando a Equação 2.178, podemos escrever (Kovalevsky, 2002):

$$\tan(\zeta) = \frac{\frac{n_0 r_0 \sin(z_0)}{rn}}{\sqrt{1 - \left(\frac{n_0 r_0 \sin(z_0)}{rn}\right)^2}}. \quad (2.185)$$

E ao substituírmos esse valor na Equação 2.184, obtemos a solução exata da refração cromática (Kovalevsky, 2002):

$$R = - \sin(z_0) \int_{n_0}^1 \frac{1}{n \sqrt{\left(\frac{nr}{n_0 r_0} - \sin^2(z_0)\right)^2}} dn. \quad (2.186)$$

Uma solução que dá significado mais físico ao cálculo da refração cromática está na fórmula de Laplace (Kovalevsky, 2002):

$$R = A \tan(z_0) - B \tan^3(z_0), \quad (2.187)$$

onde os parâmetros  $A$  e  $B$  dão conta de medidas de pressão, temperatura e pressão.

### Projeção gnomônica

Feitas as considerações a respeito das correções físico-geométricas na determinação das posições, é preciso tomar nota de quando o raio entra no instrumento astronômico e das transformações necessárias para a determinação da posição dos objetos celestes. O primeiro passo é apresentarmos sumariamente como é feita a projeção gnomônica e como são determinadas as posições  $(x, y)$  no plano focal do instrumento.

Consideremos a configuração geométrica apresentada na Figura 2.24. Nela, temos um instrumento no plano focal, com centro em  $O$ . A reta  $OC$  representa o eixo óptico de um telescópio. A extensão do eixo óptico até a esfera celeste é marcada pela reta  $CA$ . O ponto  $A$  é o centro do plano tangente à esfera celeste e é chamado de ponto tangente. O ponto  $C$  é o centro da objetiva do telescópio e refere-se a ele como o centro da esfera celeste. Seja  $X$  a posição de um objeto na esfera celeste. A reta  $CX$  é aquela que liga o centro da objetiva com o astro. Sua extensão para fora da esfera celeste toca o plano tangente em  $T$  e, no sentido para dentro da esfera, toca o plano focal em  $S$ . Desse modo, podemos dizer que a reta  $AT$  é a projeção da reta  $OS$  no plano tangente. Chamamos  $CA = r$ , onde  $r$  é o raio da esfera celeste

( $r = 1$ , em unidades de raio da esfera celeste) e  $OC = f$ ,  $f$ , sendo a distância focal do telescópio, pela semelhança de triângulos, podemos escrever (Green, 1985):

$$AT = \frac{r}{f}OS. \quad (2.188)$$

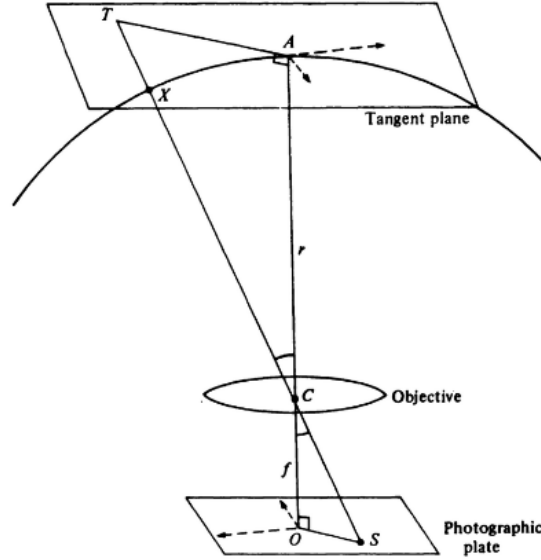


Figura 2.24. Projeção gnomônica. Figura: Green (1985).

As coordenadas de um ponto no plano tangente são  $(\xi, \eta)$  e são chamadas de coordenadas padrão. Elas são determinadas com base na posição em coordenadas equatoriais do ponto tangente  $(A, D)$  e nas coordenadas equatoriais do astro sobre a esfera celeste  $(\alpha, \delta)$ , da maneira que segue (Green, 1985):

$$\xi = \frac{\cos(\delta) \sin(\alpha - A)}{\sin(D) \sin(\delta) + \cos(D) \cos(\delta) \cos(\alpha - A)}, \quad (2.189)$$

$$\eta = \frac{\cos(D) \sin(\delta) + \sin(D) \cos(\delta) \cos(\alpha - A)}{\sin(D) \sin(\delta) + \cos(D) \cos(\delta) \cos(\alpha - A)}. \quad (2.190)$$

As coordenadas padrão nos ajudam na determinação das coordenadas  $(x, y)$  das estrelas de referência no CCD, usadas para a determinação de posições de alvos.

Para a determinação das posições  $(\alpha, \delta)$ , partindo daquelas medidas no CCD,  $(x, y)$ , buscamos primeiramente a relação entre essas coordenadas e as coordenadas padrão. Considerando a medida dessas coordenadas, podemos dizer que sua relação será dada pelo seguinte, em primeira ordem (Green, 1985):

$$\xi = a_1x + b_1y + c_1, \quad (2.191)$$

$$\eta = a_2x + b_2y + c_2, \quad (2.192)$$

onde as constantes  $a_i$ ,  $b_i$  e  $c_i$  ( $i = 1, 2$ ), são chamadas de constantes de placa (devido à sua origem na redução astrométrica a partir de placas fotográficas) e são desconhecidas, podendo ser determinadas pelo método de mínimos quadrados com um número suficiente de estrelas de referência. O valor delas, e por sua vez, das

coordenadas padrão, é influenciado por diversos fatores instrumentais, tais como deslocamento do centro do CCD em relação ao eixo óptico, diferença de orientação entre os eixos dos planos  $(x, y)$  e  $(\xi, \eta)$ , não ortogonalidade dos eixos do plano  $(x, y)$ , erro de “*tilt*” do CCD (Green, 1985). Por vezes, problemas maiores exigem termos de maior ordem nas Equações 2.191 e 2.192.

Determinadas as coordenadas padrão com as coordenadas  $(x, y)$  no CCD, fazemos uma projeção antignomônica para recuperarmos as coordenadas equatoriais. Fazendo um rearranjo na Equação 2.190, obtemos o seguinte (Green, 1985):

$$\cot(\delta) \cos(\alpha - A) = \frac{\cos(D) - \eta \sin(D)}{\eta \cos(D) + \sin(D)}. \quad (2.193)$$

Quando substituimos esse resultado na Equação 2.189, ficamos com o seguinte:

$$\cot(\delta) \cos(\alpha - A) = \frac{\xi}{\eta \cos(D) + \sin(D)}. \quad (2.194)$$

Podemos determinar os valores  $(\alpha - A)$  e  $\delta$  a partir dessas equações, encontrando no final (Green, 1985):

$$\tan(\alpha - A) = \frac{\xi}{\cos(D) - \eta \sin(D)}, \quad (2.195)$$

$$\tan(\delta) = \frac{\sin(D) + \eta \cos(D)}{\cos(D) - \eta \sin(D)} \cos(\alpha - A). \quad (2.196)$$

### Redução ao dia

O processo matemático que toma em consideração todas as correções acima, mais as correções da matriz de *bias*, precessão e nutação na determinação da posição do objeto celeste é a redução ao dia. Aplicá-lo significa obter as coordenadas aparentes do objeto na data da observação. Como visto, as coordenadas equatoriais em um determinado catálogo são definidas para um dado centro (o baricentro do Sistema Solar) e para uma determinada época (J2000.0). Tendo isso em mente, a redução ao dia transforma a posição baricêntrica média da época do catálogo de um determinado corpo para posições aparentes topocêntricas na data da observação.

A posição baricêntrica da época representa a posição de uma fonte na época do catálogo, caso ela fosse vista do baricentro do Sistema Solar. A primeira correção que aplicamos é a de movimento próprio e obtemos a posição baricêntrica na data. Depois, corrigimos pela paralaxe anual e, com isso, temos a posição geocêntrica da fonte. A paralaxe diária é aplicada junto e, temos agora, a posição quasi-topocêntrica da data. Agora, fazemos as correções relacionadas à aberração anual, levando em consideração a velocidade orbital da Terra, juntamente com a aberração diária, considerando a velocidade de rotação da Terra. Por fim, incluímos as correções da matriz de *bias*, precessão e nutação. Depois dessas correções, temos a posição topocêntrica da data (Nautical Almanac Office US, 2013, Boczko, 2001).

## Capítulo 3

# Telescópios

### 3.1 Resolução e poder de coleta de luz

Antes de descrevermos medidas e relações referentes à construção dos telescópios, vamos dar uma breve descrição dos dois efeitos mais importantes quando nos referimos a eles. Primeiro, apresentaremos uma breve descrição dos efeitos de difração. Nesse caso, falaremos sobre as consequências instrumentais em relação à luz. Mais importantes para observações de telescópios no solo, por último, descreveremos de modo sucinto alguns efeitos atmosféricos, relacionados com a turbulência atmosférica.

#### 3.1.1 Efeitos de difração

Uma das primeiras referências ao efeito de difração vem de Leonardo da Vinci (1452-1519). Ele percebeu que, para um sistema de iluminação envolvendo um orifício, havia sempre um máximo pontual de luz. Provavelmente, ele desenvolveu um experimento para descrever esse fenômeno (Predazzi, 2001). Mais tarde, Francesco Grimaldi (1613-1663) realizou experimentos no mesmo sentido usando a luz solar para passar por um orifício feito em uma sala escura. Ele percebeu que as bordas entre a parte iluminada e a parte escura do ponto de luz formado em um anteparo não tinham forma definida e que uma série de listras coloridas ou franjas apareciam na parte de fora e paralelas à região de sombra. Pela teoria corpuscular da luz, vigente na época de Grimaldi, esse padrão não podia ser explicado. Nas palavras dele, “a luz é propagada ou espalhada não apenas diretamente ou por reflexão e refração, mas também por um quarto modo, por difração”, nomeando assim o efeito observado (Sommerfeld, 2004). Coube a Christiaan Huygens (1629-1695) usar sua nova proposta, a de que a luz se propaga de forma ondulatória, para explicar o fenômeno. Em 1818, Augustin-Jean Fresnel (1788-1827) demonstrou que a difração poderia ser explicada por uma aplicação da proposta de Huygens junto com o princípio de interferência. Gustav Kirchhoff (1824-1887) usou a análise de Fresnel do fenômeno para lançar as bases matemáticas de sua aplicação (Born and Wolf, 2013).

Consideremos a Figura 3.1. Nela vemos uma frente de onda chegando em um obstáculo com uma pequena fenda. A abertura da fenda equivale à distância  $\overline{AB}$ , ou seja, a distância entre os pontos  $A$  e  $B$ , e o ponto  $P$  está sobre um anteparo. Segundo o princípio de Huygens-Fresnel, todo ponto não obstruído da frente de

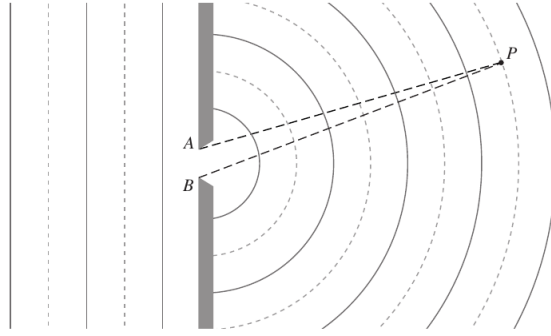


Figura 3.1. Difração de uma fenda pequena. Pontos  $A$  e  $B$  representam as bordas da fenda e  $P$  representa um ponto sobre um anteparo qualquer. Figura: [Hecht \(2012\)](#).

onda, num dado instante, serve como fonte para ondas esféricas secundárias, com a mesma frequência da frente de onda primária. A amplitude do padrão formado em um anteparo depois da fenda é resultado da superposição das ondas esféricas secundárias, levando em consideração suas amplitudes e fases relativas.

Ao aplicar esses conceitos de forma quantitativa, considere que cada ponto não obstruído de uma onda plana age como uma fonte secundária coerente, com a diferença máxima do caminho óptico dada por  $\Lambda_{max} = |\overline{AP} - \overline{BP}|$ . Quando o comprimento de onda  $\lambda$  é maior que a distância  $AB$  entre as bordas da abertura ( $\lambda > AB$ ), as ondas interferem construtivamente em qualquer ponto  $P$ , espalhando-se em ângulos amplos além da obstrução, com ondas difratadas mais circulares à medida que a abertura diminui. Por outro lado, quando  $\lambda < AB$ , a interferência construtiva ocorre apenas em uma pequena região diretamente à frente da abertura, enquanto além dessa zona a interferência destrutiva começa a formar a sombra ([Hecht, 2012](#)).

Uma explicação física para o caso da difração está no fato de que, se o meio em que ondas propagam tem uma extensão finita e delimitada, as bordas do meio afetam a propagação da onda. As ondas batem contra as bordas do meio e são parcialmente refletidas para trás e parcialmente transmitidas para o meio. As ondas refletidas sobrepõem-se às ondas incidentes, de modo que, por sua vez, cancelam cada uma ([Saha, 2007](#)).

Uma breve descrição matemática para a difração pode ser dada usando a Figura 3.2. Nela vemos uma frente de onda monocromática  $W$  que tem como fonte o ponto  $P_0$ , passando por um anteparo. Alguns dados importantes da frente de onda são o seu raio de curvatura  $r_0$  e consideremos o vetor unitário normal à frente de onda como  $\hat{\mathbf{n}}$ . A distância entre a frente de onda e o ponto  $P$  é  $s$ . O ângulo  $\chi$  é aquele entre a normal no ponto  $Q$  e a direção  $P$ . A perturbação no ponto  $Q(\mathbf{r})$  da frente de onda é representada pela seguinte equação:

$$U(\mathbf{r}, t) = \frac{Ae^{i\kappa r_0}}{r_0}, \quad (3.1)$$

onde  $\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}$  é o número de onda,  $A$  é a amplitude. Nessa equação, o fator periódico  $e^{-i\omega t}$  é omitido ([Born and Wolf, 2013](#)). A expressão para a contribuição elementar

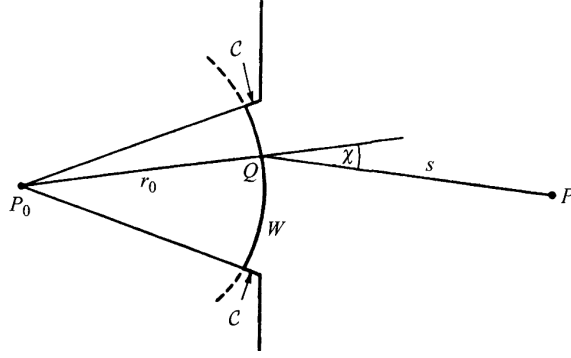


Figura 3.2. Ilustração para explicação da fórmula da difração (Born and Wolf, 2013), também conhecida como construção da zona de Fresnel (Saha, 2007). Figura: Born and Wolf (2013)

$dU(\mathbf{r})$  devido ao elemento  $dS$  em  $Q(\mathbf{r})$  é dada por:

$$dU(\mathbf{r}, t) = K(\chi) \frac{Ae^{i\kappa r_0}}{r_0} \frac{e^{i\kappa s}}{s} dS, \quad (3.2)$$

onde  $K(\chi)$  é um fator de obliquidade que leva em conta propriedades das ondas secundárias.

Fresnel determinou que o fator de obliquidade fosse unitário na direção de propagação, isto é, para  $\chi = 0$ , e que diminuísse com o aumento do ângulo, no limite em que  $\chi = \frac{\pi}{2}$ . Uma parte não obstruída da frente de onda primária contribui para o efeito em  $P(\mathbf{r})$  e, por isso, a perturbação total nesse ponto é deduzida pela seguinte integral (Saha, 2007):

$$U(\mathbf{r}, t) = \frac{Ae^{i\kappa r_0}}{r_0} \int_W \frac{e^{i\kappa s}}{s} K(\chi) dS. \quad (3.3)$$

Para determinar uma expressão para  $K(\chi)$ , a Equação 3.3 deve ser avaliada por considerar zonas sucessivas de aberturas da difração para fases constantes, para as quais a distância  $s$  é constante dentro de uma faixa que não ultrapassa  $\lambda/2$ . O campo em  $P(\mathbf{r})$  resulta da interferência das contribuições dessas zonas (Born and Wolf, 2013). Desse modo, o fator de obliquidade é dado por:

$$K(\chi) = -\frac{i}{2\lambda}(1 + \cos \chi), \quad (3.4)$$

com  $i\lambda K = 1$ . Com isso, podemos escrever:

$$K = \frac{1}{i\lambda} = \frac{e^{-i\pi/2}}{\lambda}. \quad (3.5)$$

O fator  $e^{-i\pi/2}$  tem seu significado no fato de que a onda secundária oscila um quarto do período fora da fase da onda primária. Esse mesmo fator pode explicar que as amplitudes de vibração secundárias são as amplitudes de vibração primárias pela razão de  $1/\lambda$ . Portanto, podemos concluir que, com as suposições sobre a amplitude e fase das ondas secundárias, o princípio de Huygens-Fresnel lida com expressões corretas para a propagação de ondas secundárias em espaços livres (Born and Wolf, 2013).

Usando a equação de Helmholtz (Equação 3.7) e o teorema de Green (Equação 3.8), vemos a maneira que Kirchhoff demonstrou o princípio de Huygens-Fresnel (Born and Wolf, 2013). Considerando uma onda monocromática escalar, com equação:

$$V(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}, \nu)e^{-i\omega t}, \quad (3.6)$$

onde  $\mathbf{r}$  é o vetor posição do ponto  $(x, y, z)$ , a função complexa  $U(\mathbf{r})$  deve satisfazer uma equação independente do tempo, como:

$$(\nabla^2 + \kappa^2)U = 0, \quad (3.7)$$

$$\int_V \phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi dV = \int_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS. \quad (3.8)$$

Com uma matemática rigorosa, Kirchhoff demonstrou que o princípio de Huygens-Fresnel pode ser escrito como (Born and Wolf, 2013):

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ U \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{i\kappa s}}{s} \right) - \frac{e^{i\kappa s}}{s} \frac{\partial U}{\partial n} \right\} dS. \quad (3.9)$$

Considerando uma onda monocromática partindo de um ponto  $P_0$ , propagando através de uma abertura num anteparo plano opaco, a perturbação da luz no ponto  $P$ , obtemos:

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{iA}{2\lambda} \int_A \frac{e^{i\kappa(r+s)}}{rs} [\cos(n, r) - \cos(n, s)], \quad (3.10)$$

onde a notação  $\cos(n, r)$  significa o cosseno entre o vetor unitário  $\hat{n}$  e  $\mathbf{r}$ , valendo o mesmo para  $\mathbf{s}$ . A Equação 3.10 é chamada de fórmula de difração de Fresnel-Kirchhoff. Para raios de curvatura suficientemente grandes,  $\cos(n, r_0) = 0$  sobre  $W$ . Tomando  $\chi = \pi - (r_0, s)$ , obtemos (Born and Wolf, 2013):

$$U(\mathbf{r}) = \frac{Ae^{i\kappa r_0}}{2i\lambda r_0} \int_W \frac{e^{i\kappa s}}{s} (1 + \cos(\chi)) dS. \quad (3.11)$$

Usando a Equação 3.10, podemos considerar duas aproximações, a de Fresnel e a de Fraunhofer. A aproximação de Fresnel ou aproximação de campo próximo lida com regiões de difração de campo próximo, que começam com alguma distância da abertura e, por isso, a curvatura da frente de onda deve ser considerada. A forma e o tamanho do padrão de difração dependem da distância entre a abertura e o anteparo. Já a aproximação de Fraunhofer, ou aproximação de campo distante, leva em consideração que a distância entre a fonte de luz,  $P_0$  e o anteparo de observação,  $P$ , é muito grande comparada com as dimensões da abertura e a frente de onda é considerada plana (Saha, 2007).

No contexto da aproximação de Fraunhofer, consideramos exemplos de tipos de aberturas usados em instrumentos astronômicos. Alguns desses instrumentos usam fendas como aberturas. Seja  $O$  a origem de um sistema de coordenadas retangular com o centro da abertura retangular de lados  $2a$  e  $2b$ ,  $O\xi$  e  $O\eta$  são os eixos paralelos aos lados, respectivamente. Definamos a função da pupila sendo:

$$P(\xi, \eta) = \begin{cases} 1, & -a < |\xi| < a, -b < |\eta| < b, \\ 0. & \end{cases} \quad (3.12)$$

Desenvolvendo uma transformada de Fourier de perturbação complexa,  $U(\xi, \eta)$ , chegamos aos resultados para os lados:

$$\hat{U}(u) = 2a \frac{\sin(2\pi ua)}{(2\pi ua)}, \quad (3.13)$$

$$\hat{U}(v) = 2a \frac{\sin(2\pi va)}{(2\pi va)}. \quad (3.14)$$

Portanto, o padrão de difração relacionado com a distribuição no campo de uma abertura retangular é dado por uma transformada de Fourier de uma distribuição retangular. Ela varia com uma função conhecida como sinc, descrita como  $\text{sinc}(u) = \text{sinc}(\pi u)/(\pi u)$ , como pode ser visto na Figura 3.3 (Saha, 2007):

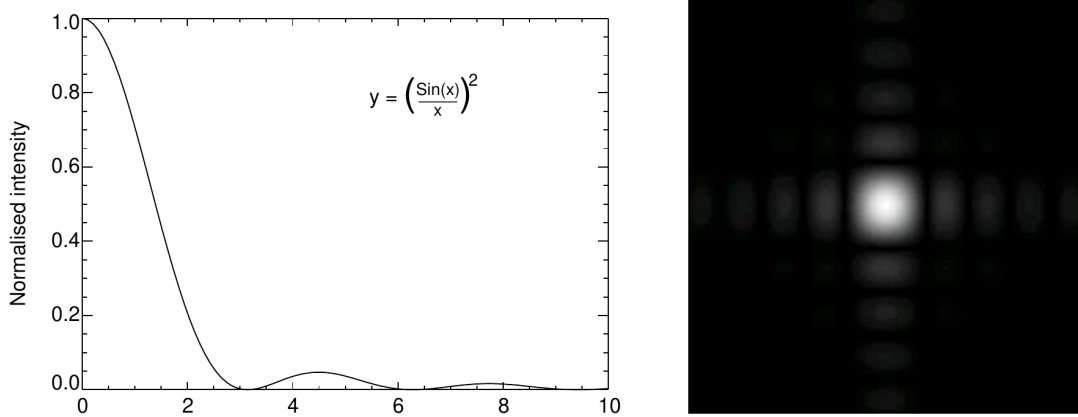


Figura 3.3. Na esquerda, temos um padrão de difração de Fraunhofer de uma abertura retangular em uma dimensão. Na direita, vemos o mesmo padrão, mas agora em duas dimensões. Figura: Saha (2007).

No caso de uma abertura circular, vemos um caso para a instrumentação astronômica, como telescópios, sejam eles refratores ou refletores. O padrão sempre existe devido aos componentes da instrumentação. Quando um contínuo de ondas passa através da abertura, a superposição daqueles componentes das frentes de onda também resulta em padrões de interferência construtiva e destrutiva.

Seja  $\rho$  e  $\theta$  as coordenadas polares de um ponto de uma abertura circular de raio  $a$ . A função da pupila é representada por  $P(\rho, \theta)$ :

$$P(\rho, \theta) = \begin{cases} 1, & 0 < \rho < a, \\ 0 & \text{nos outros casos.} \end{cases} \quad (3.15)$$

As coordenadas polares são dadas em termos de  $u$  e  $v$  do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \xi &= \rho \cos(\theta), & \eta &= \rho \sin(\theta), \\ u &= w \cos(\phi), & v &= w \sin(\phi), \end{aligned} \quad (3.16)$$

com:

$$w = \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{1}{\lambda} \left[ \left( \frac{x_0}{r} + \frac{x}{s'^2} \right)^2 + \left( \frac{y_0}{r} + \frac{y}{s'^2} \right)^2 \right], \quad (3.17)$$

onde  $w$  é a distância radial da origem até um ponto  $P$ . Assumindo que a fonte esteja na direção do eixo óptico, temos que  $x_0 = y_0 = 0$ . Considerando a simetria

circular do campo atrás da abertura,  $U(\rho, \theta) = CP(\rho)$ , e a integral de difração de Fraunhofer toma a seguinte forma:

$$\hat{U}(u, v) = C \int_W e^{-i2\pi(u\xi + v\eta)} d\xi d\eta. \quad (3.18)$$

Usando as relações em 3.16 na integral 3.18, chegamos a:

$$\hat{U} = C \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} e^{-i2\pi\rho w \cos(\theta - \phi)} d\theta \quad (3.19)$$

$$= 2\pi C \int_0^a \rho J_0(2\pi\rho w) d\rho, \quad (3.20)$$

onde:

$$J_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i[x \cos(\alpha)]} d\alpha, \quad (3.21)$$

é uma função de Bessel de primeiro tipo e ordem zero. Usando a seguinte relação:

$$\int_0^x x' J_0(x') dx' = x J_1(x), \quad (3.22)$$

e a Equação 3.20, pode ser reescrita como:

$$\hat{U}(w) = C\pi a^2 \left[ \frac{2J_1(2\pi aw)}{2\pi aw} \right], \quad (3.23)$$

onde  $J_1$  é uma função de Bessel de primeiro tipo e ordem um. Então, no caso de uma abertura circular, o padrão de difração é um ponto central brilhante com anéis concêntricos ao redor. A distribuição de intensidade tem um padrão dado pela equação (Saha, 2007):

$$\hat{I}(w) = |\hat{U}(w)|^2 = \hat{I}(0) \left[ \frac{2J_1(2\pi aw)}{2\pi aw} \right]^2, \quad (3.24)$$

onde  $\hat{I}(0) = C^2(\pi a^2)^2$  é a intensidade na direção do eixo óptico, ou seja,  $w = 0$ .

A distribuição de intensidade consiste em anéis de interferência construtiva e destrutiva e são conhecidos como padrão de difração de Airy (George Bidell Airy 1801-1892) e o ponto central brilhante é conhecido como disco de Airy. Diferente do perfil de intensidade gaussiano, que não tem a forma de máximos e mínimos nas bordas, o padrão de difração de Fraunhofer de uma abertura circular pode ser facilmente definido. Uma comparação entre os perfis em uma dimensão (Figura 3.5) e duas dimensões (Figura 3.6) pode ser vista nas figuras referenciadas. É possível ver no padrão de difração de Fraunhofer que cada limite dos círculos tem como referência quando a função de Bessel (Equação 3.23) atinge o primeiro zero. Nesse caso, esse é o chamado primeiro anel escuro e é uma região de interferência destrutiva (Saha, 2007).

Na Figura 3.4 é possível observar que a distribuição de intensidade no padrão de Airy acontece em  $x = 2\pi aw$ . Essa distribuição tem seu máximo principal em  $y = 1$  e  $x = 0$ , isto é, em  $w = 0$ . Com o aumento de  $x$ , a intensidade oscila, diminuindo gradativamente a magnitude. O círculo central possui 84% da energia total e é limitado pelo disco de Airy. O primeiro mínimo é dado em  $x = 1.22\pi$  e a partir dele podemos encontrar o diâmetro do ponto central,  $\theta \approx \frac{1.22\lambda}{2a}$  (Saha, 2007).

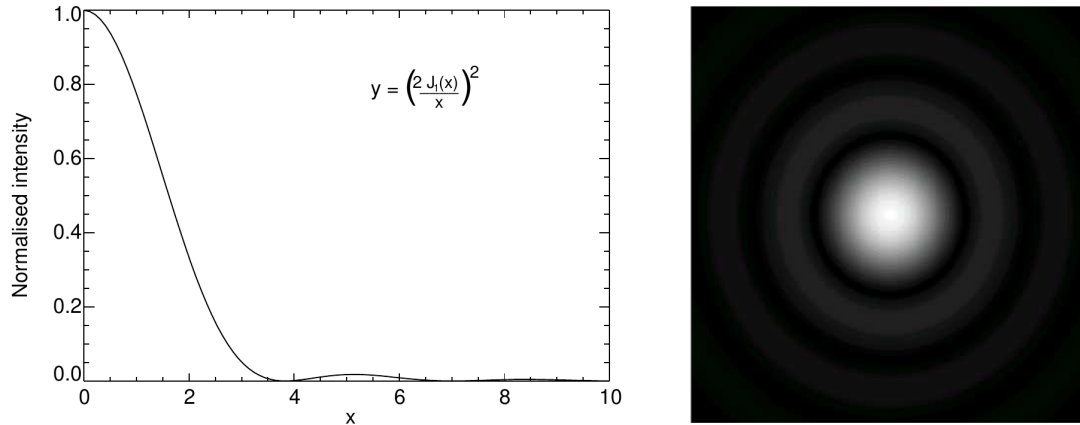


Figura 3.4. Na esquerda, temos um padrão de difração de Fraunhofer de uma abertura circular em uma dimensão. Na direita, vemos o mesmo padrão, mas agora em duas dimensões. Figura: [Saha \(2007\)](#).

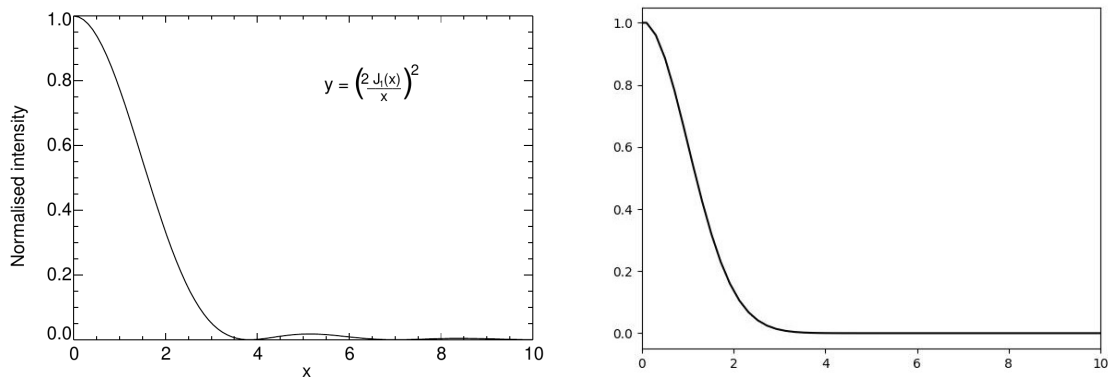


Figura 3.5. Comparação entre os perfis em uma dimensão da gaussiana e de Fraunhofer.

### 3.1.2 Turbulência atmosférica

A atmosfera não é uma camada de ar homogênea. Devido à pressão, correntes de ar e variações de temperatura, ela é um composto complexo, um meio que limita a precisão das observações astronômicas. Por causa disso, conhecer suas características e sua influência na formação da imagem é de vital importância.

Os principais efeitos de degradação de uma imagem astronômica estão ligados à heterogeneidade da atmosfera. Além dos diversos fatores ligados a isso, essa heterogeneidade não permanece constante no tempo e produz distorções na frente de onda que chega dos objetos celestes. Desse modo, atmosfera pode ser definida a partir de um processo não estacionário aleatório, o qual pode ser comparado a um sistema caótico. Sua turbulência é causada por flutuações microtermais. A resolução das imagens é limitada por áreas de tamanho quase-coerente. A densidade das heterogeneidades atmosféricas é criada e mantida por parâmetros como gradientes termais, flutuações de umidade, cisalhamento de ventos produzidos por instabilidades de Kelvin-Helmholtz, os quais produzem a turbulência e, portanto, variações no índice de refração atmosférico ([Saha, 2007](#)).

As flutuações aleatórias do movimento atmosférico ocorrem predominantemente devido à fricção encontrada por fluxos de ar na superfície terrestre e à consequente

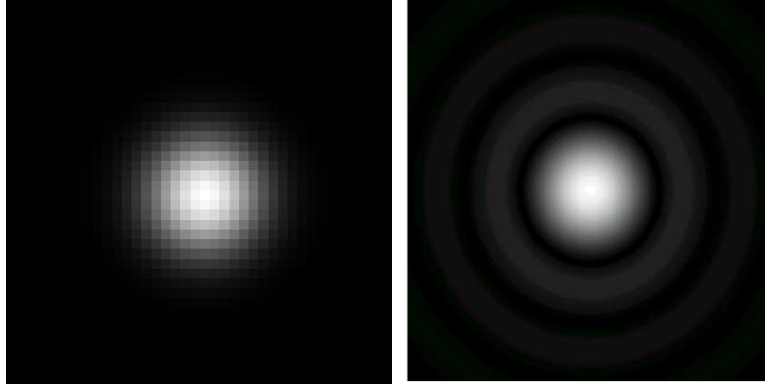


Figura 3.6. Comparação entre os perfis em duas dimensão da gaussiana (esquerda) e da difração de Fraunhofer (direita).

formação de um perfil de velocidade do vento com grandes gradientes, aquecimento diferencial de diferentes porções da superfície da Terra pelo Sol e desenvolvimento concomitante de convecção termal, liberação de calor ao processo associado à formação de nuvens e subsequentes mudanças na velocidade dos ventos, convergência e interação com variadas frentes atmosféricas, além da obstrução de fluxos de ar por barreiras naturais, tais como montanhas. Os gradientes formados pelos efeitos citados deformam a frente de onda incidente na pupila do telescópio. Se essas distorções forem uma fração significativa do comprimento de onda, a resolução do telescópio é, portanto, limitada (Saha, 2007).

Os efeitos ligados à turbulência atmosférica em imagens de objetos celestes são de dois tipos principais, a cintilação e a *seeing*. A cintilação refere-se principalmente à variação rápida e aleatória na intensidade da luz vinda de uma fonte astronômica. Isso ocorre com objetos pontuais como estrelas, pois a luz delas atravessa diferentes camadas de ar com diferentes densidades e temperaturas, fazendo com que sua posição aparente e brilho oscilem. É observada, principalmente, a olho nu ou em telescópios de pequena abertura. O *seeing* é uma mudança aleatória na direção em que a luz chega no telescópio. A variação de seu efeito depende do tamanho da abertura do telescópio. Para telescópios de pequena abertura e campos maiores, distorções na frente de onda não são observadas, mas somente uma mudança contínua na sua direção de propagação (Malacara et al., 2003). Ambos os efeitos serão descritos sumariamente a seguir.

Considerada como um conjunto de variáveis aleatórias, os processos atmosféricos podem ser descritos por quantidades estatísticas. Andrei Kolmogorov (1903-1987) estudou a raiz quadrada média da velocidade entre dois pontos em um espaço, separados por um vetor de deslocamento  $\mathbf{r}$ . A estrutura do tensor  $D_{ij}$  é definida como (Tyson and Frazier, 2022):

$$D_{ij} = \langle [v_i(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}) - v_i(\mathbf{r}_1)][v_j(\mathbf{r}_j + \mathbf{r}) - v_j(\mathbf{r}_1)] \rangle, \quad (3.25)$$

onde  $v_i$  e  $v_j$  são diferentes componentes da velocidade e os colchetes angulares representam a média de uma amostra. Tomemos três hipóteses sobre a atmosfera com o fim de simplificarmos a estrutura do tensor: a primeira é de que a atmosfera é localmente homogênea (a velocidade é dependente do vetor  $\mathbf{r}$ ), a segunda é a de que a atmosfera é localmente isotrópica (a velocidade depende somente do módulo

do vetor  $\mathbf{r}$ ) e a terceira, a turbulência é incompressível ( $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ). O tensor de Kolmogorov pode ser reescrito da maneira simplificada:

$$D_v = \langle [v_r(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}) - v_r(\mathbf{r}_1)]^2 \rangle. \quad (3.26)$$

Se considerarmos que  $r$  é pequeno, no caso de uma sub-amostra inercial da turbulência, a função de estrutura fica (Tyson and Frazier, 2022):

$$D_v = C_v^2 r^{2/3}, \quad (3.27)$$

onde  $C_v^2$  é a constante de velocidade da estrutura, que é uma medida da energia na turbulência. Para considerarmos a validade da Equação 3.27, temos que considerar que  $r$  esteja num dado intervalo de tamanho de um vórtice de ar. Os limites do tamanho do vórtice definem a microescala, ou escala interna, e a macroescala, também chamada de escala externa.

O tamanho do vórtice pequeno ( $l_0$ ) é aquele em que os efeitos de viscosidade são importantes e a energia é dissipada como calor. Ela está relacionada com a taxa de dissipação da energia cinética turbulenta  $\epsilon$  e a viscosidade cinemática  $\nu$  dada pela seguinte equação:

$$l_0 = 7.4 \left( \frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4}. \quad (3.28)$$

Os grandes vórtices, relacionados com a macroescala ( $L_0$ ) têm o tamanho acima do limite nos quais a isotropia é violada. Comparando as duas escalas de tamanho, encontramos vórtices de tamanho  $l_0$  desde perto da superfície da Terra (alguns milímetros) até a troposfera (alguns centímetros). Aqueles de tamanho  $L_0$  vão desde alguns poucos metros até centenas de metros. Perto do solo (menos que 1 km de altura),  $L_0 \approx 0.4h$ , onde  $h$  é a altura a partir do solo. Na atmosfera livre, a macroescala é da ordem de 10 metros, podendo alcançar centenas de metros (Tyson and Frazier, 2022). Uma relação aproximada entre as duas grandezas é dada por (Saha, 2007):

$$l_0 \approx L_0 (Re)^{3/4}, \quad (3.29)$$

onde  $Re$  é o número de Reynolds, que foi formulado para dar uma descrição aproximada de fluxos turbulentos usando a média de velocidades aleatórias. É uma quantidade adimensional que caracteriza o fluxo turbulento e considerando  $L$  como um tamanho característico do fluxo, pode ser escrito como (Saha, 2007):

$$Re = \frac{Lv}{\nu}. \quad (3.30)$$

Podemos, então, relacionar a estrutura de velocidade com a estrutura do índice de refração, com a quantidade  $D_n$ :

$$D_n(r) = C_n^2 r^{2/3}, \quad l_0 < r < L_0, \quad (3.31)$$

onde  $C_n^2$  é a constante da estrutura do índice refrativo e mede a intensidade da turbulência (Tyson and Frazier, 2022).

Quanto ao índice de refração da atmosfera, podemos assumir que ele é composto por uma parte média,  $\langle n(r) \rangle$ , e uma parte flutuante,  $n_1(\mathbf{r})$ . A covariância no campo do índice refrativo será  $B_n$ , escrito como:

$$B_n = \langle n_1(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1) n_1(\mathbf{r}_1) \rangle. \quad (3.32)$$

Tomando a transformada de Fourier da covariância (Equação 3.32), temos a seguinte integral, denominada de densidade de potência espectral:

$$\Phi(\mathbf{K}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int B_n(r) e^{-i\mathbf{K}r} d^3r, \quad (3.33)$$

onde  $\mathbf{K}$  é o número de onda tridimensional. Escrevendo a mesma integral, mas agora em coordenadas polares e usando os limites dados na Equação 3.31:

$$\Phi_n(K) = \frac{5}{18\pi} C_n^2 K^{-3} \int_{l_0}^{L_0} \sin(Kr) r^{-1/3} dr, \quad (3.34)$$

e tomando os limites  $l_0 \rightarrow 0$  e  $L_0 \rightarrow \infty$ , a integral resulta no espectro de Kolmogorov:

$$\Phi_n(K) = 0.033 C_n^2 K^{-11/3}. \quad (3.35)$$

O estudo do espectro de Kolmogorov sugere que a variação de intensidade é produzida por vórtices com tamanho na ordem de  $\sqrt{\lambda s}$ , onde  $s$  é a distância de propagação dessa variação. Quando estudava receptores de comunicação óptica heteródicas, David Fried (1933-2022) encontrou que o diâmetro máximo permitido de um coletor antes de a distorção atmosférica limitar seriamente seu desempenho é  $r_0$ , conhecido como comprimento de coerência, escrito como (Tyson and Frazier, 2022):

$$r_0 = \left[ 0.423 k^2 \sec(\beta) \int_0^s C_n^2(z) dz \right]^{-3/5}. \quad (3.36)$$

Nessa expressão,  $s$  é o comprimento do caminho óptico,  $\beta$  é o ângulo zenital e a intensidade da turbulência  $C_n^2$  pode variar com a altitude  $z$ . A variável  $r_0$  também é conhecida como parâmetro de Fried ou também conhecida como tamanho da célula de *seeing*. É usada para descrever diversos fenômenos turbulentos na atmosfera, desde o monitoramento de movimentos de imagens diferenciais até as medidas de *seeing*, importante fator para o contexto de estudos astronômicos observacionais. Por exemplo, para a função de estrutura de fase de Kolmogorov, para ondas planas, o parâmetro é usado para simplificar o tensor da Equação 3.25, reescrevendo-o como:

$$D_\phi = 6.88 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{5/3}, \quad (3.37)$$

onde  $r$  é uma variável radial, normal a direção de propagação. O tempo de coerência atmosférica também é escrito a partir de  $r_0$  como  $\tau_0 \approx \frac{r_0}{|v|}$ , onde  $v$  é a velocidade do vento em uma camada turbulenta.

O termo *seeing* é o termo empregado para se referir ao efeito total da distorção causada por diferentes camadas da atmosfera terrestre no caminho da luz de uma fonte astronômica. As camadas atmosféricas que influenciam no seu valor podem ser divididas em três: a primeira, a camada livre da atmosfera (acima de 1 km a partir do solo), a segunda é a camada limite (abaixo de 1 km) e, por último, a camada da superfície, localizada logo acima do foco do telescópio, também chamada de *seeing* de domo, e compreende a camada de ar entre a pupila e o foco do telescópio (Saha, 2007). Uma consequência da turbulência atmosférica é que, mesmo para fontes consideradas pontuais, tais como estrelas, sua luz é distribuída em uma área do plano

focal do telescópio. O conjunto de pontos na área forma uma função de espalhamento de pontos (PSF) (Romanishin, 2006). Portanto, para todo objeto pontual observado por um telescópio, a turbulência atmosférica induzirá a formação de uma PSF, caracterizada pelo *seeing*. A Figura 3.7 mostra uma função de transferência de modulação da atmosfera e aberturas simples de telescópios nos quais a PSF é invariante.

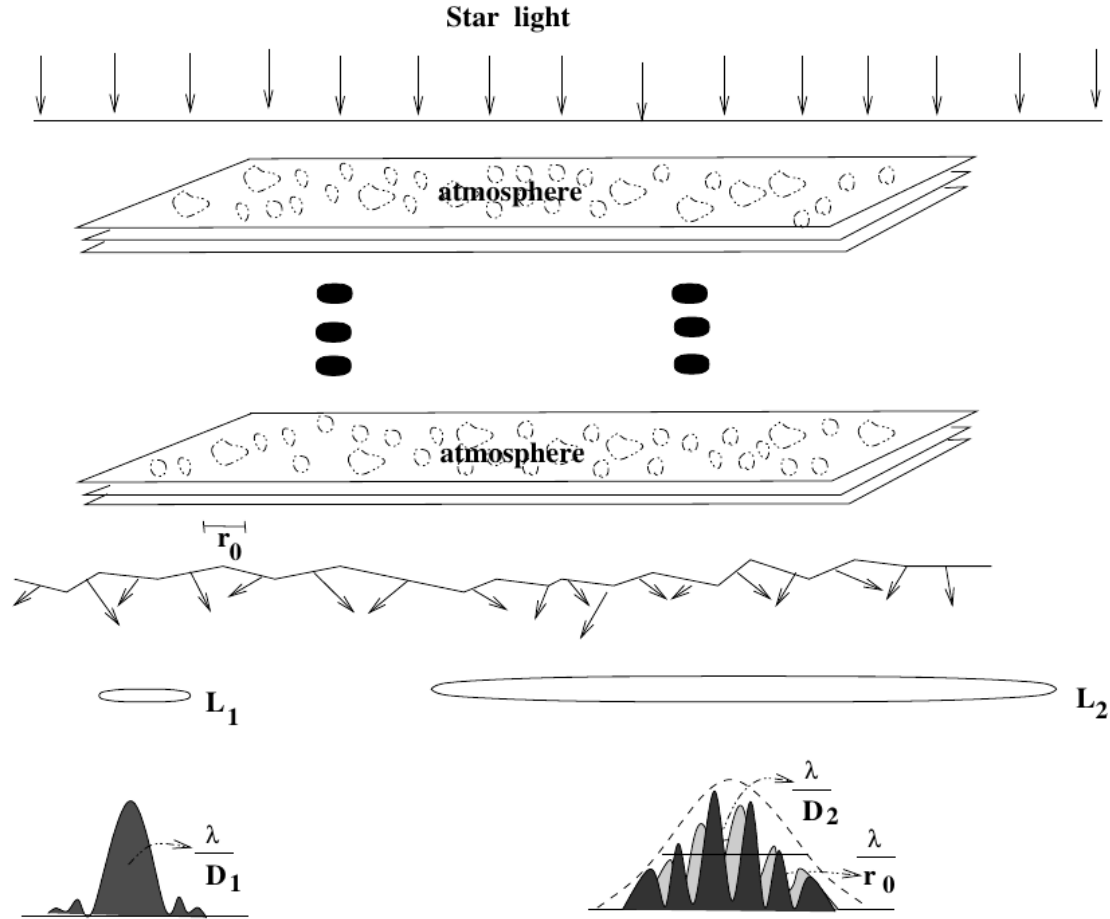


Figura 3.7. Onda plana propagando-se através de múltiplas camadas turbulentas. Na Figura,  $L_1$  e  $L_2$  representam tamanhos de telescópios, com suas respectivas aberturas,  $D_1$  e  $D_2$ . Figura: Saha (2007).

Uma maneira de caracterizar uma PSF é por meio da sua largura à meia altura (FWHM), que é o valor do diâmetro na metade da altura de uma função que ajusta a PSF. O valor de FWHM é quantitativamente o mesmo que o *seeing*. Como a PSF é a forma da luz pontual sobre o CCD e como todas as estrelas são consideradas fontes pontuais, todas elas terão exatamente a mesma forma. Isso significa que, comparando o *seeing* para diferentes fontes em uma imagem, todas deverão ter valor similar, considerando o tamanho do campo. A Figura 3.8 ilustra bem esse fenômeno. Comparando algumas quantidades na figura, vemos que o que diferencia uma fonte brilhante de uma fonte fraca é sua altura acima do fundo de céu, ou seja, a intensidade em cada pixel que compõe a fonte no CCD (Romanishin, 2006). Podemos concluir daqui que, considerando o tamanho típico de um CCD, o parâmetro de

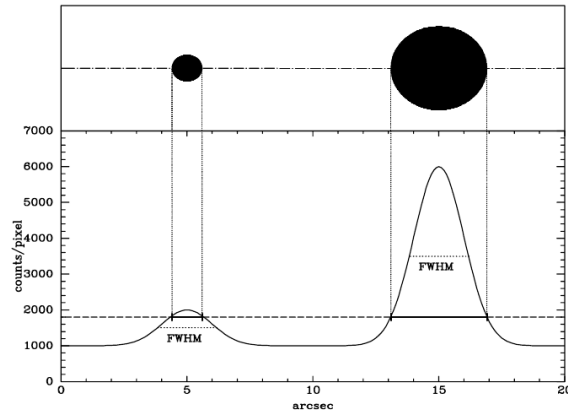


Figura 3.8. Largura à meia altura (FWHM). Comparação entre as PSFs de uma fonte fraca (esquerda) e uma fonte brilhante (direita). A linha tracejada abaixo demarca as contagens de fundo de céu. A figura demonstra que, independente da fonte, ambas têm o mesmo *seeing*. Figura: [Romanishin \(2006\)](#).

Fried (Equação 3.36), definido como raio da célula de *seeing*, não tem uma variação importante para uma imagem astronômica. A expressão que descreve a ligação entre o parâmetro de Fried e o disco de *seeing* é a seguinte ([Saha, 2007](#)):

$$\theta_s = 0.976 \frac{\lambda}{r_0}, \quad (3.38)$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de onda da observação.

Podemos detalhar dois tipos de *seeing*, o já citado *seeing* de domo e o *seeing* de espelho. Mesmo que o desempenho de um telescópio possa deteriorar devido ao seu invólucro com variações de temperatura do seu entorno, a contribuição do ambiente do domo e do espelho pode ser mantida mínima seguindo bons princípios de engenharia térmica ([Saha, 2007](#)).

Em uma comparação da diferença entre PSFs, a degradação encontrada devido à temperatura do domo é menor do que aquela consequente do espelho. Uma diferença entre 4-5°C entre a temperatura dentro e fora da cúpula causa uma piora no *seeing* de 0".5 ([Racine et al., 1991](#)). Uma melhora no *seeing* foi encontrada no telescópio de 3.6-m do CFHT (*Canadian-France-Hawaii Telescope*) com um sistema de resfriamento do chão para diminuir a convecção natural, mantendo a temperatura do espelho primário próxima da do volume de ar ([Zago, 1995](#)).

O *seeing* de espelho é aquele que mais contribui para a degradação do *seeing* em uma imagem e é o mais difícil de atingir o equilíbrio com a temperatura ambiente, levando várias horas a depender do tamanho do espelho. A convecção livre acima do espelho depende do excesso de temperatura da sua superfície em relação à temperatura ambiente, com um expoente de 1.2. Devido à turbulência causada por essa convecção, a frente de onda é degradada na ordem de 0".5 até 1° ([Saha, 2007](#)). O parâmetro de Fried  $r_0$  é maior durante a segunda parte da noite. Levando-se em consideração a Equação 3.38, percebemos que há uma melhora no *seeing*. Isso pode indicar que o resfriamento lento do espelho cria instabilidades térmicas que diminuem durante a noite ([Saha and Chinnappan, 1999](#)).

Pensando no resfriamento do espelho, é necessária a manutenção de uma temperatura uniforme ao seu redor para evitar a degradação do *seeing*. No monitora-

mento do efeito do *seeing* devido ao espelho com um analisador de frente de onda Shack-Hartmann, encontrou-se que a diferença entre as temperaturas do espelho e o ambiente pode ser mantida menor que  $1^\circ\text{C}$  e esse tipo de degradação torna-se menor ou negligenciável caso a temperatura seja mantida nesse patamar.

## 3.2 Convenção de sinais

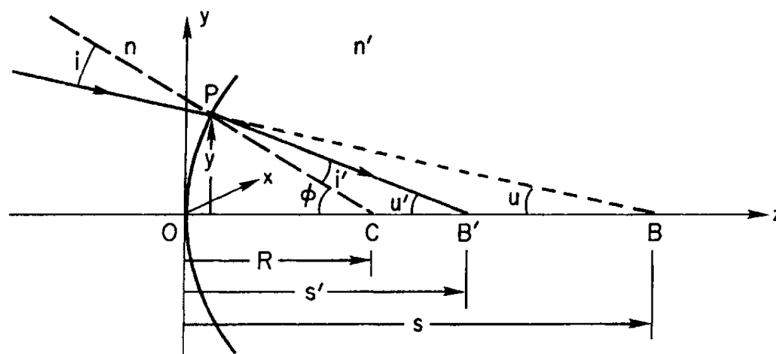


Figura 3.9. Refração em uma superfície esférica. O sistema na figura mostra como são definidos a orientação e o sentidos dos sinais para a explicação dos sistemas ópticos usados na Astronomia, descritos neste capítulo. Figura: [Schroeder \(1999\)](#).

Após algumas definições importantes sobre o caminho da luz na atmosfera terrestre e algo sobre alguns efeitos importantes relativos à natureza da luz e seu comportamento, levando em consideração a instrumentação astronômica, vamos definir como estarão convencionados os sinais das notações matemáticas para a descrição dos sistemas ópticos de nosso interesse, os telescópios. A representação matemática concorda, principalmente, com aquela em [Schroeder \(1999\)](#), [Malacara et al. \(2003\)](#) e [Smith \(2008\)](#).

O sistema de coordenadas que define um sistema óptico é o cartesiano. Na Figura 3.9, temos um exemplo de uma superfície esférica refratora com a incidência de um raio. A origem do sistema está no vértice da superfície e o eixo  $z$  coincide com o eixo óptico. Para um sistema óptico centrado, o eixo óptico é a linha de simetria dele. Os eixos  $x$  e  $y$  definem o plano de referência da superfície.

Os raios assumirão o sentido sempre da esquerda para a direita. O espaço de onde partem os raios é conhecido como espaço objeto. No caso da figura usada como exemplo, o espaço objeto é aquele antes do raio ser refratado pela lente esférica. Todas as variáveis decorrentes dessa parte serão descritas sem linha. Já o espaço pós-refração é o espaço imagem. As variáveis nele serão escritas com linha. Um exemplo disso pode ser visto no caso dos índices de refração. Antes da refração, a notação indica o índice  $n$ . Após o raio ser refratado, o índice é  $n'$ . Quando tratarmos de mais de uma superfície óptica em um sistema, a variável resultante das superfícies subsequentes ganhará um índice. Por exemplo, dado um sistema formado por duas lentes refratoras, a variável  $s'$  é resultado da refração da primeira superfície, mas a variável resultante da refração da segunda lente será notada como  $s_{+1}$ .

As distâncias marcadas sobre o eixo óptico serão sempre positivas, pois estão acima do vértice da superfície, parte do sistema em que  $z$  é positivo. Por exemplo,

consideremos o *thickness* como a distância entre duas superfícies. Toda vez que o sentido da distância crescer ao longo do eixo óptico, ela terá valor positivo. Por coerência, quando o *thickness* aumentar no sentido contrário, o valor será negativo, para que seja mantido o sinal da distância em relação à origem do sistema. A inclinação dos ângulos  $u$  e  $u'$  é positiva em relação ao eixo óptico, pois seguem o sentido trigonométrico. Nesse caso,  $u$  se refere ao ângulo com o eixo óptico antes do raio ser refratado e  $u'$  indica o ângulo com o eixo óptico depois da refração. Do mesmo modo, os ângulos  $i$  e  $i'$  representam os ângulos de incidência e refração do raio, em relação à normal da superfície, indicada na figura pela linha com pontilhamentos mais longos. O sentido positivo desses ângulos é no horário.

As notações tomadas com as convenções acima garantem que tanto a refração como também a reflexão sejam tratadas da mesma forma. Como veremos nas seções seguintes, formulações para a reflexão podem ser obtidas diretamente apenas tomando  $n' = -n$  nas equações de superfícies refratoras. O significado do índice negativo está no fato de que as leis de reflexão seguem diretamente da lei de Snell, usando a igualdade acima (Schroeder, 1999). Para a descrição das aberrações presentes em tipos específicos de telescópios, o texto seguirá definindo cada uma, caso a caso.

Partindo de como a notação matemática estará convencionada, introduziremos sucintamente algumas definições sobre o traçado de raios em um sistema óptico. O tema é muito importante para a descrição do comportamento da luz na instrumentação astronômica. Os tipos de raios que estudaremos estão basicamente separados entre a sua separação angular com o eixo óptico.

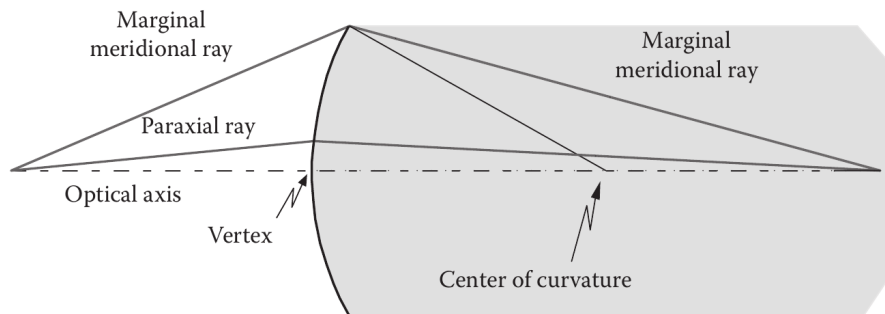


Figura 3.10. Ilustração sobre os tipos de raios definidos para um sistema óptico formado por uma superfície esférica refratora. Figura: Malacara et al. (2003).

Na Figura 3.10 vemos um esquema que mostra a configuração de um sistema óptico formado por uma única superfície esférica refratora. Como convencionado, os raios incidem na superfície da esquerda para a direita. Na figura vemos também a marcação de alguns componentes do sistema, tais como o centro de curvatura da superfície, definido como o centro da esfera que a contém, e o raio de curvatura, descrito como a distância entre a superfície e o centro de curvatura. Uma importante quantidade relacionada com o raio de curvatura é a curvatura da superfície  $c$ , definida como o seu inverso, ou seja,  $c = 1/r$ . Os raios meridionais são caracterizados por serem aqueles que compartilham o mesmo plano que o eixo óptico. Os raios paraxiais são aqueles que também compartilham o mesmo plano que o eixo óptico, mas com uma característica especial: eles são quase paralelos a ele. Considerando a conhecida

lei de Snell:

$$n \sin(i) = n' \sin(i'), \quad (3.39)$$

onde  $n$ ,  $i$  são o índice de refração do meio objeto e o ângulo de incidência, e  $n'$  e  $i'$  são o índice de refração do meio imagem e o ângulo de refração, respectivamente. Uma definição quantitativa dos raios paraxiais é aquela que diz que o ângulo entre o raio e o eixo óptico deve ser suficientemente pequeno para que as medidas dos senos possam ser aproximadas com a medida do ângulo, e a lei de Snell possa ser reescrita da forma:

$$ni = n'i'. \quad (3.40)$$

A região do sistema onde estão os raios paraxiais é chamada de região paraxial. A importância desse tipo de raio para o estudo da instrumentação usada na Astronomia está no fato de que ele descreve raios de objetos vindos, teoricamente, do infinito ou significativamente distantes. Outros dois tipos de raios são os oblíquos, aqueles que não compartilham o mesmo plano do eixo óptico, e os raios finitos, que não se encaixam em nenhuma das definições anteriores (Malacara et al., 2003).

O plano contendo o eixo óptico e um raio meridional é chamado de plano tangencial. Quando um raio contido nesse plano tem um ponto objeto (ponto de origem do raio) sobre o eixo óptico, ele é chamado de raio axial. No caso dos raios nesse plano, mas com ponto objeto fora do eixo, sua descrição é com o nome de raio tangencial. Portanto, todo raio meridional é axial ou tangencial. Por outro lado, o plano perpendicular ao plano tangencial é conhecido como plano sagital.

### 3.3 Equações do traçado de raio meridional

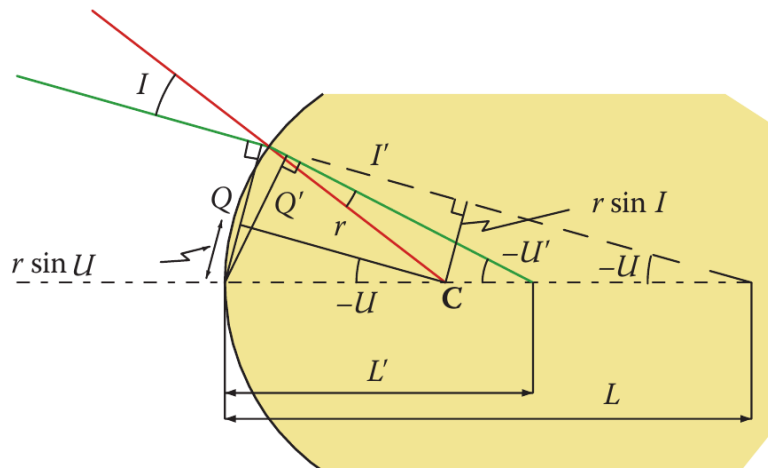


Figura 3.11. Raio meridional. Figura: Malacara et al. (2003).

Podemos definir um método para o traçado de raios meridionais, pensando em determinar a distância entre o vértice do sistema óptico e o raio refratado, o ângulo  $Q$ , e o ângulo  $U'$ , ambos na Figura 3.11. Seja a linha que parte do ponto  $C$  aquela que contém a normal à superfície. Da figura, podemos ver que (Malacara et al., 2003):

$$\sin(I) = Qc + \sin(U), \quad (3.41)$$

onde  $c = 1/r$  é a curvatura da superfície óptica considerada.

Pela lei de Snell (Equação 3.39), temos que:

$$\sin(I') = \frac{n}{n'} \sin(I). \quad (3.42)$$

Da Figura 3.9, podemos afirmar que  $i - u = i' - u'$ , e desse modo, transportando para as variáveis na Figura 3.11:

$$U' = U - I - I'. \quad (3.43)$$

Por fim, podemos usar a Equação 3.41 e, trocando as variáveis para aquelas com linha, escrevemos:

$$Q' = \frac{\sin(I') - \sin(U')}{R}. \quad (3.44)$$

Basicamente, essas quatro equações descrevem o traçado do raio meridional (Malacara et al., 2003).

### 3.4 Equação paraxial da refração

A região paraxial de um sistema óptico é de especial interesse no entendimento para instrumentação usada na pesquisa astronômica. Chamamos de região paraxial aquela em que estão os raios paraxiais. Como o trabalho em Astronomia lida com objetos sempre distantes, comparados com as dimensões do instrumento, toda luz que chega deles é considerada como vindo do infinito. Como vimos anteriormente, essa é a condição física para considerarmos raios paraxiais. Usando algumas equações já definidas, vamos considerar uma análise de primeira ordem para a descrição matemática mais profunda desse tipo de traçado de raio.

Iniciaremos usando a Figura 3.9. Podemos perceber a partir dela que:

$$i + u = \phi, \quad (3.45)$$

$$i' + u' = \phi. \quad (3.46)$$

Resolvendo a equação para  $i$  e  $i'$ , podemos substituir na Equação 3.40, e obtemos o seguinte:

$$n'(\phi - u') = n(\phi - u) \quad (3.47)$$

$$n'\phi - nu' = n\phi - nu \quad (3.48)$$

$$nu' - nu = (n' - n)\phi, \quad (3.49)$$

onde o ângulo  $\phi$  é aquele entre o raio de curvatura da superfície esférica e o eixo óptico. Essa equação é conhecida como a lei de Snell para a aproximação paraxial. Pela aproximação paraxial, podemos também considerar esse ângulo suficientemente pequeno para fazermos  $\tan \phi \approx \phi$ ,  $\tan u \approx u$  e  $\tan u' \approx u'$ . Por isso, consideremos  $\phi = y/R$ ,  $u = y/s$  e  $u' = y/s'$ . Substituindo na Equação 3.49 e cancelando o termo  $y$  em comum em ambos os lados, obtemos a seguinte relação:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{(n - n')}{R}. \quad (3.50)$$

Essa é a equação gaussiana de primeira ordem para uma única superfície esférica e é o ponto de partida para a análise de um sistema formado por múltiplas superfícies. A distância entre  $s$  e  $s'$  é chamada de distância conjugada e os pontos contidos dentro desse espaço são chamados de pontos conjugados. Recebem esse nome porque, nesse caso, a imagem é conjugada ao objeto. Perceba que, considerando raios vindos do infinito, temos que  $s = \infty$ . Desse modo, a distância  $s'$  é a distância focal da superfície óptica, ou seja, se  $s = \infty \Rightarrow s' = f'$ .

Examinando a Equação 3.50, vemos que os termos usados na equação paraxial da refração estão relacionados com a superfície e ao meio, porém nos diz pouco sobre o objeto e a imagem. Uma grandeza que pode nos dizer algo sobre este quesito é a potência da superfície. Denotemos-a por  $p$ . A potência é invariante com respeito ao sentido do raio e, por isso, é um importante parâmetro. Note que, mesmo que o raio mude de sentido na Figura 3.9, a Equação 3.50 permanecerá a mesma. Por esse motivo, podemos escrever:

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{(n' - n)}{R} = p. \quad (3.51)$$

Considerando o fato já descrito para o caso em que  $s = \infty$ , podemos considerar, então:

$$p = \frac{n'}{f'}. \quad (3.52)$$

Em um sistema composto por várias superfícies, a imagem formada por uma dada superfície é o objeto da próxima. Sucessivamente, aplica-se a Equação 3.52 para cada uma delas. Caso consideremos o caso também possível em que  $s' = \infty \Rightarrow s = f$ , a única mudança seria escrevê-la  $p = -n/f$ , de modo que a Equação 3.52 pode ser escrita:

$$\frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f}. \quad (3.53)$$

Quando escrevemos a relação entre duas variáveis, uma antes da refração e outra depois da refração, usamos a equação de transferência. Portanto, descrever uma equação de transferência é demonstrar qual o comportamento do raio de superfície em superfície. Frequentemente, há a preferência de escrever a equação gaussiana (Equação 3.50) em termos dos ângulos  $u$ ,  $u'$  e em termos da altura  $y$  do raio no sistema ao invés de fazê-lo em termos das distâncias  $s$  e  $s'$ . A equação é escrita da seguinte forma (Malacara et al., 2003):

$$(n' - n)R/y = -n'u' + nu, \quad (3.54)$$

onde a altura do raio é dada, considerando as aproximações paraxiais, por:

$$y = us, \quad (3.55)$$

$$y = u's', \quad (3.56)$$

segundo a Figura 3.9. Consideremos que  $s_{+1} = s' + t$  e que  $u_{+1} = u'$ . Então a equação de transferência para a altura  $y$  do raio em uma superfície e a altura  $y_{+1}$  do raio na superfície subsequente será escrita como (Malacara et al., 2003):

$$y_{+1} = y + tu', \quad (3.57)$$

onde  $t$  é o *thickness* entre as duas superfícies. Podemos escrever a equação gaussiana (Equação 3.54) com uma pequena manipulação algébrica:

$$[n'u'] = [nu] - (n' - n)R, \quad (3.58)$$

com a equação de transferência (Equação 3.57) escrita:

$$y_{+1} = y + \frac{t[n'u']}{n'}. \quad (3.59)$$

Podemos escrever a mesma equação usando a potência da superfície:

$$[n'u'] = [nu] - py. \quad (3.60)$$

E então, temos a matriz de refração (Malacara et al., 2003):

$$\begin{bmatrix} [n'u'] \\ y_{+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (t/n') & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [nu] \\ y \end{bmatrix}. \quad (3.61)$$

Finalmente, a matriz de transferência para a próxima superfície do sistema óptico é (Malacara et al., 2003):

$$\begin{bmatrix} [n'u'] \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [nu] \\ y \end{bmatrix}. \quad (3.62)$$

Usando essas matrizes, raios paraxiais podem ser traçados por todo o sistema óptico por multiplicação de matrizes (Malacara et al., 2003).

A magnificação transversal ou lateral é definida como a razão entre as alturas do objeto e da imagem. Usamos a Figura 3.12 para observar essas relações. Na Equação 3.63, temos a relação descrita matematicamente:

$$m = \frac{h'}{h}. \quad (3.63)$$

Da Figura 3.12, podemos ver que cada altura é:

$$h' = -(s' - R) \tan \phi, \quad h = -(s - R) \tan \phi. \quad (3.64)$$

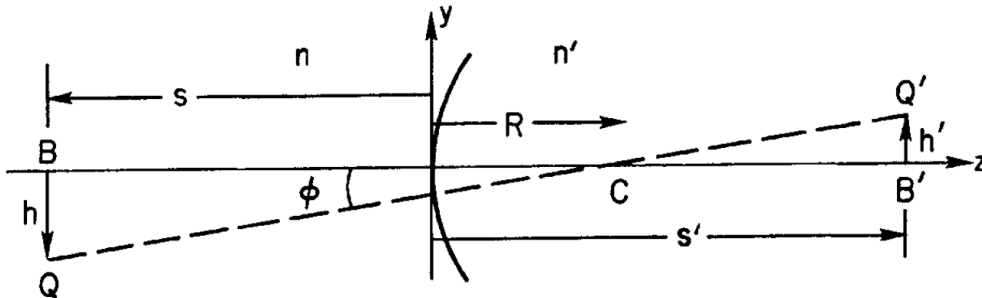


Figura 3.12. Pontos conjugados na região paraxial. Os pares de pontos  $B$  e  $B'$ ,  $Q$  e  $Q'$  são pontos conjugados. Figura: Schroeder (1999).

No caso acima, é importante destacar que a aproximação paraxial não foi utilizada para enfatizar o fato de que tanto o objeto como a imagem são perpendiculares

ao eixo óptico. Seguindo nossa convenção de sinais, vemos que  $s', R > 0$  e  $s, \phi < 0$ . Por esse motivo,  $h$  e  $h'$  têm sinais opostos. Faremos a substituição dos valores na Equação 3.64 na Equação 3.63 e teremos o seguinte:

$$m = \frac{h'}{h} = \frac{s' - R}{s - R} = \frac{ns'}{ns}. \quad (3.65)$$

No caso em que  $m < 0$ , dizemos que a imagem é invertida e para aquele em que  $m > 0$ , a imagem é direta.

A Figura 3.13 ilustra um raio convergente para os pontos conjugados  $B$  e  $B'$ , onde os ângulos formados são  $u$  e  $u'$ , respectivamente. A magnificação angular  $M$  é o caso em que  $\tan u / \tan u'$ . Pela própria figura, temos que  $y = s \tan u = s' \tan u'$ . Portanto, temos o seguinte:

$$M = \frac{\tan u'}{\tan u} = \frac{n}{n'm} = \frac{nh}{n'h'}, \quad (3.66)$$

onde podemos usar a Equação 3.66 para relacionar as magnificações transversa e angular para um par de planos conjugados, da seguinte forma:

$$nh \tan u = n'h' \tan u', \quad (3.67)$$

e, agora, considerando a aproximação paraxial, temos que:

$$nhu = n'h'u'. \quad (3.68)$$

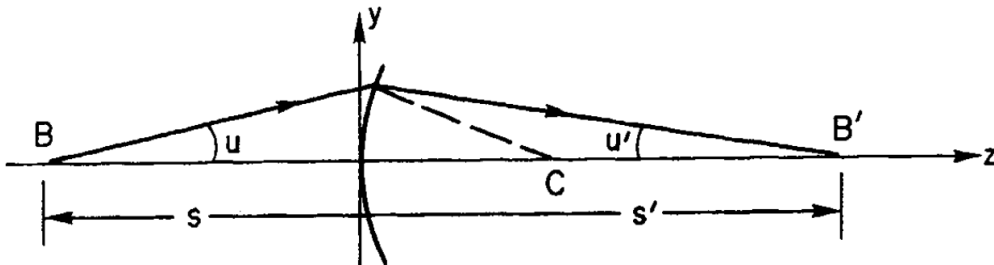


Figura 3.13. Magnificação angular. Figura: Schroeder (1999).

Percebemos, pela Equação 3.68 que a multiplicação das três quantidades permanece a mesma antes e depois da refração. Podemos chamar de  $H = nh \tan u$ , e consideramos que  $H$  permanece constante, independente da quantidade de superfícies refratoras (ou mesmo, refletoras).  $H$  é chamada de invariante de Lagrange e é importante porque o fluxo coletado por um sistema óptico de uma fonte com radiação uniforme é proporcional a  $H^2$ . Esse é um resultado direto da lei de conservação da energia nos sistemas ópticos (Schroeder, 1999).

### 3.5 Elementos de duas superfícies refratoras

A complexidade dos sistemas ópticos envolvidos na instrumentação de Astronomia ultrapassa o uso de somente uma lente. Para apresentarmos uma breve noção

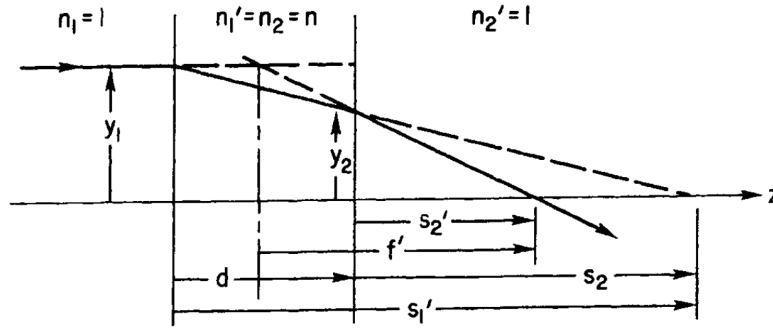


Figura 3.14. Exemplo de um sistema óptico formado por uma lente espessa, formada por duas superfícies.

do comportamento de um raio em um sistema refrator, analisaremos exemplos, o primeiro com uma lente espessa formada por duas superfícies ópticas e o outro com duas lentes delgadas.

Na Figura 3.14, vemos uma seção lateral de uma lente espessa. Nela,  $y_1$  e  $y_2$  são a altura de entrada do raio na primeira superfície e a altura do raio entrando na segunda superfície, respectivamente. Também percebemos que o ângulo entre o raio no plano objeto e o eixo óptico é paralelo. Portanto, se levarmos em consideração a Equação 3.51, teremos os seguintes casos, para cada superfície:

$$\frac{n_1'}{s_1'} - \frac{n_1}{s_1} = \frac{(n_1' - n_1)}{R_1} = p_1, \quad (3.69)$$

$$\frac{n_2'}{s_2'} - \frac{n_2}{s_2} = \frac{(n_2' - n_2)}{R_2} = p_2. \quad (3.70)$$

Vamos assumir que o índice de refração dentro da lente seja  $n$  e fora dela, seja 1 (índice de refração do ar). Portanto, teremos o seguinte  $n_1 = n_2' = 1$  e  $n_1' = n_2 = n$  e  $s_2 = s_1' - d$ , onde  $d$  será a separação entre as duas superfícies. Fazendo as devidas substituições, a Equação 3.70, fica:

$$\frac{n}{s_1'} - \frac{1}{s_1} = \frac{(n - 1)}{R_1} = p_1, \quad (3.71)$$

$$\frac{1}{s_2'} - \frac{1}{s_2} = \frac{(1 - n)}{R_2} = p_2. \quad (3.72)$$

Por semelhança de triângulos, também podemos dizer sobre a relação entre as alturas  $y_1$  e  $y_2$ :

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{(s_1' - d)}{s_1'} = \frac{s_2'}{f'}. \quad (3.73)$$

Temos o interesse aqui de determinar a potência do sistema todo, ou seja, alguma relação entre as potências das duas superfícies que formam a lente espessa. Essa potência pode ser escrita como  $p = 1/f'$ , onde  $f'$  é a distância focal efetiva do sistema. Tomemos para cada superfície, a escrita das relações na Equação 3.71:

$$p_1 = \frac{n}{s_1'}, \quad (3.74)$$

$$p_2 = \frac{1}{s_2'} - \frac{n}{s_1' - d}. \quad (3.75)$$

Levando em consideração algumas manipulações algébricas, com a Equação 3.73, podemos escrever a distância focal efetiva em relação à  $s'_1$ ,  $s'_2$  e  $t$ :

$$f' = \frac{s'_1 s'_2}{(s'_1 - d)}, \quad (3.76)$$

e, portanto:

$$p = \frac{1}{s'_2} \left[ \frac{(s'_1 - d)}{s'_1} \right]. \quad (3.77)$$

Pela Equação 3.75, podemos escrever que  $1/s'_2 = p_2 + 1/(s'_1 - d)$  e substituindo na Equação 3.77, temos que:

$$p = \left( p_2 + \frac{n}{s'_1 - d} \right) \frac{s'_1 - d}{s'_1}. \quad (3.78)$$

Desenvolvendo essa equação, teremos o seguinte:

$$p = \frac{s'_1 - d}{s'_1} p_2 + \frac{n}{s'_1} \quad (3.79)$$

$$= \frac{p_2 s'_1 - p_2 d}{s'_1} + \frac{n}{s'_1} \quad \text{como } p_1 = n/s'_1, \quad (3.80)$$

$$= p_1 + p_2 - \frac{p_2 d}{s'_1} \quad \text{e multiplicando o último termo por } \frac{n}{n}, \quad (3.81)$$

$$= p_1 + p_2 - \frac{d}{n} \frac{n}{s'_1} p_2 \quad (3.82)$$

$$p = p_1 + p_2 - \frac{d}{n} p_1 p_2. \quad (3.83)$$

Esse importante resultado nos diz como encontramos a potência de um sistema refrator composto, independente da direção do raio (Schroeder, 1999).

Consideramos uma lente delgada aquela em que a separação entre as duas superfícies ópticas é negligenciável em comparação com as distâncias no eixo óptico. Nesse caso,  $s_2 = s'_1$ . Podemos aplicar as equações 3.71 e 3.72 diretamente, definindo  $s_1 = s$  e  $s_2 = s'$ . Com essas considerações, podemos desenvolvê-las e teremos:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = p_1 + p_2 = p = \frac{1}{f} = -\frac{1}{f'}. \quad (3.84)$$

Ou seja, a potência de uma lente delgada é inversamente proporcional à sua distância focal. Podemos perceber que uma lente delgada como parte da composição de um sistema óptico pode ser considerada como uma superfície óptica refratora (Schroeder, 1999). Na Equação 3.83, encontramos a relação  $p_1 + p_2 = p$  (Equação 3.84), apenas colocando  $t = 0$ .

A magnificação transversa de cada superfície óptica (Equação 3.65), com resultado  $m_1 = s'_1/n s_1$  e  $m_2 = n s'_2/s_2$ . Considerando todo o sistema óptico, a magnificação transversa será (Schroeder, 1999):

$$m = m_1 m_2 = \frac{s'}{s}. \quad (3.85)$$

Por fim, podemos aplicar a Equação 3.83 para o caso em que considerarmos um sistema composto por duas lentes delgadas separadas pela distância  $d$ , apenas aplicando que o índice de refração entre as lentes seja o do ar  $n = 1$ .

### 3.6 Formação de imagem em telescópios refratores

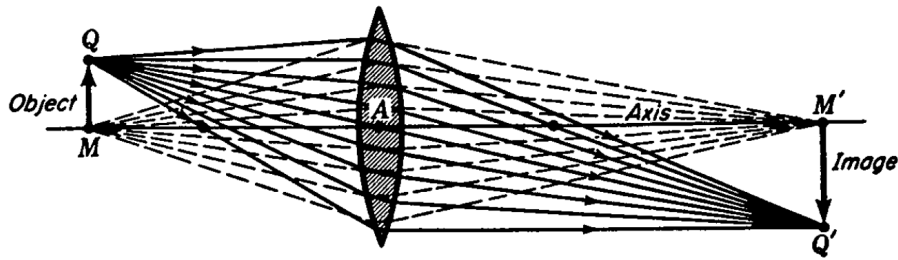


Figura 3.15. Imagem formada por uma lente espessa ideal. Um exemplo da formação da imagem por lentes. Todos os raios do objeto  $Q$  são refratados e formam uma imagem em  $Q'$ . Figura: Jenkins et al. (1937).

Quando um objeto é colocado de um lado de uma lente convergente e com uma distância maior que a distância focal dela, uma imagem é formada do lado oposto. Se o objeto é colocado mais próximo do plano focal primário, a imagem se afasta do plano focal secundário e fica maior. No caso contrário, caso um objeto seja colocado mais distante do plano focal primário, a imagem se formará mais próxima do foco secundário e será menor, caso dos telescópios refratores. Na Figura 3.15, todos os raios que partem do ponto objeto  $Q$  são levados para o foco em  $Q'$  (Jenkins et al., 1937).

A composição de um sistema de lentes é o que constitui um telescópio astronômico refrator. Basicamente, ele consiste em duas lentes convergentes, definidas como objetiva, aquela que primeiro converge os raios de luz, e uma ocular, que diverge os raios de luz, formando assim a imagem do telescópio. Normalmente, a objetiva é um dobrão acromático de lentes que formam uma imagem real invertida. Em um estado normal de ajuste, o segundo plano focal da objetiva coincide com o primeiro plano focal da ocular, para que os raios convergentes da primeira saiam da segunda paralelos ao eixo óptico. A imagem pode ser tornada direta com o uso de lentes auxiliares (Born and Wolf, 2013).

Na Figura 3.16, o primeiro plano focal da objetiva está em  $F_1$ , e o segundo plano focal em  $F_1'$ . Para a ocular, o primeiro plano focal está em  $F_2$ , com o segundo em  $F_2'$ . O olho deve ser colocado onde está indicado na mesma Figura (Born and Wolf, 2013).

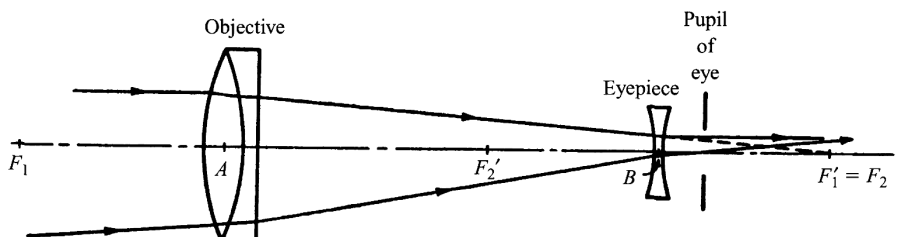


Figura 3.16. Esquema simples de um telescópio refrator. Figure: Born and Wolf (2013).

### 3.7 Equação paraxial da reflexão

O caso da análise de uma superfície refletora será desenvolvido com o auxílio da Figura 3.17. Nela, os sinais das distâncias  $s$ ,  $s'$  e  $R$  e dos ângulos  $i$ ,  $\phi$ ,  $u$  e  $u'$  são todos negativos, preservando nossa convenção. Seguindo a lei de reflexão, temos que  $i = -i'$ , e por isso, o ângulo  $i'$  tem sinal positivo.

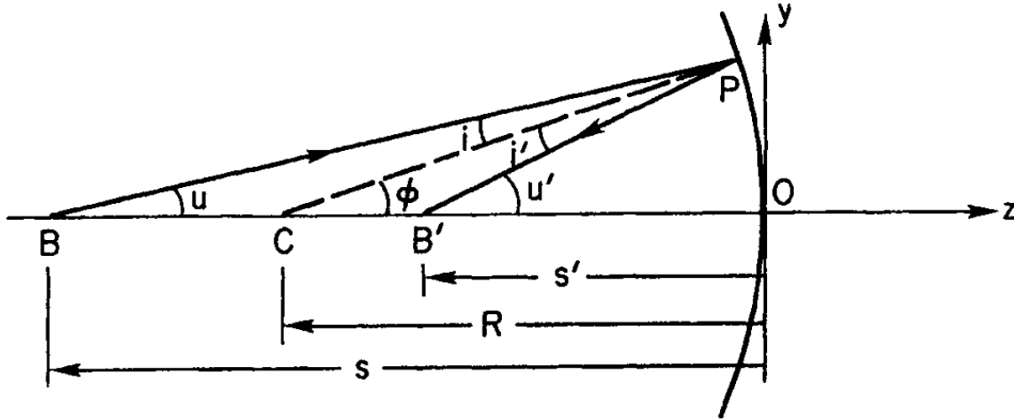


Figura 3.17. Reflexão de uma superfície esférica.  $B$  e  $B'$  são os pontos conjugados do eixo óptico.

Pela geometria na figura, temos as seguintes relações:

$$i = \phi - u, \quad (3.86)$$

$$i' = \phi - u', \quad (3.87)$$

$$\phi = \frac{y}{R}, \quad (3.88)$$

$$u = \frac{y}{s}, \quad (3.89)$$

$$u' = \frac{y}{s'}. \quad (3.90)$$

Usaremos a lei de Snell com aproximação paraxial (Equação 3.40) para chegarmos na relação entre as distâncias do objeto e da imagem. Substituindo os valores de  $i$  e  $i'$  (Equações 3.86 e 3.87), temos:

$$\begin{aligned} n(\phi - u) &= n'(\phi - u'), \\ n\phi - nu &= n'\phi - n'u', \\ n'u' - nu &= (n' - n)\phi. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Agora, aplicando o restante das relações (Equações 3.88, 3.89 e 3.90), substituímos e desenvolvemos:

$$\begin{aligned} n' \frac{y}{s'} - n \frac{y}{s} &= (n' - n) \frac{y}{R}, \quad \text{e cancelando } y \text{ em ambos os lados,} \\ n' \frac{1}{s'} - n \frac{1}{s} &= (n' - n) \frac{1}{R}. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Pela lei da reflexão ( $i = -i'$ ), temos que  $n' = -n$  (Equação 3.40). Substituindo na última relação, temos que:

$$\begin{aligned} n' \frac{1}{s'} + n' \frac{1}{s} &= \frac{2n'}{R} \quad \text{e cancelando } n' \text{ em ambos os lados,} \\ \left( \frac{1}{s'} + \frac{1}{s} \right) &= \frac{2}{R}. \end{aligned} \quad (3.93)$$

A Equação 3.93 é equivalente à Equação 3.12, mas agora para o caso da reflexão. Como já destacado anteriormente, a lei de reflexão segue diretamente da lei de Snell para refração, porém com  $n' = -n$ , como usamos acima. Parece simples, mas esse é um fato muito poderoso, pois para conhecermos as relações para a reflexão, basta que usemos essa lei e substituirmos a relação entre os índices de refração. Por exemplo, para encontrarmos a potência do sistema óptico, temos que:

$$\left( \frac{1}{s'} + \frac{1}{s} \right) = \frac{2}{R} = -\frac{P}{n} = \frac{1}{f'} = \frac{1}{f}, \quad (3.94)$$

e a magnificação:

$$m = \frac{-s'}{s}. \quad (3.95)$$

Considerando que, na Equação 3.94, para os espelhos côncavos,  $P > 0$  e, para os espelhos convexos,  $P < 0$ , onde um espelho é considerado côncavo ou convexo a depender da direção do raio incidente (Schroeder, 1999). Perceba, contudo, que a distância focal do espelho côncavo muda de sinal quando a direção da incidência do raio é revertida. Isso acontece porque um raio incidente reverso na Figura 3.17 muda o sinal de  $s$  e  $s'$ , mas, como o sinal de  $n$  também muda,  $P$  é invariante.

A troca de sinal do índice de refração significa que o raio muda de direção em relação à orientação do eixo óptico. No caso do sinal das distâncias focais, é conveniente tomarmos  $f > 0$  para espelhos côncavos e  $f < 0$  para espelhos convexos, independente da direção da incidência do raio.

### 3.8 Elementos de duas superfícies refletoras

Para entendermos o comportamento de um raio em um sistema composto com mais de uma superfície óptica refletora, vamos usar dois tipos de telescópios. A Figura 3.18 apresenta dois telescópios, um do tipo Cassegrain (Figura 3.18a) e outro do tipo Gregoriano (Figura 3.18b).

Os índices nas figuras referenciam à qual superfície óptica a medida é aplicada. Então, as variáveis com índice 1 são aquelas do espelho primário e os de índice 2 são as do secundário. No texto, usaremos o índice  $i$  para nos referir que cada superfície tem sua variável, com  $i = 1$  ou  $i = 2$ . Como convencionado anteriormente,  $y_i$  é a altura do raio marginal,  $D$  é o diâmetro do telescópio, definido aqui como  $D = 2|y_1|$ ,  $d$  é o diâmetro do secundário e  $d = 2|y_2|$ . O raio de curvatura  $R_i$  é determinado a partir do vértice de cada um dos espelhos. A distância do objeto intermediário (ou seja, localizada no ponto focal do espelho primário) e da imagem é dada por  $s_i$ , e é medida a partir do vértice do espelho secundário. Neste caso,  $f_i$  será a distância focal do espelho e  $t$  será a distância entre o espelho primário e o secundário, com  $t > 0$  (Schroeder, 1999).

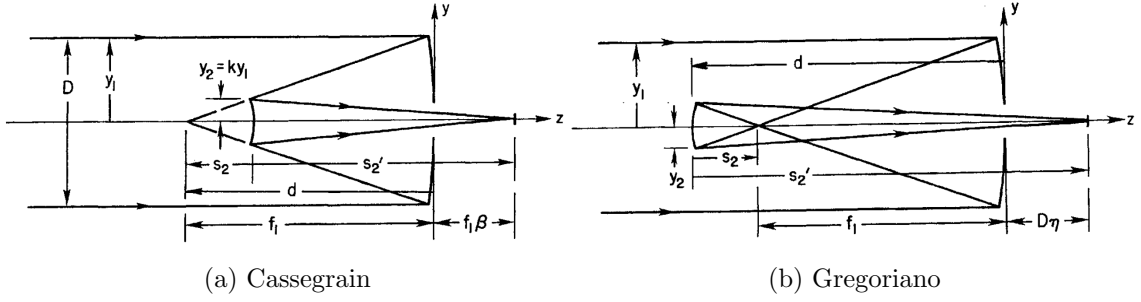


Figura 3.18. Esquema simplificado do traçado de raio em dois telescópios refletor, (3.18a) um Cassegrain, e outro (3.18b) um Gregoriano. Figura: Born and Wolf (2013).

Para descrever outras características importantes de um telescópio refletor, algumas variáveis serão normalizadas, principalmente aquelas que levam em consideração as mesmas medidas, mas para espelhos diferentes. Primeiro, definimos como  $k = y_2/y_1$ , a relação entre as alturas do raio marginal no espelho primário e espelho secundário. A relação entre os raios de curvatura a partir dos respectivos vértices é dada por  $\rho = R_2/R_1$ . A magnificação transversa é  $m = -s'_2/s_2$ . Uma nova quantidade é a distância focal traseira, definida como  $f_1\beta = D\eta$ , e é a distância entre o vértice do espelho primário e o ponto focal final do sistema. Aqui,  $\beta$  e  $\eta$  são a distância focal traseira normalizada em  $f_1$  e  $D$ , respectivamente. A razão focal do espelho primário é dada por  $F_1 = f_1/D$  e a razão focal do sistema é dada por  $F = f/D$ , onde  $f$  é a distância focal efetiva do sistema.

Na Figura 3.18, temos  $\beta > 0$  quando o ponto focal está fora do espaço entre os espelhos primário e secundário. No exemplo desses dois tipos de telescópios, os sinais das variáveis normalizadas podem ser diferentes. Em particular,  $k$  e  $m$  são positivos para o telescópio Cassegrain e negativos para o telescópio gregoriano.

Aplicando a Equação 3.93 para o espelho secundário, podemos encontrar as relações entre os parâmetros obtidos:

$$m = \frac{\rho}{\rho - k}, \quad (3.96)$$

$$\rho = \frac{mk}{m - 1}, \quad (3.97)$$

$$k = \frac{\rho(m - 1)}{m}, \quad (3.98)$$

$$1 + \beta = k(m + 1), \quad (3.99)$$

$$\eta = F_1\beta. \quad (3.100)$$

$$(3.101)$$

Lembrando que as equações acima devem ser aplicadas somente no caso em que consideramos objetos no infinito.

Podemos escrever a potência de um sistema óptico composto por duas superfícies refletoras, reescrevendo a Equação 3.83 da seguinte maneira:

$$p = p_1 \left[ 1 + \frac{p_2}{p_1} - \frac{t}{n} p_2 \right], \quad (3.102)$$

onde as quantidades  $t$  e  $n$  são positivas, independentes da direção de incidência do raio entre as duas superfícies. Pela Equação 3.94, encontramos que  $p_1 = -2/R_1$

e  $p_2 = 2/R_2$  e por isso  $p_2/p_1 = -1/\rho$ . Em termos dos parâmetros normalizados, escrevemos a potência do sistema como:

$$p = p_1 \left[ 1 - \frac{k}{\rho} \right] = \frac{p_1}{m}. \quad (3.103)$$

Por essa causa, a potência do telescópio Cassegrain é positiva e do telescópio gregoriano é negativa. Segundo o sistema de sinais convencional, a distância focal é positiva para o Cassegrain e negativa para o gregoriano. Em termos das distâncias e razões focais, a magnificação de todo o sistema óptico será dada por (Schroeder, 1999):

$$m = \frac{f}{f_1} = \frac{F}{F_1}. \quad (3.104)$$

Por fim, podemos mostrar brevemente as relações de curvatura dos espelhos de um sistema composto por dois espelhos. Definindo a distância focal traseira agora como  $B$ , portanto,  $B = f_1\beta = D\eta$ , teremos as seguintes relações (Smith, 2008):

$$C_1 = \frac{B - f}{2tf}, \quad (3.105)$$

$$C_2 = \frac{B + t - f}{2tf}. \quad (3.106)$$

E também há as relações de conicidades que seguem abaixo (Smith, 2008):

$$k_1 = \frac{(f - B)^3 R^3}{8t^3 f^3}, \quad (3.107)$$

$$k_2 = \frac{(f - t - B)(f + t - B^2) R^3}{8B^3 t^3}. \quad (3.108)$$

### 3.9 Formação de imagem em telescópios refletores

A finalidade de um telescópio refletor é a mesma que a dos telescópios refratores: formar uma imagem real do objeto no seu plano focal. Para isso, a objetiva desse tipo de telescópio é um espelho responsável pela coleta de luz. Portanto, nessa configuração, a objetiva é o chamado espelho primário do telescópio, que é a referência quanto à capacidade do telescópio refletor. O sistema óptico é composto de um segundo espelho, nomeado de espelho secundário, que tem o propósito de levar a luz coletada para o ponto focal do instrumento. Nos dias atuais, os telescópios em uso para pesquisa astronômica são desse tipo.

Para a formação da imagem, os telescópios refletores são compostos por diferentes combinações de tipos de espelhos e são classificados segundo essa combinação. Dois exemplos são os telescópios do tipo Cassegrain e gregoriano, analisados na seção anterior. Os telescópios do tipo gregoriano são compostos por um espelho primário parabolóide côncavo e um espelho secundário elipsoide também côncavo. O tipo Cassegrain é composto por um espelho primário parabolóide côncavo, mas o espelho secundário é um hiperbolóide convexo. Um outro clássico tipo de telescópio refletor são os newtonianos. Eles têm um espelho primário parabolóide côncavo, mas a luz coletada por esse espelho é lançada para o lado do tubo por um espelho plano

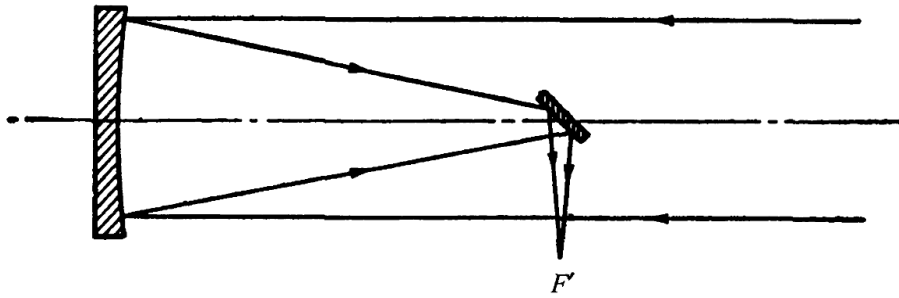


Figura 3.19. Desenho esquemático de um telescópio newtoniano. Figura: [Born and Wolf \(2013\)](#).

rotacionado em  $45^\circ$  (Figura 3.19). Esse foi o primeiro desenho de telescópio refletor cuja realização se concretizou.

A principal vantagem dos telescópios refletores é a completa ausência de aberração cromática. Isso, além da necessidade de uma curvatura nos espelhos bem menor do que a curvatura de lentes em telescópios refratores, permite que eles sejam construídos com uma razão focal menor. Além disso, é possível criar espelhos muito maiores do que lentes, devido a limitações físicas ([Born and Wolf, 2013](#)).

### 3.10 Magnitude limite de um telescópio

A magnitude de um objeto celeste é uma indicação de seu brilho. Trata-se de uma escala logarítmica inversa, ou seja, quanto maior o brilho, menor será seu valor. A ordem da escala de magnitudes tem origem na Grécia Antiga que consideravam as estrelas mais brilhantes com magnitude 1, ou estrelas de primeira grandeza, e as menos brilhantes, com magnitude 6. O formalismo matemático atual foi criado para, de alguma forma, ser preservada a escala historicamente estabelecida. A escala é logarítmica porque a sensibilidade do olho humano é diretamente proporcional ao logaritmo da excitação luminosa. Baseando-se nesse princípio, John Herschel definiu que estrelas de primeira magnitude são cem vezes mais brilhantes do que as de sexta magnitude. Desse modo, o brilho de uma estrela de magnitude um é  $(100)^{1/5} = 2.512$  vezes maior do que uma estrela de magnitude seis ([Malacara et al., 2003](#)).

Quando consideramos a magnitude limite observada usando um detector que de alguma forma colete a luz, essa não dependerá somente do diâmetro do telescópio, mas também do limite de exposição empregado. Por exemplo, nas antigas placas fotográficas, considerando uma emulsão média, a relação empírica que dita a magnitude limite é  $m_f = 4 + 5 \log D + 2.15 \log t$ , onde  $D$  é o diâmetro da abertura do telescópio e  $t$  é o tempo de exposição. Porém, o estado da arte quando o assunto são detectores astronômicos são os CCDs.

Como destacado no Capítulo 2, o dispositivo de carga acoplada, CCD, converte carga elétrica em unidades analógico-digitais (ADU). Vimos que o desempenho do sistema é marcado pela razão sinal-ruído (SNR), composta, além do sinal da fonte, pelo ruído de leitura, ruído da corrente de escuro  $\langle n_d \rangle$  e ruído de fundo de céu  $\langle n_b \rangle$ . Relembrando da Equação 2.7, fica evidente que um primeiro limitador do limite de tempo de exposição e, portanto, da magnitude limite de um telescópio, é dado pela quantidade  $\langle n_d \rangle$ , pois quanto maior for o tempo de exposição, maiores serão as

contagens oriundas das contagens devido ao dispositivo, como a corrente de escuro e ruído de leitura, limitando o SNR. Outro fator importante é o nível de  $\langle n_b \rangle$  em relação à  $\langle n_s \rangle$ . Nesse caso, se as contagens de fundo de céu forem muito grandes em relação às contagens da fonte, mesmo longos tempos de exposição não resultarão em níveis razoáveis de SNR.

Usando todas essas definições para entendermos limitadores da magnitude considerando observações com detectores CCD, vamos usar a expressão para o sinal de uma estrela com magnitude aparente  $m$  como (Schroeder, 1999):

$$S = N\tau \frac{\pi}{4} (1 - \epsilon^2) D^2 \Delta\lambda 10^{-0.4m} \quad (3.109)$$

$$= 0.7N\tau D^2 \Delta\lambda 10^{-0.4m}. \quad (3.110)$$

onde a quantidade  $\pi(1 - \epsilon^2)/4 = 0.7$ , assumindo  $\epsilon$  típico para um telescópio Cassegrain,  $D$  é o diâmetro do telescópio,  $\tau$  é o fator de transmitância da atmosfera e  $\Delta\lambda$  a banda de comprimento de onda. O sinal de fundo de céu será definido como (Schroeder, 1999):

$$B = 0.7N\tau D^2 \Delta\lambda' 10^{-0.4m'} \phi\phi', \quad (3.111)$$

onde  $\Delta\lambda'$  é a banda de comprimento de onda do detector,  $m'$  é a magnitude do fundo de céu por segundo de arco quadrado e  $\phi\phi'$  é a área do detector em segundo de arco quadrado projetado no céu. Considerando a eficiência quântica  $Q$  e o tempo de exposição  $t$ , podemos usar os valores para escrever a Equação 2.7 (Schroeder, 1999):

$$SNR = \frac{\kappa S Q t}{\sqrt{(\kappa S + B) Q t + C t + R^2}} = \frac{\kappa S Q t}{\sqrt{\kappa S Q t + \langle n_u \rangle}}, \quad (3.112)$$

onde  $C$  e  $R$  são as contagens de fundo de céu por segundo e o rms (*root mean square*) do ruído de leitura. Aqui é introduzida a variável  $\langle n_u \rangle$  como a soma de todas as contribuições de ruído. Além disso,  $\kappa$  leva em conta a transmitância do sistema.

Finalmente, podemos resolver a Equação 3.112 para a magnitude  $m$ , usando a Equação 3.110, substituindo  $S$ . Com isso, obtemos uma expressão que deve ser levada em consideração para estimativas de limite de magnitude, SNR e tempo de exposição (Schroeder, 1999):

$$m = -2.5 \log \left[ \frac{(SNR)^2}{1.4N\kappa\tau\Delta\lambda D^2 Q t} \left( 1 + \left( 1 + \frac{4\langle n_u \rangle}{SNR^2} \right)^{1/2} \right) \right]. \quad (3.113)$$

À primeira vista, a Equação 3.113 pode sugerir que é possível atingir qualquer magnitude, desde que se aumente o tempo de exposição e a SNR (relação sinal-ruído) o suficiente para detectar objetos extremamente tênues. No entanto, é crucial considerar que observações astronômicas no óptico são limitadas pela duração da noite (período escuro do dia), além da presença de objetos com diferentes magnitudes em uma mesma imagem, presença de raios cósmicos e do limite de saturação dos dispositivos CCD. Ao observar objetos muito fracos, é necessário cuidado para que os objetos mais brilhantes no campo não atinjam o limite de saturação, o que poderia comprometer a imagem e danificar a eletrônica do equipamento. Alguns grandes levantamentos astronômicos limitam o tempo de exposição — e, conseqüentemente, a profundidade da magnitude alcançada — com base na precisão da medida da magnitude. Um exemplo disso é o *Dark Energy Survey* (DES) (Dark Energy Survey

Collaboration: Fermilab and Flaughner, 2005), que adota como critério de magnitude limite aquela em que a medida da magnitude de uma estrela apresenta uma incerteza de 0,1 mag (Morganson et al., 2018).

### 3.11 Tipos de telescópios e aberrações ópticas

Por fim, vamos dar uma breve descrição sobre alguns tipos de telescópios. Eles são classificados segundo o tipo de objetiva responsável pela coleta de luz. As superfícies são determinadas segundo a cônica de revolução a que pertence. As cônicas são esférica, parabolóide, hiperbolóide e elipsoide. A classificação segue a constante de conicidade da referida seção cônica.

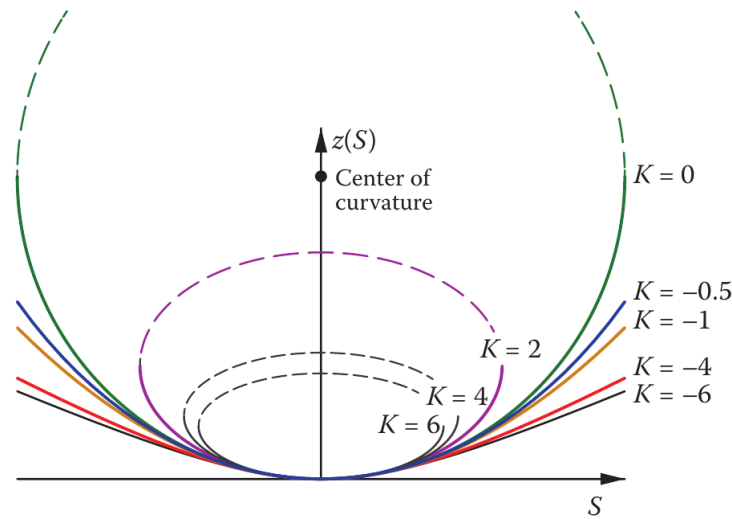


Figura 3.20. Forma de algumas superfícies cônicas. Malacara et al. (2003).

Na Figura 3.20, vemos alguns exemplos das superfícies cônicas, com suas constantes de conicidade. A descrição de cada seção cônica, junto com sua constante de conicidade, está na Tabela 3.1. A excentricidade  $e$  caracteriza todas as seções cônicas e a constante de conicidade é  $K = -e^2$ .

Tipo de cônica	Constante de conicidade
Hiperbolóide	$K < -1$
Parabolóide	$K = -1$
Elipsóide	$-1 < K < 0$
Esferóide	$K = 0$
Esferóide oblato	$K > 0$

Tabela 3.1. Constantes de conicidade para os tipos de superfícies cônicas.

A função sagita é uma importante descrição das superfícies ópticas. Nela temos  $r$  como o raio de curvatura e  $S = x^2 + y^2$  como o semi-diâmetro:

$$Z = \frac{cS^2}{1 + \sqrt{1 - c^2S^2}}, \quad (3.114)$$

onde colocamos em termos da curvatura  $c = 1/r$  dela. Caso coloquemos em termos da constante de conicidade, a representação será:

$$Z = \frac{cS^2}{1 + \sqrt{1 - (K + 1)c^2S^2}}. \quad (3.115)$$

As aberrações ópticas têm uma grande variedade de tipos. Elas estão envolvidas com desalinhamentos nos componentes ópticos dos telescópios, asfericidade no espelho e tipos de desenhos ópticos. Elas são parte importante dos estudos da instrumentação astronômica. Algumas delas estarão demonstradas na Seção 4.3, a partir das simulações ópticas.

### 3.11.1 Telescópios refratores

A objetiva de um telescópio refrator básico é uma lente. As aberrações mais conhecidas desse tipo de telescópio são a aberração cromática e a aberração esférica. No decorrer de sua história, seu desenho óptico avançou muito no sentido de manter essas aberrações em um nível aceitável.

A aberração cromática acontece porque o índice de refração de uma lente tem efeitos diferentes para os comprimentos de onda diversos que compõem a luz branca. Acontece que o desvio causado pela lente faz com que o foco não seja o mesmo para diferentes  $\lambda$ . Na Figura 3.21, vemos a diferença no desvio no traçado de dois raios de diferentes comprimentos de onda. O raio na cor turquesa tem comprimento de onda de 500 nm e o raio na cor violeta tem 400 nm.

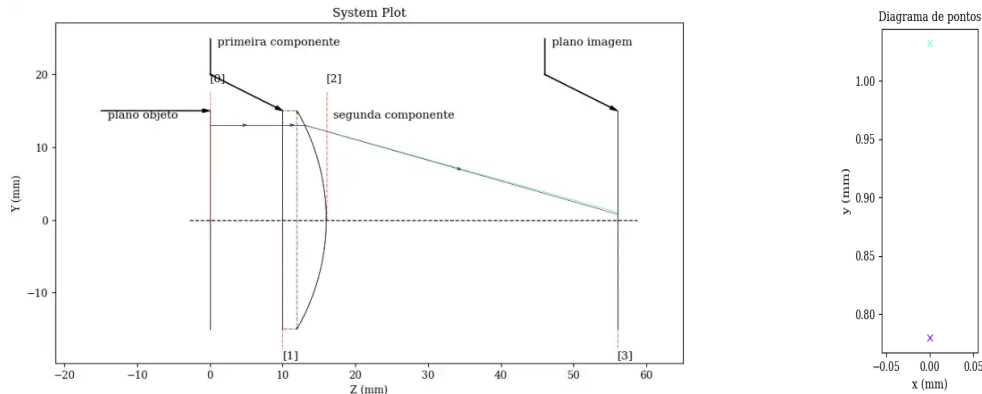


Figura 3.21. Diferentes raios em um telescópio refrator gerado a partir de uma simulação óptica. À esquerda, temos o desenho óptico de um telescópio refrator. Na direita, vemos um diagrama de pontos de raios de diferentes cores gerados a partir de uma simulação óptica.

Algumas outras aberrações, tais como a curvatura de campo, também estão presentes nos telescópios do tipo refrator, principalmente quando falamos dos com lentes simples (Smith, 2008). Porém, qualquer instrumento do tipo dedicado à pesquisa astronômica não trabalhava com lentes simples e sim com composição de lentes. As lentes compostas são aquelas em que duas peças são montadas juntas para minimizar aberrações ópticas. Os materiais mais usados na confecção das lentes são os vidros *crown*, um vidro de borossilicato, muito comum em lentes BK-7, e lentes *flint*, compostas de vidro *flint* com uma maior quantidade de óxido de chumbo.

Quando compostas as lentes formam um dobreto acromático, constituído de dois elementos, um vidro *crown* devido à sua dispersão relativamente pequena e, o outro elemento, um vidro *flint*, graças à sua maior dispersão e maior índice de refração (Smith, 2008).

### 3.11.2 Telescópio gregoriano

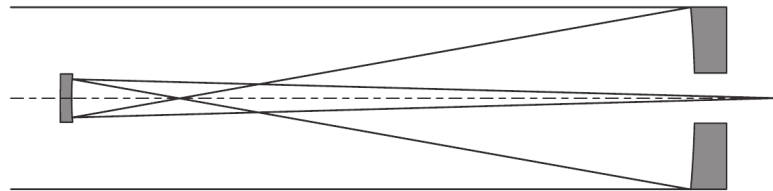


Figura 3.22. Telescópio gregoriano. Figura: Malacara et al. (2003).

O telescópio gregoriano é do tipo refletor. É composto por um espelho primário côncavo, na maior parte dos casos, parabolóide, e um espelho secundário também côncavo elipsoide. A maior vantagem desse tipo de telescópio está na sua construção do espelho secundário. Sua maior desvantagem está no fato de que, dada a distância focal do espelho primário, o telescópio precisa ser mais longo do que outros tipos (Malacara et al., 2003).

### 3.11.3 Telescópio newtoniano

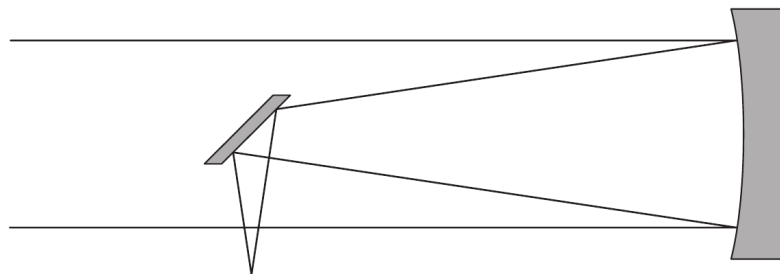


Figura 3.23. Telescópio newtoniano. Figura: Malacara et al. (2003).

No telescópio newtoniano, o espelho primário é um parabolóide e o secundário é um espelho plano, rotado em  $45^\circ$  para desviar a luz para o lado do telescópio.

Considerando que a luz do objeto venha do infinito, a aberração esférica não aparece nesse tipo de instrumento. Também não é encontrada a coma, com a condição de que a superfície principal esteja centrada no foco (Malacara et al., 2003). O astigmatismo é igual àquele em superfícies esféricas no caso em que a abertura (ou diafragma) coincide com o espelho primário. Caso esse tipo de telescópio tenha um espelho esférico como primário, a aberração esférica é eliminada somente se a distância focal for muito maior em comparação com o diâmetro dele, com uma razão focal maior que 10 (Malacara et al., 2003).

### 3.11.4 Telescópio Cassegrain

O telescópio do tipo Cassegrain é composto por dois espelhos. O espelho primário é um parabolóide côncavo e o espelho secundário é um hiperbolóide convexo. Uma característica que marca esse tipo de telescópio é que o foco do sistema é colocado atrás do espelho primário. Nesse caso, o espelho primário tem um buraco centrado no seu vértice que permite a passagem da luz. O desenho da configuração descrita leva o nome de foco Cassegrain e está presente em outros tipos de telescópios.

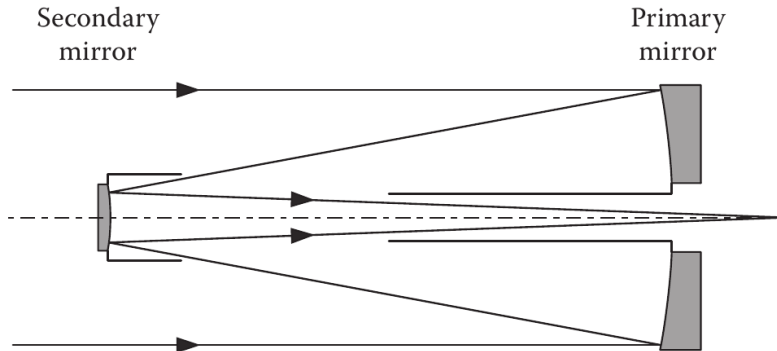


Figura 3.24. Telescópio Cassegrain. Figura: [Malacara et al. \(2003\)](#).

O fundamento de não usar espelhos esféricos nesse tipo de telescópio é justamente eliminar as aberrações esféricas. Portanto, podemos considerar esse sistema óptico como livre desse tipo de aberração. As principais aberrações ópticas presentes nesse tipo de telescópio são a coma e o astigmatismo. A coma presente em sistemas com espelho primário parabolóide é inversamente proporcional à sua distância focal efetiva. Por esse motivo, a superfície principal dos telescópios Cassegrain tem distância focal igual à distância focal efetiva do sistema. Quanto ao astigmatismo, seu valor leva em consideração a razão entre o raio do espelho primário e sua distância focal,  $S/f_1$ . Considerando que a magnificação seja escrita como  $m_s = F/f_1$ , onde  $F$  é a distância focal efetiva e  $f_1$  seja a distância focal do espelho primário, se  $S/f_1$  é muito pequeno comparado com  $m_s$ , o astigmatismo em um telescópio Cassegrain é igual ao esperado para um espelho parabolóide multiplicado pela magnificação do espelho secundário. A curvatura de campo, ou curvatura de Petzval, assim como o astigmatismo, produz uma curvatura e aumenta com a magnificação do espelho secundário. Porém, com o aumento da magnificação do espelho secundário, o tamanho do campo diminui, compensando o aumento da curvatura. As distorções de campo são extremamente pequenas, na ordem de alguns centésimos de segundo de arco ([Malacara et al., 2003](#)).

### 3.11.5 Telescópios Ritchey-Chrétien

Os telescópios do tipo Ritchey-Chrétien são os mais usados na pesquisa astronômica atualmente. A combinação de espelhos desse sistema conta com um espelho primário hiperbolóide e um espelho secundário também hiperbolóide.

Dois exemplos são os telescópios do Observatório do Pico dos Dias, o Perkin-Elmer de 1.6 m (Figura 3.26a) e o Boller-Chivens de 0.60 m (Figura 3.26b), que têm o desenho óptico do tipo Ritchey-Chrétien e são parte importante das investigações

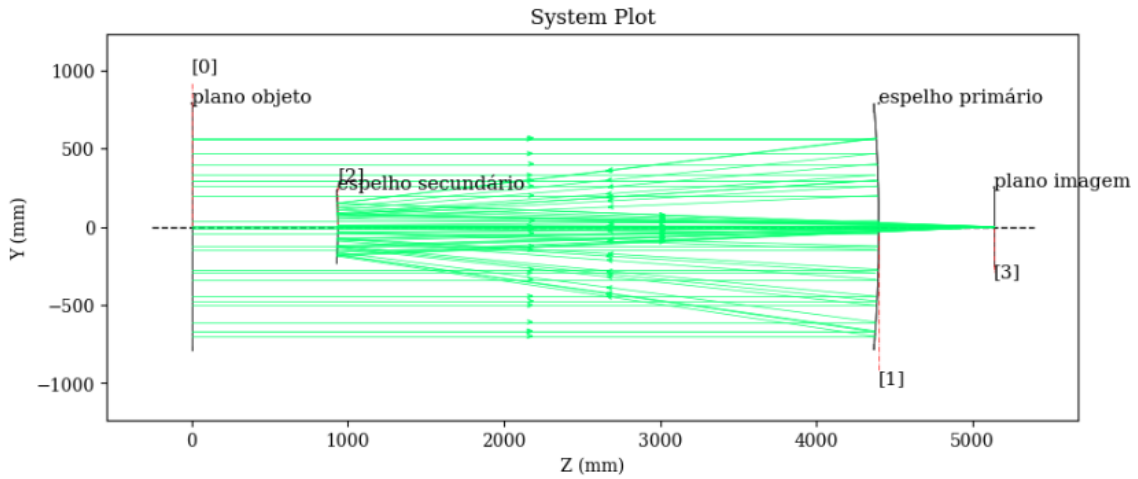
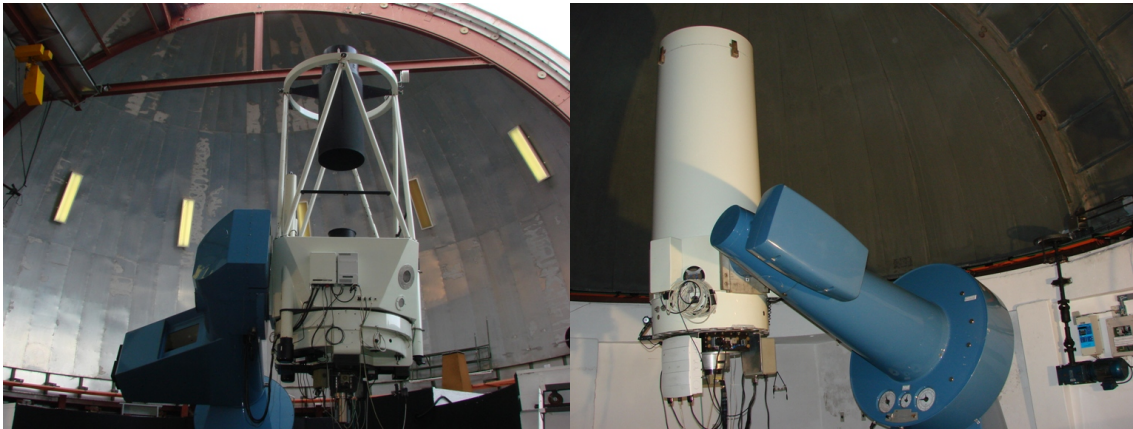


Figura 3.25. Telescópio PE 1.60m do Observatório do Pico dos Dias (OPD/LNA). O telescópio é do tipo Ritchey-Chrétien.

dessa dissertação.



(a) Perkin-Elmer 1.6 m

(b) Boller-Chivens 0.60 m

Figura 3.26. Fotos dos telescópios brasileiros no Observatório do Pico dos Dias. O desenho óptico de ambos é do tipo Ritchey-Chrétien. Fotos: [lna \(2024\)](#).

Qualquer desenho do tipo Ritchey-Chrétien parte do princípio que seja aplanático. Os sistemas ópticos aplanáticos são aqueles em que as aberrações esféricas e a coma são eliminadas. As constantes ópticas de um sistema desse tipo são ([Schroeder, 1999](#)):

$$K_1 = \frac{2(1 + \beta)}{m^2(\beta - m)} - 1, \quad (3.116)$$

$$K_2 = \frac{2m(m + 1)}{(\beta - m)(m - 1)^3} - \left(\frac{m + 1}{m - 1}\right)^2, \quad (3.117)$$

onde relembramos que  $\beta$  é a distância focal traseira em termos das unidades da distância focal e  $m = f/f_1$ , ou seja, a razão entre a distância focal efetiva  $f$  e a distância focal do espelho primário  $f_1$ . Algumas aberrações que aparecem nesse

tipo de desenho óptico são o astigmatismo, as curvaturas de campo e as distorções de campo.

### 3.11.6 Telescópios catadióptricos

Os telescópios catadióptricos são aqueles compostos por lentes corretoras, mas com a parte principal do sistema formada por espelhos. Então, são sistemas híbridos. Dois exemplos conhecidos são o desenho Schmidt-Cassegrain e o Maksutov.

O sistema Schmidt-Cassegrain é uma tentativa de combinar um campo grande e uniforme com a formação de uma imagem por um espelho esférico, livre de aberrações esféricas. Essas aberrações são corrigidas com uma placa corretora refratora colocada na entrada do tubo. Desse modo, o caráter concêntrico de uma esfera é preservado em grande medida, enquanto as aberrações esféricas são completamente eliminadas, pelo menos para um comprimento de onda (Smith, 2008). A Figura 3.27 mostra um esboço do sistema Schmidt-Cassegrain.

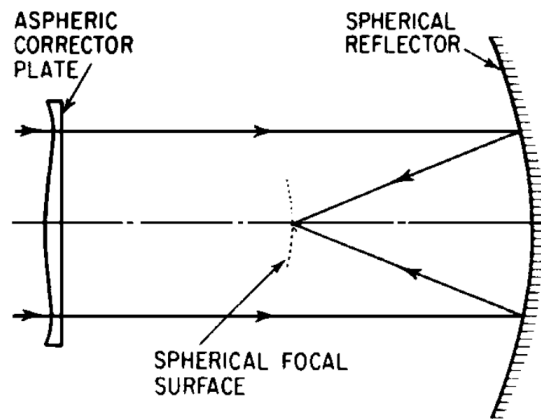


Figura 3.27. Esquema do sistema Schmidt-Cassegrain. Figura: Smith (2008).

Algumas aberrações permanecem nesse sistema. Uma delas é um tipo de aberração esférica quando há uma variação nos comprimentos de onda e certo grau de astigmatismo esférico e oblíquo. Isso resulta do fato de que raios com diferentes ângulos com o eixo óptico passam pela placa corretora. A placa age como um prisma refrator delgado. Para raios não oblíquos, o desvio causado pelo prisma é mínimo. Mas há uma variação no desvio com o aumento do ângulo de incidência. Como a ação é diferente no plano tangencial e no plano sagital, o resultado é o astigmatismo (Smith, 2008).

O sistema Maksutov tem um espelho primário esférico. A superfície corretora é um arranjo de menisco concêntrico colocado na entrada do tubo. Por menisco concêntrico entende-se uma lente em que as duas faces são esféricas e os centros de curvaturas das duas faces são coincidentes ou muito próximos disso (Smith, 1986). Por causa da coincidência dos centros de curvatura no desenho óptico, coma e astigmatismo são nulos.

## Capítulo 4

# Simulações ópticas

Simulações ópticas são um conjunto de técnicas e métodos computacionais utilizados para modelar e analisar o comportamento da luz em diferentes sistemas ópticos. Baseadas em uma robusta teoria que envolve desde óptica até materiais, elas permitem prever como a luz interage com lentes, espelhos, fibras ópticas e outros componentes, sem a necessidade de construir um experimento físico. As simulações ópticas são essenciais para o desenho, otimização e validação de sistemas ópticos em áreas como telecomunicações (Gay et al., 1995), imageamento médico (Lee et al., 2023) e fotônica (Chen et al., 2009, Lowery and Gurney, 1998).

O uso deste conjunto de métodos computacionais se justifica pela redução de custo, exploração de ideias, previsibilidade de desempenho de um sistema óptico e análise de tolerâncias. No quesito de redução de custo, aplicar simulações ópticas a um projeto evita gastos com materiais e protótipos. No contexto da Astronomia, em que projetos cada vez mais ambiciosos são empreendidos, a redução de custos em testes ópticos pode significar economia e aplicação em tecnologias observacionais mais avançadas. Com as simulações, também é possível testar rapidamente diferentes configurações e desenhos sem restrições físicas. Isso permite que novas ideias possam ser aplicadas sem a intervenção direta no telescópio ou em qualquer instrumento envolvido nas observações. Além disso, simulações ópticas permitem prever o comportamento do instrumento em diferentes condições, como variações de temperatura, alinhamento e materiais. Por fim, com elas podemos refinar os instrumentos envolvidos em uma observação, entendendo pequenos erros de fabricação ou como a construção e instalação deles podem afetá-los.

### 4.1 Conceitos de óptica geométrica

A óptica geométrica está relacionada com estudos da refração e reflexão da luz na interação com superfícies refratoras ou refletoras, respectivamente. Para esse estudo, é definido o *raio*, cujo conceito está associado à sua direção de propagação, comprimento de onda e energia associada. O rastreamento ou traçado do raio é baseado no princípio de Fermat. Este importante princípio descreve o comportamento da luz, onde demonstra a influência de vários elementos, tais como as propriedades do raio e da superfície. Com respeito aos raios, as variáveis envolvidas são a posição e os cossenos diretores, relacionados a sua direção de propagação (ver Seção 4.2.4). O que define geometricamente uma superfície é seu vetor normal no ponto de intersecção com o raio, diferente a depender de sua topografia. A interação do

raio com a superfície modifica seu vetor velocidade, sua direção e sua magnitude (Herrera Vazquez and Guerrero, 2023).

#### 4.1.1 Tipos de raios

Como discutido na Seção 3.2, existem três tipos de raios (Figura 3.10): os meridionais, os paraxiais e os raios oblíquos (Herrera Vazquez and Guerrero, 2023). Os raios meridionais são aqueles que estão em um plano comum ao eixo óptico, conhecido como plano meridional. Um raio paraxial é aquele que tem um pequeno ângulo em relação ao eixo óptico e está no plano meridional. Quando somente consideramos os raios paraxiais, o processo é chamado de primeira ordem ou óptica gaussiana. Por fim, raios oblíquos são os que não estão no plano meridional e, portanto, nunca interceptam o eixo de uma superfície óptica (Malacara et al., 2003).

A região paraxial é aquela dos raios paraxiais. Os cálculos que envolvem essa região são muito úteis, pois representam uma primeira aproximação importante para diversos desenhos ópticos (Herrera Vazquez and Guerrero, 2023), ainda mais considerando o caso de instrumentação astronômica, onde os raios são considerados como vindo do infinito, devido às grandes distâncias. Sua utilidade passa pela estimativa de diâmetro de elementos ópticos exigidos em um sistema, além de estimar a qualidade da formação da imagem.

O traçado de raios envolve a projeção de um vetor que define o raio de uma fonte que produz a interação com as sucessivas superfícies. Uma simulação óptica, portanto, deve incluir aspectos do sistema, tais como obstruções mecânicas, efeitos térmicos na montagem, desalinhamento de superfícies no seu desenho óptico, entre outros.

## 4.2 Kraken Optical Simulator - KrakenOS

O simulador óptico usado no desenvolvimento do nosso projeto de pesquisa é o KrakenOS (Kraken Optical Simulator) (Herrera et al., 2022b). Esta é uma biblioteca desenvolvida em linguagem Python de código aberto, escrita sob o paradigma de programação orientada a objetos, planejada para o rastreamento de raios sequenciais e não sequenciais através de elementos ópticos arbitrários. Com ela, é possível definir os elementos ópticos do sistema envolvido, determinando sua posição em relação a um sistema coordenado, além de manipulá-los, segundo as necessidades. Para os elementos ópticos, podem ser definidas suas características físicas e materiais. Devido à sua natureza de código aberto, o KrakenOS permite que o usuário implemente novas funções e bibliotecas de materiais, segundo as necessidades individuais de cada projeto. Além disso, apresenta vantagens em comparação a outros simuladores ópticos que são dispendiosos. Neste quesito, o KrakenOS é gratuito e apresenta níveis de precisão comparáveis àqueles dos simuladores ópticos comerciais. Neste capítulo, apresentaremos brevemente o funcionamento do KrakenOS, explorando suas funcionalidades e manipulando elementos ópticos de um sistema, como exemplo. A biblioteca está disponível no GitHub, [neste link](#).

### 4.2.1 Sistema de coordenadas e convenção de sinais

O sistema de coordenadas no qual é seguido pelo KrakenOS é o cartesiano, com o eixo óptico sobre o eixo  $z$ . As distâncias entre as superfícies  $T_h$  são positivas quando estão sobre o eixo  $z$  da esquerda para a direita. A origem do sistema de coordenadas é o vértice da primeira superfície e o diâmetro das superfícies é sempre positivo. Os raios de curvatura são positivos quando estão à direita do centro, e negativos, quando à esquerda. Essa convenção pode ser vista na Figura 4.1. Ao aplicarmos rotações em torno de um dado eixo, o sentido positivo para elas é o sentido horário. As unidades de comprimento serão sempre em milímetros, a menos que haja uma indicação diferente.

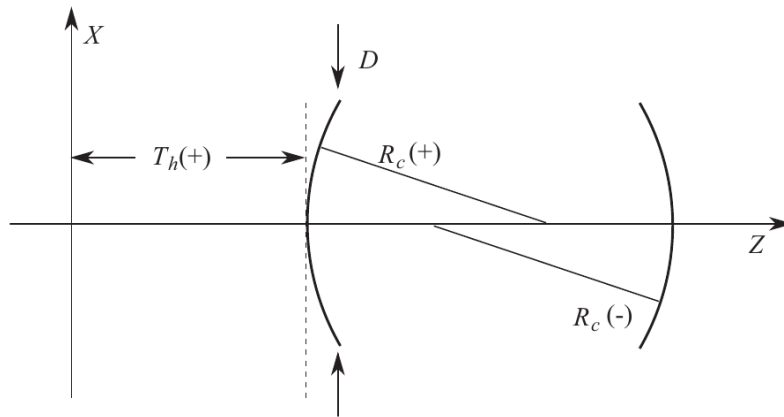


Figura 4.1. Convenção de sinais no KrakenOS. Figura adaptada de [Herrera Vazquez and Guerrero \(2023\)](#).

### 4.2.2 Workflow com o KrakenOS

Para trabalhar com o KrakenOS, são exigidos conhecimentos básicos de Python e programação orientada a objetos, desde que cada superfície é tratada como um objeto individual. De modo básico, o *workflow* é o seguinte ([Herrera Vazquez and Guerrero, 2023](#)):

1. Definição das superfícies;
2. Carregamento do catálogo de materiais;
3. Gerar o sistema;
4. Definir a pupila do sistema;
5. Gerar os raios do sistema;
6. Criar o *container* de armazenamento de raios;
7. Traçar os raios através do sistema;
8. Armazenamento dos raios no *container*;
9. Determinar os raios para realizar os cálculos;
10. Gráfico do sistema e o resultado na superfície desejada.

### 4.2.3 Exemplo da criação de um sistema óptico

Para demonstrar a maneira simples de trabalhar com o KrakenOS, vamos desenvolver aqui o exemplo baseado na Figura 4.2. A versão do software do desenvolvimento deste trabalho é a 1.0.0.21.

Um preâmbulo sobre funções da biblioteca é necessário aqui. Quatro classes são essenciais para a criação de um sistema óptico com o KrakenOS: *surf()*, *Setup()*, *system()* e *raykeeper()*. Com a classe *surf()*, definimos toda a informação relevante da superfície óptica. Desse modo, tamanho, forma, material, orientação e separação da superfície seguinte no sistema são variáveis desta classe. A classe *Setup()* carrega o catálogo de materiais definidos na classe anterior. Para definirmos um sistema e suas características, usamos a classe *system()*. Nela, entram as superfícies pertencentes ao sistema, as configurações de materiais, o traçado de raios, além das coordenadas destes na origem do sistema óptico e os cossenos diretores, responsáveis por sua direção. Por fim, a classe *raykeeper()* é usada como *container* que armazena todos os raios do sistema.

Após instalar a biblioteca (*pip install KrakenOS*), importamos a biblioteca, ao modo como feito em Python (*import KrakenOS*) e definimos cada uma das superfícies do sistema óptico que pretendemos conceber. Como é orientada a objetos, cada superfície é uma variável. Computacionalmente falando, os raios partem de uma superfície chamada "plano objeto". Vamos então defini-lo:

```
1 # primeira superfície - plano objeto
2 p_obj = KrakenOS.surf(Diameter=30, Thickness=0, Name='
   plano_objeto', Nm_Pos=[10, 10])
```

Instanciamos na variável *p\_obj* as variáveis que representam as características físicas desta superfície, onde *Diameter* representa o diâmetro da superfície, *Thickness* representa a separação entre a superfície e a seguinte, *Name* é uma variável opcional, na qual podemos indicar o nome da superfície na análise gráfica e *Nm\_Pos* a posição em que será escrito o nome da superfície.

Pela mesma classe, definimos a segunda superfície do sistema. Ela será a superfície convexa na Figura 4.2. Algumas características suas estarão definidas, tais como os raios de curvatura (*Rc*) e o material da lente (*Glass*). Definimos da seguinte maneira:

```
1 # segunda superfície - lente convexa
2 f1 = KrakenOS.surf(Diameter=30, Thickness=12, Rc=30, Glass='
   BK7', Name='lente_convexa', Nm_Pos=[10, -20
3 ])
```

A terceira superfície será definida da mesma forma, mas agora faremos a lente côncava da Figura 4.2. Perceba agora que, seguindo a convenção de sinais do KrakenOS, o raio de curvatura tem um valor negativo. O código fica da maneira que segue:

```
1 # terceira superfície - lente côncava
2 f2 = kos.surf(Diameter=30, Thickness=12, Rc=-30, Glass='BK7',
   Name='lente_convexa', Nm_Pos=[10, 10])
```

Por fim, determinamos a última superfície do sistema óptico, o plano imagem. Essa superfície é a final de todo sistema óptico modelado computacionalmente e é colocada no plano focal dele. O exemplo de sua definição está a seguir:

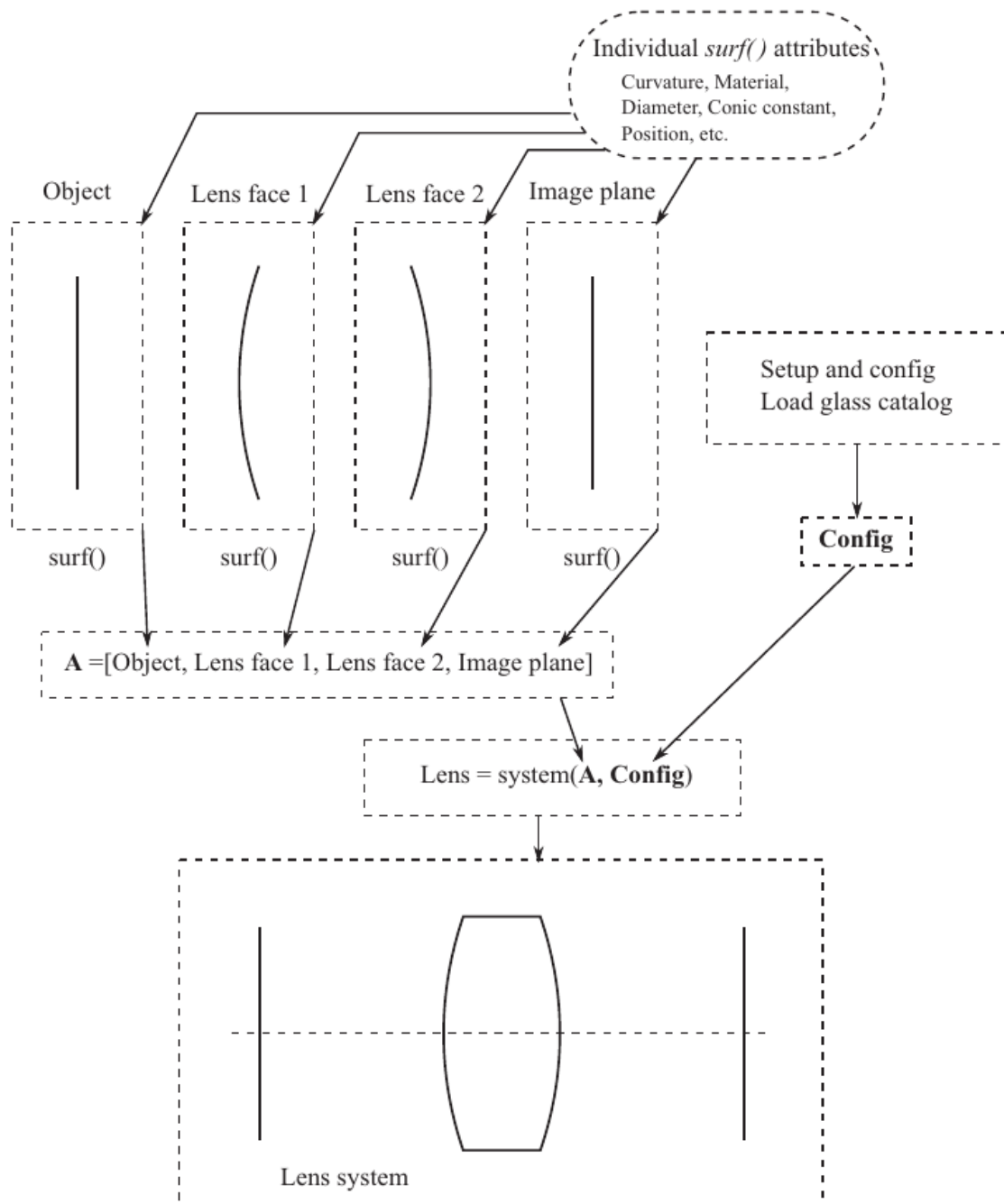


Figura 4.2. Exemplo de criação de um sistema óptico. Figura adaptada de [Herrera Vazquez and Guerrero \(2023\)](#).

---

```

1 # última superfície - plano imagem
2 p_ima = kos.surf(Diameter=30,Thickness=0,Name='
   plano_imagem',Nm_Pos=[5,5])

```

Agora, vamos para as configurações do sistema. Primeiro, guardamos todas as variáveis definidas como superfície em uma lista, e carregamos as configurações de materiais em uma variável. Depois, definimos o sistema. No final, definimos o *container* dos raios. Neste exemplo, ele estará vazio, porém, em um exemplo subsequente, introduziremos o raio definido.

---

```

1 # lista de superfícies
2 lista = [p_obj,f1,f2,p_ima]
3
4 # catálogo de materiais
5 catalog = kos.Setup()
6
7 # configura o sistema
8 lens = kos.system(lista,catalog)
9
10 # definição de raios
11 rays = kos.raykeeper(lens)

```

É importante a ordem das superfícies que estão colocadas na lista, pois é nessa ordem que será determinado o sistema óptico. Algo para manter a atenção também é que, na variável *rays*, é definido o sistema em que os raios passarão. A análise gráfica do sistema pode ser vista, em duas dimensões, com a função *display2d()*, da seguinte forma:

---

```

1 # plote do sistema
2 KrakenOS.display2d(SYSTEM=lens, RAYS=rays, view=0)

```

E o resultado do procedimento todo pode ser visto na Figura 4.3:

#### 4.2.4 Definição de raios

Os raios de um sistema óptico são definidos por dois pontos com coordenadas  $(x_0, y_0, z_0)$  e  $(x_1, y_1, z_1)$  no espaço e por seus cossenos diretores  $(l, m, n)$ . Os últimos definem a direção do vetor de traçado do raio. Eles são uma parametrização das coordenadas espaciais, dados pelos ângulos entre o vetor que representa o traçado do raio e o eixo coordenado de referência (Figura 4.4), segundo as seguintes equações:

$$l = \cos(\alpha) = \frac{x_1 - x_0}{r}, \quad (4.1)$$

$$m = \cos(\beta) = \frac{y_1 - y_0}{r}, \quad (4.2)$$

$$n = \cos(\gamma) = \frac{z_1 - z_0}{r}, \quad (4.3)$$

onde  $r = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$ .

Para definirmos os raios de um sistema no KrakenOS, definimos suas coordenadas e seus cossenos diretores, seu comprimento de onda (em  $\mu\text{m}$ ) e depois usamos a

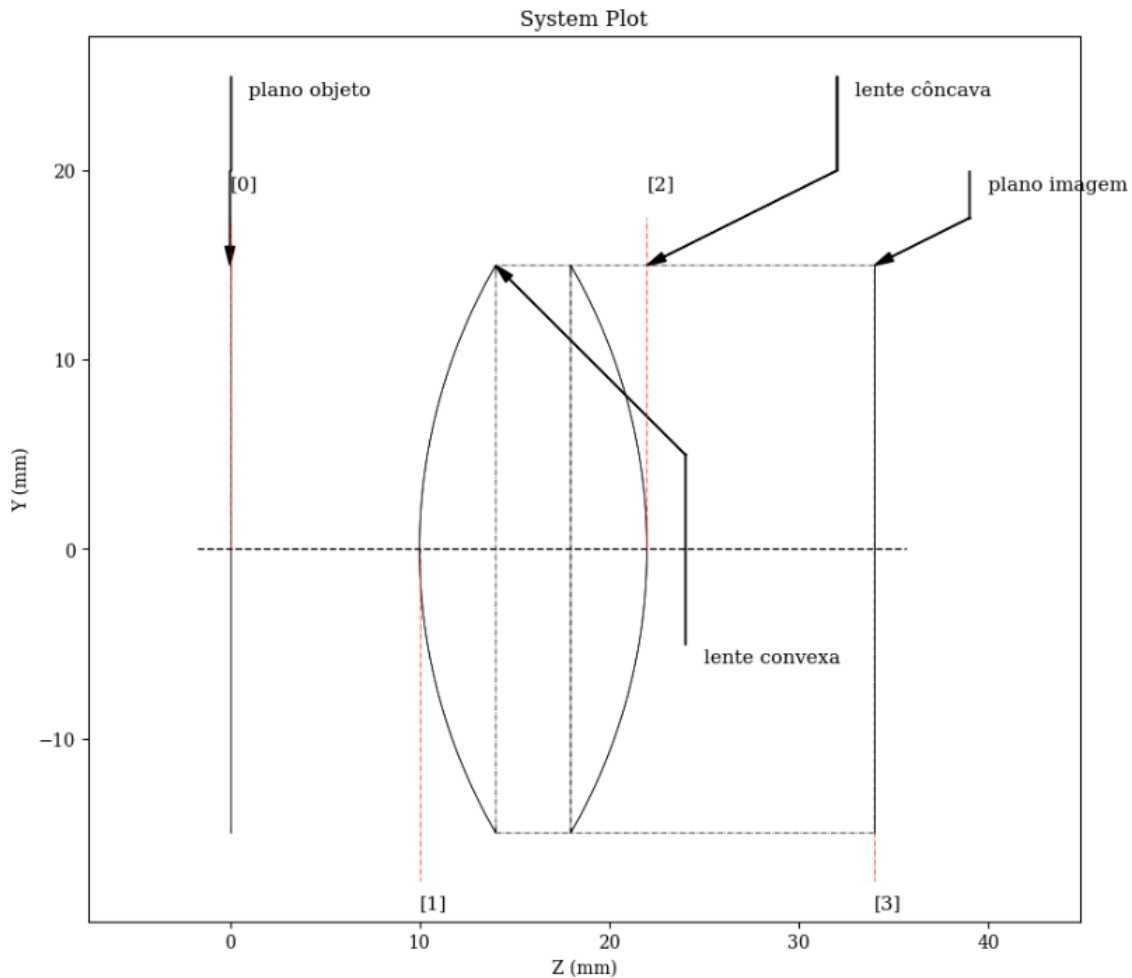


Figura 4.3. Exemplo de criação de uma lente simples.

função *Trace()* para o traçado do raio. Por fim, guardamos o raio usando o método *push()* para salvar no *container* dos raios. Definimos o sistema todo:

```

1 p_obj = KrakenOS.surf(Diameter=30,Thickness=10,Name='
   plano_objeto',Nm_Pos=(0,10))
2 f1 = KrakenOS.surf(Diameter=30,Thickness=6,Glass='BK7',
   Name='BK7',Nm_Pos=(0,10))
3 f2 = KrakenOS.surf(Diameter=30,Rc=-30,Thickness=40,Glass=
   'BK7',Name='lente_côncava',Nm_Pos=(0,10))
4 p_ima = KrakenOS.surf(Diameter=30,Thickness=0,Name='
   plano_imagem',Nm_Pos=(0,10))
5
6 # lista com todas as superfícies
7 lista = [p_obj, f1, f2, p_ima]
8 # carrega os catálogo de materiais
9 catalog = kos.Setup()
10 # definição do sistema
11 lens = kos.system(surf, catalog)
12 # raios traçados pelo sistema

```

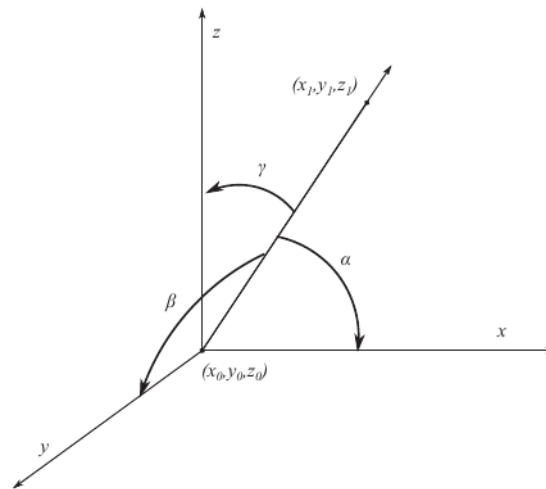


Figura 4.4. Representação dos cossenos diretores. Figura adaptada de [Herrera Vazquez and Guerrero \(2023\)](#).

```

13 rays = kos.raykeeper(lens)
14
15 # coordenadas
16 pS = [0,13,0]
17 # cossenos diretores
18 dC = [0,0,1]
19 # comprimento de onda
20 wV = 0.4
21 # traçado do raio
22 lens.Trace(pS=pS,dC=dC,WaveLength=wV)
23 # armazenamento do raio
24 rays.push()
25
26 # análise gráfica do sistema montado:
27 kos.display2d(lens, rays, view=0,arrow=1,figsize=(10,9))

```

O resultado gráfico pode ser visto na Figura 4.5.

#### 4.2.5 Pupila do sistema

No último exemplo da seção anterior, vimos a definição de um único raio em que suas coordenadas e cossenos diretores foram introduzidos pelo usuário. Uma maneira mais simples é determinarmos um conjunto de coordenadas e cossenos diretores, garantindo que haja uma quantidade de raios que permita uma análise mais profunda do sistema, além de que todos os raios entrem no sistema óptico pela pupila de entrada. Definindo de modo simples, a pupila de um sistema é aquela superfície que limita a quantidade de luz que entra nele ([Malacara et al., 2003](#)). Em um telescópio refletor, a pupila de entrada é o espelho primário, por exemplo. Uma classe do KrakenOS, a *PupilCalc* permite que definamos os parâmetros dos raios, garantindo que eles sejam raios que entram no sistema. Para exemplificar o uso dessa ferramenta, vamos apresentá-la na modelagem do telescópio Perkin-Elmer 1.6-

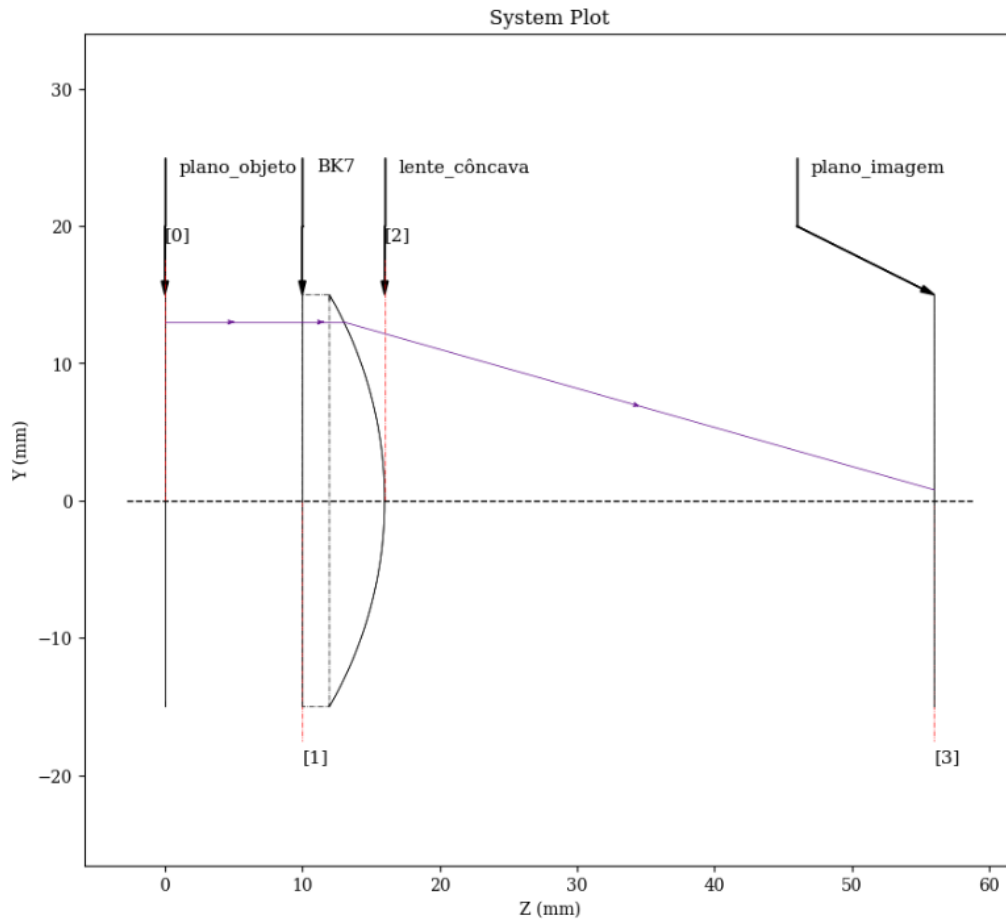


Figura 4.5. Raio com comprimento de onda de  $0.4 \mu\text{m}$  introduzido em um sistema óptico.

m (PE1.6-m) do Observatório do Pico dos Dias (OPD/LNA). Dados referentes a este telescópio serão apresentados em mais detalhes na seção de metodologia (Seção 5). As superfícies e o sistema óptico são definidos como segue:

```

1 ## definição das superfícies ópticas (1.6-m):
2 # plano objeto
3 p_obj = kos.surf(Rc=0.0, Diameter=1574, Glass='AIR',
4   Thickness=4400, Drawing=1, Name='plano_objeto', Nm_Pos
5   =[0,10])
6 # espelho primário
7 m1 = kos.surf(Rc=-9447.5116, k=-1.0654, Diameter=1574,
8   InDiameter=371.62, Glass='MIRROR', Thickness=-3464,
9   Drawing=1, Name='espelho_primário', Nm_Pos=[0,10])
10 # espelho secundário
11 m2 = kos.surf(Rc=-3598.551844, k=-4.1627, Diameter=470,
12   Glass='MIRROR', Thickness=4200.652, Drawing=1, Name='
13   espelho_secundário', Nm_Pos=[0,10])
14 # plano imagem
15 p_ima = kos.surf(Rc=0.0, Diameter=500, Glass='AIR',
16   Thickness=0.0, Name='plano_imagem', Nm_Pos=[0,10]) #
17   plano imagem

```

```

10
11 ## definição do sistema ótico:
12 # lista de superfícies do sistema
13 surf = [p_obj, m1, m2, p_ima]
14 # carrega configurações de vidros
15 catalog = kos.Setup()
16 # definição do sistema
17 telescope = kos.system(surf, catalog)
18 # define do raio do sistema
19 ray = kos.raykeeper(telescope)

```

As variáveis de entrada para a *PupilCalc()* são o sistema ótico definido com a classe *system()* (*telescope*), o número da posição da superfície que define a pupila do sistema na lista de superfícies, o comprimento de onda dos raios, o valor da abertura da pupila (o mesmo diâmetro do telescópio) e o tipo de abertura. Definimos então o objeto *pupil* da seguinte forma:

```

1 # superfície escolhida como pupila de entrada
2 superficie = 1
3 # comprimento de onda (em micrômetro)
4 w = 0.5016
5 # diâmetro da pupila
6 av = m1.Diameter
7 # entrance pupil diameter
8 at = 'EPD'
9
10 ## pupila do sistema
11 pupil = kos.PupilCalc(system=telescope, Surf=superficie,
12     W=w, ApTyp=at, AV=av)
13 pupil.Samp = 3 # amostra do arranjo de raios
14 pupil.Ptype = 'hexapolar' # forma do arranjo de raios
15 pupil.FieldType = 'angle' # raio vindo do infinito
16 pupil.FieldX = 0.0 # ângulo entre o raio e o eixo óptico
17     no eixo x
18 pupil.FieldY = 0.0 # ângulo entre o raio e o eixo óptico
19     no eixo y
20
21 x,y,z,l,m,n = pupil.Pattern2Field()

```

Na sequência de código acima, é possível ver que, após definirmos o objeto, podemos manipular suas propriedades, escolher a quantidade de amostra de arranjos de raios (*Samp()*), o tipo de arranjo (*Ptype* - 'rtheta', 'hexapolar', 'chief', 'square', 'fanx', 'fany', 'fan', 'rand'), o tipo de raio entrando no sistema (*FieldType()* - 'height', 'angle') e a coordenada no plano objeto nos eixos *x* e *y*, dependente da variável anterior. As variáveis das coordenadas nos três eixos e os cossenos diretores referentes a eles são definidas pela função *Pattern2Field()*. O resultado pode ser visto no capítulo anterior, usado para telescópios do tipo Ritchey-Chrétien, na Figura 4.6.

Teremos três arranjos de raios do tipo hexapolar. Um simples *loop* pode ser usado para o traço de cada um deles e armazenamento no *container* de raios, como indicado na seguinte sequência (Figura 4.7):

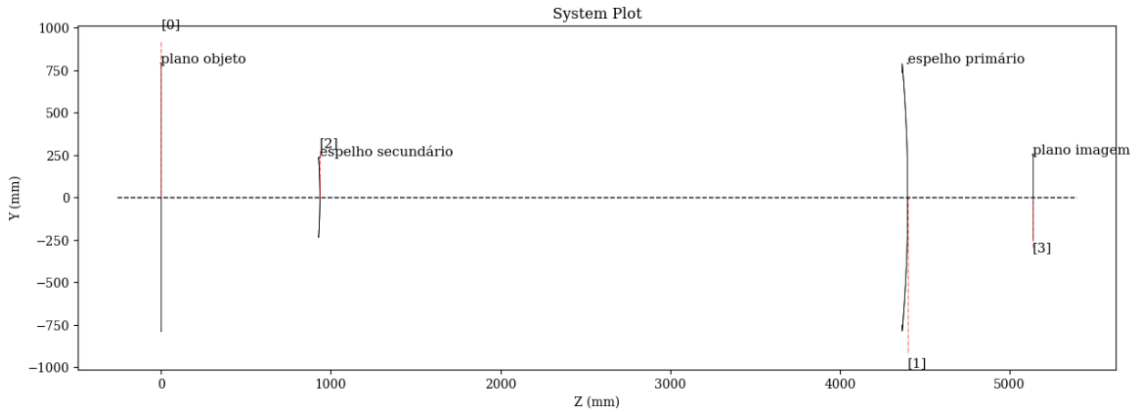


Figura 4.6. Resultado da montagem do telescópio PE1.6-m, simulado com o KrakenOS.

```

1 for i in range(0, len(x)):
2     pS = [x[i], y[i], z[i]]
3     dC = [l[i], m[i], n[i]]
4     telescope.Trace(pS=pS, dC=dC, WaveLength=w)
5     ray.push()

```

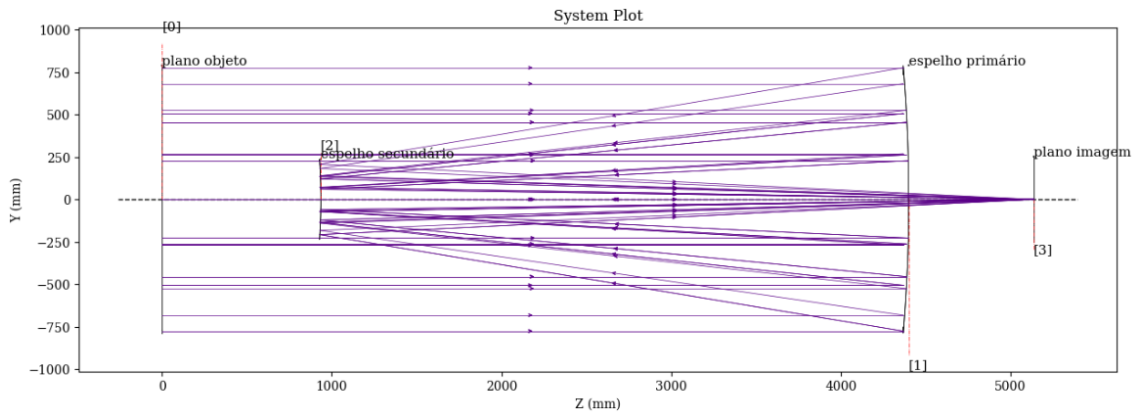


Figura 4.7. Resultado da montagem do telescópio PE1.6-m, exemplificando o uso do traçado dos raios, simulado com o KrakenOS.

#### 4.2.6 Diagrama de pontos

Mais importante do que analisarmos graficamente o esquema do sistema óptico é nos aprofundar na sua análise de formação da imagem. Nos simuladores ópticos, isso é feito a partir de um gráfico de distribuição de pontos, o diagrama de pontos. Com o KrakenOS, o processo de obtenção das posições dos raios em uma determinada superfície é feito com a função *pick()*. Nele, a entrada é o valor de sequência da superfície que desejamos na lista de superfícies. Como o que desejamos é a análise da formação da imagem, convém obtermos o diagrama de pontos no plano imagem do sistema óptico. Na lista de superfícies, esta é a última superfície, ou seja, de índice 3. Obtemos as coordenadas com uma linha de código:

```
1 x_, y_, z_, l_, m_, n_ = ray.pick(-1)
```

Por fim, podemos usar a biblioteca `Matplotlib` do Python para analisarmos o gráfico e o resultado pode ser visto na Figura 4.8:

```
1 plt.plot(x_, y_, 'bx')
2 plt.xlabel('x (mm)')
3 plt.ylabel('y (mm)')
4 plt.title('Diagrama de pontos - OPD PE1.6-m')
5 plt.show()
```

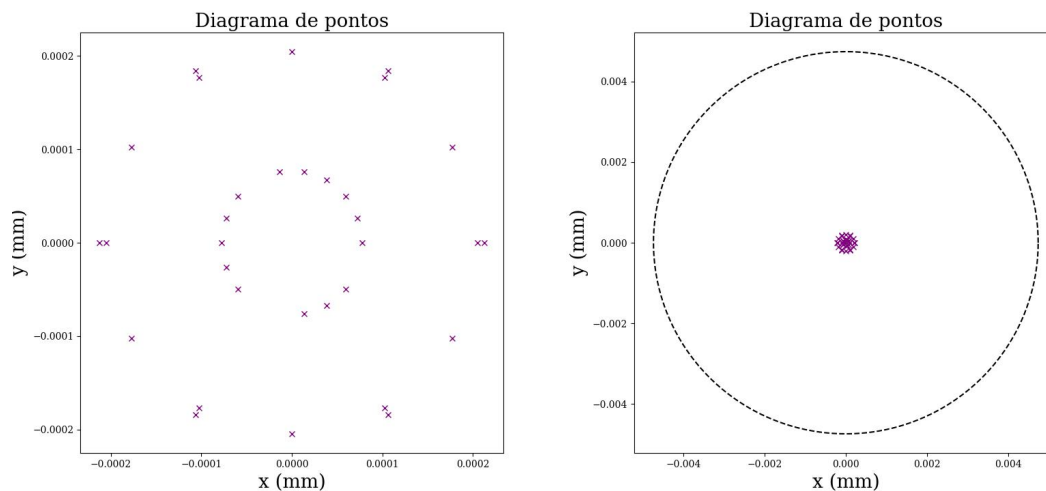


Figure 4.8. Na figura da esquerda, vemos o diagrama de pontos do telescópio PE1.6-m. Com a função `PupilCalc()` definimos três arranjos de raios hexapolares. À direita, vemos o mesmo diagrama, mas agora demarcando o limite de difração do telescópio, determinado pelo disco de Airy.

A Figura 4.8 mostra um diagrama de pontos para o telescópio PE1.6-m. Na figura da esquerda está o arranjo de pontos no plano focal do telescópio. A figura da direita tem a mesma distribuição de pontos, porém demarcamos o limite de difração do telescópio. A determinação do limite de difração do telescópio foi feita usando o disco de Airy, segundo a seguinte equação:

$$\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}, \quad (4.4)$$

onde  $\lambda$  representa o comprimento de onda em metros e  $D$  é o diâmetro do telescópio em metros. A quantidade determinada tem unidades de radianos. Por isso, convertemos essa medida para segundos de arco ( $1 \text{ rad} = 206265''$ ), e depois, usando a escala de placa do telescópio ( $13''/5 \text{ mm}$ ), determinamos sua medida em milímetros ( $0.004737 \text{ mm}$ ).

### 4.3 Aberrações ópticas

As superfícies de um sistema óptico são definidas por superfícies esféricas descritas por cônicas definidas pela função sagita (Equação 3.115).

Porém, nos casos reais, as superfícies não são perfeitamente cônicas de revolução e, em alguns casos, a própria natureza do tipo de cônica dificulta a formação de uma imagem

focada. Nesse caso, a superfície adquire uma asfericidade. A asfericidade inclui termos à Equação 3.115 que descrevem aberrações ópticas.

$$Z = \frac{cS^2}{1 + \sqrt{1 - (K + 1)c^2S^2}} + B_1S^4 + B_2S^6 + B_3S^7 + B_4S^{10}, \quad (4.5)$$

onde  $S = \sqrt{x^2 + y^2}$ , o termo de curvatura é  $c$  e os termos  $B_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) representam termos que descrevem as asfericidades das superfícies cônicas de revolução, e são escritos da seguinte forma (Malacara et al., 2003):

$$B_1 = A_1 + \frac{[(K + 1) - 1]c^3}{8}, \quad (4.6)$$

$$B_2 = A_2 + \frac{[(K + 1)^2 - 1]c^5}{16}, \quad (4.7)$$

$$B_3 = A_3 + 5 \frac{[(K + 1)^3 - 1]c^7}{128}, \quad (4.8)$$

$$B_4 = A_4 + 7 \frac{[(K + 1)^4 - 1]c^9}{256}, \quad (4.9)$$

$$(4.10)$$

onde os termos  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) são ajustados segundo a posição da superfície em relação a um sistema coordenado. Esses termos estão relacionados às aberrações ópticas.

As aberrações ópticas são distorções que ocorrem em uma imagem formada por um sistema óptico, como uma lente ou um espelho, quando a luz não é focalizada corretamente. Essas aberrações fazem com que a imagem fique borrada ou deformada, em vez de nítida e precisa. Elas podem ser causadas por imperfeições no formato da objetiva ou pela incapacidade do sistema óptico de focar o raio de luz em um mesmo ponto. Considerando a luz monocromática, elas podem ser divididas em duas classes: aquelas que deterioram a imagem e aquelas que deformam a imagem. Alguns exemplos das que deterioram a imagem são a aberração esférica, a coma e o astigmatismo. Neste tipo, o padrão de distribuição de luz é alterado, causando uma espécie de ‘esticamento’ da fonte pontual (Smith, 2008).

A aberração esférica ocorre quando a luz que passa pelas bordas de uma lente ou espelho não converge para o mesmo ponto que a luz que passa pelo centro. Isso faz com que a imagem fique borrada ou desfocada, especialmente em sistemas ópticos que usam espelho de conicidade esférica ( $K = 0$ ). Podemos usar o KrakenOS para introduzir aberrações ópticas em um dos telescópios modelados. Nesse caso, nosso exemplo será o telescópio PE1.6-m. Vamos introduzir essa aberração apenas alterando a constante de conicidade do espelho primário ( $m1.k$ ), mudando a seguinte linha de código em relação ao exemplo anterior:

```
1 m1 = kos.surf(Rc=-9448.5, k=0, Diameter=1574, InDiameter
    =371.62, Glass='MIRROR', Thickness=-3464, Drawing=1, Name=
    'espelho_primário', Nm_Pos=[0,10])
```

O diagrama de pontos do sistema com a presença da aberração pode ser visto na Figura 4.9. O impacto dessa aberração na determinação da posição dos objetos na esfera celeste está na dificuldade de aplicar um algoritmo de centragem devido ao grande espalhamento da luz. Se compararmos os diagramas de pontos das Figuras 4.8 e 4.9, vemos a perda da concentração dos pontos. Na primeira figura citada, a ordem de concentração da luz é de décimos de milímetros. Porém, na segunda figura citada, a luz é borrada e se espalha para fora do limite de difração do telescópio. Isso prejudica a qualidade astrométrica, especialmente considerando que o nível de precisão astrométrica moderno é no

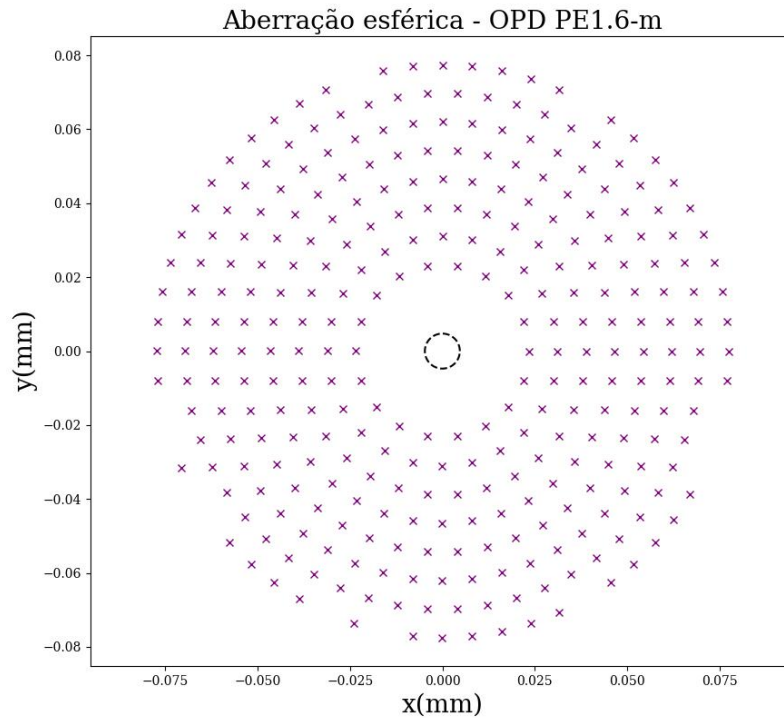


Figure 4.9. Exemplo do diagrama de pontos introduzindo a aberração esférica no telescópio PE1.6-m. No centro da figura é possível ver o limite de difração do telescópio.

sub-pixel. Além disso, pensando em grandes campos de visão e aberturas de telescópios, essa aberração pode se tornar mais perceptível, complicando a correção e o processamento da imagem, o que é um desafio extra para a calibração de dados astrométricos. Para corrigirmos as aberrações esféricas, podemos recorrer a outra superfície cônica de revolução para formar a objetiva do telescópio, tais como as parabólicas (Najera, 2021), pois a parábola reflete toda a luz em um único ponto focal.

A escolha de outra superfície para a objetiva do telescópio também pode introduzir outras aberrações ópticas, como a coma. A coma faz com que as fontes que deveriam ser pontuais em um campo pareçam distorcidas em um sentido específico, parecendo que elas tenham uma 'cauda'. No centro do campo de visão, a imagem é nítida; porém, nas bordas, a distorção é mais evidente. Ela é causada por espelhos parabólicos ou por desalinhamento entre os componentes ópticos do telescópio. Como exemplo do seu efeito, podemos também introduzir essa aberração usando o KrakenOS. No telescópio PE1.6-m, vamos usar a variável *TiltX* no espelho secundário. Essa variável faz com que a superfície definida gire em torno do eixo *x*. A linha de código da definição do objeto será:

```
1 m2 = kos.surf(Rc=-3600.0, k=-4.1627, Diameter=470, Glass='
MIRROR', TiltX=0.5, Thickness=4200, Drawing=1, Name='
espelho_secundário', Nm_Pos=[0,10])
```

O resultado desta alteração pode ser visto no diagrama de pontos na Figura 4.10. O efeito deste tipo de aberração nas posições relativas entre os objetos celestes em uma imagem CCD é evidente. Isso acontece por causa do desvio no centróide causado por esta aberração. Além disso, há uma diferença nestas medidas em diferentes regiões do campo

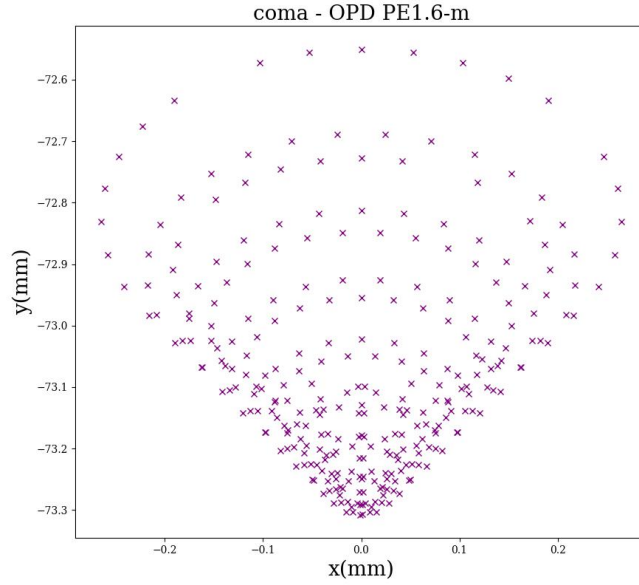


Figure 4.10. Exemplo do diagrama de ponto do telescópio PE1.6-m, agora introduzindo a coma.

observado, o que muda as posições relativas dos objetos. Como exemplo, vamos observar o desvio no centróide devido a essa aberração óptica. Gerando uma fonte com o KrakenOS (esse procedimento será melhor explicado na Seção 5), comparamos sua distribuição de luz com e sem a coma (Figura 4.11). Apesar de ser pouco significativo na posição das coordenadas em  $y$  ( $\Delta y = 0.17 \text{ pixel} \times 0''.18/\text{pixel} = 0''.0036$ ), o desvio no centróide na coordenada  $x$  é bastante significativo ( $\Delta x = 4.23 \text{ pixel} \times 0''.18/\text{pixel} = 0''.7614$ ), comparado com o nível de precisão astrométrica exigido nos dias atuais, quando estamos na casa do milésimo de segundo de arco de precisão em catálogos astrométricos como o Gaia (Brown, 2021).

A métrica instrumental é um fator importante para ter uma boa determinação entre as posições das estrelas de referência e o alvo de interesse astrométrico. Ela está relacionada com a reprodução das distâncias relativas de objetos de um campo estelar, por exemplo, no plano focal do telescópio. Aberrações ópticas, como vimos, alteram a métrica instrumental. Os polinômios de Zernike descrevem as aberrações a partir da mudança de fase causada por elas. A mudança de fase é determinada do seguinte modo (Noll, 1976):

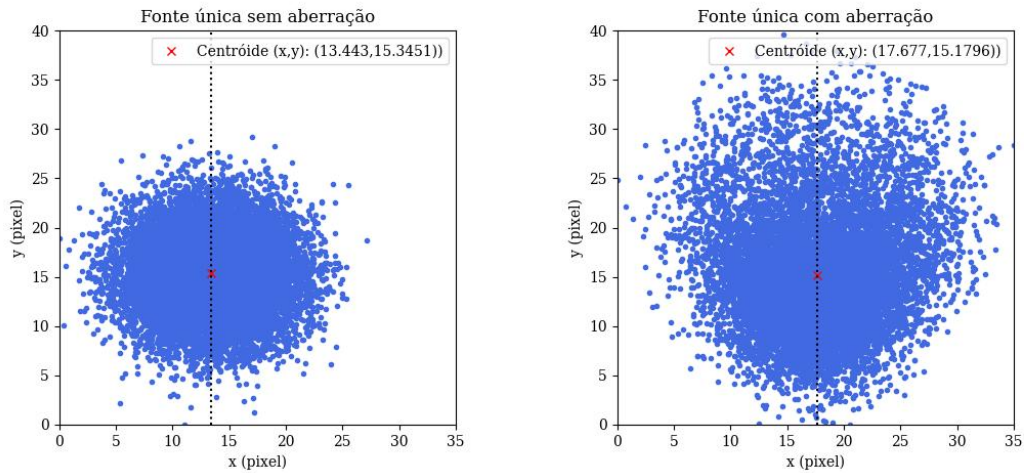
$$\phi(r, \theta) = \sum_{n,m} c_n^m Z_n^m(r, \theta), \quad (4.11)$$

onde  $Z(r, \theta)$  são os polinômios de Zernike. Eles têm uma componente radial e outra angular, escritas do seguinte modo:

$$Z(r, \theta) = R_n^m(r) \cos(m\theta), \quad (4.12)$$

de modo que  $m$  e  $n$  representam o grau do polinômio. Cada grau está ligado a uma aberração óptica diferente. Para a parte radial, temos que:

$$R_n^m = \sum_{k=0}^{\frac{n-m}{2}} (-1)^k \frac{(n-k)!}{k! \left(\frac{n+m}{2} - k\right)! \left(\frac{n-m}{2} - k\right)!}. \quad (4.13)$$



(a) Fonte gerada com o KrakenOS, sem a introdução de coma no telescópio PE1.6-m. (b) Mesma fonte, mas agora com a introdução de coma no telescópio PE1.6-m.

Figure 4.11. Efeitos da coma na determinação do centróide.

Um exemplo da mudança de fase medida com os polinômios de Zernike pode ser visto na Figura 4.12. Podemos perceber que, manipulando os diferentes graus dos polinômios de Zernike, há a mudança de fase e cada uma representa uma aberração causada na fase da frente de onda da luz.

As aberrações ópticas descritas anteriormente têm sua descrição segundo os polinômios de Zernike. Com o KrakenOS, é possível manipular a superfície para que resulte na diferença de fase na frente de onda. Usaremos esse recurso para descrever a próxima, o astigmatismo. No software, os graus dos polinômios de Zernike são representados por coeficientes, segundo a nomenclatura de Noll (1976). Os coeficientes 5 e 6 (índices 4 e 5 em listas do Python) representam o astigmatismo no espelho primário (Sotelo Burke, 2022). O primeiro passo para usar o recurso é definirmos uma *array*. Nos termos equivalentes na lista, introduzimos valores relativos à aberração. Depois, instanciamos essa lista ao objeto espelho primário definido anteriormente com a função *ZNK()*. Os passos seguintes de definição do sistema, pupila, traço e armazenamento de raios, são os mesmos que aqueles anteriores. O passo descrito pode ser visto no simples código:

```
## polinômio de Zernicke:
Z = np.zeros(36)
Z[4] = 0.0001
Z[5] = 0.0030
m1_znk.ZNK = Z
```

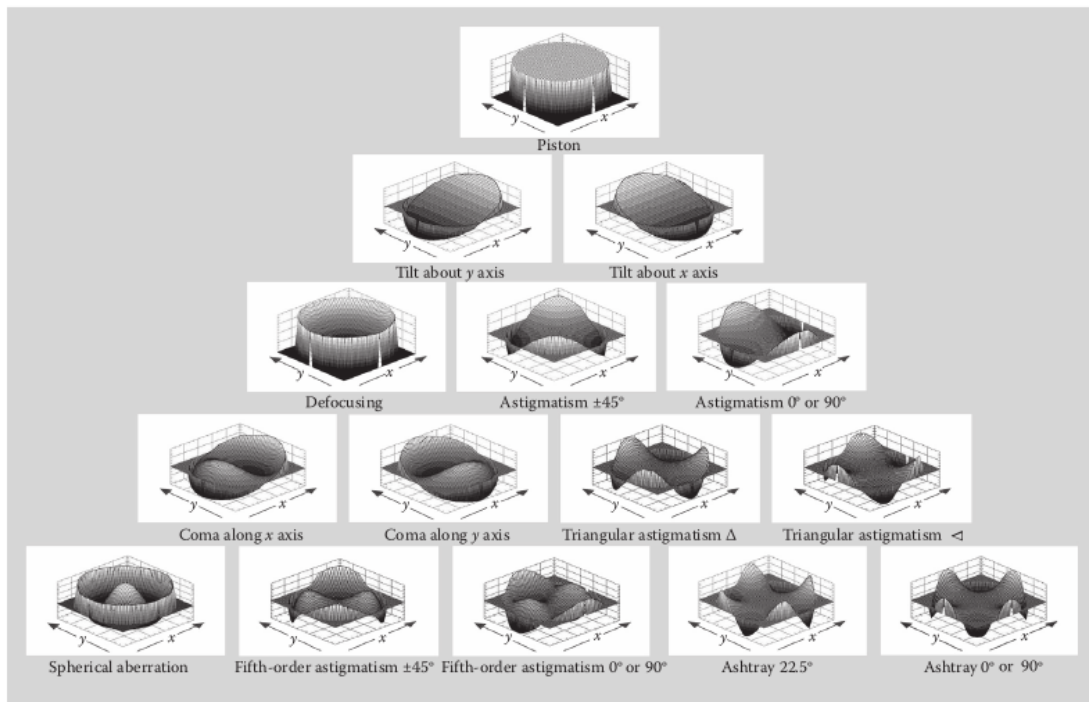
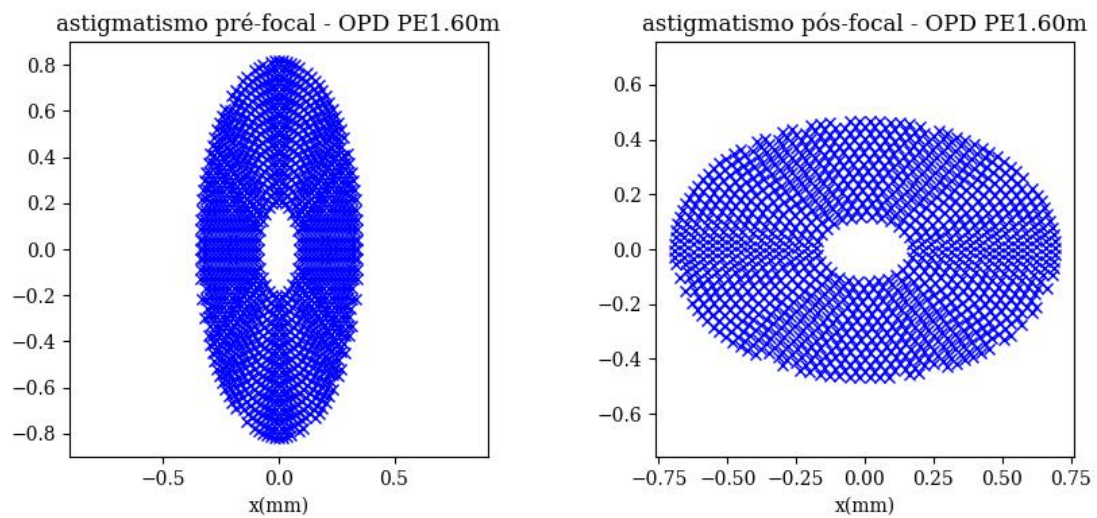


Figure 4.12. Análise gráfica dos efeitos dos polinômios de Zernike na fase da frente de onda da luz. Figura: [Malacara et al. \(2003\)](#).



(a) O efeito foi acentuado retirando o telescópio do foco colocando o plano focal em uma posição anterior à posição focal.  
 (b) O efeito foi acentuado retirando o telescópio do foco, colocando agora a posição posterior à posição focal.

Figure 4.13. Astigmatismo no telescópio PE1.6-m, introduzido com o KrakenOS.

O astigmatismo acontece quando o espelho do telescópio converge os raios em posições ligeiramente diferentes do plano focal. Como consequência disso, os raios que chegam perpendiculares ao plano imagem não têm a mesma distância focal ao longo do eixo óptico ([Najera, 2021](#)). Isso faz com que a imagem fique distorcida, especialmente nas bordas.

Ao invés de ser pontual, a fonte fica alongada. As causas para este tipo de aberração óptica estão ligadas a imperfeições nos espelhos, desalinhamento entre as superfícies ou tensão mecânica sobre eles. Pelos passos descritos no parágrafo anterior, introduzimos essa aberração ao desenho óptico do telescópio PE1.6-m. O resultado pode ser visto na Figura 4.13.

O astigmatismo está relacionado com a curvatura de campo ([Malacara et al., 2003](#)), e tem efeitos danosos à precisão astrométrica. Seu efeito é diferente quando comparamos o centro do CCD e as bordas dele. Isso é um problema por causa parecida com a aberração de coma. Com a mudança do centróide de maneira diferente, as posições relativas entre as estrelas são diferentes das esperadas, o que causará a determinação errada da posição de um alvo de interesse.

## Chapter 5

# Metodologia

### 5.1 Objetivos

O objetivo principal deste projeto, cujo primeiro passo foi dado neste mestrado através do uso do KrakenOS bem como dos resultados dele derivados, é efetuar a redução astrométrica de uma imagem CCD a partir de uma modelagem rigorosa dos efeitos instrumentais oferecida por um simulador óptico. Diversas correções são necessárias durante o processo de redução astrométrica ligadas à parte instrumental. Alguns desses efeitos estão ligados à posição do CCD em relação ao eixo óptico, tais como deslocamento, erro na sua orientação, não perpendicularidade dos eixos  $(x, y)$ , erro de escala, “tilt” (Green, 1985).

A métrica instrumental influencia na medida de separação entre as estrelas de referência e o alvo cuja posição queremos determinar. Caso não se preserve de forma coerente a separação angular real (i.e., dada pelo Gaia DR3) entre os objetos, introduziremos erros nas separações medidas e, por consequência, nas posições obtidas. Assumindo que não haja problemas com a métrica, a redução astrométrica em primeiro grau determina facilmente as correções em orientação do CCD e de escala de pixel, determinadas a partir de uma solução de mínimos quadrados. Porém, quando existem desvios mais importantes, polinômios de maior grau são necessários. Nesse ponto, o significado físico das constantes de placa se perde (Green, 1985). Além disso, a necessidade de mais estrelas de referência se torna urgente para a aplicação da solução de mínimos quadrados, pois o número de constantes que devem ser determinadas aumenta.

Neste contexto, e cumprindo o objetivo imediato deste mestrado, utilizamos o simulador óptico KrakenOS para criar uma imagem astronômica simulada. Nosso objetivo com isso é termos uma ferramenta que reproduza uma imagem com as estrelas de um campo, com suas posições de referência, com base na astrometria Gaia. Com isso, podemos comparar essa imagem com uma real, ajustando parâmetros instrumentais e atmosféricos no KrakenOS até que ambas coincidam. Desse modo, identificamos os desvios instrumentais e atmosféricos da noite de observação e os incorporamos ao modelo de redução astrométrica.

Os simuladores ópticos retornam diagramas a partir de uma configuração de pontos no plano imagem do sistema óptico simulado, o que não necessariamente representa características de uma imagem astronômica, tal como a distribuição de fluxo de uma fonte real. Nesse caso, o diagrama de pontos, como o mostrado na Figura 4.8, da Seção 4.2.6, fornece padrões específicos para um dado desenho óptico, mas não a reprodução do fluxo de uma fonte astronômica. No contexto da reprodução de fluxo, por exemplo, um diagrama de pontos não reproduz uma PSF. Nenhum deles também, até agora, produzia uma imagem com as características específicas daquelas tomadas para fins de estudos astronômicos. A reprodução dessas características deve estar ligada às contagens relacionadas com o CCD.

O trabalho do desenvolvimento dessa ferramenta será explicado nesta seção e é o resultado desta parte do projeto de pesquisa. As análises referentes à redução de astrometria com parâmetros instrumentais serão desenvolvidas no futuro projeto de doutoramento.

## 5.2 Rotinas para modelagem dos telescópios

Para modelagem dos telescópios, ou seja, sua construção computacional com o simulador óptico KrakenOS, partimos para a tomada de medidas dos dois telescópios mais usados do Observatório do Pico dos Dias (OPD/LNA). Isso demandou três frentes de trabalho: a primeira, pegar as medidas disponibilizadas no site do LNA (Laboratório Nacional de Astrofísica) (lna, 2024), a segunda, obter as plantas de construção dos telescópios, onde contamos com o apoio de Saulo Gargaglioni (coordenador do OPD) (Apêndice A), e a terceira, derivar, através da óptica geométrica, as relações entre as medidas dos telescópios que não foram possíveis obter com as duas primeiras opções.

O site do LNA disponibiliza uma parte importante das medidas dos telescópios e suas plantas completaram alguns dados faltantes. Com essas medidas, foi possível derivar as medidas para o raio de curvatura dos espelhos dos telescópios. Essa relação foi a seguinte (Smith, 2008):

$$R_1 = \frac{2DF}{(B - F)}, \quad (5.1)$$

$$R_2 = \frac{2DB}{(B + D - F)}, \quad (5.2)$$

onde  $R_1$  e  $R_2$  representam os raios de curvatura dos espelhos primário e secundário, respectivamente,  $F$  é a distância focal efetiva da combinação,  $B$  é a distância focal traseira (*back focus*), ou seja, a distância entre a última superfície do telescópio (espelho secundário) e seu plano focal,  $D$  é a distância entre os espelhos.

O telescópio Perkin-Elmer de 1.6-m (PE1.6-m) começou a ser utilizado em 1981. Na época, fazia parte do antigo Observatório Astrofísico Brasileiro (OAB), administrado pelo Observatório Nacional (ON). Com a criação do LNA, passou a ser administrado por essa instituição, responsável pelo cuidado e manutenção de toda a infraestrutura para pesquisa astronômica no Brasil. Dos telescópios brasileiros em território nacional, é o de maior abertura. Seu desenho é do tipo Ritchey-Chrétien e no foco Cassegrain tem razão focal  $f/10$ , o que permite uso para vários campos da Astronomia. Sua distância focal efetiva é de 15753.51 mm (medida com o KrakenOS), com escala de placa de  $13''.09/\text{mm}$ . Além de ser largamente usado para missões de astrometria, também é utilizado para fotometria, polarimetria e espectroscopia. As medidas usadas na modelagem do telescópio estão nas Tabelas 5.1, 5.2 e 5.3:

Distância entre superfícies	Medidas (mm)
plano objeto - espelho primário	4400
espelho primário - espelho secundário	3464
espelho secundário - plano imagem	4200.654

Table 5.1. Medidas das separações das superfícies do telescópio PE1.6-m.

O telescópio Boller-Chivens de 0.6-m (BC0.6-m) foi instalado no OPD no ano de 1992. Ele foi cedido pelo Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas (IAG) da Universidade de São Paulo (USP). Por essa razão, é conhecido pela comunidade

Característica do espelho	Medidas (mm)
Diâmetro	1574
Distância focal	4724
Raio de curvatura	-9447.5116
Obstrução central	371.62
Conicidade	-1.0654

Table 5.2. Características do espelho primário do telescópio PE1.6-m.

Característica do espelho	Medidas (mm)
Diâmetro	470
Distância focal	4200.625
Raio de curvatura	-3598.55
Conicidade	-4.1627

Table 5.3. Características do espelho secundário do telescópio PE1.6-m.

astronômica como IAG. Também é um telescópio com desenho óptico do tipo Ritchey-Chrétien. Sua razão focal é  $f/13.5$  com distância focal efetiva do sistema de 8229.59 mm (medida com o KrakenOS) e escala de placa de  $25''.09/\text{mm}$ . Também é usado para astrometria, fotometria e polarimetria. As Tabelas 5.4, 5.5 e 5.6 são as de medidas deste telescópio usadas na sua modelagem computacional (Figura 5.1).

Distância entre superfícies	Medidas (mm)
plano objeto - espelho primário	2133.6
espelho primário - espelho secundário	1592.326
espelho secundário - plano imagem	2582.926

Table 5.4. Medidas das separações das superfícies do telescópio BC0.6-m.

Para o desenvolvimento do telescópio BC0.6-m com o KrakenOS, usamos o procedimento típico do programa para a criação de um sistema óptico simulado, mostrado na Figura 5.1. Após importar as bibliotecas necessárias para isso, definimos as superfícies como variáveis *surf()*, e cada componente do telescópio como entrada desta classe. Após a definição das superfícies, definimos o sistema com as classes *Setup()* e *system()*, e por fim, os raios do sistema em um *container* da classe *raykeeper()*, que determina o sistema pelo qual os raios passarão. Para o sistema completo, definimos a pupila do sistema com os parâmetros da classe *PupilCalc()*. O procedimento do código está descrito a seguir:

Característica do espelho	Medidas (mm)
Diâmetro	609.6
Distância focal	2133.66
Raio de curvatura	-4641.39
Obstrução central	191.5414
Conicidade	-1.0455

Table 5.5. Características do espelho primário do telescópio BC0.6-m.

Característica do espelho	Medidas (mm)
Diâmetro	180.7972
Distância focal	517.144
Raio de curvatura	-2028.8640
Conicidade	-3.333

Table 5.6. Características do espelho secundário do telescópio BC0.6-m.

```

1 import KrakenOS as kos
2
3 # definição das superfícies óticas (1.6-m):
4 p_obj = kos.surf(Rc=0.0, Diameter=1574, Glass='AIR',
5               Thickness=4400, Drawing=1,
6               Name='plano_objeto',
7               Nm_Pos=[0,10]) # plano objeto
8 m1 = kos.surf(Rc=-9447.5116, k=-1.0654, Diameter=1574,
9             InDiameter=371.62, Glass='MIRROR',
10            Thickness=-3464, Drawing=1,
11            Name='espelho_primário',
12            Nm_Pos=[0,10])# espelho primário
13 m2 = kos.surf(Rc=-3598.551844, k=-4.1627, Diameter=470,
14            Glass='MIRROR', Thickness=4200.652,
15            Drawing=1, Name='espelho_secundário',

```

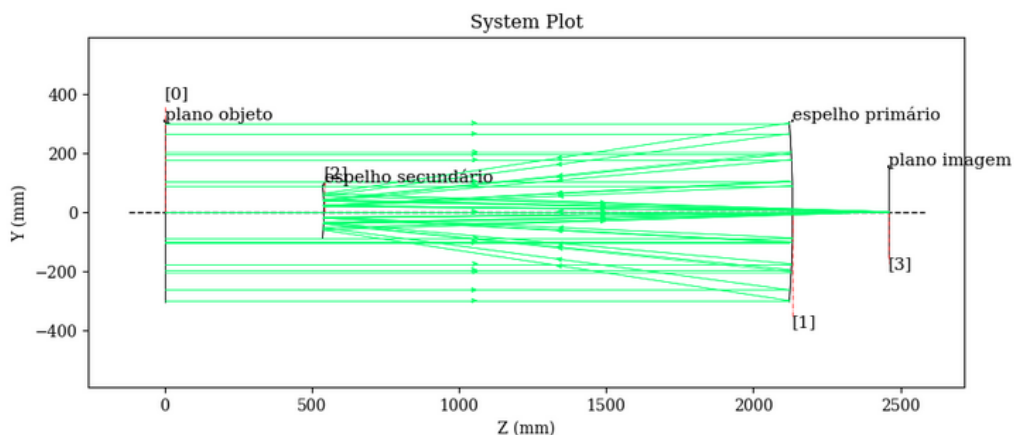


Figure 5.1. Exemplo do desenho óptico do telescópio BC0.6-m feito com o KrakenOS.

```

16         Nm_Pos=[0,10]) # espelho secundário
17 p_ima = kos.surf(Rc=0.0, Diameter=500, Glass='AIR',
18                 Thickness=0.0, Name='plano_imagem',
19                 Nm_Pos=[0,10]) # plano imagem
20
21 # definição do sistema óptico:
22 # lista com as superfícies
23 surf = [p_obj, m1, m2, p_ima]
24 # carrega as configurações do catálogo de materiais
25 catalog = kos.Setup()
26 # define os componentes do sistema óptico
27 telescope = kos.system(surf, catalog)
28 # define os raios do sistema
29 ray = kos.raykeeper(telescope)
30
31 # definição da pupila do sistema:
32 superficie = 1
33 w = 0.5 # comprimento de onda (em micrômetros)
34 av = m1.Diameter # abertura da pupila de entrada
35 at = 'EPD' # entrance pupil diameter
36
37 pupil = kos.PupilCalc(system=telescope, Surf=superficie,
38                       W=w, ApTyp=at, AV=av)
39                       # define a pupila do sistema
40 pupil.Samp = 10 # amostra do arranjo de raios
41 pupil.Ptype = 'rand' # tipo de arranjo de raio
42 pupil.FieldType = 'angle' # raio vindo do infinito

```

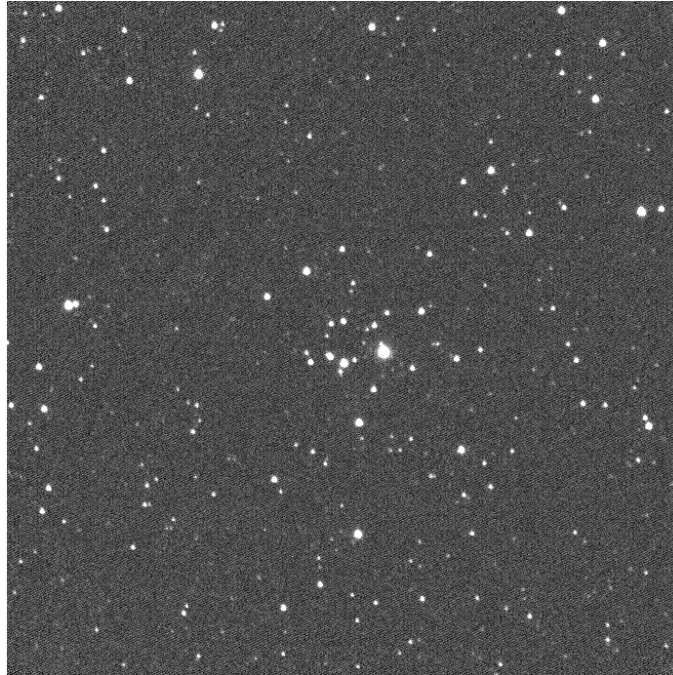


Figure 5.2. Imagem real do aglomerado aberto ESO518-03. As observações foram feitas no telescópio BC0.6-m do OPD, na noite do dia 13 de junho de 2020. Os observadores da noite foram Dr. Marcelo Assafin, Dr. Sérgio Santos-Filho e Jonatã Arcas Silva.

Utilizamos uma imagem real do campo do aglomerado estelar ESO 518-03 (RA  $16^h47'04''$  DEC  $-25^\circ48'42''$ ) (Dias et al., 2018) como base para obtermos as posições das estrelas (Figura 5.2). A imagem foi tomada no dia 14 de junho de 2020, usando o telescópio BC0.6-m, com tempo de exposição de 60s, usando a câmera Ikon-10127, com filtro I e escala de pixel de  $0''.34/\text{pixel}$ . As imagens foram tomadas no modo *single*, com ganho de  $3.5 e^-/\text{ADU}$  e seu formato é de  $2048 \times 2048$  píxeis. Para obtermos as posições  $(x, y)$  das estrelas, utilizamos a *task* de astrometria do PRAIA (Assafin, 2023). Por esse motivo, as rotinas de reprodução de imagens a partir da simulação neste capítulo serão apresentadas para este telescópio.

### 5.3 Rotinas para imagem com uma fonte

O primeiro passo para modelagem de uma imagem astronômica em uma simulação óptica de um telescópio foi criar uma rotina para criar uma única fonte. A rotina envolve, primariamente, o uso da classe de geração de fontes do KrakenOS, *SourceRnd()*. Após a definição do sistema, primeiro definimos a função de distribuição de pontos, que, no nosso caso, é uma gaussiana:

```
1 # definição da função gaussiana de distribuição de pontos:
2
3 def gauss(x):
4     x = np.rad2deg(x) # de radianos --> para graus
5     seeing = 1.2/3600 # ângulo de distribuição
6     sigma = seeing/2.3548
7     mean = 0 # média
8     std_dev = sigma # desvio padrão da gaussiana
```

```

9     y = sci.stats.norm(mean, std_dev)
10    res = y.pdf(x) # determinação da distribuição de pontos
11
12    return res

```

Depois, os procedimentos exigidos pela classe:

```

1  ## definição de uma fonte única:
2  # define a fonte
3  star = kos.SourceRnd()
4  # função para definição da fonte
5  star.fun = gauss
6  # ângulo de cobertura a partir do pólo da gaussiana
7  star.field = 2*1.2/3600.0
8  # tamanho lateral
9  star.dim = 2300
10 # número de raios que formarão a fonte
11 star.num = 100000
12 # cossenos diretores e coordenadas dos raios da fonte
13 l,m,n,x,y,z = star.rays()

```

Por fim, definimos o traçado dos raios e armazenamos cada um deles no *container* de raios:

```

1  for i in range(0, len(x)):
2      pS = [[x[i],y[i],z[i]]] # coordenadas
3      dC = [l[i],m[i],n[i]] # cossenos diretores
4      # traçado de raio
5      telescope.Trace(pS=pS,dC=dC,WaveLength=w)
6      # armazena os raios
7      ray.push()

```

Com a classe *pick()*, podemos analisar graficamente a distribuição dos raios no plano imagem do sistema óptico:

```

1  x,y,z,l,m,n = ray.pick(-1)

```

A Figura 5.3 mostra o resultado do procedimento com o KrakenOS. Vemos uma distribuição de pontos de raios que passam pela óptica do telescópio. Podemos perceber que é uma distribuição que respeita bem o padrão de distribuição de luz. Porém, temos uma imagem em duas dimensões, diferente das imagens CCD, com três dimensões. Além disso, vemos que as posições dos raios estão dadas em milímetros, não em pixels. Por esse motivo, foi necessário desenvolver uma função que convertesse essas quantidades para o sistema de um CCD e ajustasse a fonte às suas dimensões. A função *image()* faz isso e será descrita no decorrer do próximo parágrafo.

A função leva em consideração um fator de escala de milímetro para pixel, determinado na análise dimensional da Equação 5.3. As informações do telescópio estão disponibilizadas no site do LNA (lna, 2024), assim como o tamanho do CCD em pixels e seu ganho. Um esboço desta função pode ser visto a seguir:

$$\frac{[\text{escala de pixel}]}{[\text{escala de placa}]} = \frac{\frac{''}{\text{pixel}}}{\frac{''}{\text{mm}}} = \frac{\text{mm}}{\text{pixel}}. \quad (5.3)$$

```

1  def image(x,y,e_pixel,tam_pixel,gain,unica=0):
2      e_pixel = e_pixel # "/mm

```

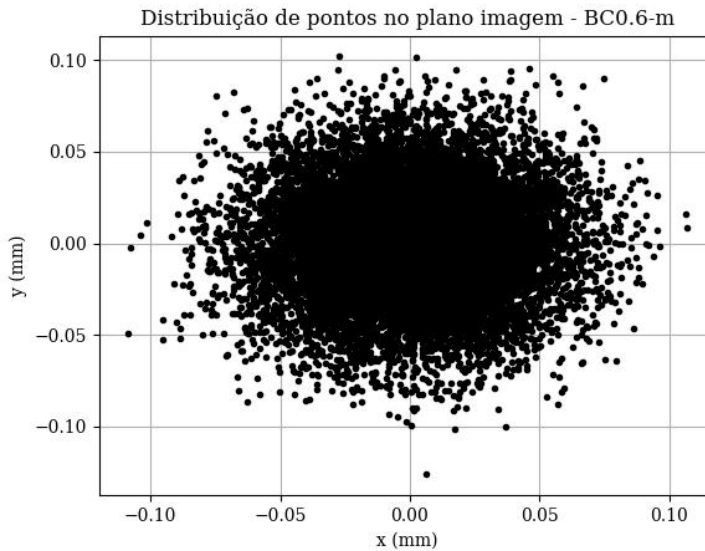


Figure 5.3. Distribuição de pontos no plano imagem do telescópio BC0.6-m.

```

3   x_pixel = x/e_pixel # coordenada x (pixel)
4   y_pixel = y/e_pixel # coordenada y (pixel)
5
6   ## arredondamento e tomada dos números tipo inteiros:
7   # coordenada x (tipo inteiro)
8   x_int = np.floor(x_pixel).astype(int)
9   # coordenada y (tipo inteiro)
10  y_int = np.floor(y_pixel).astype(int)
11
12  ## tomada de valores positivos:
13  # coordenada x (valores inteiros e positivos)
14  x_pixel_positivo = x_int+np.absolute(np.min(x_int))
15  # coordenada y (valores inteiros e positivos)
16  y_pixel_positivo = y_int+np.absolute(np.min(y_int))
17
18  # grade de valores que formarão o frame:
19  x_im,y_im = np.mgrid[:tam_pixel:1,:tam_pixel:1]
20  x_im,y_im = np.ones_like(x_im),np.ones_like(y_im)
21  im = x_im*y_im
22
23  if unica == 1:
24      centro = tam_pixel/2 # centro da imagem
25      x_ = ((x_pixel_positivo-np.mean(x_pixel_positivo))+
26            centro).astype(int)
27
28      y_ = ((y_pixel_positivo-np.mean(y_pixel_positivo))+
29            centro).astype(int)
30
31      for i in range(0,len(x_)):
32          x_arg = x_[i]
33          y_arg = y_[i]

```

```

31         im[x_arg, y_arg] += gain
32     else:
33         for i in range(0, len(x_pixel_positivo)):
34             x_arg = x_pixel_positivo[i]
35             y_arg = y_pixel_positivo[i]
36             im[x_arg, y_arg] += gain
37
38     return im

```

Também levamos em consideração nesta função a determinação das contagens que cada pixel recebe. Como o intuito é que cada raio resulte em um elétron sobre o plano focal, quando determinamos a posição que ele terá no CCD também definimos o valor equivalente que ele representará em contagens ADU. Isso é definido com a variável *gain* desta função e representa o ganho do CCD.

O resultado do procedimento para a imagem da fonte sem ruído está na Figura 5.4a. Pela barra de cores, é possível ver que as contagens máximas são de cerca de 700 ADU. Ao lado, na Figura 5.4b, vemos o perfil de distribuição dos pontos numa transformação da *array* de duas dimensões da imagem sem ruído em uma dimensão.

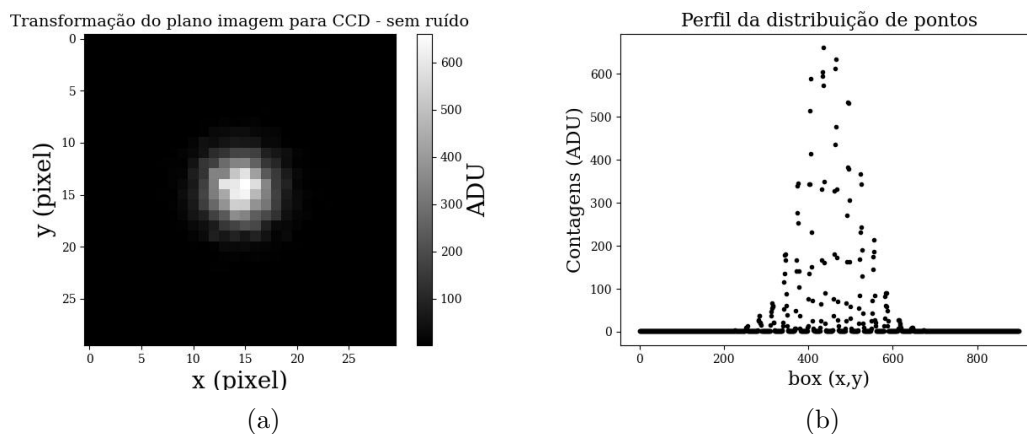


Figure 5.4. Acima, vemos a formação de uma fonte sem a inclusão de ruídos gerada a partir de uma simulação óptica. Abaixo, vemos a distribuição de pontos em toda a imagem. As contagens em zero, mostram a falta dos ruídos.

É perceptível que ainda é necessário reproduzirmos as contagens relacionadas aos ruídos das imagens astronômicas reais. Para isso, criamos algumas funções que reproduzem essas contagens, como poderá ser visto na próxima seção.

## 5.4 Rotinas para reprodução dos ruídos

Para obter uma simulação mais fiel a uma observação real, é necessário incluir os diversos ruídos que afetam a aquisição dos dados, como o ruído de leitura, a corrente de escuro, o brilho do céu, etc., além de considerar as características do instrumento utilizado, pois eles desempenham um papel fundamental no cálculo de qualquer parâmetro astrométrico. Isso se deve ao fato de que os algoritmos de centragem utilizam essa parte do fluxo em seus ajustes. Portanto, é importante considerar os ruídos nesse contexto, uma vez que eles também desempenham um papel essencial nas técnicas de identificação automática dos objetos. Além disso, como fazem parte de uma imagem real, é importante

introduzí-los em uma imagem simulada. Eles estão relacionados a contagens decorrentes da eletrônica do CCD e são introduzidos por meio da soma de imagens. Uma descrição de cada um deles e a formação de sua imagem serão os tópicos desta seção.

Previamente, criamos uma *array* que recebe os valores de cada um dos tipos de ruídos. Ela também garante a reprodutibilidade de números aleatórios no decorrer do código. A seguir, o primeiro passo do código:

```
1 import os
2 import numpy as np
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 # valor de variável de ambiente
6 seed = os.getenv('GUIDE_RANDOM_SEED', None)
7 if seed is not None:
8     seed = int(seed)
9
10 # gerador de números aleatórios
11 noise_rng = np.random.default_rng(seed=seed)
```

onde são importadas as bibliotecas necessárias para o código, é gerada uma *seed* que garante a reprodutibilidade dos valores aleatórios e é definida a variável com esses valores.

#### 5.4.1 Ruído de leitura

O ruído de leitura acontece devido ao tempo de leitura das cargas em um CCD. Acontece no processo de conversão das cargas em contagens digitalizadas (ADU) e independe do tempo de exposição. A média das contagens devido ao ruído de leitura é de 5 a 20 elétrons (Romanishin, 2006). Levando isso em consideração, e lembrando a Equação 2.1 ( $ADU = e^-/G$ , onde  $G$  é o ganho), criamos a seguinte função geradora do ruído de leitura:

```
1 def read_noise(image, electrons, gain):
2     shape = image.shape
3     noise = noise_rng.normal(scale=electrons/gain,
4                               size=shape)
5
6     return noise
```

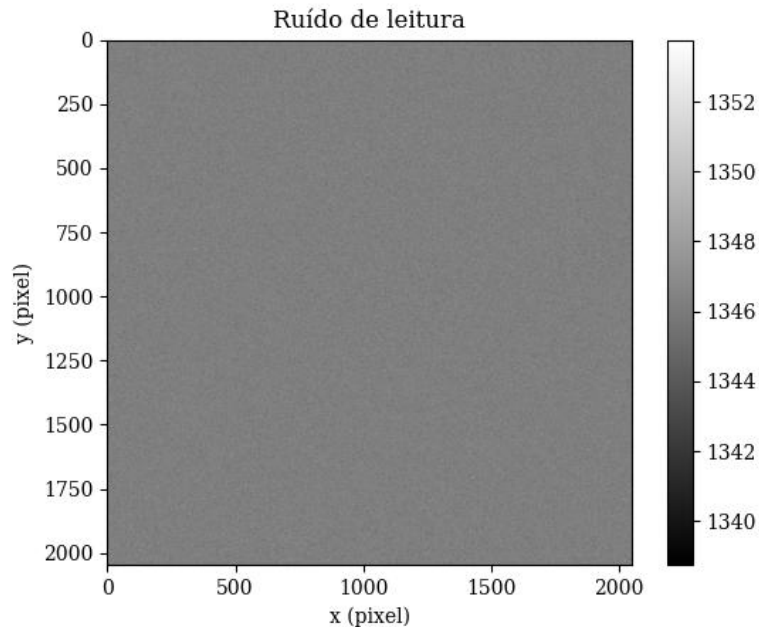
A função recebe como parâmetros de entrada o tamanho da imagem em que se deseja adicionar ruídos — que, neste caso, é a imagem gerada com as fontes astronômicas a partir da simulação —, o número de elétrons gerados pelo ruído de leitura e o ganho da câmera. Considerando que a imagem real foi capturada pela câmera Ikon-10127, com ganho de 3.5 elétrons/ADU e tamanho de  $2048 \times 2048$  píxeis, o resultado obtido é a imagem mostrada na Figura 5.5a, contendo apenas o ruído de leitura, sem as fontes astronômicas.

As contagens de *bias* também acontecem por causa de elétrons gerados durante a leitura, mas também estão associadas àqueles envolvidos nas conversões eletrônicas no CCD. Um nível típico de *bias* deve ser de 400 ADU/pixel, no qual, considerando um ganho de  $10 e^-/ADU$ , significa 4000 elétrons (Howell, 2006). No caso da imagem de *bias* tomada no dia da observação, a média de contagens é cerca de 1346.24 ADU/pixel e, com o ganho de  $3.5 e^-/ADU$ , temos cerca de 4711.84 elétrons. A função com o fim de criar as contagens de *bias* é:

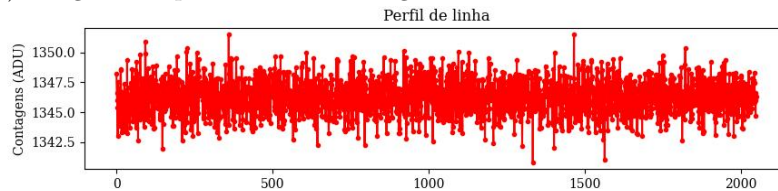
```
1 def bias(image, value):
2     bias_im = np.zeros_like+value
```

```
3 |     return bias_im
```

Essa função leva em consideração o valor médio de uma imagem de *bias* e soma a uma *array* de zeros com as mesmas dimensões daquela da imagem. O resultado dessa rotina é então somado com o ruído de leitura e pode ser visto na Figura 5.5a.



(a) Imagem composta com as contagens de *bias* mais as de ruído de leitura.



(b) Perfil radial das contagens no centro da imagem.

Figure 5.5. Imagem com as contagens de *bias* mais o ruído de leitura.

### 5.4.2 Corrente de escuro

A corrente de escuro é consequência parecida do efeito das contagens de *bias*. Ela acontece por causa das vibrações dos elétrons durante a tomada de uma imagem. Porém, a magnitude das contagens de corrente de escuro é muito maior. Sua causa é devido à elevação da temperatura na eletrônica da câmera. Isso acontece pelo próprio funcionamento do aparelho, como qualquer outro equipamento eletrônico. Suas contagens são, portanto, proporcionais ao tempo de exposição e têm uma distribuição poissoniana. A função que reproduz uma corrente de escuro é a seguinte:

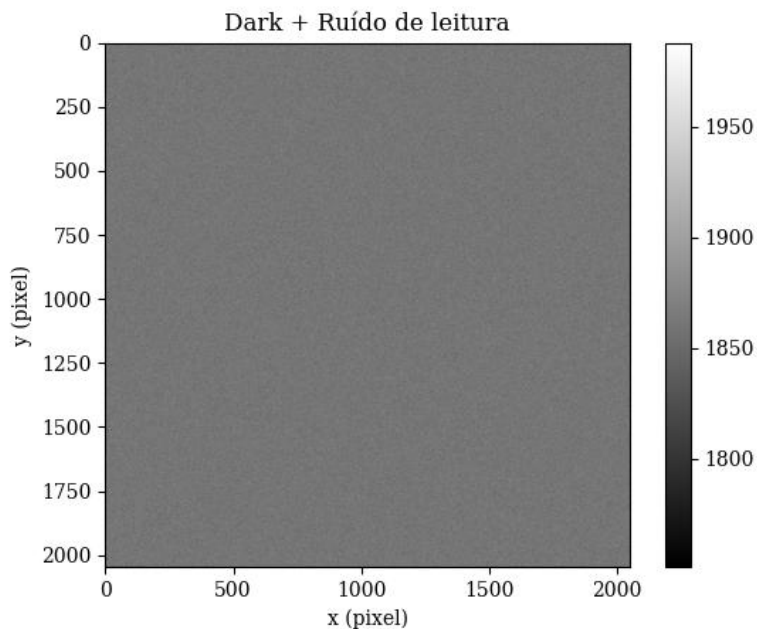
```
1 | def dark_current(image, current, exposure_time, gain):  
2 |     base_current = current*exposure_time/gain  
3 |     dark_im = noise_rng.poisson(base_current,
```

```

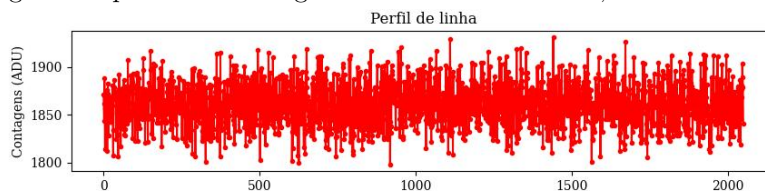
4 |                                     size=image.shape)
5 |     return dark_im

```

É importante apontarmos o quão relevante é esse tipo de ruído. Considerando um equipamento em temperatura ambiente, o número de elétrons que tipicamente são incluídos na imagem devido à temperatura é da ordem de  $2.5 \times 10^4$  elétrons em cada pixel a cada segundo (Howell, 2006). Considerando um dispositivo com ganho de 3.5 elétrons/ADU e um tempo de exposição de 15 minutos (900 s), a quantidade final, em ADU, de contagens introduzidas, em média, na imagem é da ordem de  $6.4 \times 10^6$ . Ou seja, de ordem muito superior que as contagens típicas de qualquer objeto, fora do *range* dinâmico de quaisquer dos dispositivos atuais. A corrente de escuro é diminuída com o advento de resfriadores que acompanham as câmeras. Nesse caso, entre 2 e 0.04 elétrons são introduzidos em cada pixel a cada segundo. Considerando o limite superior, ainda são introduzidas cerca de 1800 contagens em cada pixel do CCD (Howell, 2006). A Figura 5.6a considera a corrente de 2 elétrons/pixel/s, ganho de 3.5 elétrons/ADU e tempo de exposição de 900 segundos, como exemplo do último caso.



(a) Imagem composta das contagens de corrente de escuro, *bias* e o ruído de leitura.



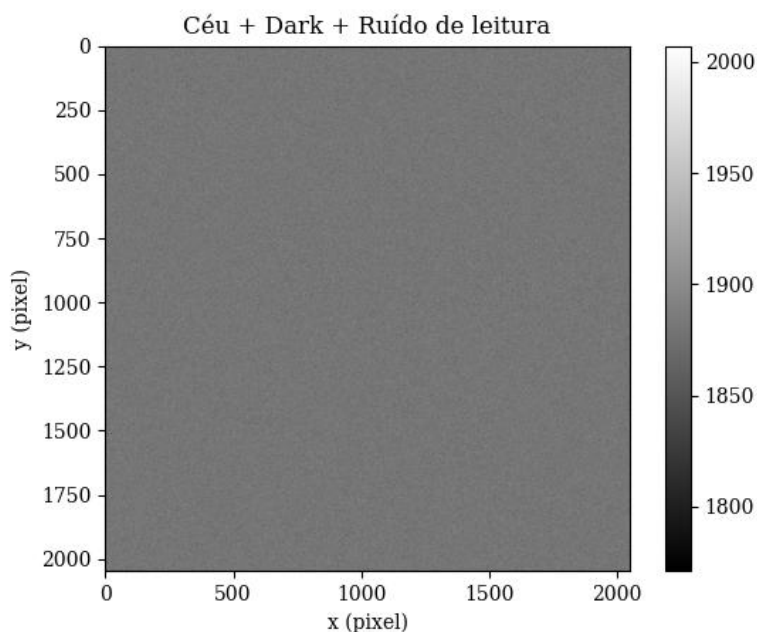
(b) Perfil radial das contagens no centro da imagem.

Figure 5.6. Imagem incluindo as contagens de corrente de escuro.

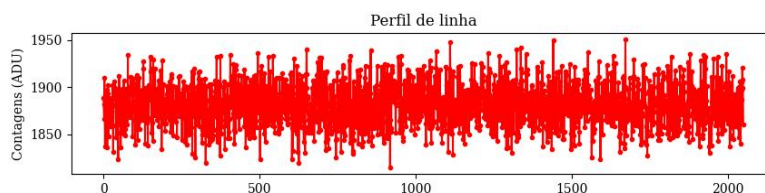
### 5.4.3 Contagens de fundo de céu

No caso das características do fundo de céu, as contagens seguem uma distribuição poissoniana, espalhadas por todo o campo. Introduzimos as contagens de fundo de céu para reproduzirmos na imagem, mesmo que essas contagens estejam relacionadas a uma parte do fluxo que passa pelo sistema óptico. Com o aperfeiçoamento da rotina que reproduz as características atmosféricas (Seção 5.4.4), tendemos a retirar a rotina apresentada nesta seção para usarmos a próxima. As características do fluxo do fundo de céu estão ligadas à luz zodiacal, às estrelas mais fracas presentes no campo — que podem não ser diretamente observadas, mas contribuem para o fluxo do fundo de céu — e à poluição luminosa. Além disso, a variação dessas contagens tem importante contribuição da presença da Lua. A depender da banda óptica observada, a relação sinal-ruído pode diminuir até seis vezes em relação a um dado tempo de exposição comparado com aquela obtida em condições de céu escuro, sem a presença da Lua na parte visível do céu (Patat, 2004). A Figura 5.7a mostra o resultado da função que reproduz as contagens relacionadas ao fundo de céu, escrita da seguinte forma:

```
1 def sky_background(image, sky_counts, gain):  
2     sky_im = noise_rng.poisson(sky_counts*gain, size=image.  
3     shape)/gain  
     return sky_im
```



(a) Imagem composta das contagens de fundo de céu, contagens de corrente de escuro, *bias* e ruído de leitura.



(b) Perfil radial das contagens no centro da imagem.

Figure 5.7. Imagem incluindo as contagens de fundo de céu.

Quando incluímos as rotinas desenvolvidas para a introdução dos ruídos, vemos a diferença nas contagens. Também é perceptível quantitativamente na Figura 5.8a. Agora, as contagens atingem cerca de 1800 ADU e, na Figura 5.8b, também é possível ver o nível do ruído introduzido na parte inferior.

#### 5.4.4 Características atmosféricas

Para a tentativa de reproduzir características e influências atmosféricas nas imagens, manipulamos algumas importantes funções do KrakenOS para determinação dos polinômios de Zernike que mensuram a diferença de fase na frente de onda. Essencialmente, usamos as funções *Phase()* e *Zernicke\_fitting()*. A função *Phase()* é usada para determinar a fase da frente de onda na pupila de saída do telescópio. Nesse caso, *X* e *Y* são as coordenadas dos pontos e *Z* é a fase associada a cada um destes pontos. Com esses dados, usamos as três coordenadas para determinar os polinômios de Zernike com a função *Zernike\_Fitting()*. O código relacionado com esse passo está a seguir:

---

```
1 X,Y,Z,p2v = kos.Phase(pupil)
```

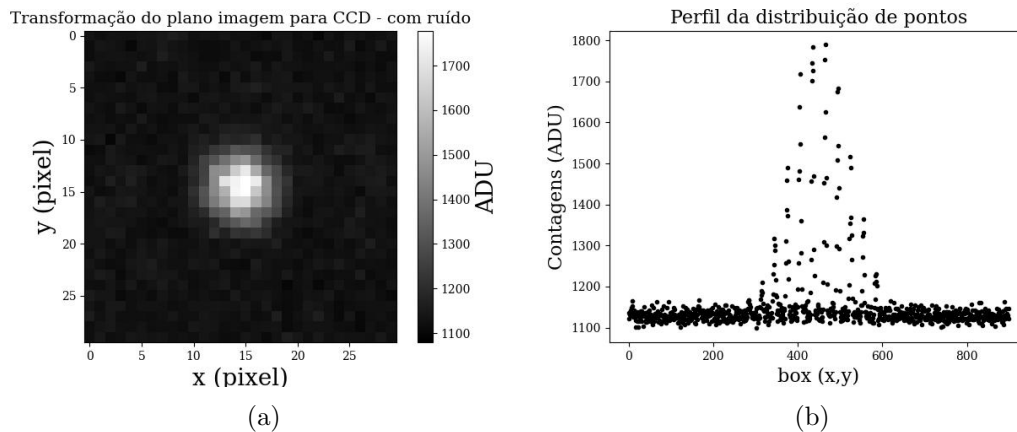


Figure 5.8. Resultado do processo de transformação dos raios no plano imagem do KrakenOS para fluxo no CCD, agora com as contagens referentes aos ruídos incluídas nas contagens.

```

2 | nc = 38 # número dos coeficientes para expansão polinomial de
   |     Zernike
3 | npix = 256 # número de pixels para a geração da psf
   |     individual
4 | A = np.ones(nc)
5 | zcoef,mat,rms2chief,rms2centroid,fittingerror = kos.
   |     Zernike_Fitting(X,Y,Z,A)

```

onde a variável  $A$  está relacionada com o grau do polinômio de Zernike e a variável de interesse da função  $Zernike\_Fitting()$  é  $zcoef$  que são os coeficientes do polinômio.

Nesse ponto, foi necessário criarmos uma função que calcula os coeficientes de Zernike da diferença de fase causada pelas turbulências atmosféricas. A variável importante aqui é o parâmetro de Zernike. Ela determina os modos de ordem superior da variância da frente de onda (Tyson and Frazier, 2022):

$$\sigma^2 = 0.294 \left( \frac{D}{r_0} \right)^{5/3}. \quad (5.4)$$

Como saída deste procedimento, temos os coeficientes de Zernike devidos à diferença de fase causada pelas turbulências atmosféricas. Esses coeficientes são usados como entrada para a função do KrakenOS que gera dados de uma PSF influenciada por eles, a função  $PsfPlus()$ . O resultado para uma região de interesse de  $256 \times 256$  píxeis pode ser visto na Figura 5.9.

Devido a tempo de processamento, ainda não foi possível criar um mapa de turbulências aplicado para toda a imagem. Por isso, como alternativa momentânea, usamos uma porção da imagem de turbulência para aplicá-la ao redor das fontes na imagem simulada. Isso envolve determinar os centróides dos objetos na imagem, e aplicar uma máscara contendo a turbulência atmosférica ao redor de cada fonte. Um código para detecção de fontes acima dos ruídos previamente mencionados foi escrito da seguinte forma:

```

1 | def detect_sources(image, thr):
2 |     threshold = thr*np.std(image)
3 |     sources = []
4 |     for i in range(2, image.shape[0] - 2):

```

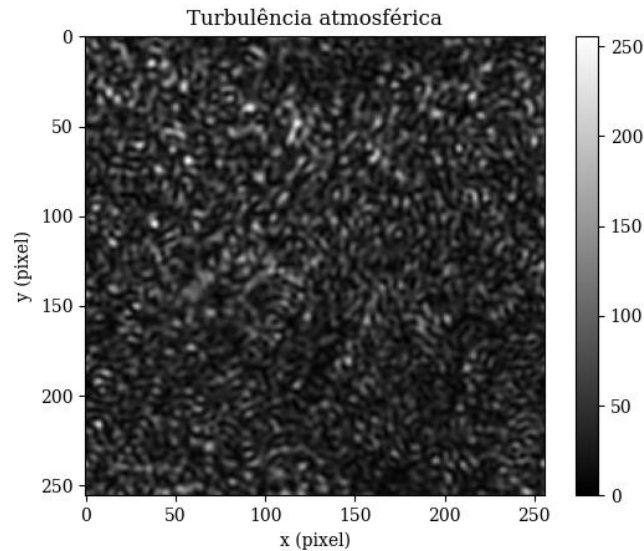


Figure 5.9. Turbulência reproduzida em uma parte do campo.

```

5   for j in range(2, image.shape[1] - 2):
6       local_region = image[i-1:i+2, j-1:j+2]
7       if image[i, j] == np.max(local_region) and image[
8           i, j] > threshold:
9           # Calcular o centroide em uma janela ao redor
10          da fonte detectada
11          y_centroid, x_centroid = calculate_centroid(
12              image, i, j, window_size=5)
13          sources.append((x_centroid, y_centroid))
14   return sources

```

Onde é determinado um corte do fundo de céu e toda a imagem é varrida para identificação das fontes. Apesar da necessidade de aperfeiçoamento desta função, escolhemos um limite para o corte de fundo de céu que identificasse todas as fontes na imagem simulada.

Com os centros de cada fonte, determinamos a posição das máscaras de turbulência atmosférica, que serão aplicadas em cada uma delas. O resultado de todo este procedimento pode ser visto na Figura 5.10. É importante destacar aqui dois pontos: nesta figura estão aplicadas somente as máscaras, não as fontes. Além disso, todo esse procedimento precisa ser aperfeiçoado.

## 5.5 Imagem astronômica de uma simulação óptica

Desenvolvida a transformação dos dados de saída do KrakenOS, ou seja, a posição dos raios no plano imagem, para coordenadas compatíveis com aquelas de um CCD, passamos para a concepção de um campo de estrelas.

A primeiro problema é desenvolver uma maneira de distribuir as fontes em um determinado campo. O motivo disso é que, como o KrakenOS faz as simulações ópticas considerando raios paraxiais, o diagrama de pontos no plano imagem sempre será distribuído centrado no eixo óptico. Isso, é claro, não existindo a presença de nenhuma aberração óptica.

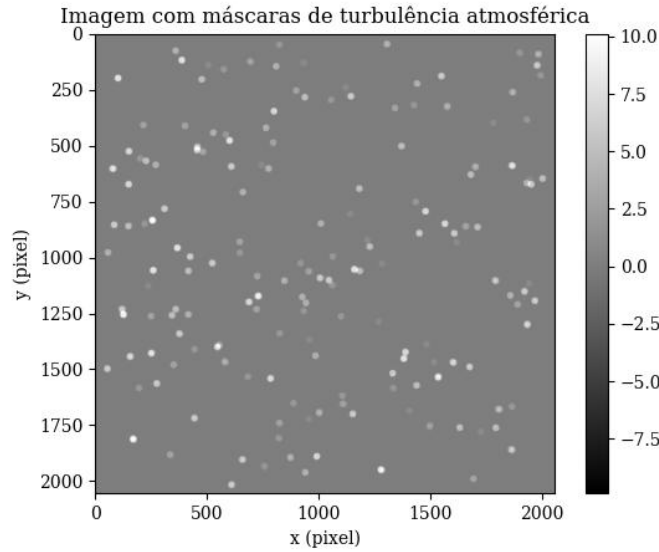


Figure 5.10. Imagem com as máscaras de turbulência atmosféricas na posição de cada fonte. Importante destacar, as fontes ainda não estão colocadas aqui, somente as contagens relacionadas aos ruídos, desenvolvidos nas seções anteriores.

Baseando-se no nosso objetivo principal, além de fazer uma distribuição de fontes, elas precisam respeitar a proporcionalidade entre as distâncias relativas entre as fontes de uma imagem real. Desse modo, precisamos dar como entrada a coordenada  $(x, y)$  de uma dada fonte e a sua posição na imagem simulada deve ser a mesma, além de que a separação entre pares de fontes, ou seja, suas distâncias relativas, também deve ser preservada.

Com esse fim, manipulamos algumas funções em duas partes: a primeira é uma função que permita introduzirmos as posições das fontes, segundo um dado de entrada, e a segunda parte, uma função que distribui diversas fontes, segundo as posições dadas. As classes do KrakenOS que cumprem esse fim são a *PupilCalc()* e a *SourceRnd()* e as funções que manipulam os dados de saída dessas duas classes são *cos\_hand()* e *posicoes\_raios()*, que serão descritas nesta seção.

Até este ponto, os dados de saída do KrakenOS para o plano imagem consistem nas coordenadas  $(x, y, z)$ , que descrevem a posição dos raios, e nos cossenos diretores  $(l, m, n)$ , que indicam sua direção em relação ao sistema de coordenadas adotado. Para manipular essas variáveis, utilizamos duas classes: a já empregada *SourceRnd()* e a *PupilCalc()*, que também gera os raios, permitindo o ajuste de suas posições. Assim, obtemos dois conjuntos de dados distintos — um gerado pela *SourceRnd()* e outro pela *PupilCalc()*. A escolha da *SourceRnd()* se deve à sua capacidade de aplicar uma função de distribuição de pontos, essencial para o nosso estudo.

Como o objetivo é manipular a direção dos raios e com isso a disseminação de várias fontes em um campo, combinamos os cossenos diretores da classe *PupilCalc()* como orientação a todos os raios e a classe *SourceRnd()* para fazer a distribuição de pontos de uma dada fonte. Tomando os cossenos diretores gerados em cada uma das classes, determinamos a posição dos raios do seguinte modo:

$$\tan(\theta_x) = \frac{l}{n}, \quad (5.5)$$

$$\tan(\theta_y) = \frac{m}{n}, \quad (5.6)$$

onde  $\theta_x$  representa o ângulo na direção  $x$  e  $\theta_y$ , o ângulo na direção  $y$ . Dessa forma, para cada classe, existe um conjunto de ângulos  $\theta_x$  e  $\theta_y$ . Após essa etapa, realizamos a soma desses dois ângulos, obtendo um novo ângulo  $\theta$  (ou seja,  $\theta = \theta_x + \theta_y$ ). Com o ângulo resultante, determinamos as coordenadas  $(x, y)$  nas respectivas direções. Em seguida, utilizando essas novas coordenadas, calculamos os cossenos diretores, que agora incorporam o resultado de todo o processo descrito. O código da função foi implementado da seguinte maneira:

```

1 def cos_hand(v1, v2):
2     """ Dados da classe PupilCalc() """
3     [l1, m1, n1] = v1 # cossenos diretores
4     x1 = (l1/n1) # coordenada em x
5     y1 = (m1/n1) # coordenada em y
6     theta_x1 = np.arctan2(x1, 1.0) # valor do ângulo em x
7     theta_y1 = np.arctan2(y1, 1.0) # valor do ângulo em y
8
9     """ Dados da classe SourceRnd() """
10    [l2, m2, n2] = v2 # cossenos diretores
11    x2 = (l2/n2) # coordenada em x
12    y2 = (m2/n2) # coordenada em y
13    theta_x2 = np.arctan2(x2, 1.0) # valor do ângulo em x
14    theta_y2 = np.arctan2(y2, 1.0) # valor do ângulo em y
15
16    """ Soma dos ângulos """
17    theta_x = theta_x1+theta_x2 # soma dos ângulos dos raios
18    em x
19    theta_y = theta_y1+theta_y2 # soma dos ângulos dos raios
20    em y
21
22    """ Determinação das coordenadas """
23    x = np.tan(theta_x) # valor da coordenada em x
24    y = np.tan(theta_y) # valor da coordenada em y
25    z = 1.0 # valor da coordenada em z
26    r = np.sqrt(x**2+y**2+z**2) # valor da posição
27
28    """ Determinação dos cossenos diretores """
29    l = x/r # cosseno diretor l
30    m = y/r # cosseno diretor m
31    n = z/r # cosseno diretor n
32
33    lmn = np.asarray([l,m,n]) # array com os cossenos
34    diretores
35
36    return lmn

```

O uso dessa função é essencial na segunda função de distribuição das fontes no campo. A função `posicoes_raios()` consegue distribuir os raios de uma fonte, segundo um centróide  $(x, y)$  de entrada. Na imagem simulada apresentada aqui, os dados de centróide foram tomados da imagem real a partir de uma redução astrométrica usando a *task* de astrometria do PRAIA (Assafin, 2023). A função usa as posições do centróide como entrada para a função `FieldX`, para  $x$ , e `FieldY`, para  $y$ , da classe `PupilCalc()`. A quantidade de

raios em uma fonte é determinada pela função `Samp()`, da `PupilCalc()`, que é o número de arranjo dos raios.

Depois disso, define as coordenadas dos raios e os cossenos diretores usando a função `Pattern2Field()` da classe `PupilCalc()`, que usa a quantidade de raios determinada com essa função como entrada para determinar o número de raios da função `num()` da classe `SourceRnd()`. Após esse passo, são definidas as coordenadas e cossenos diretores, agora usando esta classe. Os cossenos diretores definidos em ambas as classes são armazenados em uma lista cada, e são variáveis de entrada para a função `cos_hand()`. Com os cossenos diretores de saída desta função, então são determinadas variáveis para o traço dos raios, como usual no KrakenOS. Por fim, são definidas as variáveis  $(x, y)$  no plano imagem do telescópio. Todo o procedimento da função `posicoes_raios` está descrito no fluxograma na Figura 5.11. O resultado desta parte do procedimento pode ser visto na Figura 5.12.

Uma dificuldade que tivemos aqui foi encontrar uma maneira de diferenciar as estrelas por magnitude. A primeira tentativa foi determinar uma quantidade de raios proporcionais à magnitude. Porém, isso não se mostrou muito viável, pelo menos por enquanto. O motivo é que um número mínimo de raios é exigido para uma fonte tomar forma, e colocar esse número em uma escala definida exige muitos raios para as estrelas mais brilhantes. Aqui a limitação foi computacional. A solução encontrada foi diminuir o campo de distribuição dos raios para intervalos de magnitude, de modo que as estrelas mais fracas têm um diâmetro aparente menor do que as estrelas mais brilhantes.

Passada a formação das fontes no plano imagem, agora basta usarmos a rotina desenvolvida para transformação de coordenadas dele para coordenadas de CCD, a função `image()`, para a formação de um campo de estrelas. O resultado está na Figura 5.13. Na Figura 5.14, introduzimos os ruídos desenvolvidos com as rotinas da Seção 5.4.

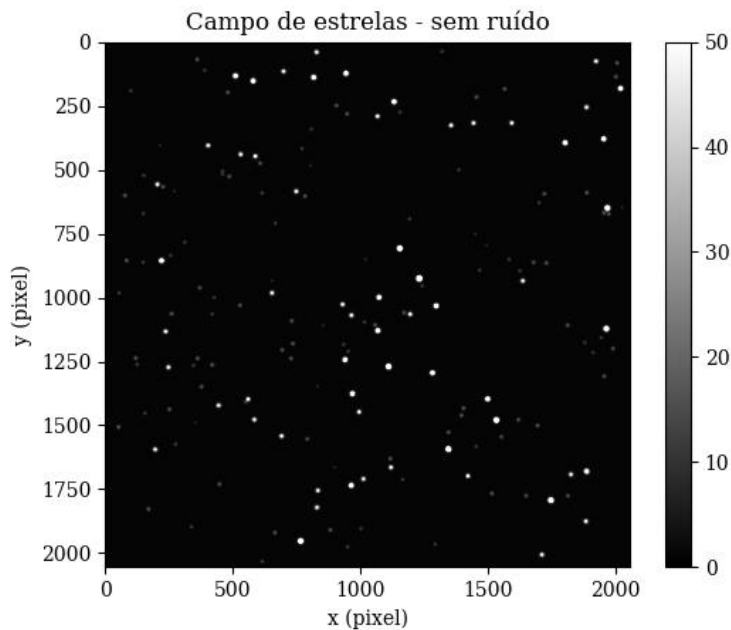


Figure 5.13. Imagem simulada com o KrakenOS composta por estrelas identificadas no campo do aglomerado aberto ESO518-03, com posições calculadas a partir da redução astrométrica obtida com a task de astrometria do PRAIA (Assafin, 2023). Nessa imagem não há a introdução de ruído.

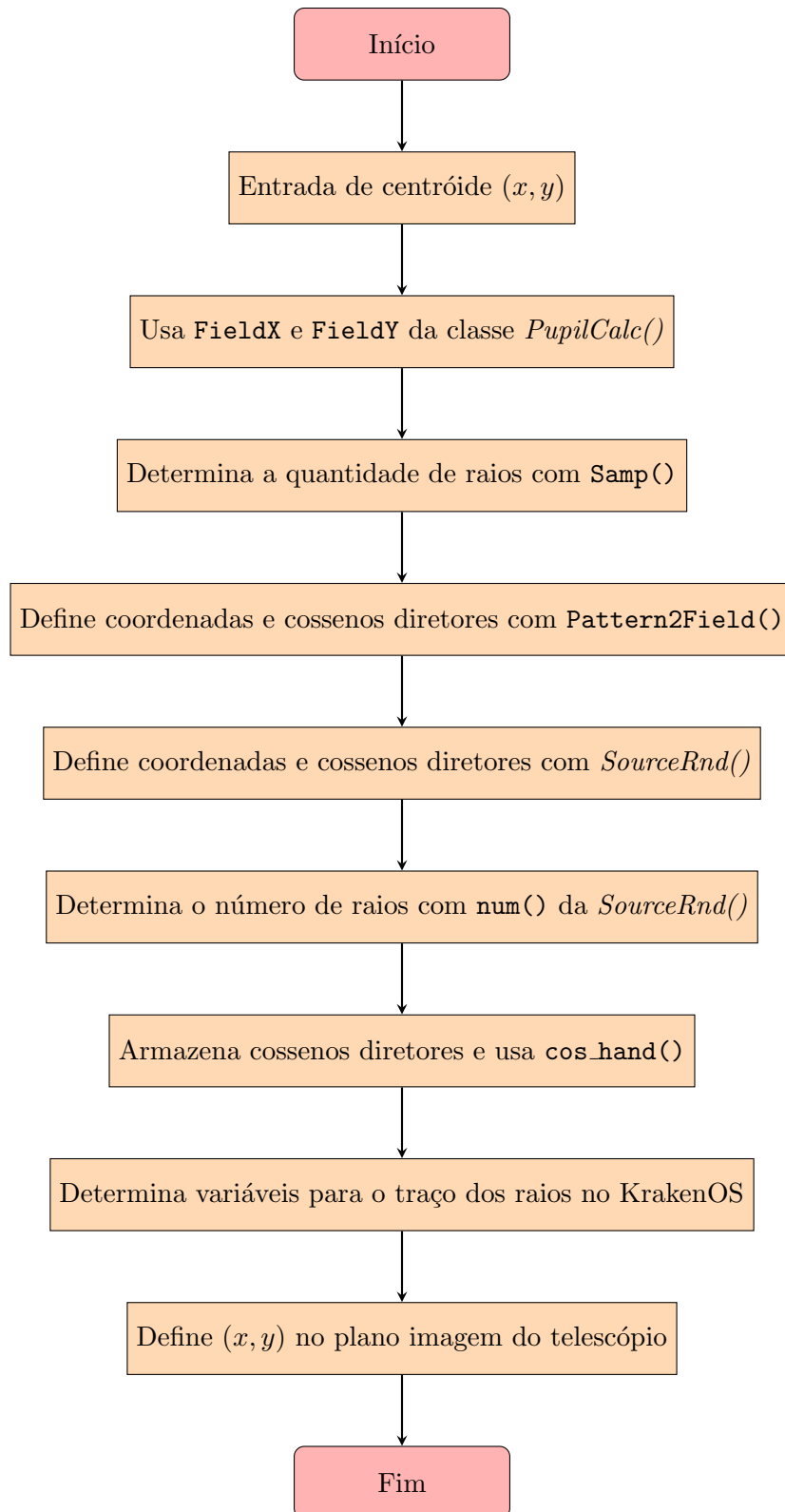


Figure 5.11. Fluxograma da função `posicoes_reais()` para formação de imagem no plano focal do telescópio simulado.

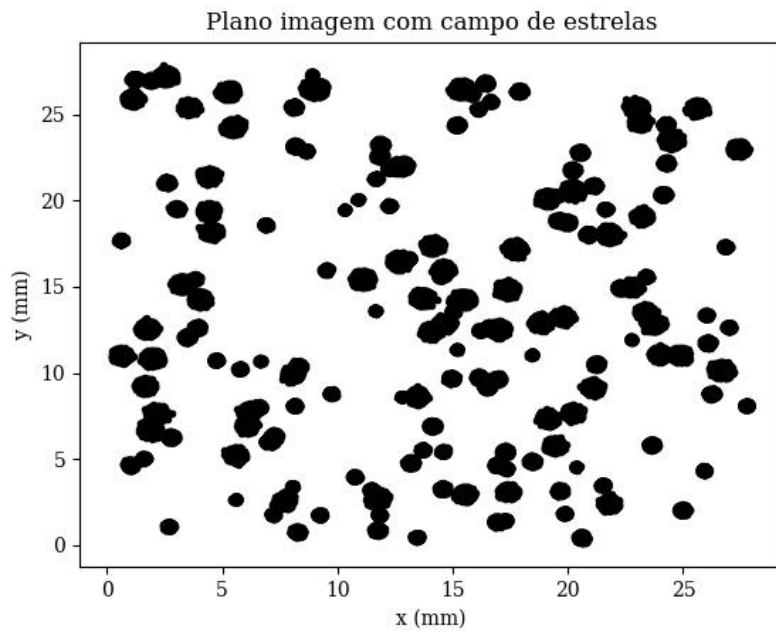


Figure 5.12. Resultado da distribuição de estrelas no plano imagem.

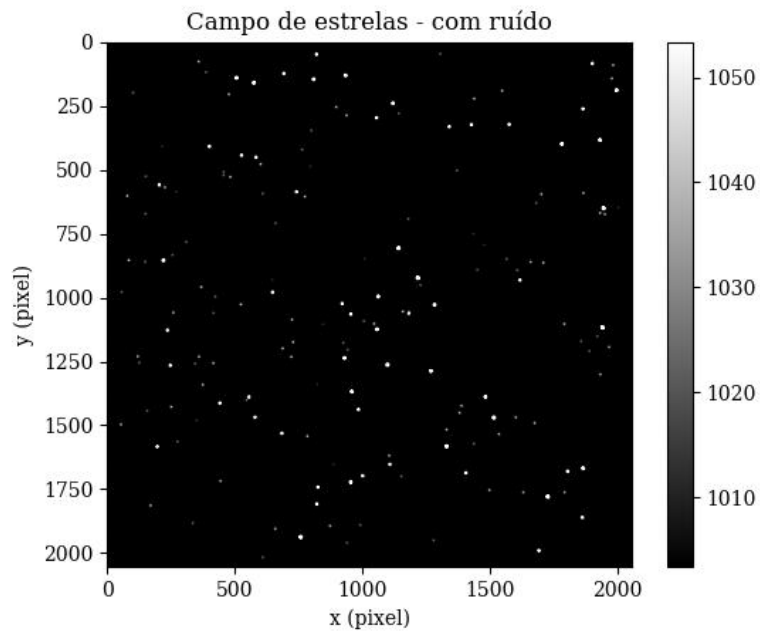


Figure 5.14. Imagem simulada com o KrakenOS composta por estrelas identificadas no campo do aglomerado aberto ESO518-03, agora com a introdução das contagens referentes às rotinas que reproduzem os ruídos.

## Chapter 6

# Análise e Resultados

Para a análise e apresentação dos resultados, faremos uma comparação das distribuições de pontos na imagem desenvolvida. Depois disso, demonstraremos o funcionamento do sistema óptico modelado para o telescópio BC0.6-m, introduzindo algumas aberrações no sistema. Utilizaremos a função que introduz a diferença de fase descrita pelos polinômios de Zernike, usando o KrakenOS. Nas comparações, dividimos primeiro apresentando o resultado da distribuição para o caso da fonte única e depois para as estrelas da imagem de campo completo.

### 6.1 Análise da imagem com fonte única

Podemos analisar a efetividade da reprodução do fluxo no CCD e tomar uma PSF da imagem com uma fonte.

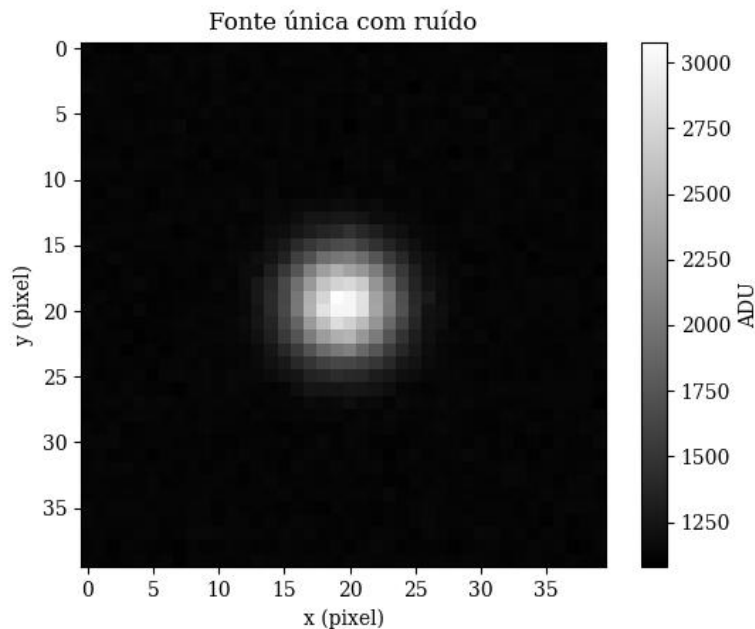


Figure 6.1. Fonte única com contagens de fundo de céu, bias, corrente de escuro e turbulência atmosférica.

Na Figura 6.1, vemos a imagem da fonte única e na Figura 6.2, temos o seu perfil

radial. Como esperado, é possível ver o comportamento gaussiano do perfil. Nesse caso, a fonte única foi gerada com uma amostra de arranjo de 200 raios (variável *pupil.Samp*).

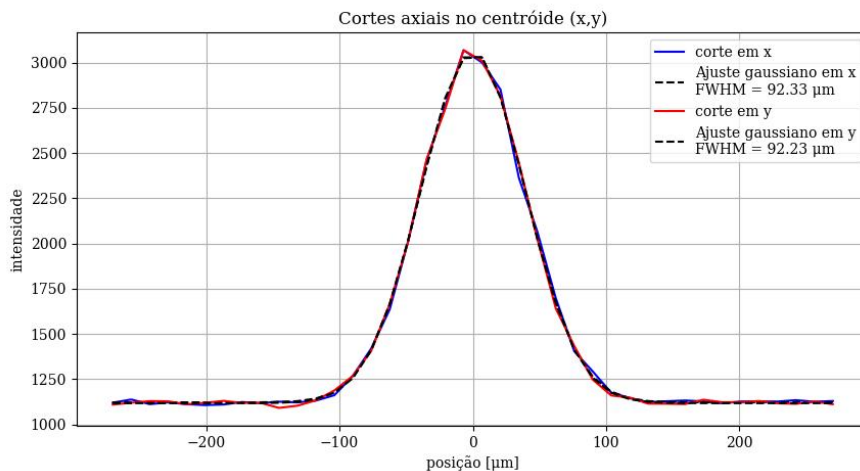


Figure 6.2. Perfil radial no centróide em  $(x, y)$  e resultado da largura a meia altura da imagem com fonte única.

Usando a biblioteca `CCDData` do Astropy (Price-Whelan et al., 2018), podemos converter a imagem para o formato FITS (do inglês *Flexible Image Transfer System*) (Wells et al., 1981) para uma análise de características da fonte na imagem resultante. Podemos vê-las na tabela 6.1.

FWHM	2".31
Fluxo	101886 ADU
Magnitude	12.17

Table 6.1. Largura a meia altura, fluxo e magnitude estimada da fonte única.

As quantidades podem ser medidas usando a função `imexam` do IRAF (do inglês, *Image Reduction and Analysis Facility*) (Tody, 1986). As medidas estão na Tabela 6.1. A escala de pixel usada para conversão das unidades de FWHM (pixel) para segundos de arco foi a do telescópio BC0.6-m, 0".34/pixel. O raio da abertura usada pelo IRAF na determinação do fluxo e da magnitude foi de 4".22.

## 6.2 Análise da imagem de campo completo

### 6.2.1 Comparação visual

Como especificado no Capítulo 5, para reprodução da imagem simulada, usamos posições  $(x, y)$  de estrelas, resultado da redução com a *task* de astrometria do PRAIA (Assafin, 2023). Na redução, existem aquelas estrelas que são identificadas como estrelas de catálogo, determinadas a partir da diferença entre a posição medida no CCD e a posição de catálogo. No nosso caso, escolhemos que essa diferença não deveria ser maior que 0".060. Portanto, as estrelas que estão simuladas na imagem de campo são somente aquelas que passaram por esse critério. Na Figura 6.3a estão marcadas pelos círculos verdes, aquelas estrelas cujas posições foram reproduzidas na imagem simulada.

Intervalo de magnitude	field()
$11 \leq m < 12$	0.01
$12 \leq m < 13$	0.008
$13 \leq m < 14$	0.006
$14 \leq m < 15$	0.004
$15 \leq m < 16$	0.002
$16 \leq m < 17$	0.0015
$17 \leq m < 18$	0.0010

Table 6.2. Valores de entrada na variável `field()` para cada intervalo de magnitudes das estrelas no campo.

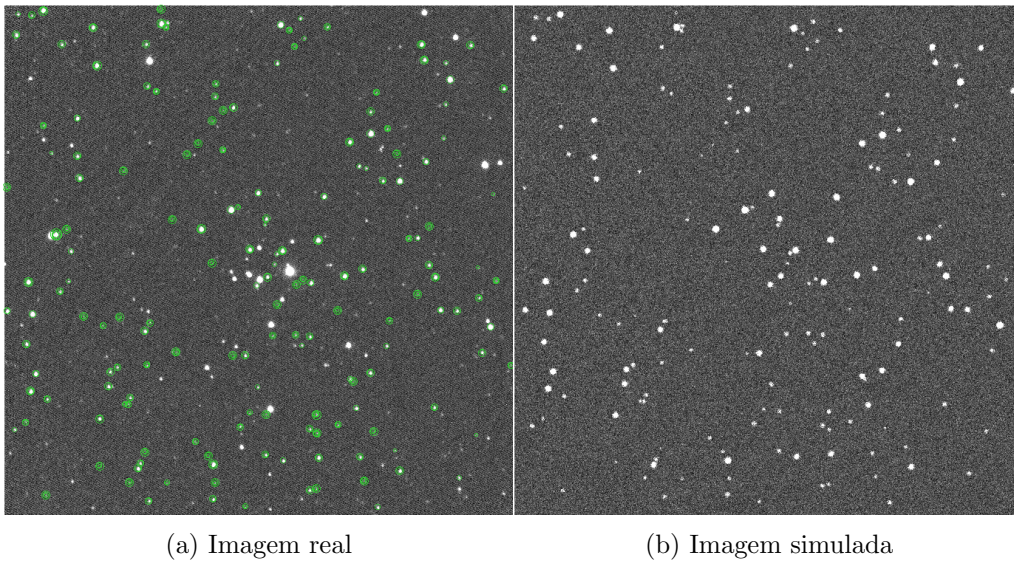


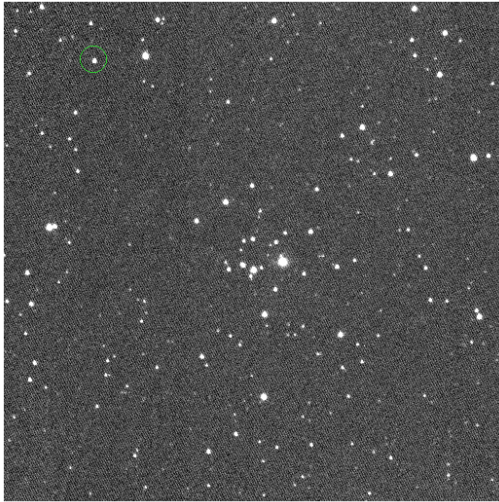
Figure 6.3. Comparação visual entre a imagem real do aglomerado aberto ESO518-03 e a imagem simulada.

Comparando a distribuição das estrelas destacadas em verde na imagem da Figura 6.3a com aquelas presentes na Figura 6.3b, observa-se que a disposição das estrelas no campo é equivalente. Além disso, é possível identificar visualmente as diferenças de magnitude entre elas. Essa análise foi viabilizada por meio da manipulação da função `field()` da classe `SourceRnd()` do KrakenOS, que define o ângulo de cobertura dos raios a partir do pólo da gaussiana como entrada utilizada para gerar a fonte. Para cada faixa específica de magnitude, foram selecionados valores adequados para a função `field()` (Tabela 6.2). No entanto, é necessário aprimorar esse processo para representar com maior precisão as estrelas de maior brilho.

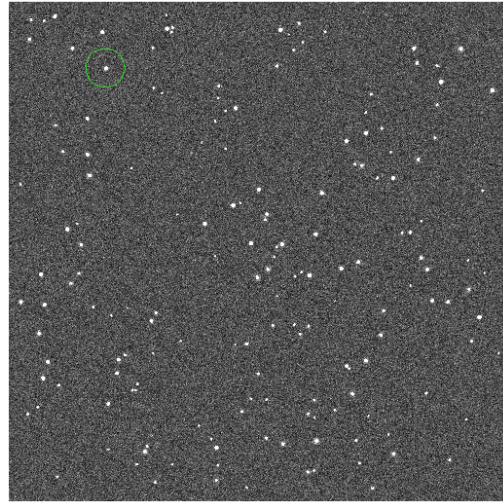
### 6.2.2 Características da imagem de campo

Faremos uma análise parecida com a da Seção 6.1, mas agora, vamos comparar uma das estrelas do campo da imagem simulada com a imagem real do campo de estrelas do aglomerado aberto ESO518-03.

Para a análise, escolhemos uma estrela de cada imagem. Os requisitos para essa escolha foram ter magnitudes próximas (ambas estimadas com o IRAF) e ter posições equivalentes no campo, ou seja, a estrela escolhida na imagem simulada representa a estrela na imagem



(a) Estrela escolhida na imagem real, marcada pelo círculo verde.



(b) Estrela escolhida na imagem simulada, marcada pelo círculo verde.

Figure 6.4. Escolhemos a mesma estrela nas duas imagens. Na esquerda, o campo de estrelas da imagem real e na direita, da imagem simulada

real (Figura 6.4). Nas Tabelas 6.3 e 6.4, temos os resultados de medidas usando a função `imexam` do IRAF, tanto da fonte da imagem de campo simulada como na imagem de campo real, respectivamente. O recorte nas imagens real e simulada pode ser visto na Figura 6.5. É possível ver, na Figura 6.6, o perfil radial proporcionado pelo IRAF, tanto da estrela na imagem real (Figura 6.6a) como também da estrela na imagem simulada (Figura 6.6b).

FWHM	2".8
Fluxo	56279 ADU
Magnitude	13.12

Table 6.3. Largura a meia altura, fluxo e magnitude estimada da fonte da imagem real medido com o IRAF (Tody, 1986).

FWHM	2".54
Fluxo	27752 ADU
Magnitude	13.89

Table 6.4. Largura a meia altura, fluxo e magnitude estimada da fonte da imagem simulada medido com o IRAF (Tody, 1986).

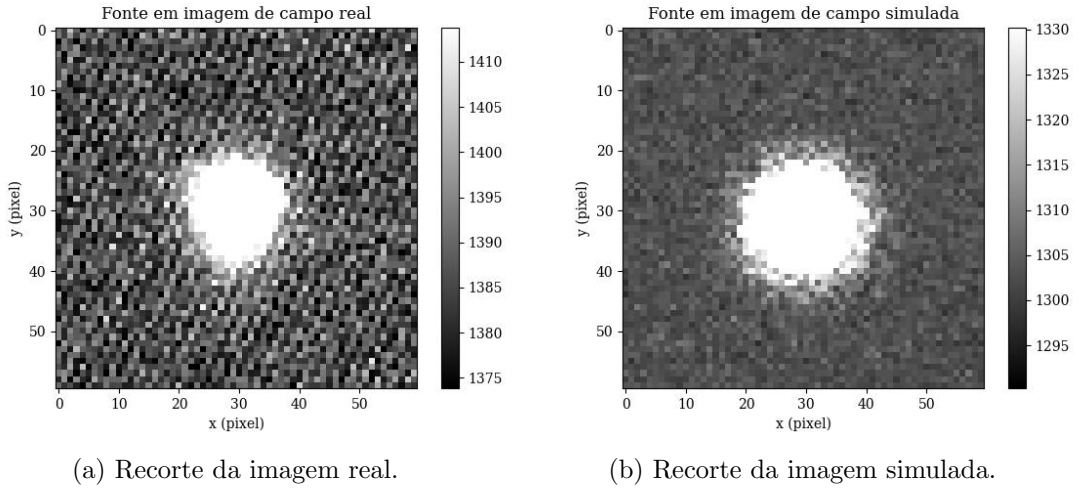


Figure 6.5. Na esquerda, vemos um recorte da imagem real com uma estrela de magnitude 13.62. Na direita, a estrela com posição equivalente.

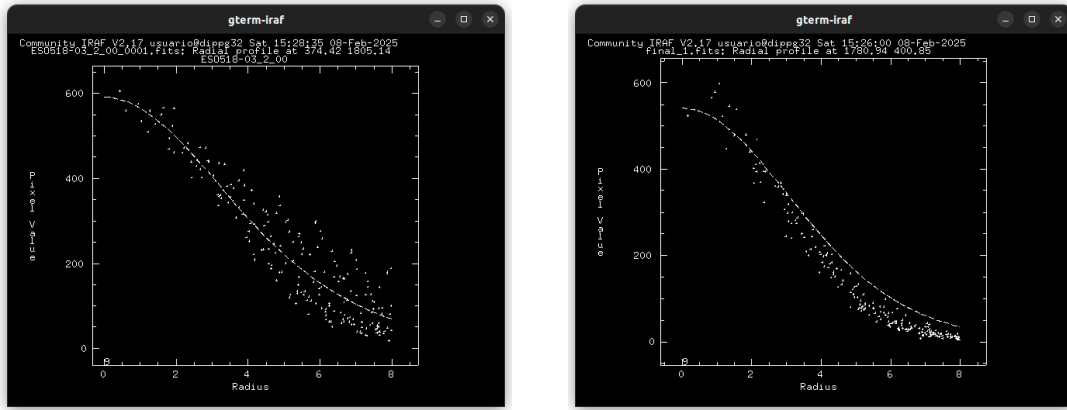


Figure 6.6. Na esquerda, vemos um recorte da imagem real com uma estrela de magnitude 13.62. Na direita, a estrela com posição equivalente na imagem simulada.

Nas Figuras 6.7 e 6.8, temos os perfis radiais para o caso real e simulado, respectivamente. Também temos uma medida da largura a meia altura das gaussianas ajustadas em cada uma das coordenadas do centro da fonte. Para tomarmos essas medidas em segundos de arco, podemos usar uma análise dimensional parecida com a da Equação 5.3, como segue:

$$\frac{[\text{medida}]}{[\text{escala}]} \times [\text{escala de pixel}] = \frac{\text{mm}}{\frac{\text{mm}}{\text{pixel}}} \times \left[ \frac{\text{''}}{\text{pixel}} \right]. \quad (6.1)$$

Essa escala transforma as medidas em milímetros para segundos de arco. A escala no denominador à direita da equação é aquela determinada na análise dimensional na Equação 5.3, com valor de 0.01355 mm/pixel. A escala de pixel é a do telescópio BC0.6-m, 0".34/pixel. Seguindo esta escala, as medidas para a largura a meia altura das PSFs ajustadas em  $x$  e em  $y$ , nas Figuras 6.7 e 6.8 estão na Tabela 6.5:

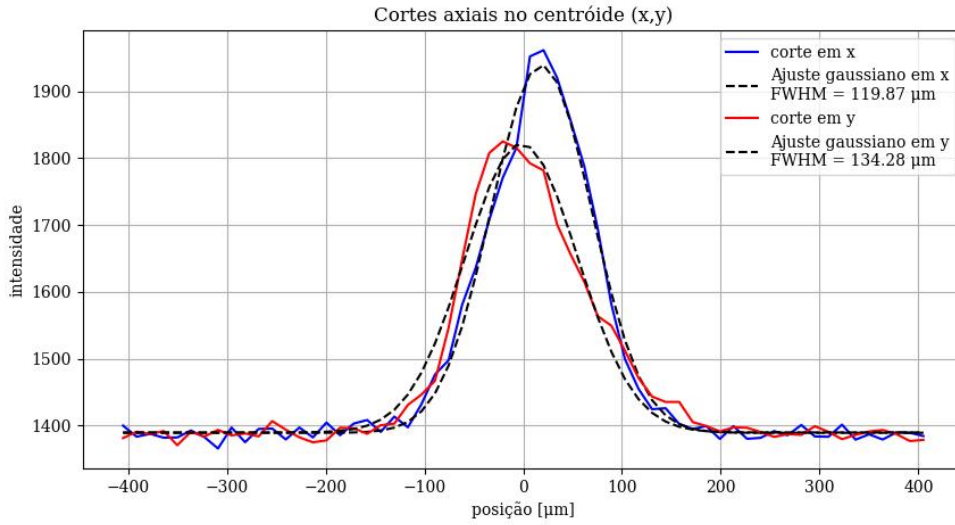


Figure 6.7. Perfil radial em  $x$  e  $y$  da estrela na imagem real.

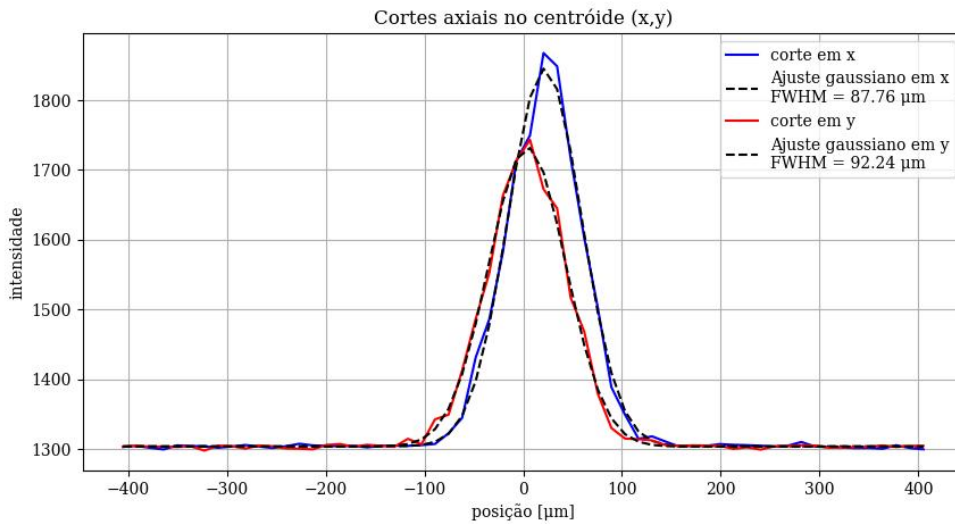


Figure 6.8. Perfil radial em  $x$  e  $y$  da estrela na imagem simulada.

imagem	FWHM $x$ (")	FWHM $y$ (")
simulada	2.20	2.31
real	3.01	3.36

Table 6.5. Largura a meia altura nos perfis radiais em  $(x, y)$  das fontes nas imagens real (Figura 6.7) e simulada (Figura 6.8).

Para obtermos os perfis radiais, tomamos as contagens na linha central na coordenada  $x$  e na coordenada  $y$  ( $x = 30$  e  $y = 30$ ) dos quadros de análise (Figura 6.5). Percebemos uma diferença entre o perfil do fluxo ao longo da coordenada  $x$  em relação ao da coordenada  $y$  (Figuras 6.7 e 6.8). No caso da imagem real, isso pode ser justificado pela passagem de

nuvens durante a observação ou pela presença de alguma aberração óptica no telescópio. No caso da imagem simulada, tal comportamento tem como uma de suas causas a ação da rotina de turbulência. No entanto, como esta ainda se encontra em desenvolvimento, estamos investigando ambos os comportamentos (imagem real e imagem simulada).

Também podemos perceber uma pior resolução angular comparando os perfis dados pela Figura 6.7 (imagem real) em relação à Figura 6.8 (imagem simulada). Isso é justificado pela relação entre duas variáveis. A primeira é o *seeing* dado como entrada na função de distribuição de pontos de uma PSF e o valor de entrada da variável da função *SourceRnd()* do KrakenOS. Um aperfeiçoamento da ferramenta é encontrar uma melhor relação entre essas duas variáveis para melhor reproduzir o perfil do fluxo bem como a resolução angular na imagem simulada.

### 6.3 Funcionamento do telescópio modelado

A inspeção do funcionamento do telescópio simulado computacionalmente pode ser feita introduzindo algumas aberrações ópticas. A justificativa para isso é que, esperamos que um telescópio simulado, onde há a introdução de aberrações, se comporte como um telescópio real com estas mesmas aberrações. As aberrações foram introduzidas baseando-se no grau do polinômio de Zernike referente a elas, segundo a notação de Noll (1976) (Sotelo Burke, 2022). Como exemplo, introduzimos três aberrações ópticas: o desfoque (Figura 6.9), o astigmatismo (Figura 6.10) e a coma (Figura 6.11), descritas na Tabela 6.6.

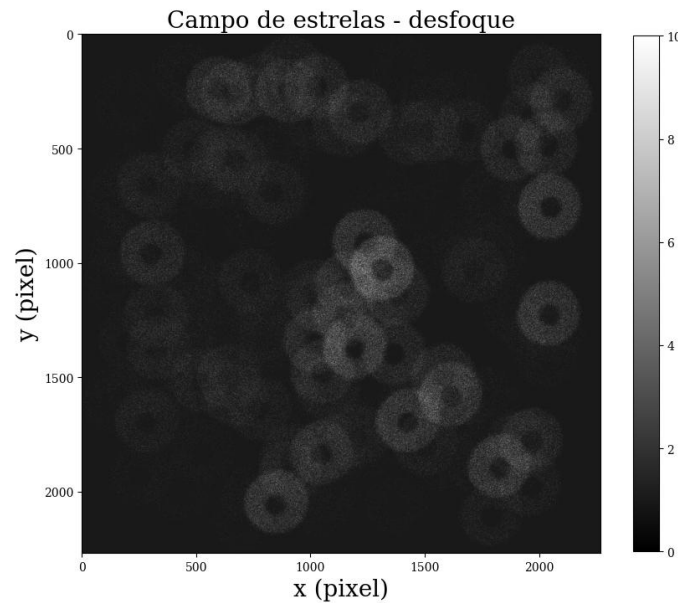


Figure 6.9. Campo de estrelas aplicando o desfoque, aberração óptica de primeiro grau.

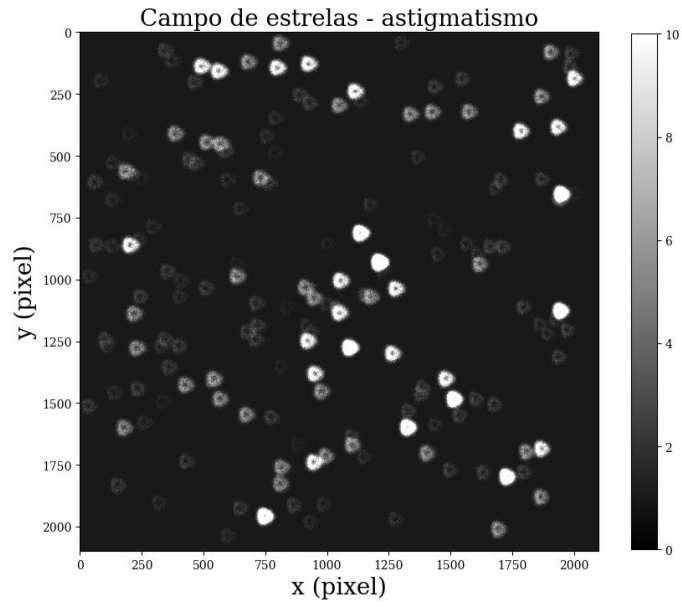


Figure 6.10. Campo de estrelas aplicando o astigmatismo, aberração óptica de segundo grau.

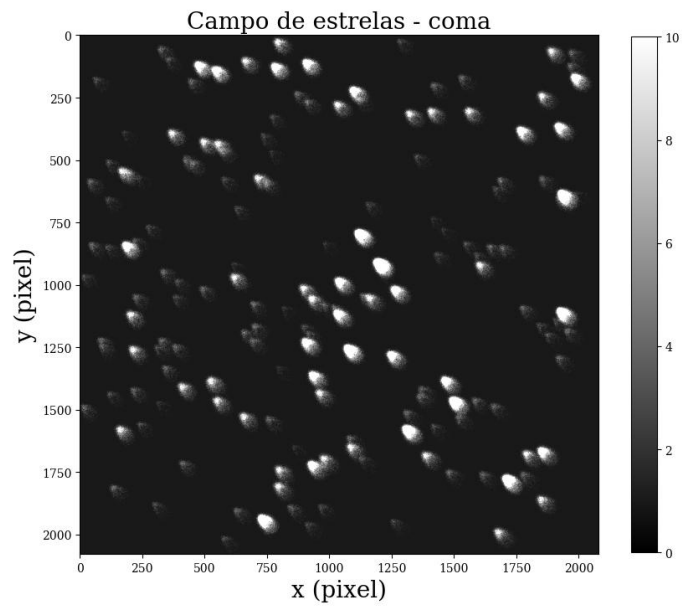


Figure 6.11. Campo de estrelas aplicando o coma, aberração óptica de terceiro grau.

Aberração	Coefficiente	Valor
Desfoque	4	0.01
Astigmatismo Pri A (senoidal)	5	0.001
Astigmatismo Pri B (cossenoidal)	6	0.0030
Coma (fase senoidal)	7	0.001
Coma (fase cossenoidal)	8	0.001

Table 6.6. Valores introduzidos nos polinômios de Zernike para a introdução das aberrações ópticas de desfoque (Figura 6.9), astigmatismo (Figura 6.10) e coma (Figura 6.11). Os coeficientes são baseados na notação de Noll (1976) (Sotelo Burke, 2022).

É possível ver nas figuras que, com as aberrações ópticas, o telescópio simulado tem o comportamento análogo ao de um telescópio real.

## 6.4 Discussão dos resultados

Na Seção 6.1, são apresentadas algumas características relevantes das rotinas de simulação da fonte. O ponto central a destacar é que o comportamento esperado para uma fonte astronômica foi reproduzido. Utilizando a conversão de medidas de  $\mu\text{m}$  para segundos de arco, a largura à meia altura em ambas as coordenadas resultou em aproximadamente  $2''.3$ . Melhorias na rotina responsável por reproduzir as flutuações decorrentes da turbulência atmosférica ainda são necessárias e constituem uma das perspectivas futuras deste trabalho, sendo discutidas em maior detalhe na comparação com uma fonte de imagem real ao longo desta seção.

Quando comparamos ambas as imagens, real e simulada, observamos que as estrelas da imagem feita a partir de uma simulação respeitam a distribuição das estrelas identificadas no campo observado. Esse é um passo importante para futuras imagens simuladas, pois não há mudança no arranjo de estrelas, assim como também nas distâncias entre as estrelas. Em outras palavras, as posições relativas estão preservadas.

Como destacado na Seção 6.2, utilizamos as posições  $(x, y)$  obtidas de uma redução astrométrica prévia da imagem do aglomerado aberto. Vale ressaltar que isso fez parte apenas da metodologia de desenvolvimento da nossa ferramenta. No entanto, para os estudos futuros sobre a redução astrométrica a partir de simulações ópticas, não será utilizada nenhuma redução prévia. Qualquer alteração nesse processo impactaria significativamente a astrometria relativa, em que a disposição das estrelas é essencial, como explicado no Capítulo 2.

Ao realizar a comparação visual, fica claro que uma limitação da nossa metodologia ainda reside na reprodução precisa das magnitudes das estrelas. Em alguns casos, as estrelas mais brilhantes apresentam um diâmetro aparente menor na imagem simulada em comparação com a imagem real. O procedimento para a construção da imagem simulada indica que, além de aumentar o número de raios para as estrelas de campo, esse número deve ser associado à magnitude da estrela e ao diâmetro aparente selecionado para ela.

Na comparação entre uma estrela da imagem simulada e sua equivalente na imagem real, é necessário melhorar a reprodução das características do fundo de céu. Conforme apontado no Capítulo 5, criamos uma máscara aplicada apenas ao redor da estrela como uma tentativa de reproduzir as características da turbulência atmosférica. No entanto, ao analisar as contagens na parte inferior do ajuste na Figura 6.8, nota-se uma suavidade maior do que a esperada, quando comparada com a Figura 6.7, referente à imagem real.

Um aprimoramento dessa rotina está em andamento e representa uma das perspectivas futuras deste trabalho.

Nas Figuras 6.6a e 6.6b, são exibidos os perfis radiais, agora medidos com o IRAF. Esses perfis demonstram uma boa reprodução da PSF da fonte na imagem simulada. No entanto, na parte correspondente ao fundo de céu, há uma diferença, corroborando a observação anterior.

O caso da reprodução das magnitudes tem relação com a quantidade de raios. Para magnitude, podemos analisar a precisão das medidas. Considerando a equação da magnitude como:

$$m = K - 2.5 \log(F), \quad (6.2)$$

onde  $K$  é uma constante e  $F$ , o fluxo, o erro será dado propagando a incerteza, com a conhecida equação:

$$\sigma_m = \sqrt{\left(\frac{\partial m}{\partial F} \times \sigma_F\right)^2} = \left|\frac{\partial m}{\partial F}\right| \times \sigma_F. \quad (6.3)$$

Considerando a Equação 6.2, a derivada em relação ao fluxo é dada com o seguinte desenvolvimento:

$$m = K - 2.5 \frac{\ln(F)}{\ln(10)} \Rightarrow \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial m}{\partial F} = -\frac{2.5}{\ln(10)} \frac{1}{F}. \quad (6.5)$$

Substituindo na Equação 6.3, temos:

$$\sigma_m \left| -\frac{2.5}{\ln(10)} \frac{1}{F} \right| \times \sigma_F \quad (6.6)$$

$$\Rightarrow \sigma_m = \frac{2.5}{\ln(10)} \frac{\sigma_F}{F}. \quad (6.7)$$

Para o erro do fluxo, usamos a seguinte relação:

$$\sigma_F = \sqrt{F + n(\sigma_{bg}^2 + G^{-1}F)}, \quad (6.8)$$

onde  $G$  é o ganho (em unidades de  $e^-/\text{ADU}$ ) e  $\sigma_{bg}$  é o desvio padrão das contagens de fundo de céu, obtida por meio da análise da imagem no DS9 (Smithsonian Astrophysical Observatory, 2000). Tomando os valores (em ADU) das Tabelas 6.3 e 6.4, os valores de precisão da magnitude atingem aproximadamente 0.1 mag. Portanto, há uma diferença importante entre as magnitudes medidas da estrela na imagem simulada comparadas com a estrela na imagem real. Esse é um ponto de aprimoramento na ferramenta, pois é necessário que as magnitudes estejam mais próximas, considerando a precisão da medida. Para isso, nossa limitação atual é computacional. Para reproduzir adequadamente a imagem de um campo estelar, é necessário gerar uma quantidade significativamente maior de raios de entrada no sistema, o que aumenta substancialmente o custo computacional. O computador utilizado neste projeto, com processador AMD® Ryzen 7 e 16GiB de memória RAM, embora bastante robusto, ainda não é capaz de gerar o número de raios necessário para essa finalidade. Podemos comparar esse desafio com a PSF de uma imagem gerada por uma única fonte (Figura 6.2), onde foi possível alcançar a suavidade desejada, utilizando uma amostra de 200 raios com a função *pupil.Samp()* do KrakenOS. Para imagens de campo, o aumento da quantidade de raios necessários é um fator crítico.

Além disso, outro aspecto de aprimoramento na reprodução de uma imagem astronômica está na reprodução das características da turbulência atmosférica e contagens de fundo de céu. Com respeito às turbulências atmosféricas, aplicamos somente uma máscara sobre as estrelas, contendo suas características. Apesar de não completo, estamos desenvolvendo uma rotina que reproduza as turbulências atmosféricas no campo todo, baseada na mesma teoria do desenvolvimento da atual rotina. Isso tende a contribuir para a melhor descrição das contagens de fundo de céu. Nesse quesito, podemos perceber que as pequenas oscilações nas contagens de fundo de céu aparecem no ajuste da PSF da fonte na imagem simulada (Figura 6.8), porém a amplitude das oscilações é menor do que na imagem real (Figura 6.7).

Um comentário sobre o funcionamento do telescópio modelado (Seção 6.3), diz respeito aos modos de introdução das aberrações ópticas. O desfoque é considerado uma aberração óptica de primeira ordem e a coma, uma aberração de terceira ordem (Malacara et al., 2003). A escolha dessas aberrações, como no exemplo, diz respeito à diferença de ordem, demonstrando que o telescópio simulado pode apresentar aberrações ópticas diversas. Isso é o esperado, haja vista que nosso objetivo é reproduzir a imagem astronômica simulada para estudo futuro das aberrações ópticas na redução astrométrica. Esse quesito demonstra um bom caminho na escolha do KrakenOS como simulador óptico para este fim. Esse simulador conta com funções que determinam quantitativamente as aberrações ópticas. A função *Phase()* é um exemplo neste sentido. Ela recebe como entrada a pupila de entrada do telescópio. Com as características dela, são determinadas as coordenadas dos raios, além da distância entre o pico e o vale da frente de onda (Herrera Vazquez and Guerrero, 2023).

## Chapter 7

# Conclusões e comentários

O procedimento de redução astrométrica é amplamente estabelecido. O objetivo deste projeto de pesquisa foi compreender a influência dos parâmetros instrumentais nesse processo e propor uma alternativa mais rigorosa para obtermos resultados mais precisos, tendo em conta o salto de oportunidade oferecido pela missão espacial Gaia. Nesse contexto, tornou-se necessário o desenvolvimento de uma ferramenta capaz de simular a formação de uma imagem astronômica a partir de uma simulação óptica, que leve em consideração a óptica do telescópio, possibilitada pelo simulador KrakenOS (Herrera et al., 2022a,b, Herrera Vazquez and Guerrero, 2023).

A simulação da imagem foi projetada para reproduzir todos os efeitos observados em uma imagem real. Nessa abordagem, utilizamos os dados fornecidos pela simulação óptica, que representam as posições dos raios no plano da imagem do telescópio simulado. A proposta visa garantir que cada raio incidente no plano da imagem seja correspondente a um elétron nesse plano e que as equivalências no processo de leitura do CCD sejam devidamente convertidas. Dessa forma, a influência dos parâmetros instrumentais na imagem é integralmente considerada. Através da metodologia apresentada, demonstramos que a simulação da imagem reflete adequadamente os efeitos desses parâmetros.

Ainda assim, melhorias significativas estão em andamento para o prosseguimento da pesquisa. Esperamos aprimorar a simulação no que diz respeito aos tempos de exposição, permitindo que o código receba o tempo de exposição como entrada e produza uma imagem simulada correspondente. Para isso, pretendemos explorar a relação entre a razão sinal-ruído e o tempo de integração da imagem ( $S/N \propto \sqrt{t}$ , onde  $t$  é o tempo de integração) (Howell, 2006), além de calcular a quantidade de elétrons gerados nesse intervalo e fazer as conversões adequadas para as contagens no CCD.

Além disso, será necessário refinar a modelagem das contagens do fundo de céu. Esse ponto é crucial, pois a turbulência atmosférica influencia a distribuição de luz que chega ao plano focal do telescópio. Comportamentos estocásticos, descritos pela estatística de Kolmogorov (Tyson and Frazier, 2022), estão sendo incorporados a uma função que reproduza esses efeitos na imagem simulada.

Por fim, espera-se que este trabalho também contribua para o *pipeline* astrométrico do novo instrumento instalado no telescópio PE1.6-m do OPD. A câmera SPARC4 (Rodrigues et al., 2012) já teve seus dados coletados para reprodução do instrumento na simulação.

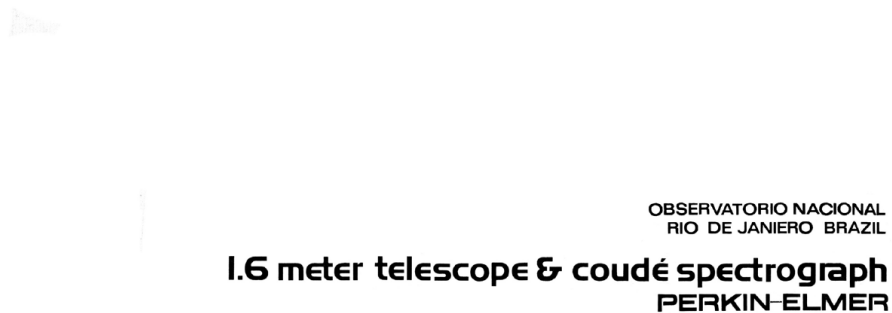
Como comentado na Seção 5.5 e reforçado na Seção 6.4, uma limitação para o funcionamento da ferramenta foi de natureza computacional. O desempenho do computador usado para o desenvolvimento da ferramenta, apesar de suficiente para uma imagem, demonstrase limitado para reproduzir de modo totalmente satisfatório as características de fluxo, além das características da turbulência atmosférica. O passo seguinte é rodar o código

em computadores com maior desempenho computacional. Para isso, temos duas alternativas. A primeira é uma máquina servidora de uso do nosso grupo de pesquisa. Ela é uma máquina com 128 GB de memória RAM, com 24 *cores*, com total de 100 TB de disco. A segunda alternativa é o Centro de Processamento de Dados do Observatório Nacional (CPDON). Este é um *cluster* multiusuário, voltado à computação de alto desempenho, que contém um sistema de gerenciamento composto de dois nós, um sistema de processamento composto de 8 nós de computação com 128 núcleos físicos cada (1024 núcleos no total) e um sistema de armazenamento com capacidade de 402 TB em discos (hard drives) e 900 TB em fitas (tapes) ([PNIPE, 2023](#)).

# Appendix A

## Telescópios do OPD

Nas páginas subsequentes deste apêndice, encontram-se algumas páginas de documentos históricos referentes aos telescópios do Observatório do Pico dos Dias (OPD), do Laboratório Nacional de Astrofísica (LNA). Além da importância histórica, os documentos foram essenciais para o desenvolvimento deste projeto, pois contêm medidas fundamentais para construir os telescópios. Os documentos foram cedidos por Saulo Garagaglioni, coordenador do OPD.



Digitalização 2022: CDG e MKM

Figure A.1. Capa do documento com a planta do desenho óptico do telescópio PE1.6-m, do Observatório do Pico dos Dias (OPD/LNA).



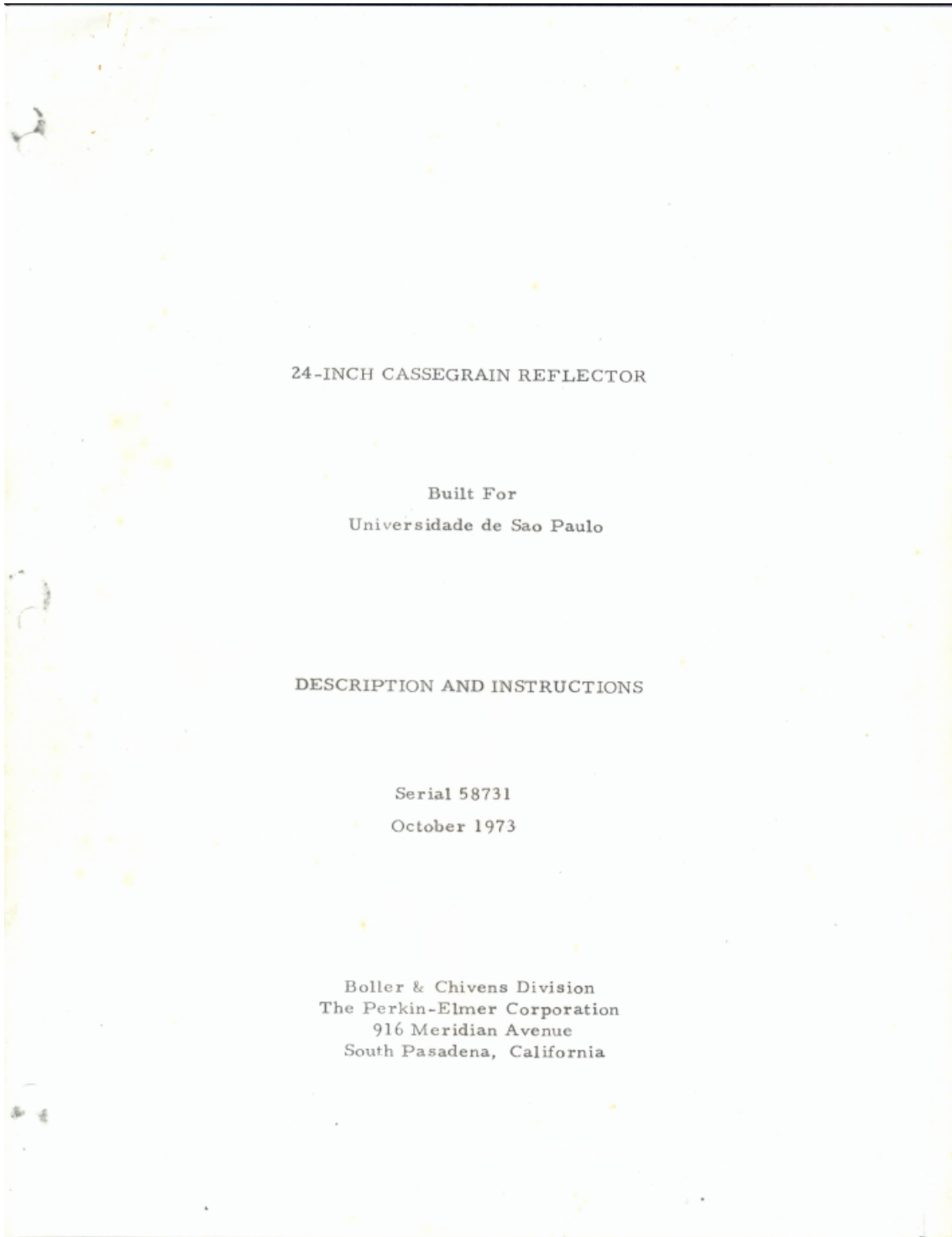
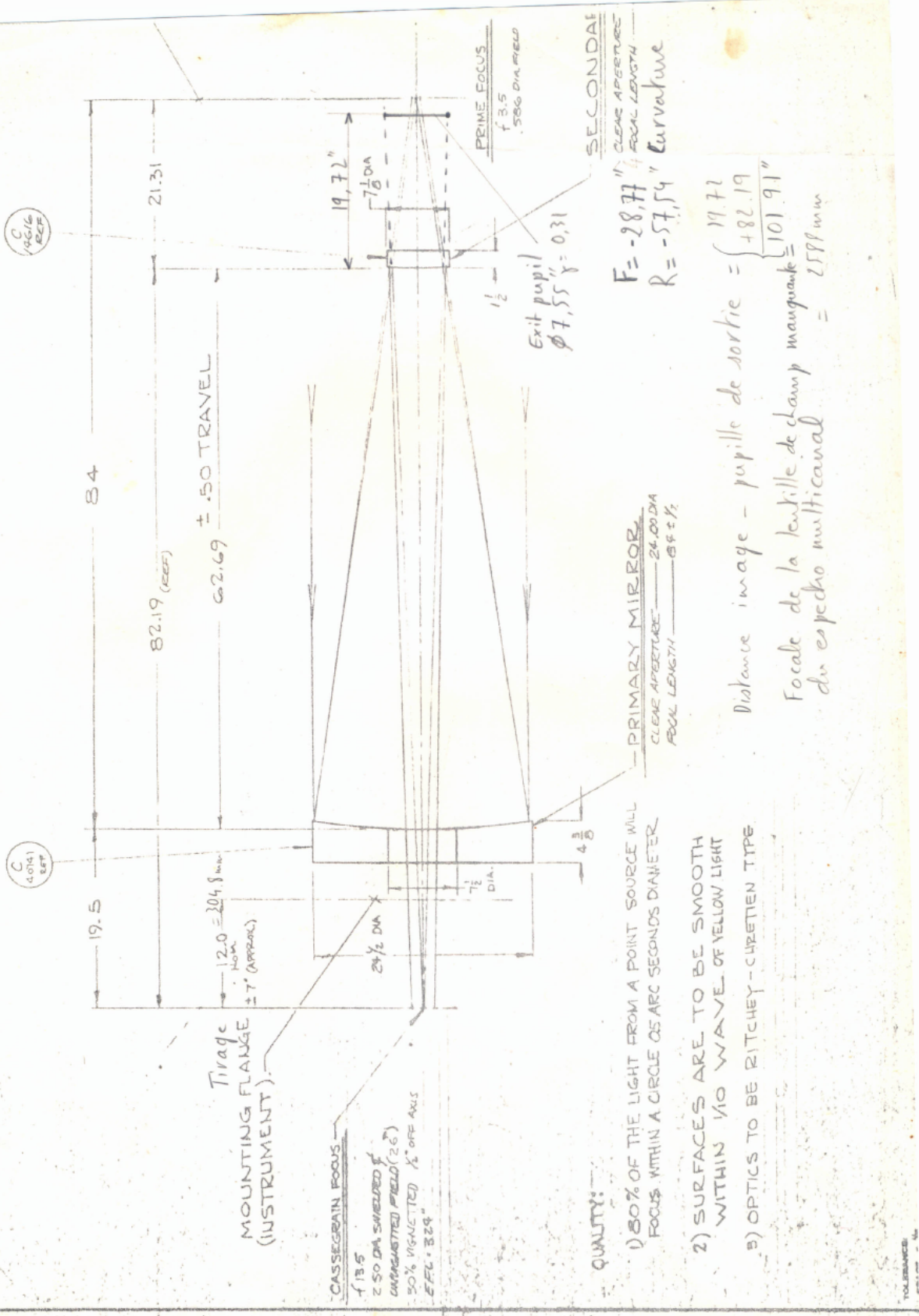


Figure A.3. Capa do documento que contém instruções sobre a instrumentação e a planta do desenho óptico do telescópio BC0.6-m do Observatório do Pico dos Dias (OPD/LNA). Documento cedido por Saulo Gargaglioni (OPD/LNA).



PRIME FOCUS  
 $f = 3.5$   
 586 DIA. FIELD

SECONDARY  
 CLEAR APERTURE  
 FOCAL LENGTH

Exit pupil  
 $\phi 7.55$   $f = 0.31$

$F = -28.77$ "  
 $R = -57.54$ " Curvature

PRIMARY MIRROR  
 CLEAR APERTURE 24.00 DIA  
 FOCAL LENGTH 35 ± 1/2

Distance image - pupille de sortie =  $\begin{cases} 19.72 \\ +82.19 \\ \hline 101.91 \end{cases}$   
 Focale de la lentille de champ magnétique = 2598 mm  
 du espejo multicanal

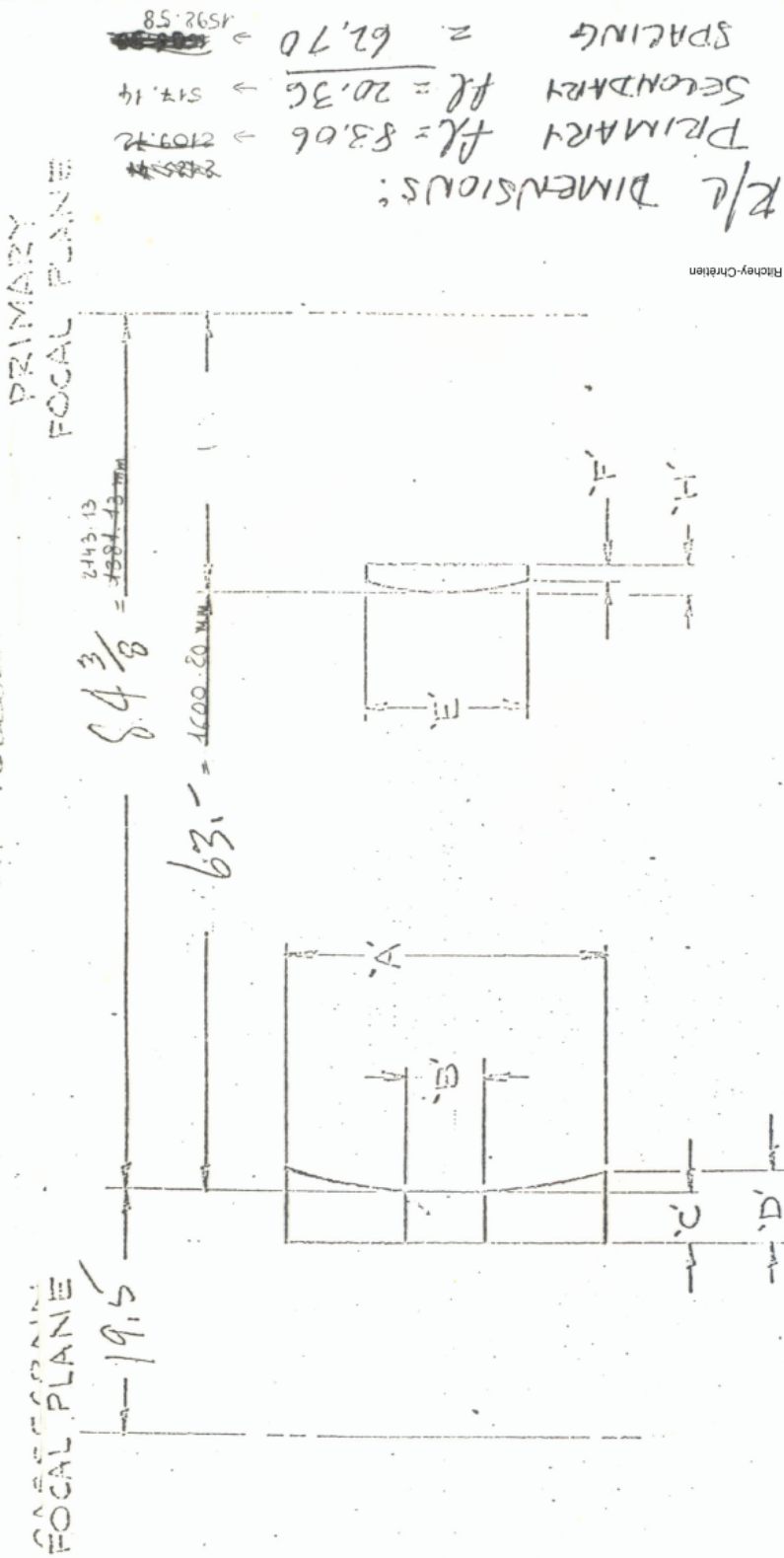
- QUALITY:
- 1) 80% OF THE LIGHT FROM A POINT SOURCE WILL FOCUS WITHIN A CIRCLE OF ARC SECONDS DIAMETER
  - 2) SURFACES ARE TO BE SMOOTH WITHIN 1/10 WAVELENGTH OF YELLOW LIGHT
  - 3) OPTICS TO BE BITCHIEY-CHRETIEN TYPE

Figure A.4. Primeira página contendo a planta do desenho óptico do telescópio BC0.6-m do Observatório do Pico dos Dias (OPD/LNA). Documento cedido por Saulo Gargaglioni (OPD/LNA).

CLASSICAL CASS  
ARRANGEMENT

UNIVERSIDADE DE  
SÃO PAULO  
24" TELESCOPE

PICAZIL  
58731



PRIMARY		SECONDARY	
A' OUTSIDE DIA.	24.505 <sup>mm</sup>	E' OUTSIDE DIA	7.118 $\rightarrow 180.80$
B' HOLE DIA.	7.541	F' EDGE THK.	1.95
C' CENTER THK.		H' CENTER THK.	7.5
D' EDGE THK	4.410	WT.	39.39
WT.	112#		

PRINTED IN GERMANY

Figure A.5. Folha com importantes medidas do desenho óptico do telescópio BC0.6-m do Observatório do Pico dos Dias (OPD/LNA). Documento cedido por Saulo Gargaglioni (OPD/LNA).

# Bibliography

- Telescópios do opd - laboratório nacional de astrofísica. <https://www.gov.br/lna/pt-br/composicao-1/coast/obs/opd/telescopios/telescopios-do-opd>, 2024. Acessado: 5 de dezembro de 2024. vi, 79, 100, 105
- Elisa Felicitas Arias, P Charlot, M Feissel, and J-F Lestrade. The extragalactic reference system of the international earth rotation service, icrs. *Astronomy and Astrophysics*, v. 303, p. 604-608., 303:604–608, 1995. 11
- J-E Arlot. Astrometry of the solar system: the ground-based observations. *Proceedings of the International Astronomical Union*, 3(S248):66–73, 2007. 3
- M Assafin. Astrometry with praia. *Planetary and Space Science*, 238:105801, 2023. iii, vii, 14, 15, 17, 18, 104, 116, 117, 121
- Assafin, M., Camargo, J. I. B., Vieira Martins, R., Andrei, A. H., Sicardy, B., Young, L., da Silva Neto, D. N., and Braga-Ribas, F. Precise predictions of stellar occultations by pluto, charon, nix, and hydra for 2008–2015 \*\*\*\*\*. *AA*, 515:A32, 2010. doi: 10.1051/0004-6361/200913690. URL <https://doi.org/10.1051/0004-6361/200913690>. 1
- MV Banda-Huarca. *Astrometria, predição de ocultações estelares e exploração de dados fotométricos do DES para TNOs e Centauros em preparação ao LSST*. Tese de doutorado, Observatório Nacional, Rio de Janeiro, Brasil, 2020. URL <http://sistede.on.br:8080/jspui/handle/tede/68>. 23
- Taysa Bassallo. Redução de imagens astronômicas obtidas a partir do solo: preparando-se para a astrometria da missão espacial Gaia. Master’s thesis, Observatorio Nacional, Rio de Janeiro, 2017. 43
- DV Bernardes, E Martioli, and CV Rodrigues. Characterization of the sparx4 ccds. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 130(991):095002, 2018. iii, 10
- Roberto Boczko. *Conceitos de Astronomia*. Edgard Blücher, São Paulo, 1 edition, 2001. ISBN 9788521203561. 46
- Max Born and Emil Wolf. *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. Elsevier, 2013. v, vi, 47, 48, 49, 50, 68, 71, 73
- Anthony GA Brown. Microarcsecond astrometry: Science highlights from gaia. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 59(1):59–115, 2021. 1, 3, 4, 95
- Alexey G Butkevich and Lennart Lindegren. Rigorous treatment of barycentric stellar motion-perspective and light-time effects in astrometric and radial velocity data. *Astronomy & Astrophysics*, 570:A62, 2014. iv, 35, 36, 37, 38

- P Charlot, CS Jacobs, D Gordon, Sébastien Lambert, A De Witt, J Böhm, AL Fey, R Heinkelmann, E Skurikhina, O Titov, et al. The third realization of the international celestial reference frame by very long baseline interferometry. *Astronomy & Astrophysics*, 644:A159, 2020. [4](#), [11](#)
- Junqing Chen, Kartik Venkataraman, Dmitry Bakin, Brian Rodricks, Robert Gravelle, Pravin Rao, and Yongshen Ni. Digital camera imaging system simulation. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 56(11):2496–2505, 2009. doi: 10.1109/TED.2009.2030995. [81](#)
- University of Chicago Lawrence Berkeley National Laboratory Cerro-Tololo Inter-American Observatory Dark Energy Survey Collaboration: Fermilab, University of Illinois at Urbana-Champaign and Brenna Flaugher. The dark energy survey. *International Journal of Modern Physics A*, 20(14):3121–3123, 2005. [74](#)
- W. S. Dias, H. Monteiro, and M. Assafin. Update of membership and mean proper motion of open clusters from UCAC5 catalog. *mnras*, June 2018. doi: 10.1093/mnras/sty1456. [104](#)
- Mignard Feissel and F Mignard. The adoption of icrs on 1 january 1998: meaning and consequences. *Astronomy and Astrophysics*, v. 331, p. L33-L36 (1998), 331:L33–L36, 1998. [12](#)
- Fabo Feng. Astrometric detection of exoplanets. *arXiv preprint arXiv:2403.08226*, 2024. [3](#)
- Emmanuel Gay, Eric Guillard, Marc Le Ligné, and Daniel Hui Bon Hoa. Part I: A computer program for the simulation of telecommunication systems: application to optical transmission systems. *Annals of Telecommunications*, 50(3-4):379–388, March 1995. doi: 10.1007/BF02999738. [81](#)
- Robin M Green. *Spherical astronomy*. Cambridge University Press, 1985. [iv](#), [45](#), [46](#), [99](#)
- Eugene Hecht. *Optics*. Pearson Education India, 2012. [v](#), [48](#)
- Amina Helmi, Carine Babusiaux, Helmer H Koppelman, Davide Massari, Jovan Veljanoski, and Anthony GA Brown. The merger that led to the formation of the milky way’s inner stellar halo and thick disk. *Nature*, 563(7729):85–88, 2018. [3](#)
- J Herrera, MR Najera, and CA Guerrero. Off-axis exact ray tracing algorithm for zero coma point determination in classical and non-classical reflective telescopes. *Revista mexicana de astronomía y astrofísica*, 58(1):37–45, 2022a. [2](#), [131](#)
- Joel Herrera, Carlos A Guerrero, Morgan R Najera, Anais Sotelo-Burke, and Ilse Plauch-Frayn. Krakenos: Python-based general exact ray tracing library. *Optical Engineering*, 61(1):015101–015101, 2022b. [82](#), [131](#)
- Joel Herrera Vazquez and CA Guerrero. Optical simulation using python and krakenos. *Optical simulation using Python and KrakenOS*, 2023. [vi](#), [82](#), [83](#), [85](#), [88](#), [130](#), [131](#)
- Steve B. Howell. *Handbook of CCD Astronomy*. Cambridge University Press, New York, 2 edition, 2006. [iii](#), [5](#), [6](#), [7](#), [8](#), [9](#), [26](#), [108](#), [110](#), [131](#)
- Emily L Hunt and Sabine Reffert. Improving the open cluster census-ii. an all-sky cluster catalogue with gaia dr3. *Astronomy & Astrophysics*, 673:A114, 2023. [3](#)

- James R. Janesick. *Scientific charge-coupled devices*. 2001. 7
- Francis A Jenkins et al. *Fundamentals of physical optics*. 1937. v, 68
- Robert Keim. Understanding the structure and functionality of ccds. *All About Circuits*, 2020. URL <https://www.allaboutcircuits.com/technical-articles/understanding-the-structure-and-functionality-of-ccds/>. Accessed: 2024-11-23. iii, 5
- I. R. King. Accuracy of measurement of star images on a pixel array. , 95:163–168, February 1983. doi: 10.1086/131139. 22, 23
- Ivan R King. Accuracy of measurement of star images on a pixel array. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 95(564):163, 1983. 21
- Sergei A Klioner, Lennart Lindegren, François Mignard, José Hernández, M Ramos-Lerate, Ulrich Bastian, Michael Biermann, A Bombrun, A De Torres, E Gerlach, et al. Gaia early data release 3-the celestial reference frame (gaia-crf3). *Astronomy & Astrophysics*, 667:A148, 2022. 11, 12
- Jean Kovalevsky. *Modern astrometry*. Springer Science & Business Media, 2002. iv, 2, 3, 42, 43, 44
- Jean Kovalevsky and P Kenneth Seidelmann. *Fundamentals of astrometry*. Cambridge University Press, 2011. 4, 39
- Hoyeon Lee, Bo-Wi Cheon, Joseph W Feld, Kira Grogg, Joseph Perl, José A Ramos-Méndez, Bruce Faddegon, Chul Hee Min, Harald Paganetti, and Jan Schuemann. Topas-imaging: extensions to the topas simulation toolkit for medical imaging systems. *Physics in Medicine Biology*, 68(8):084001, apr 2023. doi: 10.1088/1361-6560/acc565. URL <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6560/acc565>. 81
- L. Lindegren, S. A. Klioner, J. Hernández, A. Bombrun, M. Ramos-Lerate, H. Steidelmüller, U. Bastian, M. Biermann, A. de Torres, E. Gerlach, R. Geyer, T. Hilger, D. Hobbs, U. Lammers, P. J. McMillan, C. A. Stephenson, J. Castañeda, M. Davidson, C. Fabricius, G. Gracia-Abril, J. Portell, N. Rowell, D. Teyssier, F. Torra, S. Bartolomé, M. Clotet, N. Garralda, J. J. González-Vidal, J. Torra, U. Abbas, M. Altmann, E. Anglada Varela, L. Balaguer-Núñez, Z. Balog, C. Barache, U. Becciani, M. Bernet, S. Bertone, L. Bianchi, S. Bouquillon, A. G. A. Brown, B. Bucciarelli, D. Busonero, A. G. Butkevich, R. Buzzi, R. Cancelliere, T. Carlucci, P. Charlot, M. R. L. Cioni, M. Crosta, C. Crowley, E. F. del Peloso, E. del Pozo, R. Drimmel, P. Esquej, A. Fienga, E. Fraile, M. Gai, M. Garcia-Reinaldos, R. Guerra, N. C. Hambly, M. Hauser, K. Janßen, S. Jordan, Z. Kostrzewa-Rutkowska, M. G. Lattanzi, S. Liao, E. Licata, T. A. Lister, W. Löffler, J. M. Marchant, A. Masip, F. Mignard, A. Mints, D. Molina, A. Mora, R. Morbidelli, C. P. Murphy, C. Pagani, P. Panuzzo, X. Peñalosa Esteller, E. Poggio, P. Re Fiorentin, A. Riva, A. Sagristà Sellés, V. Sanchez Gimenez, M. Sarasso, E. Sciacca, H. I. Siddiqui, R. L. Smart, D. Souami, A. Spagna, I. A. Steele, F. Taris, E. Utrilla, W. van Reeve, and A. Vecchiato. Gaia Early Data Release 3. The astrometric solution. *A&A*, 649:A2, May 2021. doi: 10.1051/0004-6361/202039709. 12
- Arthur J. Lowery and Phil C. R. Gurney. Two Simulators for Photonic Computer-Aided Design. , 37(26):6066–6077, September 1998. doi: 10.1364/AO.37.006066. 81

- Zacarias Malacara, Daniel Malacara-Hernández, and Zacarías Malacara-Hernández. *Handbook of optical design*. CRC press, 2003. v, vi, 54, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 73, 75, 77, 78, 82, 88, 93, 97, 98, 130
- Ian S McLean et al. *Electronic imaging in astronomy: detectors and instrumentation*, volume 552. Springer, 2008. 4
- AFJ Moffat. A theoretical investigation of focal stellar images in the photographic emulsion and application to photographic photometry. *Astronomy and Astrophysics, Vol. 3, p. 455 (1969)*, 3:455, 1969. 20
- E Morganson, RA Gruendl, F Menanteau, M Carrasco Kind, Y-C Chen, G Daues, A Drlica-Wagner, DN Friedel, M Gower, MWG Johnson, et al. The dark energy survey image processing pipeline. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 130 (989):074501, 2018. 75
- C Andrew Murray and Heinrich Eichhorn. *Vectorial astrometry*, 1984. 34
- Morgan Rhaí Roa Najera. *Algoritmo de trazado de rayos exacto para la determinación del punto de coma cero en telescopios reflectores clásicos y no clásicos*. PhD thesis, Instituto de Astronomía, UNAM, 2021. URL <https://repositorio.unam.mx/contenidos/3555915>. 94, 97
- Nautical Almanac Office US. *The Astronomical Almanac for the Year 2014*. Government Printing Office, 2013. 46
- Robert J Noll. Zernike polynomials and atmospheric turbulence. *JOsA*, 66(3):207–211, 1976. ix, 95, 96, 126, 128
- Ferdinando Patat. Observing during bright time: tips and tricks. *The Messenger*, 118: 11–14, 2004. 111
- Zephyr Penoyre, Vasily Belokurov, and N Wyn Evans. Astrometric identification of nearby binary stars–i. predicted astrometric signals. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 513(2):2437–2456, 2022a. 3
- Zephyr Penoyre, Vasily Belokurov, and N Wyn Evans. Astrometric identification of nearby binary stars–ii. astrometric binaries in the gaia catalogue of nearby stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 513(4):5270–5289, 2022b. 3
- Michael AC Perryman, L Lindgren, J Kovalevsky, E Hoeg, U Bastian, PL Bernacca, M Crézé, F Donati, M Grenon, M Grewing, et al. The hipparcos catalogue. *Astronomy and Astrophysics, Vol. 323, p. L49-L52*, 323:L49–L52, 1997. 12
- PNIFE. Equipamento: Cluster hpc multiusuário cdjpas - cpdon, 2023. URL <https://pnipe.mcti.gov.br/equipment/12662>. Acesso em: 04/03/2025. 132
- E Predazzi. Diffraction: retrospectives and perspectives. *Nuclear Physics B-Proceedings Supplements*, 99(1-2):3–6, 2001. 47
- A. M. Price-Whelan, B. M. Sipőcz, H. M. Günther, P. L. Lim, S. M. Crawford, S. Conseil, D. L. Shupe, M. W. Craig, N. Dencheva, A. Ginsburg, J. T. VanderPlas, L. D. Bradley, D. Pérez-Suárez, M. de Val-Borro, (Primary Paper Contributors, T. L. Aldcroft, K. L. Cruz, T. P. Robitaille, E. J. Tollerud, (Astropy Coordination Committee, C. Ardelean, T. Babej, Y. P. Bach, M. Bachetti, A. V. Bakanov, S. P. Bamford,

- G. Barentsen, P. Barmby, A. Baumbach, K. L. Berry, F. Biscani, M. Boquien, K. A. Bostroem, L. G. Bouma, G. B. Brammer, E. M. Bray, H. Breytenbach, H. Buddelmeijer, D. J. Burke, G. Calderone, J. L. Cano Rodríguez, M. Cara, J. V. M. Cardoso, S. Cheedella, Y. Copin, L. Corrales, D. Crichton, D. D’Avella, C. Deil, É. Depagne, J. P. Dietrich, A. Donath, M. Droettboom, N. Earl, T. Erben, S. Fabbro, L. A. Ferreira, T. Finethy, R. T. Fox, L. H. Garrison, S. L. J. Gibbons, D. A. Goldstein, R. Gommers, J. P. Greco, P. Greenfield, A. M. Groener, F. Grollier, A. Hagen, P. Hirst, D. Homeier, A. J. Horton, G. Hosseinzadeh, L. Hu, J. S. Hunkeler, Ž. Ivezić, A. Jain, T. Jenness, G. Kanarek, S. Kendrew, N. S. Kern, W. E. Kerzendorf, A. Khvalko, J. King, D. Kirkby, A. M. Kulkarni, A. Kumar, A. Lee, D. Lenz, S. P. Littlefair, Z. Ma, D. M. Macleod, M. Mastropietro, C. McCully, S. Montagnac, B. M. Morris, M. Mueller, S. J. Mumford, D. Muna, N. A. Murphy, S. Nelson, G. H. Nguyen, J. P. Ninan, M. Nöthe, S. Ogaz, S. Oh, J. K. Parejko, N. Parley, S. Pascual, R. Patil, A. A. Patil, A. L. Plunkett, J. X. Prochaska, T. Rastogi, V. Reddy Janga, J. Sabater, P. Sakurikar, M. Seifert, L. E. Sherbert, H. Sherwood-Taylor, A. Y. Shih, J. Sick, M. T. Silbiger, S. Singanamalla, L. P. Singer, P. H. Sladen, K. A. Sooley, S. Sornarajah, O. Streicher, P. Teuben, S. W. Thomas, G. R. Tremblay, J. E. H. Turner, V. Terrón, M. H. van Kerkwijk, A. de la Vega, L. L. Watkins, B. A. Weaver, J. B. Whitmore, J. Woillez, V. Zabalza, and (Astropy Contributors). The Astropy Project: Building an Open-science Project and Status of the v2.0 Core Package. , 156:123, September 2018. doi: 10.3847/1538-3881/aabc4f. [27](#), [121](#)
- Rene Racine, Derrick Salmon, David Cowley, and Jerry Sovka. Mirror, dome, and natural seeing at cfht. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 103(667):1020, 1991. [58](#)
- C. V. Rodrigues, F. J. Jablonski, K. Taylor, T. Dominici, R. Laporte, A. Pereyra, C. Strauss, A. M. Magalha, M. Assafin, A. Carciofi, J. E. R. Costa, D. Cieslinski, G. Franco, A. Kanaan, A. Milone, and K. M. G. Silva. SPARC4 A simultaneous polarimeter and rapid camera in 4 bands. In Jennifer L. Hoffman, Jon Bjorkman, and Barbara Whitney, editors, *Stellar Polarimetry: from Birth to Death*, volume 1429 of *American Institute of Physics Conference Series*, pages 252–255. AIP, May 2012. doi: 10.1063/1.3701935. [iii](#), [9](#), [10](#), [131](#)
- W Romanishin. An introduction to astronomical photometry using ccds. *University of Oklahoma*, 17, 2006. [iv](#), [v](#), [24](#), [57](#), [58](#), [108](#)
- SK Saha and V Chinnappan. Night time variation of fried’s parameter at vbt, kavalur. 1999. [58](#)
- Swapan K Saha. *Diffraction-limited imaging with large and moderate telescopes*. World Scientific, 2007. [v](#), [48](#), [49](#), [50](#), [51](#), [52](#), [53](#), [54](#), [55](#), [56](#), [57](#), [58](#)
- Daniel J Schroeder. *Astronomical optics*. Elsevier, 1999. [v](#), [9](#), [10](#), [11](#), [59](#), [60](#), [64](#), [65](#), [67](#), [70](#), [72](#), [74](#), [79](#)
- Warren J Smith. The problem of the” concentric” meniscus element a possible solution to the lens designer’s dilemma. In *Current Developments in Optical Engineering and Diffraction Phenomena*, volume 679, pages 36–41. SPIE, 1986. [80](#)
- Warren J Smith. *Modern optical engineering: the design of optical systems*. 2008. [vi](#), [59](#), [72](#), [76](#), [77](#), [80](#), [93](#), [100](#)

- Smithsonian Astrophysical Observatory. SAOImage DS9: A utility for displaying astronomical images in the X11 window environment. Astrophysics Source Code Library, record ascl:0003.002, March 2000. [129](#)
- Arnold Sommerfeld. Mathematical theory of diffraction. In *Mathematical Theory of Diffraction*, pages 9–68. Springer, 2004. [47](#)
- Anaís Sotelo Burke. Modelado y análisis opto-mecánico de membranas activas. 2022. [ix](#), [96](#), [126](#), [128](#)
- Ronald C Stone. A comparison of digital centering algorithms. *Astronomical Journal (ISSN 0004-6256)*, vol. 97, April 1989, p. 1227-1237., 97:1227–1237, 1989. [13](#), [14](#)
- P Tanga, T Pauwels, F Mignard, K Muinonen, A Cellino, P David, D Hestroffer, F Spoto, J Berthier, J Guiraud, et al. Gaia data release 3-the solar system survey. *Astronomy & Astrophysics*, 674:A12, 2023. [3](#)
- Doug Tody. The IRAF Data Reduction and Analysis System. In David L. Crawford, editor, *Instrumentation in astronomy VI*, volume 627 of *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series*, page 733, January 1986. doi: 10.1117/12.968154. [ix](#), [121](#), [123](#), [124](#)
- I. Trujillo, J.A.L. Aguerri, J. Cepa, and C.M. Gutiérrez. The effects of seeing on sérsic profiles – ii. the moffat psf. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 328 (3):977–985, 12 2001. ISSN 0035-8711. doi: 10.1046/j.1365-8711.2001.04937.x. URL <https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2001.04937.x>. [20](#), [27](#), [30](#)
- R.K. Tyson and B.W. Frazier. *Principles of Adaptive Optics*. CRC Press, 2022. ISBN 9780367676032. URL <https://books.google.com.br/books?id=GhyTzgEACAAJ>. [54](#), [55](#), [56](#), [113](#), [131](#)
- José Henrique Vuolo. *Fundamentos da teoria de erros*. Editora Blucher, 1996. [22](#), [23](#), [24](#)
- D. C. Wells, E. W. Greisen, and R. H. Harten. FITS - a Flexible Image Transport System. *aaps*, 44:363, June 1981. [121](#)
- Lorenzo Zago. The effect of the local atmospheric environment on astronomical observations. *Ph. D. Thesis*, 1995. [58](#)