

MINISTÉRIO DA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO
OBSERVATÓRIO NACIONAL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ASTRONOMIA



DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Estudo da Estabilidade Dinâmica de Planetas Troianos nos
Sistemas Planetários Extra-solares Kepler-9 e Kepler-56**

JESSICA GIOVANNA CÁCERES REÁTEGUI

Orientador:

DR. FERNANDO VIRGILIO ROIG

Rio de Janeiro
29 de Setembro de 2015

Ministério da Ciência, Tecnologia e Inovação
Observatório Nacional
Programa de Pós-Graduação em Astronomia

Dissertação de Mestrado

**Estudo da Estabilidade Dinâmica de Planetas Troianos nos
Sistemas Planetários Extra-solares Kepler-9 e Kepler-56**

Jessica Giovanna Cáceres Reátegui

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Observatório Nacional do Rio de Janeiro
como parte dos requisitos para a obtenção
do grau de MESTRE em Astronomia.

Orientador:

Dr. Fernando Virgílio Roig.

Rio de Janeiro, 29 de Setembro de 2015

*À minha família,
especialmente aos meus pais,
Wilfredo e Rossana.*

Agradecimentos

À *Deus* por todas as pessoas que colocou na minha vida, das quais sempre consegui aprender algo, e algumas delas guiaram meus passos para poder chegar até aqui.

Aos meus pais, *Wilfredo e Rossana*, por apoiar sempre minhas decisões e as pessoas sinceras que continuam preenchendo de sorrisos minha vida, apesar do tempo e a distância.

Ao meu orientador, *Fernando Roig*, de quem pude aprender muito na área de Astronomia Dinâmica, muito obrigada pela paciência e conhecimentos compartilhados.

A *Martin, Cesar, Anderson, Walter, Ximena, Eduardo e Sandro* por compartilhar também seus conhecimentos comigo. Agradeço a *Carol, Pedro* e a *meu orientador* (novamente) pela amabilidade para revisar meu português.

A *Cesar*, aos *amigos peruanos* que estão no Rio de Janeiro e aquele que virou peruano, *Tiago*, pelos bons momentos compartilhados e a boa comida degustada.

Finalmente, agradeço muito ao *Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, CNPq*, pelo apoio financeiro e permitir-me assim fazer o mestrado na área de que eu tanto gosto, Astronomia.

Estudo da Estabilidade Dinâmica de Planetas Troianos nos Sistemas Planetários Extra-solares Kepler-9 e Kepler-56

Resumo

Neste trabalho realizamos um estudo da estabilidade dinâmica de planetas co-orbitais hipotéticos (Troianos), em torno dos pontos Lagrangianos L_4 dos planetas conhecidos que formam os sistemas planetários extra-solares compactos Kepler-9 e Kepler-56. Utilizando integradores simpléticos de segunda ordem, incluídos no pacote de subrotinas Swift, e considerando os planetas Troianos como sendo partículas de teste (sem massa), estudamos uma vasta grade de condições iniciais para os Troianos no espaço de parâmetros orbitais semieixo maior vs. excentricidade, de forma a extrair conclusões de carácter estatístico sobre a sua possível existência. A análise dos dados das integrações é realizada determinando os tempos de sobrevivência das partículas, suas excentricidades máximas atingidas, e o desvio registrado tanto no semieixo maior quanto na excentricidade das órbitas dos Troianos, o que permite identificar as regiões de movimento estável. Nosso estudo mostra que a existência de planetas Troianos é possível em ambos os sistemas, pelo menos do ponto de vista dinâmico, embora o tamanho da zona co-orbital estável é extremamente dependente dos parâmetros orbitais iniciais dos Troianos, da presença dos outros planetas que formam o sistema e, especialmente, da ocorrência de ressonâncias ou quase ressonâncias de movimento médio 2:1 entre alguns dos planetas que compõem os sistemas.

Palavras-chaves: Mecânica Celeste, Estabilidade em torno dos pontos de Lagrange, Planetas Troianos, Ressonâncias, Integradores Simpléticos.

Study of the Dynamical Stability of Trojan Planets in Extrasolar Planetary Systems Kepler-9 and Kepler-56

Abstract

In this work we performed a study about the dynamical stability of co-orbital hypothetical planets (Trojans), around the Lagrangian points L_4 of known planets which form the compact extrasolar planetary systems Kepler-9 and Kepler-56. Using second order symplectic integrators, included in the package of subroutines Swift, and considering the Trojan planets as test particles (massless), we studied a vast grid of initial conditions for the Trojans in the semimajor axis versus eccentricity space of orbital parameters, in order to obtain conclusions of statistical character about its possible existence. The data analysis of the integrations is carried out by determining the survival time of the particles, their maximum eccentricities achieved and the deviation registered in both the semimajor axis and the eccentricity of the orbits of the Trojans, allowing to identify the regions of stable motion. Our work shows that the existence of Trojan planets is possible in both systems, at least from the dynamical point of view, although the size of the stable co-orbital zone is extremely dependent on the initial orbital parameters of the Trojans, the presence of the other planets forming the system and, especially, the occurrence of or near 2:1 mean motion resonances between some of the planets which make up the systems.

Keywords: Celestial Mechanics, Stability around Lagrangian points, Trojan Planets, Resonances, Symplectic Integrators.

Lista de Figuras

1.1	Região de estabilidade do sistema HD 23079 para diferentes valores da excentricidade do gigante de gás.	3
1.2	Regiões de estabilidade determinadas por meio das excentricidades máximas das partículas de teste em função das inclinações e as excentricidades iniciais das mesmas.	3
1.3	Formação de um planeta Troiano.	4
2.1	Configuração do sistema estrela-planeta observado em um ângulo de inclinação i	8
2.2	Medições da velocidade radial da estrela 51 Pegasi como uma função da fase orbital e o modelo de ajuste Kepleriano.	9
2.3	Ilustração da curva de luz esperada para o trânsito de um planeta gigante gasoso através de uma estrela de tipo solar.	10
2.4	Curvas de luz tomadas em 10 diferentes bandas fotométricas, abrangendo o intervalo de 290-1030 nm.	12
2.5	Curva de luz observada do evento de microlente de OGLE-2005-BLG-390 e o modelo de melhor ajuste em função do tempo.	14
2.6	Imagem composta que mostra o exoplaneta 2M1207b orbitando à anã marrom 2M1207.	16
2.7	Distribuição das massas e raios orbitais de planetas extra-solares confirmados até Agosto 2015.	17
2.8	Localização do campo de visão da Missão Kepler no céu.	19
2.9	Campos objetivos da Missão K2.	20
2.10	Localização aproximada dos planetas no sistema Kepler-9.	21
2.11	Tamanhos aproximados dos planetas no sistema Kepler-9.	22
2.12	Variação no tempo de trânsito do planeta Kepler-9 b e Kepler-9 c.	22
2.13	Curva de velocidade radial da estrela do sistema Kepler-9.	22
2.14	Localização aproximada dos planetas no sistema Kepler-56.	23
2.15	Ilustração gráfica da hipótese de inclinação dinâmica para o sistema Kepler-56.	24
2.16	Tamanhos aproximados dos planetas no sistema Kepler-56.	24
3.1	Sistemas de coordenadas inercial e rotante do problema restrito circular e planar dos três corpos.	28
3.2	Regiões permitidas (áreas não sombreadas) para diferentes valores da integral de Jacobi, no caso $\mu = 0.3$	31
3.3	(a) Órbitas girino (em torno de L_4) e ferradura de três asteroides no sistema Sol-Terra. (b) Trajetória do asteroide 2002 VE68 que ocasionalmente se torna um quase satélite de Vênus.	36

3.4	Órbitas planetárias em ressonância excêntrica 1:1.	37
3.5	Variações na velocidade radial sintética de dois planetas com igual massa participando em órbitas girino e ferradura.	38
3.6	Variações na velocidade radial sintética para um sistema planetário envolvido na ressonância excêntrica 1:1.	38
4.1	Erro na energia para o problema de Kepler integrado mediante RK4 e SI4.	54
4.2	Decomposição da força $F(r) = 1/r^2$ em seus componentes F_i , para $i = 0 - 3$ com $R_1 = 1$ e $R_i/R_{i+1} = \sqrt{2}$	55
4.3	Decomposição da força $F(r) = 1/r^2$ com $\mathbf{F}_{c,i}$ e $\mathbf{F}_{p,i}$. Mostram-se as componentes $i = 0, 1, 2$ com $R_1 = 1$ e $R_i/R_{i+1} = \sqrt{2}$	56
4.4	Uma forma adequada para a função de transição K em função da separação, $ \mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_j $, entre dois corpos.	63
5.1	Orientação espacial do plano orbital.	68
6.1	Evolução temporal do semieixo maior, excentricidade e inclinação dos planetas que formam o sistema Kepler-9.	74
6.2	Mapas de cor para o tempo final, e_{\max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-9 d, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, considerando apenas o planeta Kepler-9 d (problema restrito de três corpos).	76
6.3	Mapas de cor para o tempo final, e_{\max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-9 d, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, considerando também a perturbação do planeta Kepler-9 b.	77
6.4	Mapas de cor para o tempo final, e_{\max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-9 d, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, adicionando agora a perturbação do planeta Kepler-9 c.	78
6.5	Mapas de cor para o tempo final, e_{\max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-9 d, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, considerando o efeito dos três planetas.	79
6.6	Mapas de cor para o tempo final, e_{\max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-9 b, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, considerando apenas Kepler-9 b (problema de três corpos restrito).	80
6.7	Mapas de cor para o tempo final, e_{\max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-9 b, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, considerando também a perturbação do planeta Kepler-9 d.	81
6.8	Mapas de cor para o tempo final, e_{\max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-9 b, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, adicionando agora a perturbação do planeta Kepler-9 c apenas.	82
6.9	Mapas de cor para o tempo final, e_{\max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-9 b, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, considerando o efeito dos três planetas.	83
6.10	Mapas de cor para o tempo final, e_{\max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-9 c, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, considerando apenas Kepler-9 c (problema de três corpos restrito).	84
6.11	Mapas de cor para o tempo final, e_{\max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-9 c, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, considerando também a perturbação do planeta Kepler-9 b.	85

6.12	Mapas de cor para o tempo final, e_{\max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-9 c, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, adicionando agora a perturbação do planeta Kepler-9 d.	86
6.13	Mapas de cor para o tempo final, e_{\max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-9 c, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, considerando o efeito dos três planetas.	87
6.14	Evolução temporal do semieixo maior, excentricidade e inclinação dos planetas que formam o sistema Kepler-56 (modelo 1).	88
6.15	Mapas de cor para o tempo final, e_{\max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-56 b, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, considerando apenas o planeta Kepler-56 b (problema restrito de três corpos).	90
6.16	Mapas de cor para o tempo final, e_{\max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-56 b, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, considerando também a perturbação do planeta Kepler-56 c.	91
6.17	Mapas de cor para o tempo final, e_{\max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-56 b, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, adicionando agora a perturbação do planeta Kepler-56 d.	92
6.18	Mapas de cor para o tempo final, e_{\max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-56 b, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, considerando o efeito dos três planetas.	93
6.19	Evolução temporal do semieixo maior, excentricidade e inclinação dos planetas que formam o sistema Kepler-56 (modelo 2).	94
6.20	Mapas de cor para o tempo final, e_{\max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-56 c, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, considerando apenas o planeta Kepler-56 c (problema restrito de três corpos).	96
6.21	Mapas de cor para o tempo final, e_{\max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-56 c, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, considerando também a perturbação do planeta Kepler-56 b.	97
6.22	Mapas de cor para o tempo final, e_{\max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-56 c, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, adicionando agora a perturbação do planeta Kepler-56 d.	98
6.23	Mapas de cor para o tempo final, e_{\max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-56 c, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, considerando o efeito dos três planetas.	99

Lista de Tabelas

2.1	Parâmetros e elementos orbitais do sistema Kepler-9 obtidos da Enciclopédia de Planetas Extra-solares: http://exoplanet.eu/	21
2.2	Parâmetros e elementos orbitais do sistema Kepler-56 obtidos da Enciclopédia de Planetas Extra-solares: http://exoplanet.eu/	25
5.1	Integradores que constituem o Swift.	65
5.2	Parâmetros e elementos orbitais assumidos para o sistema Kepler-9.	69
5.3	Parâmetros e elementos orbitais assumidos para o sistema Kepler-56.	69
6.1	Configurações consideradas para o estudo da estabilidade dinâmica de corpos Troianos no sistema Kepler-9.	75
6.2	Configurações consideradas para o estudo da estabilidade dinâmica de corpos Troianos no sistema Kepler-56 (modelo 1).	89
6.3	Configurações consideradas para o estudo da estabilidade dinâmica de corpos Troianos no sistema Kepler-56 (modelo 2).	95

Sumário

Resumo	viii
1 Introdução	1
2 Métodos de Detecção de Exoplanetas e a Missão Kepler	6
2.1 Métodos de Detecção de Planetas Extra-solares	6
2.1.1 Cronometragem de Pulsares	7
2.1.2 Velocidade Radial	7
2.1.3 Trânsitos	9
2.1.4 Microlentes Gravitacionais	12
2.1.5 Astrometria	14
2.1.6 Detecção por Imageamento Direto	15
2.2 A Missão Kepler	17
2.2.1 Kepler-9	20
2.2.2 Kepler-56	23
3 O Problema Circular e Planar Restrito dos Três Corpos	26
3.1 O Problema de N-Corpos	26
3.2 O Problema Restrito Circular e Planar dos Três Corpos	28
3.2.1 Integral de Jacobi	30
3.2.2 Pontos de Lagrange	32
3.2.3 Estabilidade dos Pontos de Lagrange	33
3.3 Ressonâncias	34
3.3.1 Tipos de Órbitas na RMM 1:1	35
4 Integradores Numéricos Simpléticos	39
4.1 Transformações Canônicas	39
4.1.1 Formalismo Geratriz	41
4.1.2 Formalismo Simplético	42
4.1.3 Colchetes de Poisson	43
4.2 Transformação Canônica Infinitesimal	44
4.3 Invariância do Elemento de Volume	45
4.4 Equação de Movimento Generalizada	46
4.5 Integradores Numéricos Simpléticos	47

4.5.1	Integrações tipo Sistema Solar	50
4.5.1.1	Métodos Simpléticos de Variáveis Mistas	51
4.5.1.2	Integradores Simpléticos de Passo Múltiplo	53
4.5.1.3	Métodos Simpléticos em Coordenadas Democráticas Astrocêntricas	57
4.5.1.4	Algoritmo Simplético de Corpos Massivos	60
4.5.1.5	Modelo de Chambers para Encontros Próximos	61
5	Metodologia	65
5.1	O Pacote de Subrotinas Swift	65
5.1.1	Arquivos de Entrada e Saída	66
5.1.2	Elementos Orbitais a Posições e Velocidades Astrocêntricas	67
5.1.3	Condições Iniciais para os Planetas	68
5.1.4	Grade de Condições Iniciais para os Planetas Troianos	69
5.2	Estudo Dinâmico	70
6	Resultados e Discussões	72
6.1	Kepler-9	74
6.1.1	Caso 1	76
6.1.2	Caso 2	80
6.1.3	Caso 3	84
6.2	Kepler-56 - Modelo 1	88
6.3	Kepler-56 - Modelo 2	94
7	Conclusões	100
A	Código: Elementos Orbitais a Posições e Velocidades Astrocêntricas	102
	Referências Bibliográficas	107

Capítulo 1

Introdução

Desde que [Mayor and Queloz \[1995\]](#) descobriram o primeiro planeta extra-solar em torno de uma estrela da sequência principal, um dos principais objetivos dos astrônomos foi a procura de mais sistemas planetários extra-solares. Devido em grande parte aos métodos de detecção utilizados, a maioria dos planetas encontrados são gigantes gasosos que orbitam a distâncias curtas de suas estrelas. No entanto, um pequeno número de planetas super-Terra com massas de aproximadamente 12 massas terrestres (ou $12 M_{\oplus}$) foram encontrados, tipicamente, em torno de estrelas anãs tipo-M. As medições feitas por [Howard and et al. \[2010\]](#) indicam que há uma crescente ocorrência de planetas com uma decrescente massa planetária, implicando que 23% das estrelas hospedam um planeta de massa próxima da Terra (variando de 0.5 a $2.0 M_{\oplus}$). Outro suporte para a existência de planetas tipo Terra foi a descoberta de Kepler-10 b, o primeiro planeta rochoso descoberto pelo telescópio espacial Kepler, com uma massa estimada de $3.33 M_{\oplus}$.

Considerando uma configuração Troiana, isto é, aquela onde um terceiro corpo encontra-se no ponto de equilíbrio estável L_4 ou L_5 (vide Capítulo 3, seção §3.2.2), que são localizados nos vértices dos triângulos equiláteros com base comum e igual à separação entre outros dois corpos¹; vários autores estudaram a procura de vida em sistemas planetários extra-solares desde um ponto de vista dinâmico. Esses trabalhos consideram um gigante de gás *conhecido* e um planeta Troiano *hipotético*, que poderia não ter sido detectado ainda, de massa terrestre e geralmente assumida como uma partícula de teste, orbitando na zona habitável (ZH)² de sua estrela. A finalidade desses estudos³ foi determinar dinamicamente a extensão da região de movimento estável do planeta Troiano a longo

¹ Note que sendo assim o movimento entre dois dos corpos é co-orbital.

² A ZH é definida como a região em torno de uma estrela onde um planeta terrestre receberia radiação suficiente para manter a água líquida em sua superfície e ser capaz de desenvolver uma atmosfera estável.

³ Estes estudos levaram em conta também que o valor da excentricidade durante o tempo de integração seja adequada para que os Troianos permaneçam na ZH de sua estrela.

prazo, o que permite estimar a probabilidade de sua existência. No entanto, a região de estabilidade não pode ser determinada por meio de estudos teóricos, de modo que é necessário o uso de simulações numéricas para cada sistema planetário extra-solar em consideração. Os principais resultados⁴ mostraram que a região de estabilidade:

- É afetada pelos parâmetros orbitais do planeta gigante [Eberle et al., 2011].
- Decresce significativamente com o aumento da excentricidade do gigante gasoso [Dvorak et al., 2004] (vide fig. 1.1) e, segundo Funk et al. [2012], de maneira logarítmica.
- Aumenta linearmente com o semieixo maior do gigante gasoso. Aumenta para uma inclinação do planeta Troiano $i_t = 30^\circ$, decresce ligeiramente que o caso anterior para $i_t = 0^\circ$ e só poucas órbitas permanecem estáveis para $i_t = 50^\circ$. Encolhe-se significativamente para uma massa maior do gigante de gás [Funk et al., 2012].
- Muda ligeiramente com um aumento da massa dos planetas Troianos (Schwarz et al. [2005], Funk et al. [2012]).

Schwarz et al. [2007] compilaram um catálogo de regiões estáveis para diferentes razões de massa dos corpos primários (estrela e planeta) e diferentes excentricidades de suas órbitas, o que permite estimar a existência de possíveis planetas Troianos em sistemas recentemente descobertos com um único planeta. Enquanto que Funk et al. [2012] investigaram a estabilidade de planetas Troianos em um estudo geral focado nas dependências entre a excentricidade e inclinação do planeta Troiano (fig. 1.2), cujos resultados também podem ser aplicados a sistemas com um planeta conhecido.

Por outro lado, o estudo realizado por Dvorak et al. [2008] sobre a influência de um planeta exterior adicional que perturba o movimento de um gigante de gás interno assim como também a sua nuvem troiana mostra que, com uma certa dependência nas excentricidades, a probabilidade de existência de planetas Troianos é bastante grande.

Os trabalhos mencionados anteriormente, entre outros, demonstram a viabilidade das configurações co-orbitais a partir do ponto de vista da estabilidade dinâmica. Laughlin and Chambers [2002] sugerem que um possível cenário de formação para os planetas Troianos é mediado por uma interação com o disco protoestelar (vide fig. 1.3). Igualmente, mostram que se dois planetas formam-se dentro de um disco em órbita já seja ferradura ou girino (vide Capítulo 3, seção §3.3.1, para detalhes), que são órbitas próprias do movimento co-orbital, eles tendem a permanecer na configuração ressonante enquanto migram em direção à estrela como resultado de sua interação com o disco.

⁴ Deve-se ter em conta que as condições iniciais consideradas em diversos trabalhos podem ser diferentes.

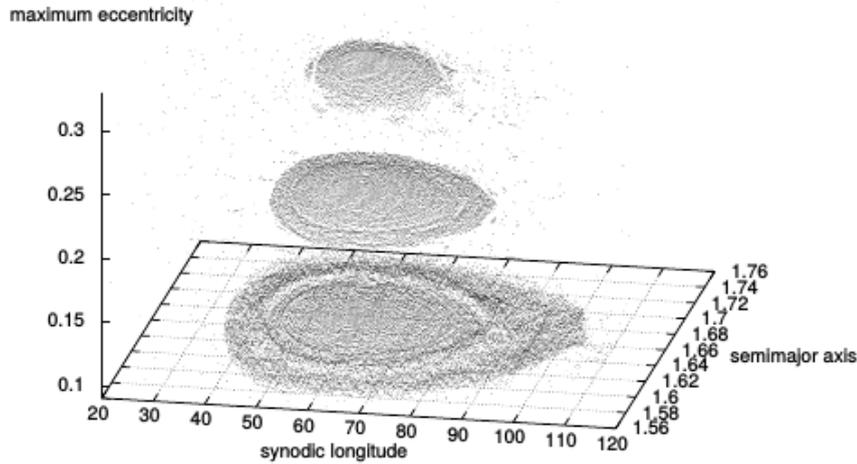


FIGURA 1.1: Região de estabilidade do sistema HD 23079 para diferentes valores da excentricidade do gigante de gás observado: $e_{GG} = 0.05$ (região inferior), 0.10 (região intermédia) e 0.15 (região superior), para levar em conta os possíveis erros em sua determinação. Os corpos primários foram colocados inicialmente na sua posição de periastro, enquanto a excentricidade inicial do planeta fictício bem como os demais elementos angulares foram tomados como zero [Dvorak et al., 2004].

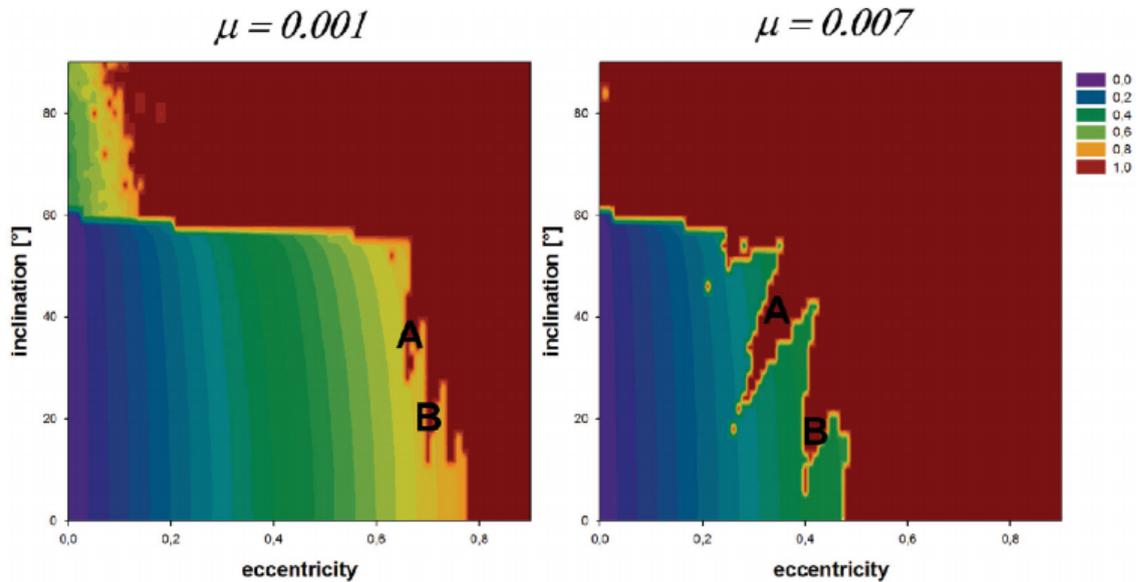


FIGURA 1.2: Regiões de estabilidade determinadas por meio das excentricidades máximas das partículas de teste em função das inclinações e as excentricidades iniciais das mesmas usando um sistema normalizado. Os planetas Troianos foram colocados exatamente em L_4 e sempre se considerou que sua excentricidade $e_t = e_{GG}$. A região estável é descontínua devido a duas ressonâncias secundárias (indicadas por A e B) e, portanto, o movimento estável só é possível para algumas excentricidades e inclinações específicas. Tempo de integração: 10^6 anos [Funk et al., 2012].

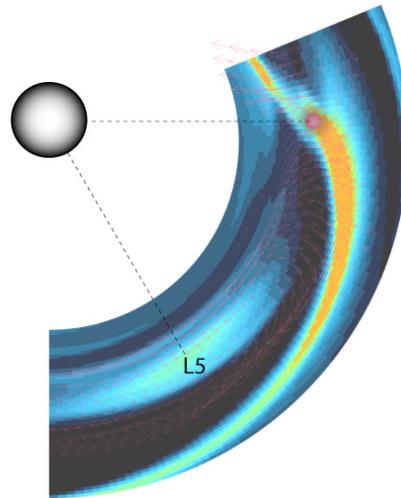


FIGURA 1.3: Formação de um planeta Troiano. Detalhe do cálculo hidrodinâmico realizado por Laughlin, Chambers e Fischer. Um planeta com massa de 0.75 massas de Júpiter (M_{Jup}) está presente dentro de um disco de acreção protoplanetário. O parâmetro de viscosidade do disco na região próxima ao planeta é ~ 0.02 e o planeta, com sua massa sub-Joviana, é apenas ligeiramente capaz de manter uma lacuna no disco. O material persiste na vizinhança de L_4 e L_5 , onde o padrão de fluxo dos vórtices nestas regiões pode levar à captura de partículas e acumulação de um segundo núcleo significativo [Laughlin and Chambers, 2002].

Esta dissertação é dedicada a uma variante dos estudos mencionados acima. Nossa finalidade é o estudo da estabilidade orbital de planetas Troianos fictícios de massa desprezível que são adicionados a dois sistemas extra-solares conhecidos de múltiplos planetas (maior que dois); os quais ademais orbitam a distâncias pequenas de suas estrelas. Sendo assim, nossa amostra de estudo consiste de dois sistemas planetários extra-solares detectados pelo telescópio espacial Kepler: Kepler-9 e Kepler-56 (descritos no Capítulo 2, seção §2.2), já que os sistemas múltiplos encontrados por Kepler são tipicamente sistemas de planetas pequenos ($\sim 1 - 10 R_{\oplus}$) em órbitas compactas [Lissauer and et al., 2011]. A escolha destes sistemas específicos foi devida a que seus planetas têm um maior número de parâmetros físicos e orbitais determinados em comparação a outros sistemas Kepler. Além disso, eles cumprem com o requisito de ter pelo menos 3 planetas, o que fornece uma dinâmica muito mais rica do problema co-orbital.

A estrutura de nosso trabalho é a seguinte: no Capítulo 2 descrevemos os métodos de detecção de exoplanetas, a missão Kepler da NASA e os sistemas utilizados para o nosso estudo. No Capítulo 3 fazemos uma revisão do problema restrito dos três corpos e dos tipos de órbitas na ressonância de movimento médio 1:1. No Capítulo 4 apresentamos os integradores numéricos simpléticos, alguns dos quais estão incluídos no pacote de integração que usamos. Já no Capítulo 5, descrevemos a metodologia aplicada ao nosso trabalho, indicando as nossas considerações na criação de grades de condições iniciais para as simulações numéricas, bem como os métodos utilizados para a análise dos dados

gerados. No Capítulo 6, apresentamos e discutimos os resultados das integrações através de mapas de cor e no Capítulo 7 encerramos com as conclusões de nosso trabalho e mencionamos algumas perspectivas para a sua continuidade.

Capítulo 2

Métodos de Detecção de Exoplanetas e a Missão Kepler

Neste Capítulo, descrevemos os diferentes métodos para a detecção de exoplanetas examinando os parâmetros astrofísicos associados a cada técnica, assim como também suas limitações na detecção. Na segunda parte, descrevemos as principais características da Missão Kepler e apresentamos os dois sistemas planetários extra-solares alvo do nosso estudo, aos quais adicionaremos posteriormente planetas Troianos fictícios.

2.1 Métodos de Detecção de Planetas Extra-solares

O primeiro sistema planetário extra-solar foi descoberto por [Wolszczan and Frail \[1992\]](#) em torno do pulsar de milissegundo PSR 1257+12 ao registrar com precisão o tempo de chegada dos pulsos de rádio da estrela de nêutrons. Pouco tempo depois, [Mayor and Queloz \[1995\]](#) anunciaram a primeira detecção de um planeta extra-solar orbitando uma estrela da sequência principal, 51 Peg b, cuja presença foi inferida por espectroscopia de alta resolução. 51 Peg b é um gigante gasoso com um período orbital de 4.2 dias, sendo assim o protótipo de “*Júpiter quente*” (*hot Jupiter*)¹ dos planetas extra-solares.

A seguir descrevemos os métodos utilizados para a detecção de exoplanetas os quais podem ser classificados em dois grupos: i) Os de detecção indireta, tais como cronometragem de pulsares, velocidade radial, trânsitos, microlentes gravitacionais, astrometria, e ii) Os de detecção direta, como imageamento. Devido a que os planetas distantes são extremamente fracos em brilho, a maioria dos métodos de detecção são indiretos. Neste caso, a presença do planeta é inferida através de sua influência sobre a estrela que orbita.

¹ Os Júpiteres quentes são planetas com massa similar à de Júpiter que estão muito próximos da sua estrela.

2.1.1 Cronometragem de Pulsares

Os pulsares são estrelas de nêutrons que possuem um campo magnético intenso. Devido a que seus eixos de rotação e magnético estão desacoplados, emitem ondas de rádio que para um observador terrestre se manifestam como pulsos periódicos desde que a orientação do eixo magnético seja adequada. Embora os pulsos são emitidos periodicamente, o movimento da Terra em torno do Sol e sua rotação causam variações nos tempos de chegada ao observador, no entanto, estes podem ser calculados e removidos dos dados. Desse modo, o período do pulso pode ser determinado com grande precisão e os pulsares mais estáveis figuram entre os relógios mais precisos.

Se um pulsar possui um planeta, ambos giram em torno do centro de massa do sistema, causando um adiantamento ou atraso nas pulsações. Para um planeta em uma órbita circular, a amplitude máxima do tempo de atraso será [Deeg et al., 2008]:

$$\tau = \sin i \left(\frac{a_p}{c} \right) \left(\frac{M_p}{M_\star} \right) \quad (2.1)$$

onde M_\star e M_p são as massas do pulsar e do planeta, respectivamente, a_p é a distância (semieixo maior) desde o baricentro ao planeta, i é a inclinação da órbita do planeta (correspondendo $i = 90^\circ$ a uma órbita vista de canto), e c é a velocidade da luz. Os pulsos chegarão a tempo em ângulos de fase orbital $\varphi(t) = 90^\circ$ e 270° , atrasados por uma quantidade τ em $\varphi(t) = 0^\circ$ e adiantados por uma quantidade τ em $\varphi(t) = 180^\circ$, onde a fase de zero graus ocorre quando o planeta está mais próximo do observador (isto é, na conjunção inferior). Planetas do tamanho da Terra podem causar desvios de milissegundos no comportamento regular dos pulsos. De fato, irregularidades da ordem de microsegundos também podem ser medidos, o que significa que este método teria a capacidade de detectar grandes asteroides ou planetas anões. O método de cronometragem de pulsares permite obter a razão de massas do planeta à estrela (projetada em relação à linha de visada), o período orbital do planeta e sua excentricidade (se a órbita não é circular) [Deeg et al., 2008].

2.1.2 Velocidade Radial

Consideremos um sistema estrela-planeta (vide fig. 2.1), tanto a estrela como o planeta descrevem uma órbita em torno do centro de massa do sistema. Um observador na Terra pode medir as variações da velocidade da estrela na direção da linha de visada -*velocidade radial*- a través de medições altamente precisas das mudanças nas linhas espectrais da estrela. Depois de remover o movimento do observador em relação ao

baricentro do sistema solar e outros movimentos conhecidos, pode-se obter o movimento radial da estrela devido à presença do planeta.

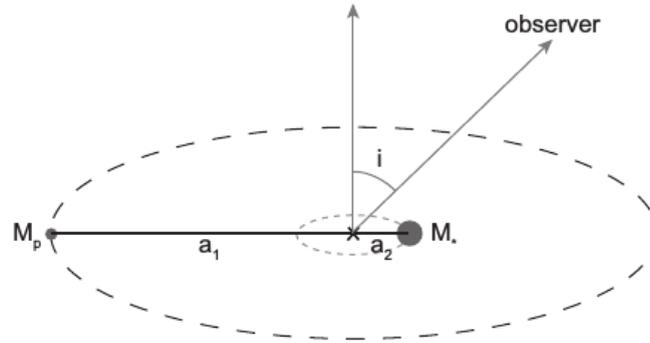


FIGURA 2.1: Configuração do sistema estrela-planeta observado em um ângulo de inclinação i [Armitage, 2014].

Devido ao efeito Doppler, as linhas espectrais estelares movimentar-se-ão periodicamente para o vermelho ou para o azul por $\Delta\lambda/\lambda = v/c$. Da análise dos espectros obtidos pode-se inferir a curva de velocidade radial da estrela, cuja semi-amplitude, K , que pode ser deduzida a partir das equações de Newton e da segunda lei de Kepler, é dada por

$$K = \left(\frac{2\pi G}{P_{\text{orb}}} \right)^{1/3} \frac{M_p \sin i}{(M_p + M_\star)^{2/3}} \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (2.2)$$

onde P_{orb} é o período orbital do planeta, i é o ângulo entre a normal ao plano orbital e a linha de visada (normal ao plano do céu), e é a excentricidade da órbita do planeta e G é a constante gravitacional. K , P_{orb} e e podem ser determinados registrando vários espectros ao longo de uma órbita completa do planeta. Por outro lado, M_\star pode ser estimada a partir da classificação espectral da estrela. Devido a que $M_p \ll M_\star$ então $M_p + M_\star \sim M_\star$ e a equação 2.2 nos permite obter a *massa mínima* do planeta, $M_p \sin i$. A terceira lei de Kepler, $P_{\text{orb}}/\text{ano} = (a_p/1 \text{ UA})^{3/2} (M_\star/M_\odot)^{-1/2}$, onde M_\odot é a massa do Sol, permite também obter o semieixo maior do planeta. No caso do Sistema Solar, o efeito de Júpiter sobre o Sol é de 12 m/s, o de Saturno é 4 m/s e o da Terra é de apenas 0.1 m/s. A detecção de exoplanetas com esta técnica depende da precisão com a qual podemos medir o efeito Doppler das linhas. O Buscador de Planetas por Velocidade Radial de Alta Precisão ou HARPS (*High Accuracy Radial Velocity for Planetary Searcher*), é atualmente o instrumento mais produtivo para a procura de planetas extra-solares de baixa massa utilizando esta técnica. Está instalado num telescópio de 3.6 m do ESO, em La Silla, Chile, e pode atingir precisões de até 1 m/s.

Por outro lado, as medições precisas de velocidade radial requerem um grande número de linhas espectrais, por isso não pode ser aplicado para as estrelas mais quentes (tipos

espectrais A, B e O), porque apresentam menos linhas espectrais que as estrelas mais frias como o Sol. [de Pater and Lissauer, 2010].

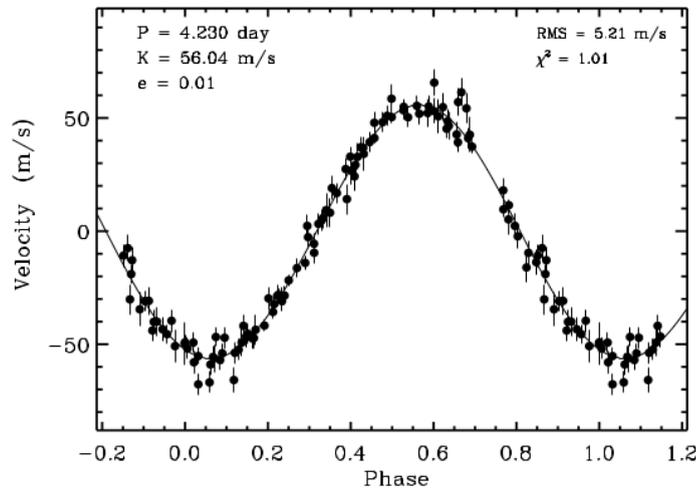


FIGURA 2.2: Medições da velocidade radial da estrela 51 Pegasi (pontos com barras de erro) como uma função da fase orbital e o modelo de ajuste Kepleriano (linha contínua). A variação é sinusoidal com um período de 4.231 ± 0.001 dias [Marcy et al., 1997].

2.1.3 Trânsitos

Suponhamos que o observador, o plano da órbita do planeta e a estrela encontram-se sobre a linha de visada ($i \simeq 90^\circ$). Quando o planeta passa diante da estrela, oculta parte do disco estelar, de modo que o observador detecta uma diminuição no fluxo estelar conforme este evento ocorre. Estes trânsitos podem ser distinguidos das manchas estelares e da eventual variabilidade estelar intrínseca devido à sua periodicidade e ao fato da curva de luz ter forma de “U”.

As observações de trânsito fornecem o tamanho e o período orbital do planeta detectado. A partir de considerações geométricas (fig. 2.3) podem-se deduzir vários fatos importantes. A *profundidade do trânsito*, isto é, a fracção do fluxo estelar que é bloqueado pelo planeta, é

$$\frac{\Delta F}{F} \propto \left(\frac{R_p}{R_\star} \right)^2 \quad (2.3)$$

onde F é o fluxo total do sistema quando não ocorre qualquer trânsito e R_p e R_\star são os raios do planeta e da estrela. Para a Terra em torno de uma estrela de tipo Solar $\Delta F/F \simeq 8.4 \times 10^{-5}$, e para Júpiter, cerca de 1%. Para observar um trânsito se requer um alinhamento orbital favorável, quase de canto. Para um planeta em uma órbita com semieixo a_p e formando um ângulo i em relação à linha de visada, alguma parte do planeta tocará o disco estelar sempre que $\cos i \leq (R_\star + R_p)/a_p$. Para inclinações

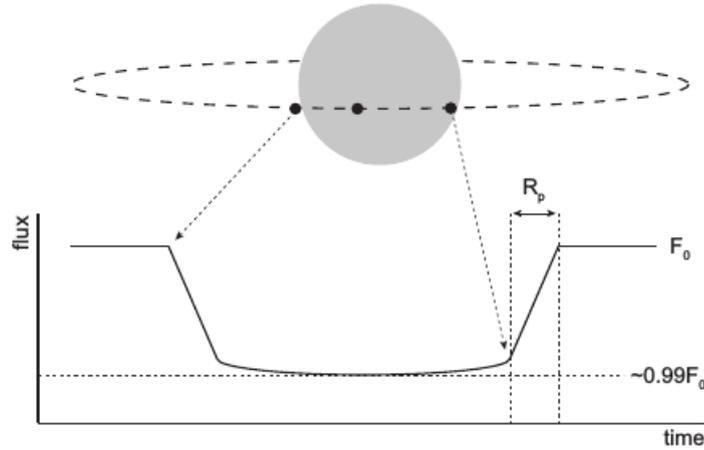


FIGURA 2.3: Ilustração da curva de luz esperada para o trânsito de um planeta gigante gasoso através de uma estrela de tipo solar [Armitage, 2014].

aleatórias, a *probabilidade de trânsito* é então

$$P_{\text{trânsito}} = \frac{R_{\star} + R_p}{a_p} \quad (2.4)$$

Como $R_{\star} \gg R_p$, a probabilidade se reduz a R_{\star}/a_p o que indica que é mais provável observar trânsitos quanto menor seja a separação orbital entre o planeta e a estrela. Por exemplo, no caso do Sistema Solar, a probabilidade de alinhamento de modo que um observador externo detecte um trânsito é de 1% para Mercúrio, 0.5% para a Terra e apenas 0.1% para Júpiter. Já que esta técnica depende do raio e não da massa do planeta, permite a detecção de planetas não necessariamente muito massivos. Além disso, mediante este método é possível detectar planetas menores quanto menor for a estrela.

A duração, T , de um trânsito para órbitas planetárias circulares de período P_{orb} é

$$T \propto \left(\frac{P_{\text{orb}}}{\pi} \right) \left(\frac{R_{\star}}{a_p} \right)$$

enquanto que a equação completa para a duração de um único trânsito planetário é dada por

$$T = 2Z(R_{\star} + R_p) \frac{\sqrt{1 + e^2}}{1 + e \cos \varphi(t)} \left(\frac{P_{\text{orb}}}{2\pi GM_{\text{tot}}} \right)^{-3}$$

onde Z incorpora efeitos geométricos da inclinação orbital (escurecimento do limbo, etc), φ é a fase orbital do planeta extra-solar, e é a excentricidade orbital e M_{tot} é a soma das massas da estrela e do planeta [Deeg et al., 2008]. A mudança fotométrica no brilho do Sol duraria aproximadamente 30 horas pela presença de Júpiter e cerca de 12 horas devido à Terra.

Na realidade, o brilho da estrela não é uniforme, pelo que a curva de luz não tem uma forma plana desde o final da entrada ao início do egresso do trânsito. A forma da curva de luz é afetada pelo escurecimento do limbo, fazendo com que seja cada vez mais profunda conforme o planeta atinge o centro do trânsito, apesar que a área geométrica ocultada pelo planeta segue sendo a mesma durante a maior parte do evento. A quantidade de escurecimento do limbo varia de acordo com o comprimento de onda observado devido a que na borda da estrela estamos observando a atmosfera estelar em um trajeto inclinado, e o ponto onde a profundidade óptica é igual a 1 é maior na atmosfera estelar onde as temperaturas são mais frias. Quando observamos o centro da estrela vemos a atmosfera estelar com maior profundidade, onde as temperaturas são mais elevadas. A diferença de brilho entre a borda da estrela e seu centro pode ser aproximada como a diferença entre duas funções de Planck. Em comprimentos de onda curtos uma pequena mudança na temperatura produz uma grande mudança no brilho (vide fig. 2.4), as bordas da estrela mostram-se significativamente mais fracas que seu centro numa curva de luz suave. Conforme os comprimentos de onda são maiores a diferença entre a aproximação dos dois corpos negros torna-se menor, a quantidade de escurecimento do limbo diminui fazendo com que a curva de luz tenha uma forma de caixa retangular [de Pater and Lissauer, 2010].

Também o raio do objeto que provoca a ocultação dependerá do comprimento de onda na qual se observa, o que, dependendo da região da atmosfera que atravesse, será completa ou parcialmente absorvida. Isto faz com que o observador meça diferentes raios dependendo da opacidade da atmosfera do planeta. Por exemplo, no caso da Terra, sua atmosfera é opaca abaixo de 3000 Å pelo que, se fosse observada durante um trânsito em comprimentos de onda curtos, aparentaria ser 60 km maior que em comprimentos de onda longos.

Os maiores planetas detectados mediante trânsito poderiam provavelmente também ser detectados pelo método de velocidade radial, obtendo-se assim a massa do planeta (pois a inclinação pode ser inferida a partir dos trânsitos). Desta maneira, através da combinação de ambos métodos pode-se obter a densidade do planeta, um valioso dado para os estudos de formação.

Por outro lado, embora as considerações geométricas podem limitar a fracção de planetas detectáveis, esta técnica fotométrica é bastante eficiente pois permite estudar milhares de estrelas dentro do campo de visão de um telescópio. A variabilidade atmosférica limita a precisão fotométrica desde a Terra a aproximadamente $\Delta F/F \approx 0.1\%$. Acima da atmosfera, uma maior precisão permite a detecção de planetas tão pequenos quanto a Terra.

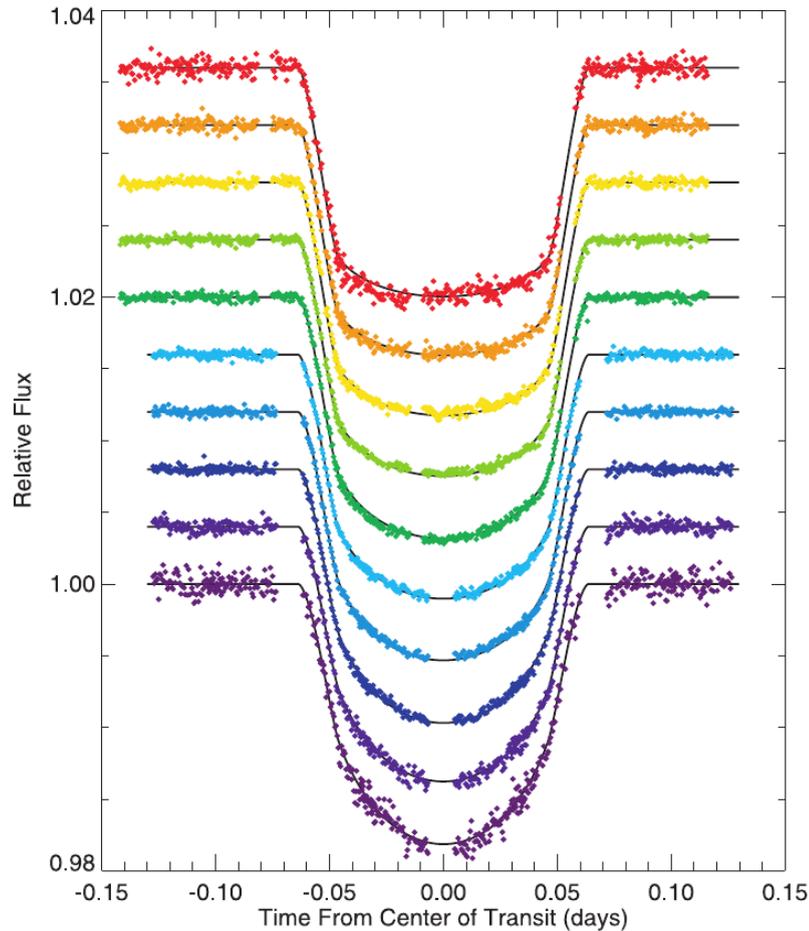


FIGURA 2.4: Curvas de luz tomadas em 10 diferentes bandas fotométricas, abrangendo o intervalo de 290-1030 nm. A forma de cada curva de trânsito é determinada pelo escurecimento do limbo da estrela, que é mais pronunciado em comprimentos de onda curtos [Knutson et al., 2007].

2.1.4 Microlentes Gravitacionais

Consideremos duas estrelas no campo de visão, uma das quais encontra-se muito mais distante de nós do que a outra. Durante seu deslocamento relativo, a estrela mais próxima, que chamaremos lente (L), alinha-se com a mais distante (S) e o observador, resultando em um incremento temporário do brilho combinado de ambas estrelas devido à amplificação da luz proveniente da fonte causada por efeitos relativísticos (curvatura do espaço-tempo). Este fenômeno foi observado pela primeira vez em galáxias e é conhecido como lente gravitacional².

² No nosso caso usamos o termo *microlente* devido a que não há uma distorção aparente na forma do objeto de fundo mas apenas variações fracas na intensidade da luz.

A lente L amplifica a luz da fonte S por um fator substancial quando passa mais perto à linha de visada que o raio do anel de Einstein, R_E , dado por

$$R_E = \sqrt{\frac{4GM_L r_{\oplus L}}{c^2} \left(1 - \frac{r_{\oplus L}}{r_{\oplus S}}\right)} \quad (2.5)$$

onde M_L é a massa da lente, e $r_{\oplus L}$ e $r_{\oplus S}$ são as distâncias desde a Terra à lente e à fonte, respectivamente. O ângulo no céu do raio de Einstein (o *ângulo de Einstein*) é então dado por $\theta_E = R_E/D_L$. Se a estrela lente tem, por sua vez, um planeta em órbita, o padrão de amplificação de brilho se desviará (vide figura 2.5) devido a que o planeta distorce o campo gravitacional de sua estrela. A probabilidade de alinhamento entre duas estrelas é, mesmo no centro galáctico, de uma em um milhão. Porém, quando isto ocorre, a probabilidade de que um planeta possa também causar uma amplificação que exceda 5% do brilho no padrão de amplificação chega a ser aproximadamente de uma em cinco [Deeg et al., 2008].

A duração de um evento de microlente é dada por

$$t_E = \sqrt{\frac{4GM_p dV}{c^2}} \quad (2.6)$$

onde d é a distância à lente em parsecs, V é a velocidade relativa com que se movimenta a lente e M_p é a massa do planeta. Assim, se a distância d é de 5 kpc, para um planeta da massa de Júpiter, o evento durará 3 dias e para um planeta como a Terra apenas 4 horas. No primeiro caso, a amplificação do brilho será de 3 magnitudes e, no segundo, de 1 magnitude. Sob circunstâncias favoráveis, planetas tão pequenos quanto a Terra podem ser detectados.

Esta técnica fornece informações sobre as massas dos planetas detectados e as distâncias (projetadas) a suas respectivas estrelas, mas não sobre as excentricidades ou inclinações orbitais [de Pater and Lissauer, 2010]. A principal dificuldade com esta técnica é que os eventos são únicos e não se repetem, já que se requereria da observação constante de um grande número de estrelas distantes para ter a chance de registra-los. No entanto, este método funciona para estrelas muito distantes pelo que pode fornecer informação estatística sobre a distribuição de exoplanetas em nossa galáxia (por exemplo, comparando a ocorrência de exoplanetas entre a população do disco e do bojo galáctico). O Telescópio para Estudos no Infravermelho em Amplo Campo (WFIRST, *Wide-Field Infrared Survey Telescope*) que seria lançado em 2020 para caçar exoplanetas mediante microlentes, entre outras tarefas, poderia detectar um grande número de planetas de baixa massa.

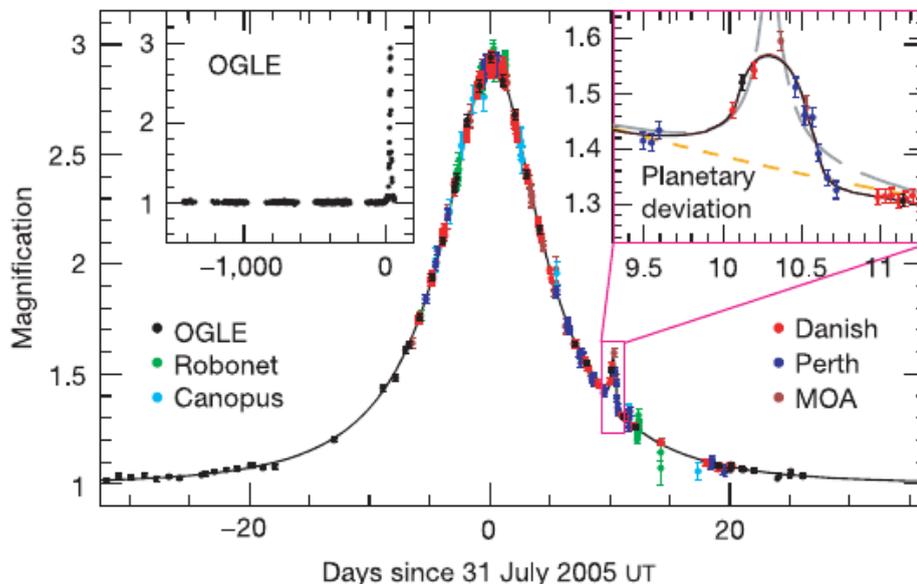


FIGURA 2.5: Curva de luz observada do evento de microlente de OGLE-2005-BLG-390 e o modelo de melhor ajuste em função do tempo [Beaulieu and et al., 2006]. O painel na parte superior esquerda mostra a curva de luz de OGLE nos 4 anos anteriores, enquanto que o painel à direita mostra um zoom do desvio devido à presença de um planeta em um intervalo de tempo de 1.5 dias. A curva sólida é o melhor modelo de lente binária com uma razão de massa planeta-estrela de $7.6 \pm 0.7 \times 10^{-5}$, e uma separação projetada planeta-estrela de $1.610 \pm 0.008 R_E$. A curva cinza representa o melhor modelo de fonte binária que foi rejeitado pelos dados, e a linha laranja descontinua, o melhor modelo com uma única lente.

2.1.5 Astrometria

A procura astrométrica de exoplanetas é a mais antiga de todas estas técnicas. Porém, a descoberta do primeiro exoplaneta realizada mediante astrometria foi anunciada apenas em Junho de 2009 [Pravdo and Shaklan, 2009].

A astrometria consiste em medir as variações periódicas na posição de uma estrela no plano do céu (eliminando previamente o movimento aparente da estrela devido ao movimento próprio e a paralaxe anual) devido à presença de planetas. Se a estrela possui um planeta, descreverá um movimento elíptico em torno do baricentro do sistema cujo semieixo maior, medido em segundos de arco, $\Delta\theta$, será

$$\Delta\theta = \frac{M_p a_p}{M_\star d} \quad (2.7)$$

onde d é a distância ao sistema medido em parsecs e a_p é o semieixo maior da órbita em UA. Se d e a_p são medidos nas mesmas unidades, o valor de $\Delta\theta$ em 2.7 estará dado em radianos. A partir da equação 2.7, podemos notar que esta técnica é mais sensível a planetas massivos que orbitam ao redor de estrelas que estão relativamente próximas ao

observador. Para que esta técnica seja efetiva, devem-se tomar várias imagens da estrela durante pelo menos uma fracção importante do período orbital do planeta. Apesar de que os planetas em órbitas mais distantes são mais fáceis de detectar usando astrometria, porque a amplitude do movimento da estrela seria maior, encontra-los requer um tempo de observação mais longo devido a seus maiores períodos orbitais. Para se ter uma ideia, se considerarmos uma estrela a 5 parsecs de distância, o deslocamento no plano do céu devido a um planeta como Júpiter orbitando em torno dela seria um milissegundo de arco, enquanto que para um planeta como a Terra seria de apenas 0.6 microsegundos de arco. A melhor precisão a longo prazo obtida por telescópios em solo é de ~ 1 milissegundo de arco [de Pater and Lissauer, 2010].

Devido a que se observa o movimento da estrela projetado não em uma, senão em duas dimensões, obtém-se uma melhor estimativa da massa do planeta com astrometria que usando velocidades radiais. Espera-se que a sonda GAIA da Agência Espacial Europeia (ESA), lançada em dezembro de 2013, descubra um grande número de planetas usando esta técnica.

2.1.6 Detecção por Imageamento Direto

A maneira mais difícil de detectar um planeta é mediante um *imageamento direto*. Isto é devido ao enorme contraste entre a luz emitida pela estrela e a luz fraca do planeta. Por exemplo, em comprimentos de onda visíveis, para uma estrela a 5 parsecs e um brilho de 1 magnitude, o brilho de um planeta como Júpiter seria de 23 magnitudes, e de um planeta como a Terra, de 25 magnitudes. No entanto, este contraste pode ser reduzido se em vez de observar no visível observa-se no infravermelho. Isto é especialmente válido quando o planeta ainda é muito jovem e ainda está em fase de formação, emitindo calor. Além disso, os planetas de tipo joviano que tiverem associado um forte campo magnético (por exemplo, planetas com um núcleo metálico em rápida rotação) podem emitir um fluxo de radiação significativo em comprimentos de onda de rádio. Se considerarmos um planeta semelhante a Júpiter ao redor de uma estrela de tipo solar, na frequência de 10 MHz, a relação entre o fluxo planeta-estrela poderia chegar a 4 (o planeta mais brilhante que a estrela), em uma etapa de baixa atividade estelar. Porém, os elétrons presentes no meio interestelar adicionam muito ruído à detecção nesta faixa de comprimentos de onda, portanto no momento não é possível a detecção neste intervalo de frequências. A detecção direta de planetas extra-solares requer de ferramentas específicas como óticas adaptativas para corrigir os efeitos atmosféricos que distorcem a imagem.

Outra forma de obter a imagem do planeta é usando um coronógrafo, um instrumento que bloqueia a luz proveniente da estrela deixando visível somente a coroa, a zona

exterior de plasma da atmosfera da estrela, permitindo enxergar a luz dos planetas próximos. Para isto, coloca-se uma máscara opaca no plano focal do telescópio, que impede que a maior parte da luz da estrela continue o seu caminho pelo interior do instrumento até o detector.

Em 2005, anunciou-se a obtenção da primeira imagem direta de um exoplaneta (vide fig. 2.6), feito realizado pelo sistema de ótica adaptativa NACO do *Very Large Telescope* (VLT). O Telescópio Europeu Extremamente Grande ou E-ELT (*European Extremely Large Telescope*), previsto para entrar em operação em 2018, procurará novos planetas com esta técnica, graças a sua alta qualidade de imagem.

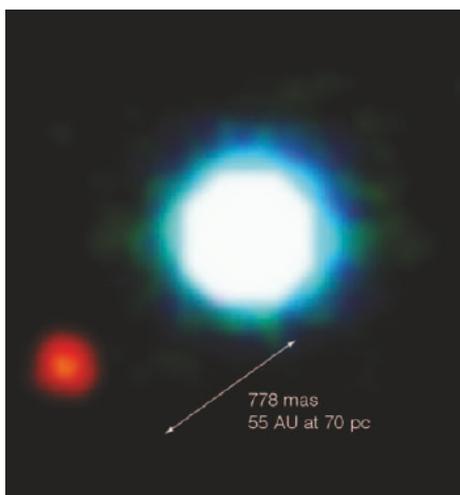


FIGURA 2.6: Imagem composta que mostra o exoplaneta 2M1207b (em vermelho) orbitando à anã marrom 2M1207, que se encontra a 230 anos luz, na constelação de Hydra. 2M1207b é 5 vezes mais massivo que Júpiter e orbita a uma distância de 55 UA da anã marrom. É o primeiro exoplaneta detectado por imageamento direto e o primeiro descoberto em torno de uma anã marrom. A imagem está baseada em três exposições no infravermelho próximo (nas bandas H, K e L). Crédito: ESO.

Finalmente, na figura 2.7 podemos observar a distribuição de uma amostra de planetas extra-solares confirmados em função da sua massa e raio orbital. A procura por meio de imagem direta e microlentes resultou num pequeno número de descobertas. É evidente na figura 2.7 que grandes regiões do espaço de parâmetros ainda não foram exploradas. Por exemplo, até agora nenhum método encontrou um análogo extra-solar de Saturno, planeta que desempenha um papel importante na dinâmica do nosso Sistema Solar [Armitage, 2014].

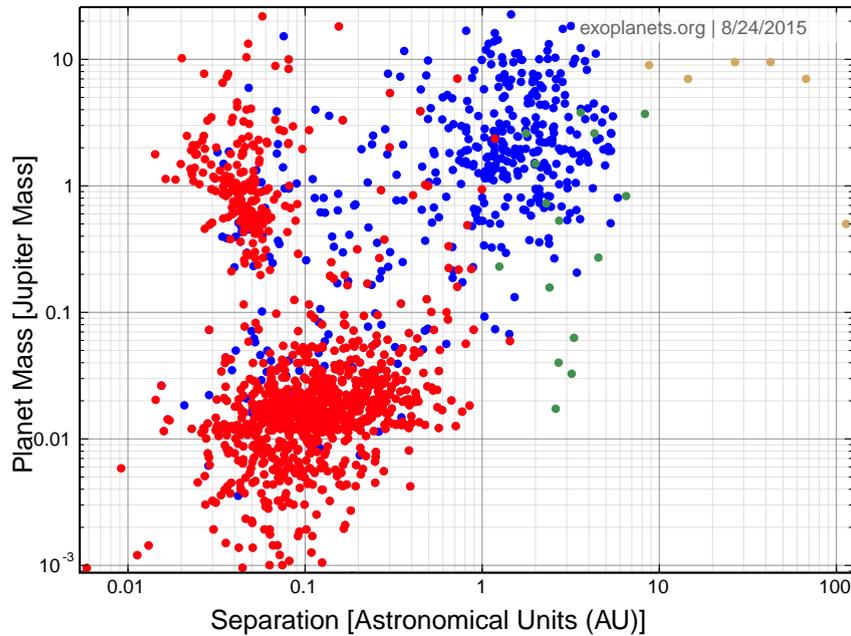


FIGURA 2.7: Distribuição das massas e raios orbitais de planetas extra-solares confirmados até Agosto 2015. Cada cor mostra a técnica da descoberta: velocidade radial (azul), trânsito (vermelho), microlentes (verde) e imageamento direto (amarelo). Gráfico gerado a partir de <http://exoplanets.org/>.

2.2 A Missão Kepler

Kepler é um satélite lançado o 6 de Março de 2009. A missão Kepler foi concebida para detectar planetas usando o método de trânsito, de tamanhos semelhantes à Terra que se encontram dentro ou perto da ZH de sua estrela. Também tinha como objetivo explorar a estrutura e diversidade de sistemas planetários, o que é conseguido estudando uma grande amostra de estrelas para:

- Determinar a abundância de planetas terrestres e maiores dentro ou perto da ZH de uma ampla variedade de estrelas;
- Determinar a distribuição de tamanhos e formas das órbitas desses planetas;
- Estimar quantos planetas existem em sistemas múltiplos;
- Determinar a variedade de tamanhos das órbitas e reflectividades planetárias, tamanhos, massas e densidades de planetas gigantes de curto período;
- Identificar membros adicionais de cada sistema planetário descoberto usando outras técnicas; e
- Determinar as propriedades dessas estrelas que abrigam sistemas planetários.

Kepler precisa de um grande campo de visão para observar um grande número de estrelas. O equipamento básico do Kepler é um telescópio Schmidt com uma abertura de 0.95 m, um espelho primário de 1.4 m e tem um campo de visão de 105 graus quadrados. O detector consiste de um arranjo de 42 CCDs (*Charge Coupled Devices*, por suas siglas em inglês), que foram dispostos em 21 módulos com 2 CCDs em cada um. Cada CCD possui um tamanho de 50×25 mm com 2200×1024 pixels. Os CCDs têm uma sensibilidade espectral entre 400 nm a 850 nm. Apenas as informações dos pixels do CCD onde há estrelas mais brilhantes que uma magnitude visual $m_v = 14$ são registradas. O instrumento tem a sensibilidade para detectar o trânsito de um planeta de tamanho da Terra orbitando uma estrela de magnitude $m_v = 12$ (G2V semelhantes ao Sol) em 6.5 horas de observação contínua.

Kepler observou fixamente um mesmo campo de estrelas na região Cygnus-Lyra ($\alpha \sim 19\text{h}$, $\delta \sim 40^\circ$), como se mostra na figura 2.8. Durante toda sua missão monitorou contínua e simultaneamente o brilho de mais de 100 000 estrelas, por 4 anos, pois para o bom funcionamento do equipamento era necessário que pelo menos três dos quatro giroscópios utilizados para orientar o satélite se mantivessem em boas condições. Em Maio de 2013 falhou o segundo deles, mas os restantes giroscópios permaneceram funcionais e são utilizados hoje para a Missão K2. Devido às limitações atuais do telescópio, a Missão K2 não aponta constantemente à mesma região do céu em Cygnus mas observa varias zonas, durante períodos de 75 dias, próximo ao plano da eclíptica enquanto orbita o Sol, permitindo-lhe observar uma ampla faixa de latitudes galácticas, tanto nos céus do norte e do sul (vide figura 2.9). K2 contribuirá à compreensão dos processos de formação de planetas, estrelas jovens, atividade estelar, estrutura e evolução estelar, e ciência extragaláctica.

Até o dia 18 de Setembro de 2015, a Missão Kepler descobriu 1 030 exoplanetas confirmados, 4 696 candidatos a exoplanetas e 12 exoplanetas confirmados com menos de duas vezes o tamanho da Terra na ZH. Por sua parte, a Missão K2 descobriu 24 exoplanetas confirmados.

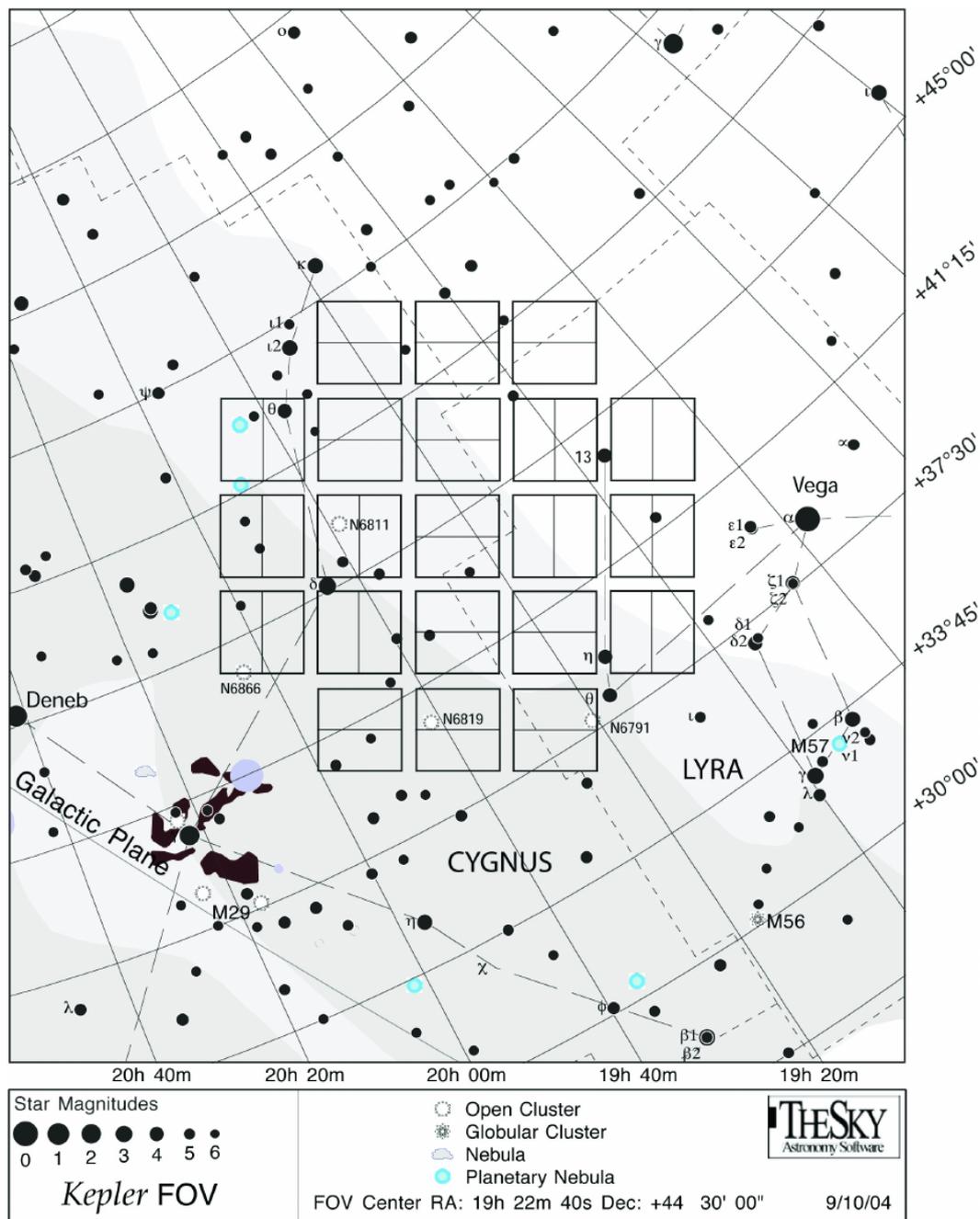


FIGURA 2.8: Localização do campo de visão da Missão Kepler no céu. Os quadrados mostram o campo de visão de cada um dos 21 módulos de CCD. Cada módulo é de 5 graus quadrados. Note-se que as lacunas entre os módulos CCD são alinhadas de modo que aproximadamente a metade das 15 estrelas no campo de visão mais brilhantes que $m_v = 6$ enquadram-se nessas lacunas.

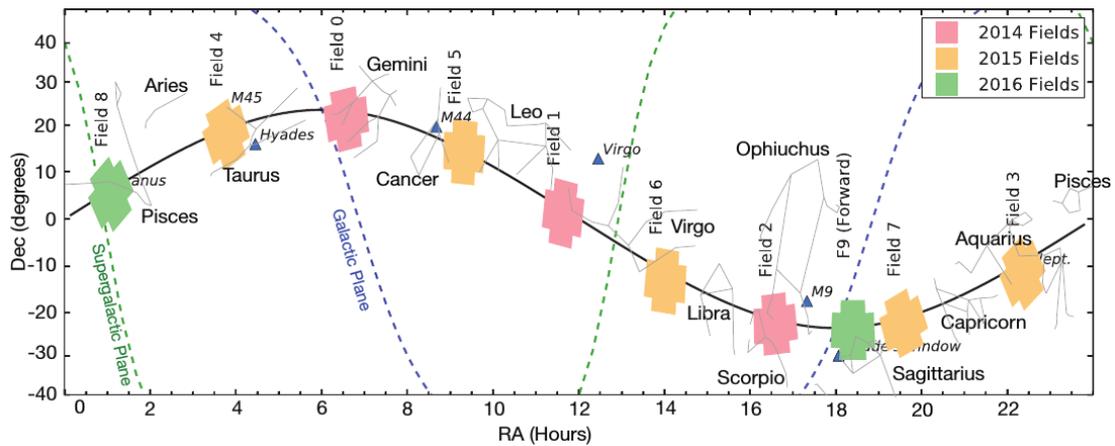


FIGURA 2.9: Campos objetivos da Missão K2 (campanhas). A duração de cada campanha de observação é limitada pelas limitações da iluminação solar no satélite. As observações científicas estão limitadas a cerca de 75 dias em cada campo [Howell and et al., 2014].

2.2.1 Kepler-9

Kepler-9 é um sistema que se encontra a 650 parsecs ou 2 120 anos-luz de distância, formado por três planetas descobertos em 2010 que orbitam em torno de uma estrela semelhante ao Sol, tanto em massa como em raio, de 3 Ga de idade. Dois dos planetas, Kepler-9 b e Kepler-9 c, são do tamanho de Saturno com períodos de 19.2 e 39 dias, respectivamente, indicando que o sistema é provavelmente afetado por uma ressonância de movimento médio 2:1; enquanto que Kepler-9 d é uma Super-Terra com um período de 1.6 dias. Os parâmetros deste sistema são apresentados em detalhe na tabela 2.1.

Uma das técnicas secundárias utilizadas pela Missão Kepler foi a Variação do Tempo de Trânsito ou TTV por suas siglas em inglês (*Transit Time Variação*). Esta técnica consiste em medir a variação do tempo de trânsito, devido à presença de mais de um planeta orbitando sua estrela. O trânsito produzido por um único planeta orbitando em torno de sua estrela é estritamente periódico, enquanto que se houver mais do que um planeta orbitando a estrela, o intervalo de tempo entre sucessivos trânsitos já não é constante devido a que a interação entre os corpos produz uma mudança no tempo de trânsito dos planetas. Estas mudanças também estavam presentes quando foram modelados cada trânsito por separado dos planetas Kepler-9 b e Kepler-9 c (vide figura 2.12). Por outro lado, seis observações de velocidade radial mostraram que esses dois planetas são os objetos de maior massa orbitando perto à estrela e melhoraram substancialmente as estimativas de suas massas (vide figura 2.13).

Estrela	
Massa (M_{\odot})	1.0
Raio (R_{\odot})	1.1
Idade (Ga)	3.0
Temperatura Efetiva (K)	5722.0
Metalicidade [Fe/H]	0.17
Kepler-9 b (confirmado)	
Massa (M_{Jup})	0.141899757732
Raio (R_{Jup})	0.990277438268
Semieixo maior (UA)	0.143
Período orbital (dias)	19.22418
Excentricidade	0.0626
Inclinação ($^{\circ}$)	87.1
Argumento do periélio ($^{\circ}$)	356.9
Kepler-9 c (confirmado)	
Massa (M_{Jup})	0.0975364188403
Raio (R_{Jup})	0.954591764817
Semieixo maior (UA)	0.229
Período orbital (dias)	39.03106
Excentricidade	0.0684
Inclinação ($^{\circ}$)	87.2
Argumento do periélio ($^{\circ}$)	169.3
Kepler-9 d (confirmado)	
Massa (M_{Jup})	0.016518264481
Raio (R_{Jup})	0.178428367256
Semieixo maior (UA)	0.0273
Período orbital (dias)	1.592851

TABELA 2.1: Parâmetros e elementos orbitais do sistema Kepler-9 obtidos da Enciclopédia de Planetas Extra-solares: <http://exoplanet.eu/>.



FIGURA 2.10: Localização aproximada dos planetas no sistema Kepler-9. As órbitas dos planetas estão muito longe da ZH. Fonte: <http://www.openexoplanetcatalogue.com/planet/Kepler-9%20b/>.

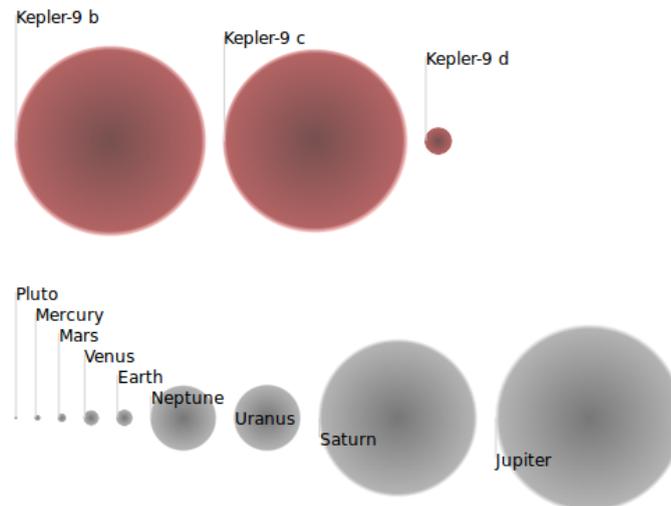


FIGURA 2.11: Tamanhos aproximados dos planetas no sistema Kepler-9. Os planetas do Sistema Solar se mostram como comparação. Fonte: <http://www.openexoplanetcatalogue.com/planet/Kepler-9%20b/>.

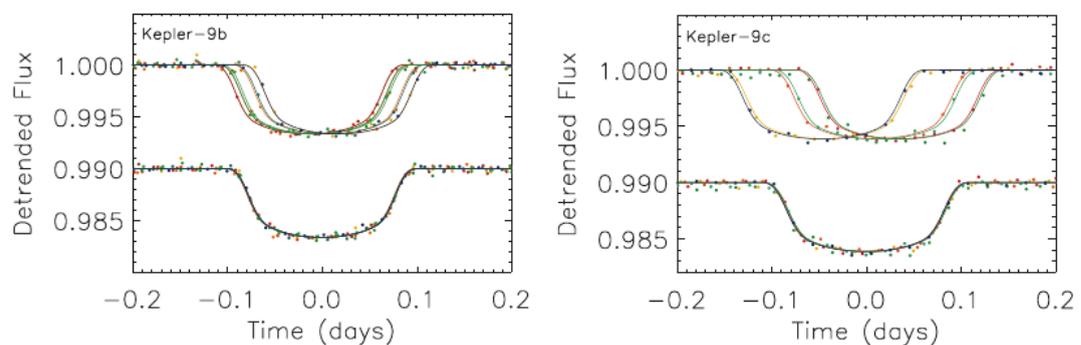


FIGURA 2.12: Variação no tempo de trânsito do planeta Kepler-9 b (esquerda) e Kepler-9 c (direita) [Holman and et al., 2010].

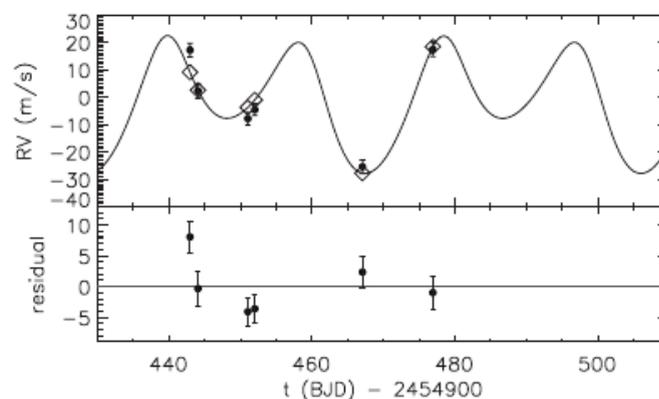


FIGURA 2.13: Curva de velocidade radial da estrela do sistema Kepler-9. Na parte inferior se mostra os resíduos do ajuste obtido [Holman and et al., 2010].

2.2.2 Kepler-56

A maioria dos objetos observados pelo satélite Kepler são estrelas pouco evoluídas, próximas à sequência principal, já que elas proporcionam as melhores chances para detectar planetas de tipo terrestre em zonas habitáveis. Em contraste, a temperatura e gravidade superficial de *Kepler-56* indicam que é uma estrela mais evoluída, pertencente à base do ramo das gigantes vermelhas (RGB) no diagrama HR, com uma massa de $1.32 M_{\odot}$, um raio de $4.23 R_{\odot}$ e uma idade de 3.5 Ga.

Este sistema contém dois planetas internos coplanares, descobertos pelo satélite Kepler em 2012, com períodos orbitais de 10.50 e 21.41 dias, configurando uma quase comensurabilidade 2:1. Variações periódicas no tempo de trânsito confirmaram suas naturezas planetárias. As órbitas destes planetas internos estão desalinhadas em relação ao equador da estrela, que é inclinada por $(47 \pm 6)^{\circ}$ em relação à linha de visada. Isto indica que os desalinhamentos spin-órbita não estão limitados aos sistemas com Júpiteres quentes. Este tipo de desalinhamento spin-órbita é esperado como consequência do torque devido a um corpo massivo em uma órbita mais externa. De fato, medidas de velocidade radial revelaram a presença de um terceiro corpo no sistema Kepler-56, que poderia ser um planeta gigante gasoso ou uma anã marrom orbitando a umas poucas unidades astronômicas da estrela (como é ilustrado na fig. 2.15), ou uma companheira binária localizada a várias dezenas de unidades astronômicas. Em qualquer caso, se a órbita deste terceiro corpo estiver inclinada em relação às órbitas dos planetas mais internos, este poderia ter inclinado as órbitas destes últimos em relação ao plano equatorial da estrela, enquanto que, devido ao forte acoplamento entre as órbitas dos planetas internos, estas permaneceriam coplanares. Medidas continuadas de velocidade radial poderão revelar se o terceiro corpo neste sistema é um planeta (implicando que o desalinhamento inicial ocorreu quando os planetas já estavam formados) ou uma estrela (implicando um desalinhamento primordial do disco protoplanetário) [Huber and et al., 2013].



FIGURA 2.14: Localização aproximada dos planetas no sistema Kepler-56 em relação à ZH (verde). Isto é uma estimativa usando a massa e o tipo espectral da estrela. Fonte: <http://www.openexoplanetcatalogue.com/planet/Kepler-56%20b/>.

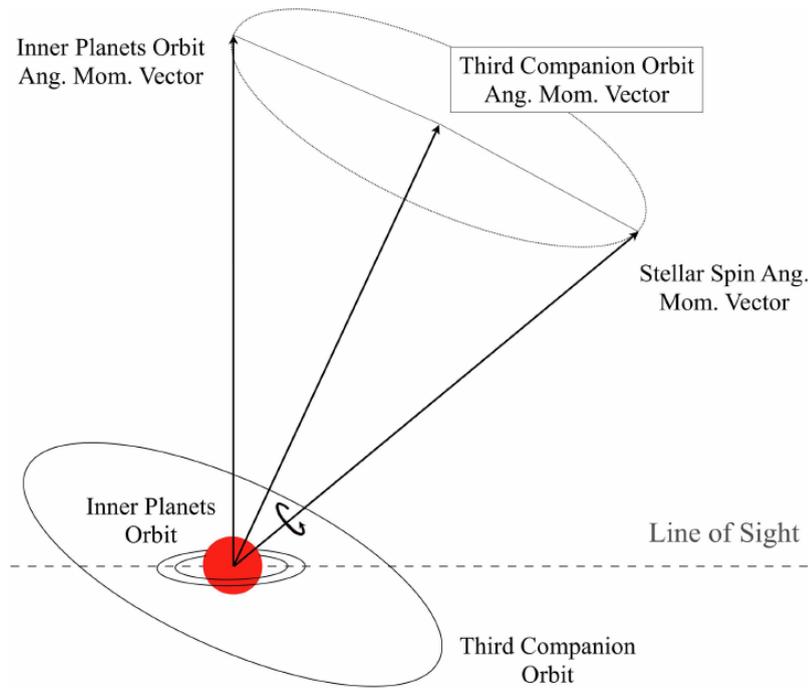


FIGURA 2.15: Ilustração gráfica da hipótese de inclinação dinâmica para o sistema Kepler-56. Cabe remarcar que os tamanhos não estão em escala [Huber and et al., 2013].

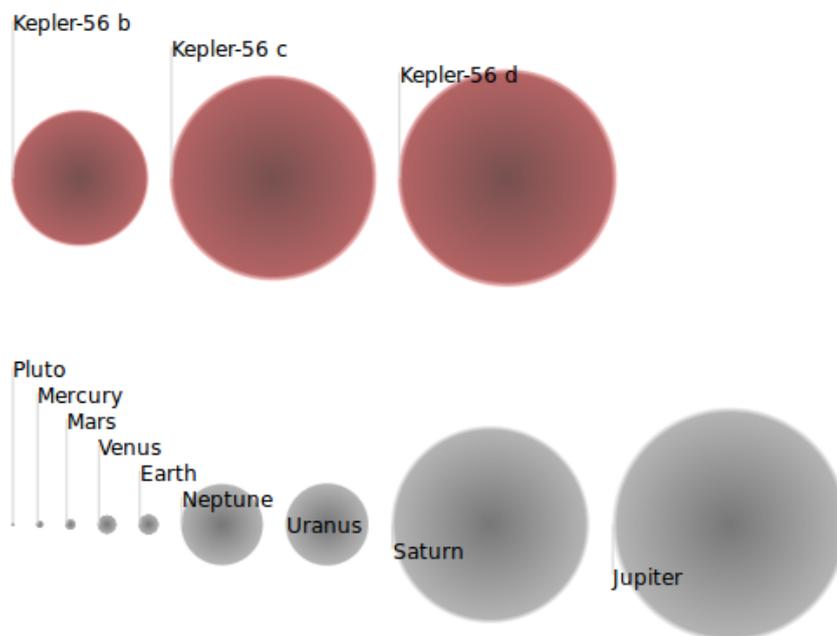


FIGURA 2.16: Tamanhos aproximados dos planetas no sistema Kepler-56. Os planetas do Sistema Solar se mostram como comparação. Fonte: <http://www.openexoplanetcatalogue.com/planet/Kepler-56%20b/>.

Os parâmetros do sistema Kepler-56 são apresentados na seguinte tabela:

Estrela	
Massa (M_{\odot})	1.32
Raio (R_{\odot})	4.23
Idade (Ga)	3.5
Temperatura Efetiva (K)	4840.0
Metalicidade [Fe/H]	0.2
Kepler-56 b (confirmado)	
Massa (M_{Jup})	0.07
Raio (R_{Jup})	0.58
Semieixo maior (UA)	0.1028
Período orbital (dias)	10.5016
Excentricidade	0.0
Inclinação ($^{\circ}$)	83.84
Kepler-56 c (confirmado)	
Massa (M_{Jup})	0.569
Raio (R_{Jup})	0.88
Semieixo maior (UA)	0.1652
Período orbital (dias)	21.40239
Excentricidade	0.0
Inclinação ($^{\circ}$)	84.02
Kepler-56 d (não confirmado)	
Massa (M_{Jup})	3.3
Semieixo maior (UA)	2.0
Excentricidade	0.4

TABELA 2.2: Parâmetros e elementos orbitais do sistema Kepler-56 obtidos da Enciclopédia de Planetas Extra-solares: <http://exoplanet.eu/>.

Capítulo 3

O Problema Circular e Planar Restrito dos Três Corpos

Neste Capítulo, apresentaremos alguns conceitos básicos que são necessários para o presente estudo. Na seção §3.1 mostramos que o problema de N corpos não pode ser resolvido analiticamente quando $N \geq 3$, exceto para alguns casos especiais como as soluções encontradas pelos matemáticos do século XVIII, *Leonhard Euler* e *Joseph-Louis Lagrange*, sobre a existência de 5 pontos de equilíbrio no problema restrito de três corpos (§3.2.2). Finalmente, na seção §3.3 tratamos sobre o fenômeno das ressonâncias.

3.1 O Problema de N-Corpos

A equação do movimento de um corpo é uma equação diferencial vetorial de segunda ordem pelo que sua solução completa envolve seis constantes de integração chamadas também integrais da equação do movimento. No caso de N corpos seria necessário, portanto, $6N$ constantes de integração para resolver o problema, ou seja, $6N$ funções algébricas do tempo, as coordenadas e as velocidades. No entanto, somente são encontradas 10 constantes e estes são:

1. *Integral do centro de massa (6 constantes)*: Advém da simetria definida pelo princípio de ação e reação. Somando todas as equações de movimento, temos

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = 0$$

e integrando duas vezes encontramos que a posição do centro de massa do sistema é dado por

$$\mathbf{R}(t) = \frac{\mathbf{a}t + \mathbf{b}}{M}$$

onde \mathbf{a} e \mathbf{b} são vetores constantes e $M = \sum_{i=1}^N m_i$. Portanto, o sistema de coordenadas do centro de massa constitui um sistema de referência inercial.

2. *Integral das áreas ou momento angular (3 constantes)*: Advém da simetria rotacional do potencial. Logo

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = 0$$

integrando obtemos

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{A}}_i = \text{cte.}$$

onde usamos o fato que $\delta \mathbf{A} = \mathbf{r} \times \delta \mathbf{r}$ é a área formada pelos vetores \mathbf{r} e $\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}$.

3. *Integral da energia (1 constante)*: Advém do fato de que a força deriva de um potencial. Assim

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i = - \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \nabla_i U$$

onde U é a energia potencial do sistema, ou

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i) = - \frac{dU}{dt}$$

e integrando temos

$$E = T + U = \text{cte.}$$

sendo T a energia cinética. Para a solução completa do problema de N corpos nos faltaria encontrar $6N - 10$ constantes adicionais. Estas são conhecidas quando $N = 2$, sendo a solução ao problema de 2 corpos uma órbita Kepleriana, cuja forma e orientação podem ser descritas pelos elementos orbitais: semieixo maior (a), excentricidade (e), inclinação (i), anomalia média (M), argumento do pericentro (ω), e longitude do nodo (Ω). Porém, para $N > 2$, *Bruns* e *Poincaré*, demonstraram que não existem outras integrais além das dez mencionadas anteriormente, pelo que estes problemas não são integráveis.

3.2 O Problema Restrito Circular e Planar dos Três Corpos

Nesta seção realizaremos o estudo do problema restrito circular e planar dos três corpos conforme é demonstrado em [Valtonen and Karttunen \[2005\]](#).

Consideremos três corpos, dois massivos ou principais, como podem ser uma estrela e um planeta, que se movimentam em órbitas circulares com respeito ao centro de massa, e o restante de massa desprezível (neste caso um asteroide ou partícula) movimentando-se no mesmo plano que os corpos principais, cuja perturbação sobre estes pode ser negligenciada. O problema é encontrar a trajetória do corpo com massa desprezível.

Escolhemos as unidades de modo que as propriedades do sistema dependam de um único parâmetro, μ (vide figura 3.1):

- A massa total dos corpos principais considera-se como a unidade de massa. A massa do planeta denota-se por μ e por conseguinte a massa da estrela é $1 - \mu$. Daqui que $\mu = m_1/(m_1 + m_0)$, onde m_0 é a massa da estrela e m_1 é a massa do planeta.
- A distância entre os corpos principais é a unidade de distância sendo a distância desde o centro de massa ao planeta, $1 - \mu$, e a distância do centro de massa à estrela, μ .
- A unidade de tempo é escolhida de modo que o movimento médio dos corpos principais seja $n = 1$.

Assim a constante gravitacional é $G = 1$.

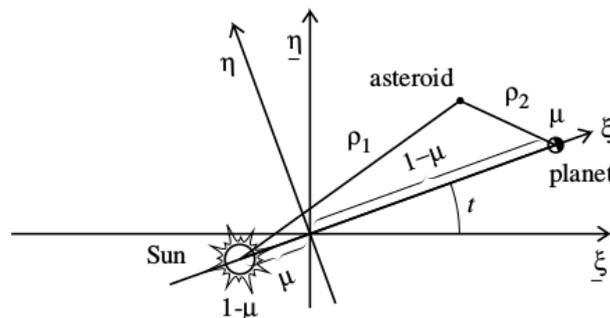


FIGURA 3.1: Sistemas de coordenadas inercial e rotante do problema restrito circular e planar dos três corpos [[Valtonen and Karttunen, 2005](#)].

O Hamiltoniano do asteróide no referencial inercial, $(\underline{\xi}, \underline{\eta})$, é dado por

$$\underline{H} = \frac{1}{2}(p_{\underline{\xi}}^2 + p_{\underline{\eta}}^2) - \frac{1-\mu}{\rho_1} - \frac{\mu}{\rho_2} \quad (3.1)$$

onde $p_{\underline{\xi}}$ e $p_{\underline{\eta}}$ são os momentos conjugados correspondentes às coordenadas $\underline{\xi}$ e $\underline{\eta}$, e

$$\begin{aligned} \rho_1 &= ((\underline{\xi} + \mu \cos t)^2 + (\underline{\eta} + \mu \sin t)^2)^{1/2} \\ \rho_2 &= ((\underline{\xi} - (1-\mu) \cos t)^2 + (\underline{\eta} - (1-\mu) \sin t)^2)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

são as distâncias desde a estrela até a partícula e desde o planeta até a partícula, respectivamente. Como veremos adiante, podemos obter uma melhor representação da dinâmica da partícula considerando-se um sistema de coordenadas onde os corpos principais permaneçam estacionários. Assim, usamos uma transformação de coordenadas do sistema inercial a um sistema rotante, (ξ, η) , cuja origem é o centro de massas e de modo que um dos eixos contenha sempre a os corpos principais.

Usamos uma função geratriz adequada do tipo $F = F_3^1$ (vide Capítulo 3, seção 4.1.1):

$$\begin{aligned} F &= F(p_{\underline{\xi}}, p_{\underline{\eta}}, \underline{\xi}, \underline{\eta}) \\ &= -(\xi \cos t - \eta \sin t)p_{\underline{\xi}} - (\xi \sin t + \eta \cos t)p_{\underline{\eta}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

e podemos mostrar pelas equações de transformação e suas inversas que o novo hamiltoniano é dado por

$$H = \frac{1}{2}(P_{\xi}^2 + P_{\eta}^2) - \frac{1-\mu}{\rho_1} - \frac{\mu}{\rho_2} + P_{\xi}\eta - P_{\eta}\xi \quad (3.4)$$

onde P_{ξ} e P_{η} são os novos momentos conjugados, e

$$\begin{aligned} \rho_1^2 &= (\xi + \mu)^2 + \eta^2 \\ \rho_2^2 &= (\xi - (1-\mu))^2 + \eta^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

As equações de movimento da partícula no referencial rotante são dadas por

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} - 2\dot{\eta} &= \frac{\partial \Omega}{\partial \xi}, \\ \ddot{\eta} + 2\dot{\xi} &= \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (3.6)$$

¹ Note-se que as coordenadas $(\underline{\xi}, \underline{\eta})$ e (ξ, η) estão relacionadas pelas equações:

$$\begin{aligned} \underline{\xi} &= \xi \cos t - \eta \sin t \\ \underline{\eta} &= \xi \sin t + \eta \cos t \end{aligned}$$

É fácil demonstrar que as equações de transformação para a função geratriz 3.3 fornecem exatamente as equações anteriores.

onde Ω pode ser considerado um potencial efetivo:

$$\Omega = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) + \frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} \quad (3.7)$$

Os termos $-2\dot{\eta}$ e $2\dot{\xi}$ em 3.6 correspondem a os termos de Coriolis, enquanto que o termo $\frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2)$ em 3.7 representa o potencial centrífugo.

3.2.1 Integral de Jacobi

Multiplicando a primeira equação de movimento 3.6 por $\dot{\xi}$, a segunda por $\dot{\eta}$, e somando ambas expressões resultantes, temos

$$\dot{\xi}\ddot{\xi} + \dot{\eta}\ddot{\eta} = \frac{\partial\Omega}{\partial\xi}\dot{\xi} + \frac{\partial\Omega}{\partial\eta}\dot{\eta}$$

Já que Ω não depende explicitamente do tempo, a expressão do lado direito é a derivada temporal total de Ω , enquanto que o primeiro termo pode-se expressar em termos das derivadas das velocidades:

$$\frac{d}{dt}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) = 2\frac{d\Omega}{dt}$$

cuja integral resulta ser

$$\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 = 2\Omega - C$$

ou

$$C = 2\Omega(\xi, \eta) - v^2 \quad (3.8)$$

onde v é a velocidade do corpo com massa desprezível respeito aos corpos principais e C é uma constante denominada *integral de Jacobi*, a qual pode ser avaliada conhecendo-se a posição e a velocidade da partícula em um determinado momento. Já que o quadrado da velocidade não pode ser negativo, mediante a integral de Jacobi podemos determinar as regiões onde o movimento da partícula é permitido ou proibido. É assim também possível definir um conjunto de curvas no plano (ξ, η) para um determinado valor de C , chamadas *curvas de velocidade zero*, dadas por

$$\Omega = C/2 \quad (3.9)$$

que delimitam estas regiões.

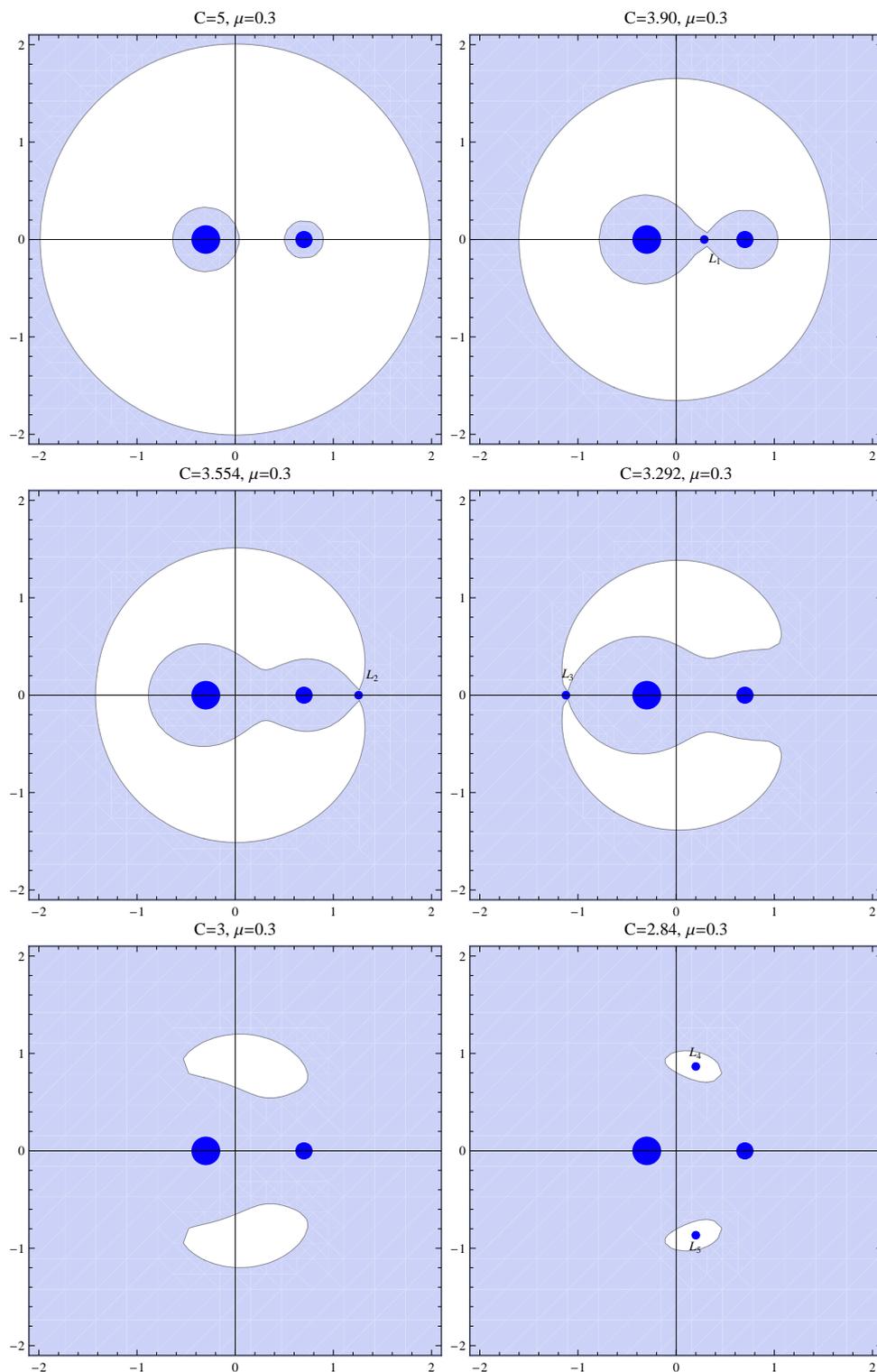


FIGURA 3.2: Regiões permitidas (áreas não sombreadas) para diferentes valores da integral de Jacobi, no caso $\mu = 0.3$. Os pontos azuis grandes representam os corpos massivos, enquanto que os pontos pequenos representam as 5 soluções de Lagrange.

3.2.2 Pontos de Lagrange

Embora o problema restrito de três corpos não possa ser resolvido analiticamente, é possível demonstrar que existem cinco pontos, L_i , chamados de *pontos de Lagrange*, onde a velocidade da partícula é zero respeito a os eixos de rotação. Seguidamente encontraremos as posições destes pontos.

De acordo com as equações de movimento 3.6 podemos observar que a partícula vai permanecer em repouso ($\dot{\xi} = \dot{\eta} = 0$) se as derivadas de Ω são nulas². Assim, os pontos de Lagrange estão determinados pela condição

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} = \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} = 0 \quad (3.10)$$

Calculando estas derivadas obtemos que

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} = \xi - \frac{(1 - \mu)(\xi + \mu)}{\rho_1^3} - \frac{\mu(\xi - (1 - \mu))}{\rho_2^3} = 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \eta} = \eta - \frac{(1 - \mu)\eta}{\rho_1^3} - \frac{\mu\eta}{\rho_2^3} = 0 \quad (3.12)$$

- A equação 3.12 tem uma solução trivial quando $\eta = 0$, substituindo esta em 3.11, temos

$$\xi - \frac{(1 - \mu)(\xi + \mu)}{[(\xi + \mu)^2]^{3/2}} - \frac{\mu(\xi - (1 - \mu))}{[(\xi - (1 - \mu))^2]^{3/2}} = 0 \quad (3.13)$$

cujas soluções para ξ podem ser encontradas facilmente por métodos numéricos, obtendo-se assim os três pontos de Lagrange colineares: L_1 , L_2 e L_3 .

- Por outro lado, temos as soluções quando $\eta \neq 0$. Multiplicando 3.12 por $\xi + \mu$ e subtraindo de 3.11, temos que $\rho_2 = 1$. De modo semelhante, multiplicando 3.12 por $\xi - (1 - \mu)$ e subtraindo de 3.11, temos que $\rho_1 = 1$. Já que a distância entre os corpos principais é também a unidade, os pontos de equilíbrio L_4 e L_5 estão localizados (ver geometria da configuração) em

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2} - \mu, \\ \eta &= \pm\sqrt{3}/2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Note-se que as distâncias às que se encontram os pontos de Lagrange dos corpos principais dependem inteiramente das massas destes.

² Já que $\partial\Omega/\partial\xi = \partial\Omega/\partial\eta = 0$, estes pontos são também extremos ou pontos de sela de Ω .

No problema geral dos três corpos além dos pontos Lagrangianos clássicos existem as soluções Anti-Lagrangianas (AL_4 e AL_5). Para baixas excentricidades estes são localizados em $(\Delta\lambda, \Delta\varpi) = (\pm 60^\circ, \mp 120^\circ)$, onde $\Delta\lambda$ é a diferença em longitudes médias e $\Delta\varpi$ é a diferença em longitudes do pericentro. Contrário às clássicas soluções Lagrangianas equiláteras, suas localizações no plano $(\Delta\lambda, \Delta\varpi)$ variam com a razão de massas planetárias e excentricidades [Giuppone et al., 2010].

3.2.3 Estabilidade dos Pontos de Lagrange

Para analisar a estabilidade dos pontos de Lagrange, consideramos uma vizinhança pequena em torno dos mesmos

$$\begin{aligned} x &= \xi - \xi_0 \\ y &= \eta - \eta_0 \end{aligned} \tag{3.15}$$

onde (ξ_0, η_0) são as coordenadas de um dado ponto de Lagrange e (x, y) são as coordenadas do corpo de massa desprezível respeito a este ponto. Utilizando as equações 3.6, 3.15 e a expansão do potencial em série de Taylor, as equações linearizadas de movimento são

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= x \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi^2} + y \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi \partial \eta} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= x \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi \partial \eta} + y \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} \end{aligned} \tag{3.16}$$

A estabilidade é estudada propondo uma solução da forma $x = Ae^{\omega t}$ e $y = Be^{\omega t}$, onde A , B e ω são constantes. Assim, se a parte real de ω é diferente de zero, as coordenadas do corpo podem aumentar sem limite e a órbita é instável. Pelo contrário, se ω é puramente imaginário o movimento em torno do ponto é só de oscilação e permanece limitado.

- Considerando-se os pontos L_1 , L_2 e L_3 , onde $\eta = 0$, as equações de movimento 3.16 resultam ser

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= x(1 + 2\alpha) \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= y(1 - \alpha) \end{aligned} \tag{3.17}$$

onde

$$\alpha = \frac{1 - \mu}{\rho_1^3} + \frac{\mu}{\rho_2^3} \tag{3.18}$$

Substituindo a solução proposta nas equações de movimento e extraindo ω , temos que

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\alpha - 2 \pm \sqrt{(2 - \alpha)^2 - 4(1 + 2\alpha)(1 - \alpha)}}{2}$$

Se consideramos que ω é puramente imaginário, temos duas soluções negativas para ω^2 , de modo que o produto destas raízes é positivo, resultando em $\alpha < 1$. Por outro lado, os pontos de Lagrange devem satisfazer a equação 3.11, e reorganizando esta equação em termos de α obtemos que $\alpha > 1$. Esta contradição mostra que não é possível encontrar soluções puramente imaginárias para ω . Assim, os pontos L_1 , L_2 e L_3 são instáveis.

- Considerando agora as coordenadas do ponto L_4 , $\xi = 1/2(1 - 2\mu)$ e $\eta = \sqrt{3}/2$, as equações linearizadas de movimento 3.16 são:

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \frac{3}{4}x + \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu)y \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \frac{9}{4}y + \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu)x \end{aligned} \quad (3.19)$$

Substituindo a solução proposta encontramos que

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}}{2}.$$

Já que $\omega_1^2 \omega_2^2 > 0$, as possíveis raízes reais devem ter o mesmo sinal. Mas dado que também $\omega_1^2 + \omega_2^2 = -1 < 0$, ambas raízes ω_i^2 devem ser negativas. Como estas raízes devem ser reais (o que implica que $27\mu^2 - 27\mu + 1 > 0$), então ω será imaginário quando $\mu < 0.0385$. Isto é, no caso restrito ($m_2 = 0$), L_4 ou L_5 são pontos de equilíbrio estáveis sempre que

$$\frac{m_1}{m_{\text{tot}}} < 0.0385 \quad (3.20)$$

onde m_{tot} é a soma de todas as massas.

Laughlin and Chambers [2002] demonstraram que para o caso de massas secundárias iguais, $m_1 = m_2$, a configuração equilátera é linearmente estável para razões de massa

$$\frac{2m_1}{m_{\text{tot}}} \leq 0.03812 \quad (3.21)$$

3.3 Ressonâncias

Uma ressonância orbital é um fenômeno gravitacional que envolve a comensurabilidade entre duas ou mais frequências do movimento de corpos que orbitam o mesmo corpo central. As ressonâncias podem ser uma fonte de estabilidade ou de instabilidade orbital a longo prazo. Existem três tipos gerais de ressonância envolvendo movimentos orbitais: spin-órbita, de movimento médio e secular.

As *ressonâncias spin-órbita* acontecem quando há uma comensurabilidade nos períodos de rotação e orbital de um mesmo corpo. Talvez o exemplo mais conhecido de tal ressonância seja a rotação síncrona da Lua.

As *ressonâncias de movimento médio* (RMM) ocorrem quando os períodos orbitais de dois corpos, por exemplo um planeta e um asteroide, são próximos a uma razão de inteiros pequenos, ou seja, quando $kn - k_j n_j \approx 0$ onde k e k_j são inteiros positivos, n_j é o movimento médio do planeta e n é o movimento médio do asteroide. Também três corpos, por exemplo, um asteroide e dois planetas perturbadores, poderiam estar envolvidos em uma RMM, o que ocorrerá quando $kn + k_i n_i + k_j n_j \approx 0$ onde k, k_i e k_j são inteiros, e n, n_i e n_j são os movimentos médios do asteroide, e dos planetas i e j , respectivamente. Assim, a RMM 1:1 é aquela em que um par de corpos tem o mesmo período orbital e portanto compartilham uma órbita semelhante.

As *ressonâncias seculares* ocorrem quando existe uma comensurabilidade entre as frequências de precessão das longitudes do periastro e/ou entre as frequências de regressão das longitudes do nodo de dois corpos, por exemplo um asteroide e um planeta. Ressonâncias seculares que envolvem as longitudes do periastro podem conduzir a mudanças nas excentricidades orbitais. No caso dos pequenos corpos do Sistema Solar, as principais ressonâncias seculares ocorrem quando $g - g_i \approx 0$, onde g, g_i são as frequências de precessão do periélio do asteroide e do i -ésimo planeta ($i = 1$ para Mercúrio até 8 para Netuno). Estas são usualmente identificadas pela letra grega ν_i . No Cinturão de Kuiper, por exemplo, a ressonância secular do periélio com Netuno, ν_8 , é a mais importante. Por outro lado, ressonâncias seculares que envolvem as longitudes do nodo podem conduzir a mudanças nas inclinações orbitais. No caso do Sistema Solar, as principais ressonâncias deste tipo são identificadas pela letra grega ν_{1i} , e correspondem ao caso em que $s - s_i \approx 0$, onde s, s_i são as frequências de regressão do nodo do asteroide e do i -ésimo planeta

Um tipo particular de ressonância secular é dado pela denominada *ressonância de Kozai*, que ocorre quando $\dot{\omega} \approx 0$, sendo ω o argumento do periastro de um asteroide perturbado por um ou vários planetas. Esta ressonância resulta em grandes oscilações acopladas da excentricidade e da inclinação do asteroide.

3.3.1 Tipos de Órbitas na RMM 1:1

Existem três tipos de movimentos possíveis para objetos co-orbitais: órbitas girino (também denominadas troianas), órbitas ferradura e órbitas quase-satélite (QS). Essa classificação depende do ângulo do centro de libração do argumento crítico ou ângulo ressonante definido por $\lambda_1 - \lambda_2$, onde λ_1 e λ_2 são as longitudes médias da partícula e do corpo secundário, respectivamente. As órbitas *girino* são aquelas nas quais o ângulo

ressonante libra em torno de 60° (isto é, o movimento ocorre em torno do ponto Lagrangiano L_4) ou 300° (isto é, em torno do ponto L_5). Um exemplo desta configuração são às órbitas dos asteroides Troianos de Júpiter. Quando esta configuração é submetida a perturbações maiores, as órbitas passam a ser do tipo *ferradura*, onde o argumento crítico libra em torno de 180° (isto é, em torno do ponto L_3). Um exemplo desta configuração são os satélites de Saturno, Janus e Epimetheus. Finalmente, as órbitas *quase-satélite* (vide figura 3.3b) são órbitas retrógradas do problema restrito de três corpos, onde o argumento crítico libra em torno de 0° e o movimento da partícula ocorre além da esfera de Hill do corpo massivo³. Para órbitas com alta excentricidade e/ou alta inclinação são possíveis transições entre órbitas de tipo QS e ferradura (Namouni [1999], Namouni et al. [1999]).

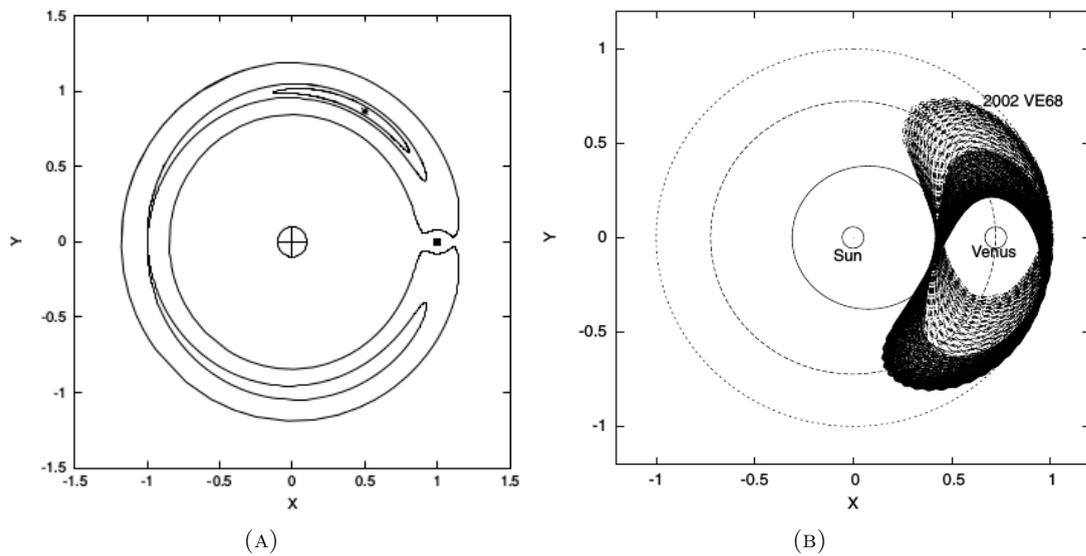


FIGURA 3.3: (a) Órbitas girino (em torno de L_4) e ferradura de três asteroides no sistema Sol (\oplus) e Terra (\blacksquare). Cada órbita corresponde a um valor ligeiramente diferente da integral de Jacobi [Valtonen and Karttunen, 2005]. (b) Trajetória do asteroide 2002 VE68, que ocasionalmente se torna um quase satélite de Vênus [Mikkola et al., 2004].

No caso de RMM 1:1, também existe uma configuração exótica que pode ocorrer em sistemas planetários extra-solares, e que é conhecida como *ressonância excêntrica 1:1*. Esta configuração envolve um par de planetas que intercambiam momento angular de uma maneira que lhes permite evitar encontros próximos entre si. Um exemplo desta ressonância ocorre quando um planeta tem uma órbita altamente excêntrica, enquanto o outro planeta se move em uma órbita quase circular (vide figura 3.4).

³O raio de Hill é o raio dentro do qual o potencial gravitacional de um corpo domina sobre os restantes corpos massivos do sistema. Para um planeta de massa M_p em torno de uma estrela de massa M_* , o raio de Hill é dado por $R_{\text{Hill}} \approx a(1-e)\sqrt[3]{1/3(M_p/M_*)}$, onde a e e são o semieixo maior e a excentricidade do planeta, respectivamente.

A variação na velocidade radial da estrela devida a um par de planetas extra-solares envolvidos em uma RMM 1:1 poderia mostrar um padrão característico facilmente detectável. Entretanto, devido às fortes interações envolvidas nesta ressonância, este padrão não seria apreciável mediante o procedimento usual de ajustes Keplerianos das órbitas. [Laughlin and Chambers \[2002\]](#) aplicaram um código genético para determinar configurações ressonantes 1:1 a partir de dados de velocidade radial. Isto é, consideraram vários conjuntos de elementos orbitais, cada um dos quais, chamados de genoma, descreve uma única evolução de três corpos e uma dada velocidade radial associada com a estrela. A adequação de um dado genoma a um dado conjunto de dados de velocidades radiais sintetizados a partir de integrações numéricas é medida pelo valor de χ^2 do ajuste fornecido pelo genoma.

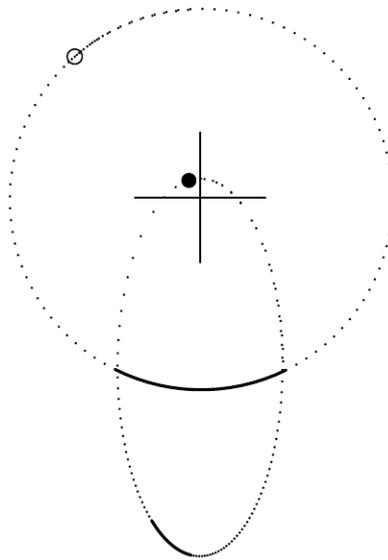


FIGURA 3.4: Órbitas planetárias em ressonância excêntrica 1:1. A configuração mostra dois planetas de massa igual a $1 M_{\text{Jup}}$ com períodos iniciais $P_1 = P_2 = 360$ dias. Os planetas inicialmente evitam encontros próximos mantendo diferenças relativamente pequenas nas longitudes médias durante a passagem pelo pericentro do corpo excêntrico. As perturbações planeta-planeta são mais efetivas quando o planeta excêntrico está próximo do seu apocentro. Durante esta fase, indicada pelas linhas contínuas, o planeta em órbita quase circular transfere momento angular ao planeta excêntrico. Esta transferência de momento angular conduz a um intercâmbio periódico das excentricidades entre os planetas [[Laughlin and Chambers, 2002](#)].

Na figura [3.5](#) mostra-se a componente de velocidade radial da estrela para órbitas tipo girino e ferradura, em ambos os casos para um par de planetas de igual massa num intervalo de tempo de 15 anos. Neste intervalo de tempo, os planetas experimentam uma significativa fração da libração do ângulo crítico. O movimento ressonante pode-se detectar na curva de velocidade radial como uma modulação da amplitude da variação senoidal de alta frequência. Esta modulação é ditada pelas massas dos planetas. Quando

os planetas têm uma grande separação angular, suas contribuições à velocidade radial da estrela tendem a se cancelar.

Na figura 3.6 se mostra a curva da velocidade radial para um caso de ressonância excêntrica, representada ao longo de um intervalo de 10 anos. Cada passo pelo periastro do planeta excêntrico é marcado por uma diminuição abrupta (pequenos picos) na velocidade radial.

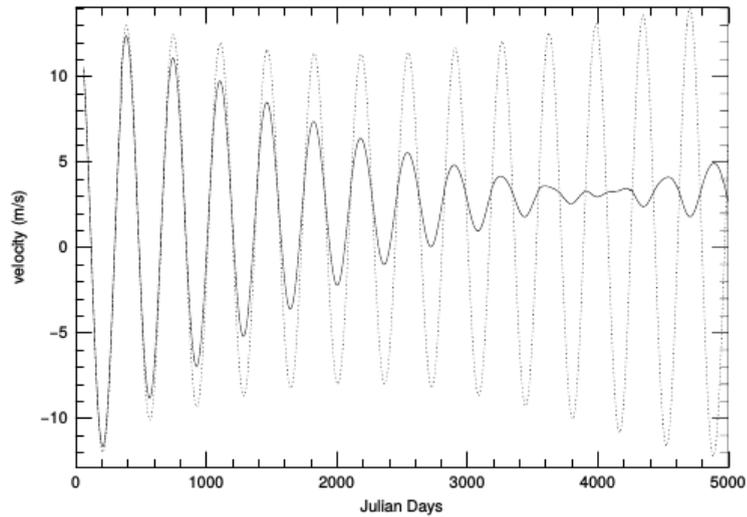


FIGURA 3.5: Variações na velocidade radial sintética de dois planetas com igual massa participando em órbitas girino e ferradura. A linha pontilhada corresponde à órbita tipo girino ($P_1 = 365$ dias e $P_2 = 355$ dias) e a linha sólida corresponde à órbita tipo ferradura ($P_1 = 370$ dias e $P_2 = 355$ dias) nos sistemas planetários. Em ambos os casos, o par de planetas têm uma massa igual a $0.25 M_{\text{Jup}}$ [Laughlin and Chambers, 2002].

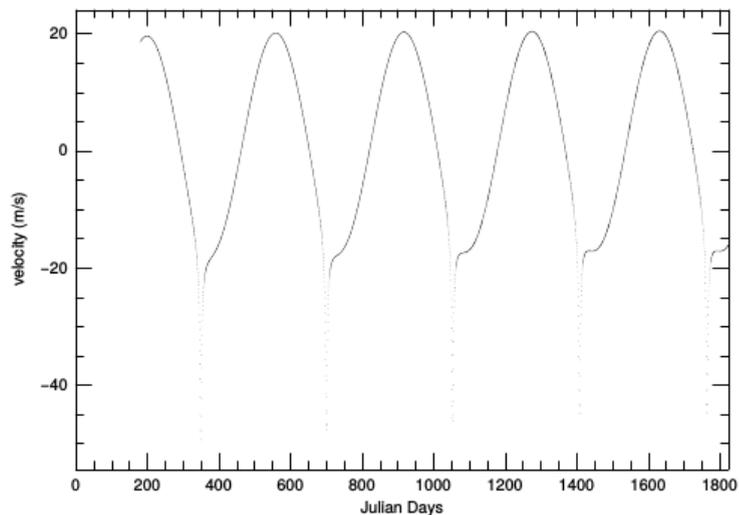


FIGURA 3.6: Variações na velocidade radial sintética para um sistema planetário envolvido na ressonância excêntrica 1:1, que corresponde a um planeta altamente excêntrico e outro em uma órbita quase circular (dados da fig. 3.4) [Laughlin and Chambers, 2002].

Capítulo 4

Integradores Numéricos Simpléticos

Neste Capítulo apresentamos a teoria sobre os integradores numéricos simpléticos destacando sua importância na evolução de sistemas físicos conservativos a longo prazo. Na primeira seção, §4.1, discutimos as condições sob as quais uma transformação é canônica, o qual nos permitirá demonstrar a invariância do elemento de volume sob tal transformação (§4.3). A solução da equação de movimento generalizada (seção §4.4) que nos permite construir integradores simpléticos, tem a forma de uma transformação canônica infinitesimal (§4.2), e isto nos permite compreender as propriedades inerentes a tais integradores. Na seção §4.5 apresentamos diversos métodos de integração numérica simplética para a resolução do problema de N corpos, alguns dos quais permitem manipular situações de encontros próximos entre os corpos.

4.1 Transformações Canônicas

Para um sistema com n graus de liberdade, as equações de movimento de Hamilton estão dadas por $2n$ equações diferenciais de primeira ordem para um conjunto de $2n$ variáveis independentes: n coordenadas generalizadas, q_i , e suas respectivas n quantidades de movimento conjugadas ou generalizadas p_i . Estas equações de movimento nos permitem descrever o comportamento do sistema em um *espaço de fases* cujas coordenadas são as $2n$ variáveis independentes.

Em notação matricial ou simplética as equações de movimento de Hamilton são escritas como:

$$\dot{\eta} = \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \eta} \quad (4.1)$$

onde $\boldsymbol{\eta}$ e $\partial H/\partial \boldsymbol{\eta}$ são vetores colunas de $2n$ elementos, tais que

$$\begin{aligned} \eta_i &= q_i & \eta_{i+n} &= p_i \\ \left(\frac{\partial H}{\partial \eta}\right)_i &= \frac{\partial H}{\partial q_i} & \left(\frac{\partial H}{\partial \eta}\right)_{i+n} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{aligned} \quad i = 1, \dots, n \quad (4.2)$$

e \mathbf{J} é uma matriz antissimétrica de dimensão $2n \times 2n$ formada por submatrizes $n \times n$ nulas e identidades de acordo com o esquema

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Esta matriz apresenta as seguintes propriedades:

- $\mathbf{J}^2 = -\mathbf{I}$
- $\mathbf{J}^t \mathbf{J} = \mathbf{I}$
- $\mathbf{J}^t = -\mathbf{J} = \mathbf{J}^{-1}$
- $\det(\mathbf{J}) = +1$

De agora em diante consideraremos sistemas físicos conservativos onde o Hamiltoniano pode ser identificado com a energia mecânica total do sistema e não depende explicitamente do tempo. As equações de transformação nos permitem passar de um sistema de variáveis a outro que possa ser mais conveniente. Como na mecânica Hamiltoniana as coordenadas e as quantidades de movimento generalizadas são variáveis independentes, a transformação $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ representa uma transformação *restrita*¹ do espaço de fases da forma

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \\ P_i &= P_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \end{aligned} \quad (4.4)$$

ou, equivalentemente, em forma matricial

$$\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{\eta}) \quad (4.5)$$

sendo $\boldsymbol{\zeta}$ um vetor coluna de $2n$ elementos definido pelo novo sistema de coordenadas. Esta transformação se denomina canônica se as novas variáveis preservam a estrutura das equações de Hamilton, isto é, se existe uma função $K(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$, chamada Hamiltoniana transformada, tal que

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{J} \frac{\partial K}{\partial \boldsymbol{\zeta}} \quad (4.6)$$

¹ Aquela na qual o tempo não aparece nas equações de transformação.

As transformações canônicas satisfazem as quatro propriedades que caracterizam um grupo:

- A transformação identidade é canônica.
- A inversa de uma transformação canônica é também canônica.
- Duas transformações canônicas sucessivas (operação produto) definem uma transformação canônica.
- A operação produto é associativa.

A caracterização de tal transformação pode ser dada a partir do formalismo geratriz, o formalismo simplético ou os colchetes de Poisson que trataremos a seguir.

4.1.1 Formalismo Geratriz

As coordenadas canônicas velhas e novas devem satisfazer o princípio de Hamilton². A partir disto, demonstra-se que a transformação entre ambos sistemas será canônica quando a seguinte equação for válida

$$\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H = \sum_{i=1}^n P_i \dot{Q}_i - K + \frac{dF}{dt} \quad (4.7)$$

Aqui F é a denominada *função geratriz* da transformação, uma função das coordenadas e dos momentos com segundas derivadas contínuas. Por meio das equações de transformação 4.4 e suas inversas, F pode se expressar em termos de uma mistura das variáveis velhas e novas, sendo útil para especificar a forma exata da transformação canônica quando a metade das variáveis pertencem ao sistema velho e a outra metade ao novo:

$$F = F_1(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) \quad p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \quad (4.8a)$$

$$F = F_2(\mathbf{q}, \mathbf{P}) - \sum_{i=1}^n Q_i P_i \quad p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \quad (4.8b)$$

² Sendo L a Lagrangiana do sistema, o princípio de Hamilton se expressa como

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \begin{cases} \delta \int_{t_1}^{t_2} (\sum p_i \dot{q}_i - H) dt = 0 \\ \delta \int_{t_1}^{t_2} (\sum P_i \dot{Q}_i - K) dt = 0 \end{cases}$$

Ambos integrandos podem diferir por uma derivada temporal total de alguma função F , já que neste caso: $\int_{t_1}^{t_2} dF/dt dt = F(t_2) - F(t_1)$, de modo que sua variação é nula nos pontos extremos.

$$F = \sum_{i=1}^n q_i p_i + F_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}) \quad q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} \quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \quad (4.8c)$$

$$F = \sum_{i=1}^n q_i p_i - \sum_{i=1}^n Q_i P_i + F_4(\mathbf{p}, \mathbf{P}) \quad q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} \quad Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i} \quad (4.8d)$$

Em todos os casos o Hamiltoniano é preservado

$$K = H \quad (4.9)$$

Então, a partir de uma função geratriz dada podemos obter as equações da transformação canônica. Se consideramos, por exemplo, uma função geratriz do tipo F_1 , a segunda equação de 4.8a nos dá as n p_i em função de \mathbf{q} e \mathbf{Q} ; das inversas destas equações podemos obter as n Q_i em termos de \mathbf{q} e \mathbf{p} obtendo assim a metade das equações da transformação 4.4 que, por sua vez, podem ser utilizadas na terceira relação de 4.8a para obter as n P_i em função de \mathbf{q} e \mathbf{p} , completando deste modo a outra metade das equações da transformação.

4.1.2 Formalismo Simplético

O propósito aqui é obter as equações de movimento no sistema de variáveis ζ , transformado a partir do sistema de variáveis η . Começamos obtendo as derivadas temporais de ζ

$$\dot{\zeta} = \mathbf{M}\dot{\eta} \quad (4.10)$$

onde \mathbf{M} é a *matriz jacobiana da transformação* de dimensão $2n \times 2n$, cujos elementos são

$$M_{ij} = \frac{\partial \zeta_i}{\partial \eta_j} \quad (4.11)$$

Utilizando as equações de movimento nas coordenadas originais temos que

$$\dot{\zeta} = \mathbf{M}\mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \eta} \quad (4.12)$$

Por outro lado, por meio da transformação inversa o Hamiltoniano pode se expressar em função de ζ , de modo que as derivadas parciais de H em relação aos elementos η_i estão dadas por

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} = \mathbf{M}^t \frac{\partial H}{\partial \zeta} \quad (4.13)$$

Substituindo 4.13 em 4.12, as equações de movimento correspondentes ao novo sistema podem ser escritas como

$$\dot{\zeta} = \mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^t \frac{\partial H}{\partial \zeta} \quad (4.14)$$

A partir do formalismo geratriz sabemos que sob uma transformação canônica restrita o Hamiltoniano se preserva, de modo que

$$\dot{\zeta} = \mathbf{J} \frac{\partial H}{\partial \zeta} \quad (4.15)$$

Portanto, uma transformação será canônica se

$$\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^t = \mathbf{J} \quad (4.16)$$

que também pode ser escrita como

$$\mathbf{M}^t\mathbf{J}\mathbf{M} = \mathbf{J} \quad (4.17)$$

A equação 4.16, ou sua versão equivalente, a equação 4.17, se denomina *condição simplética* e é condição necessária e suficiente para que a transformação seja canônica mesmo que não seja restrita. A matriz \mathbf{M} que satisfaça esta condição é chamada de *matriz simplética*.

4.1.3 Colchetes de Poisson

Sejam u e v duas funções escalares das variáveis canônicas (\mathbf{q}, \mathbf{p}) , o *colchete de Poisson* de u e v é definido como

$$\{u, v\}_{q,p} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right)^t \mathbf{J} \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\eta}} \quad (4.18)$$

Em caso de considerar como funções u e v as próprias variáveis canônicas, temos as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} \{q_j, q_k\}_{q,p} &= \{p_j, p_k\}_{q,p} = 0 \\ \{q_j, p_k\}_{q,p} &= -\{p_j, q_k\}_{q,p} = \delta_{jk} \end{aligned} \quad (4.19)$$

ou em forma matricial

$$\{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}\}_{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{J} \quad (4.20)$$

onde introduzimos o *colchete de Poisson matriz quadrada* $\{\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}\}$ de elementos $\{\eta_l, \eta_m\}$. Se considerarmos agora as variáveis transformadas definidas em função das variáveis velhas por meio da equação 4.5, o colchete de Poisson matriz estará definido por

$$\{\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}\}_{\boldsymbol{\eta}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial \boldsymbol{\eta}} \right)^t \mathbf{J} \frac{\partial \boldsymbol{\zeta}}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \mathbf{M}^t \mathbf{J} \mathbf{M} \quad (4.21)$$

Vimos a partir do formalismo simplético que, se a transformação é canônica, deve-se cumprir a condição simplética de modo que

$$\{\zeta, \zeta\}_\eta = \mathbf{J} \quad (4.22)$$

Os colchetes de Poisson das próprias variáveis canônicas (4.20 e 4.22) recebem o nome de *colchetes de Poisson fundamentais*.

Por outro lado, de forma similar à equação 4.20, temos que

$$\{\zeta, \zeta\}_\zeta = \mathbf{J} \quad (4.23)$$

Desta forma *os colchetes de Poisson fundamentais são invariantes sob as transformações canônicas*. Esta invariância é equivalente, portanto, à condição simplética. Pode-se demonstrar ainda que todos os colchetes de Poisson são invariantes sob as transformações canônicas (pelo que se pode eliminar o subscrito que indica o sistema de variáveis em função do qual se definem os colchetes).

4.2 Transformação Canônica Infinitesimal

Se a transformação $\boldsymbol{\eta} \rightarrow \boldsymbol{\zeta}(t)$ é canônica, também o será a transformação $\boldsymbol{\eta} \rightarrow \boldsymbol{\zeta}(t_0)$. Da definição de transformação canônica se deduz que a transformação infinitesimal caracterizada por

$$\boldsymbol{\zeta}(t_0) \rightarrow \boldsymbol{\zeta}(t) \quad (4.24)$$

também é canônica, o qual se pode demonstrar por meio da condição simplética.

Como seu nome o indica, a transformação infinitesimal só difere infinitesimalmente da transformação identidade

$$\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\eta} + \delta\boldsymbol{\eta} \quad (4.25)$$

portanto, uma adequada função geratriz estaria dada por

$$F_2 = \sum_i q_i P_i + \epsilon G(\mathbf{q}, \mathbf{P}) \quad (4.26)$$

onde ϵ é um certo parâmetro infinitesimal da transformação e G uma função diferenciável de seus $2n$ argumentos. Aplicando as equações 4.8b, a transformação é definida explicitamente através da equação

$$\delta\boldsymbol{\eta} = \epsilon \mathbf{J} \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\eta}} \quad (4.27)$$

onde substituímos os elementos ζ_{j+n} por η_{j+n} no segundo membro de 4.27 já que estes só diferem em um infinitésimo e o termo é linear em ϵ . Podemos então considerar que $G = G(\boldsymbol{\eta})$, e esta se denomina *função geratriz da transformação canônica infinitesimal*. Se identificamos ϵ com δt na eq. 4.27, notamos que o fluxo de um sistema hamiltoniano pode ser representado por uma sucessão de transformações canônicas infinitesimais, que tem H como função geratriz.

A partir das relações anteriores, pode-se obter que

$$\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^t = \left(\mathbf{I} + \epsilon \mathbf{J} \frac{\partial^2 G}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{\eta}} \right) \mathbf{J} \left(\mathbf{I} - \epsilon \frac{\partial^2 G}{\partial \boldsymbol{\eta} \partial \boldsymbol{\eta}} \mathbf{J} \right) = \mathbf{J} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (4.28)$$

mostrando assim que, para uma aproximação de primeira ordem, a transformação infinitesimal cumpre a condição simplética.

4.3 Invariância do Elemento de Volume

A grandeza de um elemento de volume no espaço de fases nas coordenadas velhas é dada por

$$d\eta = dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n \quad (4.29)$$

Através da transformação $\boldsymbol{\eta} \rightarrow \boldsymbol{\zeta}$ o elemento de volume se torna

$$d\zeta = dQ_1 \dots dQ_n dP_1 \dots dP_n \quad (4.30)$$

O tamanho dos dois elementos de volume está relacionado pelo valor absoluto do determinante jacobiano

$$d\zeta = |\det(\mathbf{M})| d\eta \quad (4.31)$$

Se tomamos o determinante em ambos membros da condição simplética 4.16, pode-se deduzir que

$$\det(\mathbf{M}) = \pm 1 \quad (4.32)$$

e o seu valor absoluto é 1. Assim, *sob uma transformação canônica, o elemento de volume permanece invariante no espaço de fases*. Daqui se deduz também que o volume de uma região qualquer do espaço de fases

$$\int \dots \int d\eta \quad (4.33)$$

é um invariante canônico.

4.4 Equação de Movimento Generalizada

A derivada total em relação ao tempo de uma função arbitrária u das variáveis do sistema pode ser escrita por meio da formulação de colchetes de Poisson

$$\frac{du}{dt} = \{u, H\} \quad (4.34)$$

expressão que é conhecida como a *equação de movimento generalizada*, a qual é uma invariante canônica e inclui como caso particular às próprias equações de Hamilton quando u é substituído por alguma das variáveis canônicas.

A solução formal de 4.34 pode-se obter desenvolvendo $u(t)$ em série de Taylor em torno do valor inicial $u(0)$

$$u(\tau) = u(0) + \tau\{u, H\}_0 + \frac{\tau^2}{2!}\{\{u, H\}, H\}_0 + \frac{\tau^3}{3!}\{\{\{u, H\}, H\}, H\}_0 + \dots \quad (4.35)$$

onde τ é denominado de *passo da solução* e as derivadas temporais de u na série foram encontradas através da aplicação reiterada da eq. 4.34. A evolução temporal de $u(t)$ (4.35) também pode ser escrita por meio da série de Lie³, $\mathcal{L}_H u$,

$$u(\tau) = e^{\tau\mathcal{D}_H} u(0) \quad (4.36)$$

onde a n -ésima potência do operador de Lie, $\mathcal{D}_H = \{ \cdot, H \}$, é igual à n -ésima aplicação repetida (pela direita) de $\{ \cdot, H \}$.

Até aqui, tudo o que fizemos foi reescrever as equações de movimento, e estas permanecem sem solução analítica, exceto em casos especiais. Porém, esta formulação nos permitirá a construção dos integradores numéricos simpléticos.

³ A série de Lie se define como o operador

$$\mathcal{L}_B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k \mathcal{D}_B^k = e^{t\mathcal{D}_B}$$

onde a derivada de Lie está definida como o operador

$$\mathcal{D}_B = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right)$$

Estes operadores obedecem muitas das regras usuais da álgebra, com uma importante exceção: a propriedade comutativa. Em outras palavras, em geral $\mathcal{D}_A \mathcal{D}_B \neq \mathcal{D}_B \mathcal{D}_A$. Note-se que $\mathcal{D}_B F := \{F, B\}$.

4.5 Integradores Numéricos Simpléticos

Quando aplicamos métodos de integração convencionais (tais como o método de Taylor, Runge-Kutta, Bulirsch-Stoer, etc.) a sistemas Hamiltonianos conservativos, ocorre um amortecimento ou excitação artificial da energia mecânica do sistema devido ao acúmulo de erros do próprio método de integração, fazendo com que o resultado da integração a longo prazo não seja confiável [Yoshida, 1993]. Em geral, o erro na energia cresce sistematicamente ou secularmente. Embora estes métodos possam ser muito precisos e apropriados em muitas circunstâncias, não respeitam, por outro lado, a natureza física de um problema conservativo. É desejável, então, encontrar algum esquema de integração que nos permita estudar o comportamento dinâmico de sistemas Hamiltonianos conservativos por intervalos de tempo muito longos. Tais métodos são os *integradores simpléticos*, que apresentam as seguintes propriedades:

1. A transformação de $(\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0))$ a $(\mathbf{q}(\tau), \mathbf{p}(\tau))$ ao longo da solução é simplética (canônica), de modo que a estrutura simplética:

$$d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q} = \text{constante} \quad (4.37)$$

se conserva. Esta propriedade de conservação é a generalização da invariância do elementos de volume estudada na seção §4.3⁴.

2. Resolvem um sistema Hamiltoniano *substituto* próximo ao sistema real, $\tilde{H} = H + H_{\text{err}}$, onde a variação da energia do sistema se mantém limitada e o acúmulo dos erros de truncamento não introduz uma variação secular.
3. Alguns integradores simpléticos são reversíveis no tempo [Duncan et al., 1998].

Segundo a equação 4.36, a evolução temporal no espaço de fases de uma função $u = u(q, p)$ das variáveis canônicas sobre um intervalo de tempo τ a partir do seu valor inicial é dada por

$$u(\tau) = e^{\tau \mathcal{D}H} u(0)$$

Em muitos casos de interesse, o Hamiltoniano H pode ser dividido em duas ou mais partes, cada uma das quais é integrável isoladamente:

$$H = \sum_{i=0}^N H_i \quad (4.38)$$

⁴ O símbolo “ \wedge ” denota o produto externo, que é a generalização do produto vetorial em dimensões maiores que 3.

Por exemplo, dividindo o Hamiltoniano em duas partes, a evolução temporal de u é

$$u(\tau) = e^{\tau(\mathcal{D}_{H_0} + \mathcal{D}_{H_1})} u(0) \quad (4.39)$$

Suponhamos agora que $(c_i, d_i), (i = 1, 2, \dots, k)$ são um conjunto de números reais que satisfazem a relação

$$e^{\tau(\mathcal{D}_{H_0} + \mathcal{D}_{H_1})} = \prod_{i=1}^k e^{c_i \tau \mathcal{D}_{H_0}} e^{d_i \tau \mathcal{D}_{H_1}} + \mathcal{O}(\tau^{m+1}) \quad (4.40)$$

para um dado inteiro m , que representa a ordem do integrador. A evolução de $u(0)$ a $u(\tau)$ será então dada pelo integrador:

$$u(\tau) = \prod_{i=1}^k e^{c_i \tau \mathcal{D}_{H_0}} e^{d_i \tau \mathcal{D}_{H_1}} u(0) \quad (4.41)$$

que aproxima a solução exata 4.39 até a ordem τ^m . Tal integrador é simplético pois está composto por um produto de transformações simpléticas elementares (cf. §4.1). Notemos que aplicar apenas um dos operadores exponenciais é equivalente a resolver as equações de movimento considerando apenas uma das partes em que o Hamiltoniano foi dividido, desprezando a outra.

Deste modo, uma solução para um integrador simplético de primeira ordem, $m = 1$, é $c_1 = d_1 = 1$ ($k = 1$), que corresponde à relação:

$$u(\tau) = e^{\tau \mathcal{D}_{H_0}} e^{\tau \mathcal{D}_{H_1}} u(0) + \mathcal{O}(\tau^2) \quad (4.42)$$

Cada passo deste integrador consiste de dois subpassos. Primeiro o sistema evolui sujeito à influência de H_1 durante um tempo τ (ignorando o efeito de H_0) e depois o sistema resultante evolui sujeito à influência de H_0 durante um tempo τ (ignorando o efeito de H_1).

Para um integrador de segunda ordem, $m = 2$, encontramos a solução $c_1 = c_2 = 1/2$, $d_1 = 1$ e $d_2 = 0$ ($k = 2$), resultando em

$$u(\tau) = e^{\frac{\tau}{2} \mathcal{D}_{H_0}} e^{\tau \mathcal{D}_{H_1}} e^{\frac{\tau}{2} \mathcal{D}_{H_0}} u(0) + \mathcal{O}(\tau^3) \quad (4.43)$$

Os três operadores no lado direito de 4.43 representam um algoritmo que começa com a evolução do sistema sob a influência unicamente de H_0 durante a metade de um passo, logo evolui durante um passo completo sob a influência de H_1 , e depois evolui durante a outra metade do passo sob a influência de H_0 . Note-se também que um integrador

simplético de segunda ordem pode ser escrito também como:

$$u(\tau) = e^{\frac{\tau}{2}\mathcal{D}_{H_1}} e^{\tau\mathcal{D}_{H_0}} e^{\frac{\tau}{2}\mathcal{D}_{H_1}} u(0) + \mathcal{O}(\tau^3) \quad (4.44)$$

Do mesmo modo, os integradores simpléticos de ordem superior podem ser elaborados dividindo ainda mais os termos exponenciais, embora estes não são usualmente mais eficientes do que o método de segunda ordem já que o aumento na precisão não é compensado pelos cálculos adicionais requeridos em cada passo. Suzuki [1991] demonstrou que não pode existir nenhuma solução de 4.40 com todos os (c_i, d_i) positivos quando $m \geq 3$. Aqueles de ordem m par podem ser construídos mediante uma repetição simétrica (produto) do integrador de ordem 2, e seus coeficientes se encontram resolvendo numericamente um conjunto de equações algébricas acopladas [Yoshida, 1990].

Se dividirmos o Hamiltoniano em termos da energia cinética, $T(\mathbf{p})$, e da energia potencial, $U(\mathbf{q})$, da seguinte forma:

$$H = T(\mathbf{p}) + U(\mathbf{q}) \quad (4.45)$$

temos que o integrador de primeira ordem dado pela equação 4.42 conduz a

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{q}_0 + \tau \frac{\partial T}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{p}_0) \\ \mathbf{p} &= \mathbf{p}_0 - \tau \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (4.46)$$

enquanto que o integrador de segunda ordem dado pela equação 4.43 é

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{p}} &= \mathbf{p}_0 - \frac{\tau}{2} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0) \\ \mathbf{q} &= \mathbf{q}_0 + \tau \frac{\partial T}{\partial \mathbf{p}}(\tilde{\mathbf{p}}) \\ \mathbf{p} &= \tilde{\mathbf{p}} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (4.47)$$

esquema que é conhecido como o método *leap-frog* ou método “ $T + U$ ” de ordem dois. Para atingir uma precisão de $\sim 10^{-5}$ na energia em uma integração dos planetas do Sistema Solar, o leap-frog requer a utilização de um passo de $\sim 10^{-3}$ do período orbital do planeta mais interno [Duncan et al., 1998].

Como foi mencionado no início desta seção, aplicar um integrador simplético construído a partir de uma composição de transformações canônicas equivale a resolver as equações de movimento para um sistema substituto cujo Hamiltoniano, \tilde{H} , é próximo ao do problema real. Usando a identidade Baker-Campbell-Hausdorff para o produto de dois operadores exponenciais não comutativos, pode-se demonstrar que o integrador resolve o problema substituto $\tilde{H} = H + H_{\text{err}}$ [Yoshida, 1993]:

- O integrador simplético de primeira ordem (4.46) descreve a evolução temporal de um Hamiltoniano \tilde{H} , que pode ser expressido em uma série de potências de τ

$$\tilde{H} = H + \tau H_1 + \tau^2 H_2 + \tau^3 H_3 + \dots \quad (4.48)$$

onde H é o Hamiltoniano original, e

$$H_1 = \frac{1}{2}H_p H_q, \quad H_2 = \frac{1}{12}(H_{pp}H_q^2 + H_{qq}H_p^2), \quad H_3 = \frac{1}{12}H_{pp}H_{qq}H_p H_q, \dots \quad (4.49)$$

- Em geral, para um integrador de ordem m , o Hamiltoniano substituído é

$$\tilde{H}_m = H + \tau^m H_m + \mathcal{O}(\tau^{m+1}) \quad (4.50)$$

de modo que o erro na energia permanece limitado na ordem de τ^m .

\tilde{H} é conservado em forma exata pelo integrador simplético, salvo por um erro de arredondamento vinculado a τ . Então, se τ é pequeno e constante, H diferirá de \tilde{H} por somente uma pequena quantidade e não haverá acúmulo sistemático de erros na energia a longo prazo devido aos erros de truncamento. Por outro lado, se o passo é demasiado grande, as séries 4.48 ou 4.50 podem divergir e o Hamiltoniano substituído \tilde{H} não mais representa uma aproximação boa do problema real.

4.5.1 Integrações tipo Sistema Solar

Um algoritmo de integração rápido e preciso é uma ferramenta essencial para integrações a longo prazo em sistemas planetários. Notemos que o erro⁵ em cada passo de um integrador simplético pode ser expressido em termos dos operadores \mathcal{D}_{H_0} e \mathcal{D}_{H_1} . Isto quer dizer que se, por exemplo, $\mathcal{D}_{H_1} \sim \epsilon \mathcal{D}_{H_0}$, onde ϵ é uma pequena quantidade, o erro a cada passo também será proporcional a ϵ . Isto permitirá utilizar um tamanho de passo maior mantendo um mesmo nível de precisão na solução. Por esta razão, sempre que for possível, vale a pena dividir o Hamiltoniano em uma parte dominante mais uma pequena perturbação [Chambers, 1999].

⁵ Para o integrador de primeira ordem, por exemplo, o erro de truncamento também pode ser estimado a partir da expressão:

$$e^{\tau \mathcal{D}_{H_0}} e^{\tau \mathcal{D}_{H_1}} = e^{\tau(\mathcal{D}_{H_0} + \mathcal{D}_{H_1})} + \frac{\tau^2}{2}(\mathcal{D}_{H_0} \mathcal{D}_{H_1} - \mathcal{D}_{H_1} \mathcal{D}_{H_0}) + \dots$$

Consideremos um sistema de referência inercial. O Hamiltoniano para o problema gravitacional de um sistema composto de $N + 1$ corpos é

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{i=0}^N \frac{|\mathbf{p}_i|^2}{2m_i} - G \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{m_i m_j}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|} \quad (4.51)$$

onde $\mathbf{q}_i = (x_i, y_i, z_i)$ e $\mathbf{p}_i = (p_{x_i}, p_{y_i}, p_{z_i})$ são as coordenadas e os momentos do corpo i -ésimo no sistema inercial. Em integrações tipo Sistema Solar, um corpo (a estrela), que por conveniência identificamos pelo índice $i = 0$, é muito mais massivo que os outros de modo que é conveniente realizar a seguinte divisão do Hamiltoniano:

$$H = H_{\text{Kep}} + H_{\text{int}} \quad (4.52)$$

onde H_{Kep} é a parte do Hamiltoniano que descreve o movimento Kepleriano dos planetas ao redor da estrela (considerada como corpo central), e H_{int} é a parte que descreve a interação entre os planetas. Os detalhes precisos da evolução do sistema dependem do conjunto de variáveis escolhidas para escrever o Hamiltoniano. Usando coordenadas baricêntricas, por exemplo, $H_{\text{Kep}} \gg H_{\text{int}}$ para todos os corpos que orbitam em torno do corpo central, mas não para o próprio corpo principal, portanto o erro por passo não se beneficia do factor ϵ . [Wisdom and Holman \[1991\]](#) utilizam *coordenadas de Jacobi*⁶, as quais funcionam satisfatoriamente quando as órbitas dos corpos estão bem separadas (não há interseções) entre si. Porém, é mais conveniente usar (por razões que veremos adiante) *coordenadas democráticas heliocêntricas*⁷ propostas por Poincaré, as quais permitem construir integradores capazes de tratar órbitas que se intersectam e manipular encontros próximos, como SyMBA ou Mercury ([Chambers \[1999\]](#)).

4.5.1.1 Métodos Simpléticos de Variáveis Mistas

Os integradores simpléticos que empregam a decomposição 4.52 do Hamiltoniano de N-corpos usando coordenadas de Jacobi foram introduzidos na década de 1990 e são chamados de integradores simpléticos de variáveis mistas ou MVS (*Mixed Variável Symplectic*), pelo fato de integrar as diferentes partes do Hamiltoniano usando diferentes conjuntos de variáveis. Neste esquema, o Hamiltoniano está composto por

$$H_{\text{Kep}} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{|\mathbf{p}'_i|^2}{2m'_i} - \frac{Gm_i m_0}{r'_i} \right) \quad (4.53a)$$

⁶ As coordenadas de Jacobi podem ser vistas como um sistema onde a posição e momento de cada corpo i é tomado em relação ao centro de massa de todos os corpos com índices $j < i$.

⁷ Neste caso, as posições dos corpos são tomadas em relação ao corpo central e seus momentos em relação ao baricentro do sistema.

$$H_{\text{int}} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{Gm_i m_0}{r'_i} - \frac{Gm_i m_0}{r_{i0}} \right) - \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}} \quad (4.53b)$$

onde r_{i0} é a distância entre o corpo i -ésimo e o corpo central e as coordenadas linha se referem às coordenadas de Jacobi. A mistura de variáveis ocorre pois a parte Kepleriana é calculada utilizando-se elementos orbitais (canônicos), enquanto que a interação é calculada utilizando-se coordenadas retangulares. De acordo com a equação 4.43, um passo do MVS de segunda ordem envolve:

- i) Avançar todos os corpos ao longo das órbitas determinadas por H_{Kep} durante um intervalo de tempo $\tau/2$.
- ii) Mudar o momento de cada corpo devido à interação H_{int} durante um tempo τ .
- iii) Avançar os corpos ao longo das novas órbitas Keplerianas durante o tempo $\tau/2$.

Para órbitas bem separadas e de baixa excentricidade, a velocidade da técnica MVS reside no fato de que $|H_{\text{int}}| \ll |H_{\text{Kep}}|$, pois H_{Kep} é da ordem de m_0 enquanto que H_{int} é da ordem de m_i . Considerando-se $\epsilon = m_i/m_0$, isto permite que o passo do esquema MVS de segunda ordem possa ser aumentado por um fator de $\epsilon^{-1/2}$ comparado com um esquema leap-frog, mantendo a mesma ordem no erro das soluções. Foi assim que os métodos MVS permitiram pela primeira vez integrações de objetos no Sistema Solar em escalas de tempo comparáveis à idade do Sistema Solar. Tipicamente, os métodos MVS de segunda ordem dão resultados razoavelmente precisos para passos da ordem de 1/20 do período orbital do corpo mais interno [Duncan et al., 1998]. Lamentavelmente, como H_{int} é proporcional ao inverso da distância mútua entre os corpos (excluindo o corpo principal; eq. 4.53b), quando dois corpos sofrem um encontro próximo H_{int} deixa de ser pequeno em relação a H_{Kep} e este método se torna impreciso além de não preservar mais a sua vantagem em termos de velocidade. Outra razão pela qual este método não consegue manipular encontros próximos entre os corpos é porque as coordenadas de Jacobi estabelecem uma hierarquia, ordenando os corpos massivos do mais interno ao mais externo, e este ordenamento não pode ser mudado durante a integração, isto é, as órbitas dos corpos massivos não podem se intersectar entre si nem experimentar grandes mudanças em seus semieixos maiores. No entanto, se encontros próximos entre partículas sem massa e corpos massivos não ocorrem tão frequentemente, esta técnica ainda pode ser usada desde que os resultados sejam interpretados em um sentido estatístico. Por outro lado, o método MVS só permite manipular órbitas com distâncias pericêntricas pequenas apenas para partículas sem massa e para o planeta mais interno⁸. Deste modo,

⁸Neste caso, $r'_1 = r_{10}$ e assim o primeiro termo do segundo membro em 4.53b é zero. Para um corpo massivo, que não seja o planeta mais interno, esse termo não será nulo.

o método MVS é ideal para a aplicação em sistemas com planetas cujas órbitas sejam pouco excêntricas, não havendo tal restrição no caso de partículas sem massa.

4.5.1.2 Integradores Simpléticos de Passo Múltiplo

Para o tratamento de encontros próximos entre corpos ou órbitas com altas excentricidades é necessário usar um passo variável para obter uma melhor precisão na integração, mas variar o passo de integração destrói as propriedades desejáveis dos integradores simpléticos.

A fig. 4.1 mostra o problema de Kepler (dois corpos) tratado com RK4 (Runge-Kutta de quarta ordem) e SI4 (um integrador simplético de quarta ordem), considerando-se na figura (a) um passo de integração constante e na figura (b) um passo variável. Em relação ao método RK4, o crescimento no erro é linear em ambos os casos, mas observamos uma evidente vantagem quando usamos um passo variável já que o erro decresce em uma ordem de grandeza, enquanto que o número total de passos se mantém constante. Em relação ao SI4, quando usamos um passo constante ele resolve exatamente o problema de Kepler, salvo erros periódicos de arredondamento na energia; porém, temos um crescimento secular no erro quando aplicamos um passo variável. Portanto não há nenhuma vantagem em usar um passo variável quando integramos com métodos simpléticos.

Cada vez que o passo de um integrador simplético muda, muda também o Hamiltoniano substituto (4.48, 4.50). Se ocorrem muitos encontros próximos, o erro na energia se acumula e eventualmente destrói a propriedade simplética do integrador. No entanto, é possível criar um integrador simplético que tenha um passo (global) constante, τ_0 , o qual por sua vez é subdividido em intervalos menores durante encontros próximos de tal maneira que as perturbações mais fortes tenham associadas passos de menor tamanho. Tal técnica está baseada na decomposição da força de interação entre os corpos, onde cada um dos termos da decomposição é aplicada utilizando-se um passo diferente. Este integrador se denomina integrador simplético de passo múltiplo e tem todas as propriedades desejáveis dos integradores simpléticos de passo constante. A descrição a seguir está baseada nas referências Lee et al. [1997] e Duncan et al. [1998].

Por simplicidade, consideraremos um integrador tipo “ $T + U$ ” para o problema de dois corpos. A parte da energia potencial do Hamiltoniano (vide eq. 4.45) é: $U = -1/r$ (onde omitimos o fator Gm_0m_1 , por enquanto) sendo $r = |\mathbf{q}|$ a distância entre os dois corpos. A técnica de passo múltiplo consiste em colocar uma série de cascas ao redor do corpo central e associar um passo cada vez menor com cada casca mais interna, permitindo assim uma melhor resolução da órbita astrocêntrica durante a passagem do

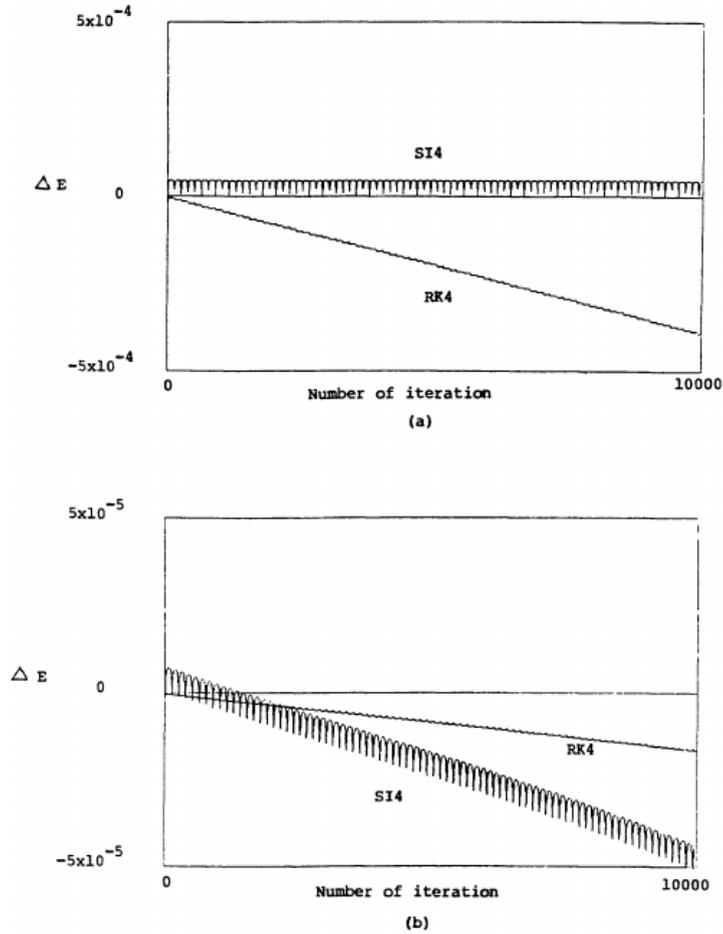


FIGURA 4.1: Erro na energia para o problema de Kepler integrado mediante RK4 e SI4 ($a = 1$ UA, $e = 0.5$). (a) Considerando um passo constante $\tau = 0.05$ e 10000 iterações (equivalente a 80 períodos orbitais). (b) Considerando um passo variável (a escala na ordenada é 1/10 da apresentada em (a)) [Yoshida, 1993].

corpo pelo seu pericentro. Para este fim escolhemos uma série de raios de corte tais que $R_1 > R_2 > \dots$ e decompomos U em $\sum_i U_i$, ou equivalentemente a força \mathbf{F} em $\sum_i \mathbf{F}_i = -\sum_i \partial U_i / \partial \mathbf{q}$, de modo que

- i) $\mathbf{F} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{F}_i$.
- ii) $\mathbf{F}_i = 0$ em $r > R_i$ (exceto para \mathbf{F}_0).
- iii) \mathbf{F}_i é mais suave que \mathbf{F}_{i+1} (vide fig. 4.2).

onde uma determinada energia U_i ou força \mathbf{F}_i deve ser aplicada com um passo τ_i . A relação τ_i / τ_{i+1} deve ser um inteiro que, em geral, pode ser uma função de i , mas nesta implementação consideramos igual a uma constante M .

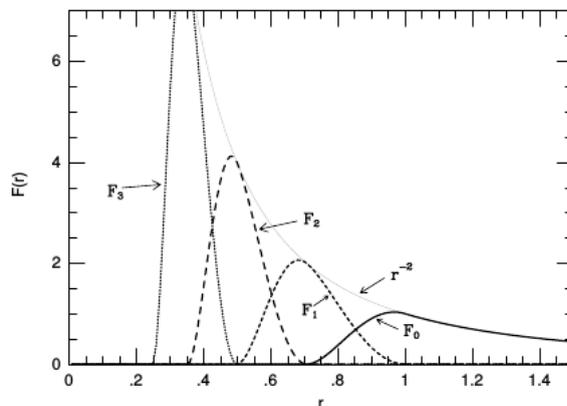


FIGURA 4.2: Decomposição da força $F(r) = 1/r^2$ em seus componentes F_i , para $i = 0 - 3$ com $R_1 = 1$ e $R_i/R_{i+1} = \sqrt{2}$.

Aplicando o integrador simplético de segunda ordem recursivamente durante um passo τ_0 , obtemos o seguinte algoritmo de segunda ordem

$$\begin{aligned} e^{\tau_0 \mathcal{D}_H} &\approx e^{\frac{\tau_0}{2} \mathcal{D}_{U_0}} e^{\tau_0 (\mathcal{D}_T + \mathcal{D}_{U_1} + \mathcal{D}_{U_2} + \dots)} e^{\frac{\tau_0}{2} \mathcal{D}_{U_0}} \\ &\approx e^{\frac{\tau_0}{2} \mathcal{D}_{U_0}} \left[e^{\frac{\tau_1}{2} \mathcal{D}_{U_1}} e^{\tau_1 (\mathcal{D}_T + \mathcal{D}_{U_2} + \mathcal{D}_{U_3} + \dots)} e^{\frac{\tau_1}{2} \mathcal{D}_{U_1}} \right]^M e^{\frac{\tau_0}{2} \mathcal{D}_{U_0}} \quad (4.54) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Esta equação está baseada em 4.43 e tem portanto todas as propriedades desejáveis de um integrador simplético de passo constante. Apesar de ter um passo global τ_0 , é efetivamente um esquema de passo variável. Em cada nível $i = 1, \dots, M$ da recursão, a evolução sob $T + \sum_{k=i}^{\infty} U_k$ é aproximada por M passos de segunda ordem de duração τ_i . A princípio, o número de níveis de recursividade pode ser infinito; porém, na prática, a recursividade é truncada no nível j se $\mathcal{D}_{U_{j+1}} + \mathcal{D}_{U_{j+2}} + \dots = 0$ durante um subpasso de duração τ_j . Se $r > R_1$ durante o passo completo τ_0 , o algoritmo se reduz ao integrador leap-frog, e conforme r decresce, as forças são cada vez melhor resolvidas.

Discutamos agora como decompor a energia potencial ou a força. Há condições adicionais que U_i ou \mathbf{F}_i devem satisfazer, que podem ser deduzidas examinando o erro do Hamiltoniano H_{err} , o mesmo que pode ser obtido usando a identidade de Baker-Campbell-Hausdorff recursivamente. O resultado pode ser simplificado notando que $\{U_i, U_l\} = 0$:

$$H_{\text{err}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\tau_i^2}{12} \left\{ \{U_i, T\}, T + \frac{1}{2} U_i + \sum_{l=i+1}^{\infty} U_l \right\} + \mathcal{O}(\tau_i^4) \quad (4.55)$$

Pelo menos os termos de ordem mais baixa ($\mathcal{O}(\tau_i^2)$) em H_{err} devem estar bem definidos. Assim, devido à presença dos colchetes de Poisson, U_i deve ter pelo menos derivadas segundas suaves (e \mathbf{F}_i derivadas primeiras suaves). Analogamente, se também queremos

que os termos da seguinte ordem ($\mathcal{O}(\tau_i^4)$) estejam bem definidos, U_i deverá ter derivadas quartas suaves. Por outro lado, como podemos notar a partir da equação 4.55, o número de termos diferentes de zero em H_{err} se incrementa a medida que r decresce. Assim, para garantir que o erro na energia não se incremente rapidamente com a diminuição de r , é desejável que o termo i -ésimo do potencial decresça com r quando $r \ll R_i$.

Depois de alguns experimentos, Lee et al. [1997] encontraram duas aproximações para a decomposição da força que funcionam bem no caso planetário. Se escrevermos $\mathbf{F}_{c,0} = \tilde{\mathbf{F}}_{c,0}$ e $\mathbf{F}_{c,i} = \tilde{\mathbf{F}}_{c,i} - \tilde{\mathbf{F}}_{c,i-1}$ para $i \neq 0$, uma das decomposições é

$$\tilde{\mathbf{F}}_{c,i-1} = \begin{cases} -\frac{\mathbf{q}}{r^3} & \text{se } r \geq R_i \\ -\left[9\left(\frac{r}{R_i}\right)^2 - 5\left(\frac{r}{R_i}\right)^6\right] \frac{\mathbf{q}}{4R_i^3} & \text{se } r < R_i \end{cases} \quad (4.56)$$

enquanto que a decomposição alternativa consiste em multiplicar a força por uma função de partição de modo que $|\tilde{\mathbf{F}}_{i-1}|$ decresça suavemente desde $1/r^2$ em $r > R_i$ a zero em $r < R_{i+1}$:

$$\tilde{\mathbf{F}}_{p,i-1} = \begin{cases} -\frac{\mathbf{q}}{r^3} & \text{se } r \geq R_i \\ -f\left(\frac{R_i-r}{R_i-R_{i+1}}\right) \frac{\mathbf{q}}{r^3} & \text{se } R_{i+1} \leq r < R_i \\ 0 & \text{se } r < R_{i+1} \end{cases} \quad (4.57)$$

onde $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$. As componentes da força têm derivadas primeiras contínuas e decrescem rapidamente (ou exatamente) a zero quando $r \ll R_i$.

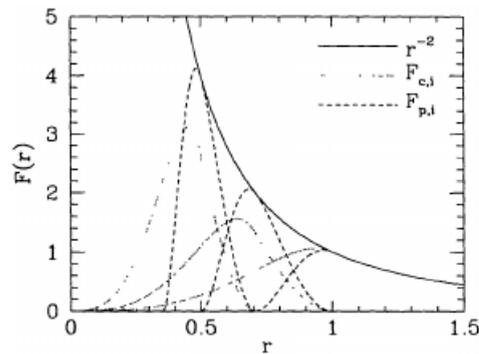


FIGURA 4.3: Decomposição da força $F(r) = 1/r^2$ com $\mathbf{F}_{c,i}$ e $\mathbf{F}_{p,i}$. Mostram-se as componentes $i = 0, 1, 2$ com $R_1 = 1$ e $R_i/R_{i+1} = \sqrt{2}$ [Lee et al., 1997].

Usando a técnica descrita acima, podemos estender este método ao problema gravitacional de $N+1$ corpos (4.51)

$$U = - \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{Gm_i m_j}{r_{ij}} = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N U_{ij} \quad (4.58)$$

onde cada termo pode ser dividido em

$$U = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \sum_{k=0}^{\infty} U_{ijk} \quad (4.59)$$

Neste caso, cada par de forças ij é manipulado independentemente, ou seja, na ocorrência de um encontro entre um par de corpos, só a força de interação referente a este par é decomposta.

Como o segundo termo de H_{int} (4.53b) do método MVS tem a mesma forma que a energia potencial do método “ $T + U$ ” (4.58) poderia-se pensar na construção de um integrador que combine o método MVS, na ausência de encontros (mantendo sua vantagem de velocidade), com a técnica de passo múltiplo, na qual o passo seja diminuído durante um encontro próximo e os termos de força que são avaliados com maior frequência (vide eq. 4.54) sejam distintos de zero. No entanto, se encontrou na prática que tal integrador, formado por ambas técnicas, falha durante encontros próximos. O uso de coordenadas de Jacobi no método MVS dá lugar a que cada corpo gire ao redor de um referencial diferente com uma massa central efetiva também diferente, como pode ser notado a partir da eq. 4.53a; isto é compensado com o primeiro termo de 4.53b, exceto quando ocorre um encontro próximo. Devido à natureza do algoritmo de passo múltiplo, H_{Kep} (4.53a) é avaliado com maior frequência, enquanto que o primeiro termo de H_{int} é avaliado em sua frequência original; conseqüentemente já não se compensam entre si e o integrador falha. A solução para este problema é desenvolver um esquema no qual todos os corpos orbitem ao redor do mesmo corpo central, com a mesma massa central efetiva. Na seguinte seção mostramos um método que permite resolver este problema.

4.5.1.3 Métodos Simpléticos em Coordenadas Democráticas Astrocêntricas

O método que descreveremos a seguir é conhecido como DH, devido a que usa coordenadas democráticas heliocêntricas (ou em geral, astrocêntricas). Consideremos primeiramente, o sistema de referência inercial cujo Hamiltoniano está dado por 4.51. Desejamos definir um novo conjunto de variáveis canônicas, \mathbf{Q}_i e \mathbf{P}_i , de maneira que as novas posições sejam as posições astrocêntricas para $i \neq 0$ e a posição do centro de massa para $i = 0$, isto é

$$\mathbf{Q}_i = \begin{cases} \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_0 & \text{se } i \neq 0 \\ \frac{1}{M} \sum_{j=0}^N m_j \mathbf{q}_j & \text{se } i = 0 \end{cases} \quad (4.60)$$

onde $M = \sum_{j=0}^N m_j$ é a massa total do sistema. Usamos assim uma função geratriz de posições novas e momentos velhos [Szebehely, 1967]

$$F_3(\mathbf{p}_i, \mathbf{Q}_i) = -\mathbf{p}_0 \left(\mathbf{Q}_0 - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{Q}_j \right) - \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \left(\mathbf{Q}_i + \mathbf{Q}_0 - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{Q}_j \right)$$

então, as novas coordenadas são canônicas se

$$\mathbf{q}_i = -\frac{\partial F_3}{\partial \mathbf{p}_i} = \begin{cases} \mathbf{Q}_i + \mathbf{Q}_0 - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{Q}_j & \text{se } i \neq 0 \\ \mathbf{Q}_0 - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{Q}_j & \text{se } i = 0 \end{cases}$$

e

$$\mathbf{P}_i = -\frac{\partial F_3}{\partial \mathbf{Q}_i} = \begin{cases} \mathbf{p}_i - \frac{m_i}{M} \sum_{j=0}^N \mathbf{p}_j & \text{se } i \neq 0 \\ \sum_{j=0}^N \mathbf{p}_j & \text{se } i = 0 \end{cases} \quad (4.61)$$

Desta forma, os novos momentos canônicos são os momentos baricêntricos (se $i \neq 0$) e o momento total do sistema (se $i = 0$). A transformação canônica é dada pelas equações 4.60 e 4.61 e a transformação inversa:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_i &= \begin{cases} \mathbf{Q}_i + \mathbf{Q}_0 - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{Q}_j & \text{se } i \neq 0 \\ \mathbf{Q}_0 - \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j \mathbf{Q}_j & \text{se } i = 0 \end{cases} \\ \mathbf{p}_i &= \begin{cases} \mathbf{p}_i + \frac{m_i}{M} \mathbf{p}_0 & \text{se } i \neq 0 \\ \frac{m_0}{M} \mathbf{p}_0 - \sum_{j=1}^N \mathbf{p}_j & \text{se } i = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.62)$$

O Hamiltoniano transformado, $H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = H(\mathbf{q}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}), \mathbf{p}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}))$, é:

$$H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = \frac{|\mathbf{P}_0|^2}{2M} + \frac{1}{2m_0} \left| \sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i \right|^2 + \sum_{i=1}^N \left(\frac{|\mathbf{P}_i|^2}{2m_i} - \frac{Gm_i m_0}{|\mathbf{Q}_i|} \right) - G \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{m_i m_j}{|\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_j|} \quad (4.63)$$

onde N agora se refere ao número de objetos sem incluir o corpo principal. Já que a coordenada \mathbf{Q}_0 é cíclica, o momento \mathbf{P}_0 é uma constante de movimento, como era de se esperar devido a que o centro de massa do sistema se move como uma partícula livre. Portanto a sua contribuição no Hamiltoniano pode ser ignorada. Desta forma, usando coordenadas democráticas astrocêntricas, o Hamiltoniano pode ser dividido como $H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) = H_{\text{Kep}} + H_{\odot} + H_{\text{int}}$, onde:

$$H_{\text{int}} = -G \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{m_i m_j}{|\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_j|} \quad (4.64a)$$

$$H_{\odot} = \frac{1}{2m_0} \left| \sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i \right|^2 \quad (4.64b)$$

$$H_{\text{Kep}} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{|\mathbf{P}_i|^2}{2m_i} - \frac{Gm_i m_0}{|\mathbf{Q}_i|} \right) \quad (4.64c)$$

e a parte do Hamiltoniano denotada por H_{\odot} se deve a que $-\sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i = \mathbf{p}_0 - (m_0/M) \sum_{i=0}^N \mathbf{P}_i$ é o momento baricêntrico do corpo central. Um integrador simplético de segunda ordem⁹ para esta divisão do Hamiltoniano em três partes está dado por

$$u(\tau) = e^{\frac{\tau}{2}\mathcal{D}_{H_{\text{int}}}} e^{\frac{\tau}{2}\mathcal{D}_{H_{\odot}}} e^{\tau\mathcal{D}_{H_{\text{Kep}}}} e^{\frac{\tau}{2}\mathcal{D}_{H_{\odot}}} e^{\frac{\tau}{2}\mathcal{D}_{H_{\text{int}}}} u(0) \quad (4.65)$$

Cada um dos Hamiltonianos parciais pode ser resolvido de forma exata (analiticamente) na ausência dos outros.

- As equações de movimento devidas a 4.64a para o k -ésimo corpo são

$$\dot{\mathbf{Q}}_k = \mathbf{0}, \quad \dot{\mathbf{P}}_k = -Gm_k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N m_j \frac{\mathbf{Q}_k - \mathbf{Q}_j}{|\mathbf{Q}_k - \mathbf{Q}_j|^3}$$

ou seja

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_k(0), \quad \mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k(0) - \frac{\tau}{2} Gm_k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N m_j \frac{\mathbf{Q}_k(0) - \mathbf{Q}_j(0)}{|\mathbf{Q}_k(0) - \mathbf{Q}_j(0)|^3} \quad (4.66)$$

- As equações de movimento correspondentes a 4.64b estão dadas por

$$\dot{\mathbf{Q}}_k = \frac{1}{m_0} \sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i, \quad \dot{\mathbf{P}}_k = \mathbf{0}$$

isto é

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{Q}_k(0) + \frac{\tau}{2m_0} \sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i(0), \quad \mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k(0) \quad (4.67)$$

- E por último, as equações de movimento de Hamilton correspondentes a 4.64c são

$$\dot{\mathbf{Q}}_k = \frac{\mathbf{P}_k}{m_k}, \quad \dot{\mathbf{P}}_k = -Gm_0 m_k \frac{\mathbf{Q}_k}{|\mathbf{Q}_k|^3}$$

que conduzem a

$$\ddot{\mathbf{Q}}_k = -Gm_0 \frac{\mathbf{Q}_k}{|\mathbf{Q}_k|^3} \quad (4.68)$$

Isto nos leva ao seguinte esquema de integração:

⁹Como $\{H_{\odot}, H_{\text{int}}\} = 0$, um outro integrador simplético de segunda ordem pode ser construído como $u(\tau) = e^{\frac{\tau}{2}\mathcal{D}_{H_{\odot}}} e^{\frac{\tau}{2}\mathcal{D}_{H_{\text{int}}}} e^{\tau\mathcal{D}_{H_{\text{Kep}}}} e^{\frac{\tau}{2}\mathcal{D}_{H_{\text{int}}}} e^{\frac{\tau}{2}\mathcal{D}_{H_{\odot}}} u(0)$.

- i) As coordenadas permanecem fixas e cada corpo recebe uma aceleração devido à força gravitacional dos outros corpos (mas não do corpo principal) durante um intervalo de tempo $\tau/2$.
- ii) Os momentos permanecem fixos, e cada corpo sofre um deslocamento em sua posição pela quantidade $\tau \sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i / (2m_0)$.
- iii) Cada corpo evolui em uma órbita Kepleriana (em relação ao mesmo corpo e mesma massa central) durante um tempo τ .
- iv) Repete o passo ii).
- v) Repete o passo i).

Quando os corpos permanecem afastados entre si, $|H_{\text{Kep}}| \gg |H_{\text{int}}|$ e $|H_{\text{Kep}}| \gg |H_{\odot}|$. Isto significa que cada passo do integrador tem um erro de ordem $\mathcal{O}(\epsilon\tau^3)$, onde $\epsilon = \sum_{i=1}^N m_i/m_0$ é a razão da massa dos diferentes corpos à do corpo central [Chambers, 1999], ao invés de um erro de ordem $\mathcal{O}(\tau^3)$ que teria o método leap-frog. Isto permite considerar um passo de integração maior do que no método leap-frog, mantendo a mesma ordem de precisão na solução e permitindo assim evoluir o sistema por um longo intervalo de tempo com um esforço computacional menor. Porém, quando dois corpos experimentam um encontro próximo (de modo que $|\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_j|$ seja pequeno), o termo correspondente a H_{int} torna-se dominante e o erro por cada passo se incrementa substancialmente. Entretanto, como no método DH todos os corpos giram ao redor do mesmo corpo central, é possível aplicar o algoritmo de passo múltiplo. A principal desvantagem deste método é que não manipula muito bem órbitas com distâncias pericêntricas pequenas. O erro do integrador aumenta com a diminuição da distância pericêntrica, isto é, conforme H_{\odot} se torna dominante. Por outro lado, em comparação com o método MVS, a hierarquia ou o ordenamento orbital dos corpos não é relevante neste esquema.

4.5.1.4 Algoritmo Simplético de Corpos Massivos

O algoritmo simplético de corpos massivos ou SyMBA (*Symplectic Massive Body Algorithm*) é um integrador simplético de segunda ordem reversível no tempo que consiste na combinação dos métodos DH e de passo múltiplo, permitindo assim resolver situações de encontros próximos entre planetas. A aplicação do método de passo múltiplo é simples já que a interação Hamiltoniana 4.64a do método DH é a mesma que a energia potencial do método “ $T+U$ ”. SyMBA tem a velocidade do método MVS em ausência de encontros próximos [Duncan et al., 1998] e é similar a um integrador simplético leap-frog “ $T+U$ ” durante um encontro. Desta forma, permite estudar a dinâmica de corpos massivos que

tenham órbitas excêntricas que se cruzem entre si, como ocorre por exemplo nas etapas da formação planetária.

Definindo

$$U_k = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N U_{ijk} \quad (4.69)$$

e usando o fato de que $\{U_k, U_l\} = \{H_\odot, U_k\} = \{\{H_\odot, H_{\text{Kep}}\}, U_k\} = 0$, o erro na energia associado com o integrador SyMBA é

$$H_{\text{err}} = \frac{\tau_0^2}{12} \left\{ \{H_\odot, H_{\text{Kep}}\}, H_{\text{Kep}} + \frac{1}{2} H_\odot \right\} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau_k^2}{12} \left\{ \{U_k, H_{\text{Kep}}\}, H_{\text{Kep}} + \frac{1}{2} U_k + \sum_{l=k+1}^{\infty} U_l \right\} + \mathcal{O}(\tau_k^4) \quad (4.70)$$

Notemos que o passo total τ_0 deve ser suficientemente pequeno como para compensar qualquer possível aumento (divergência) de H_\odot . Devido à analogia entre a equação 4.55 e o segundo termo de 4.70, deduzimos que o potencial U_{ijk} deve satisfazer as mesmas condições descritas em §4.5.1.2.

4.5.1.5 Modelo de Chambers para Encontros Próximos

Outra alternativa para tratar encontros próximos foi desenvolvida por Chambers [1999]. Seu integrador híbrido consiste em usar o método DH de maneira que, durante um encontro entre os corpos α e β , H_{int} (4.64a) seja pequeno comparado com H_{Kep} (4.64c), o que requer a aplicação de um integrador convencional. Uma maneira de fazer isto é transferindo o termo que envolve a distância mútua entre os corpos, $|\mathbf{Q}_\alpha - \mathbf{Q}_\beta|$, de H_{int} para H_{Kep} enquanto dura o encontro:

$$H_{\text{Kep}} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{|\mathbf{P}_i|^2}{2m_i} - \frac{Gm_i m_0}{|\mathbf{Q}_i|} \right) - G \frac{m_\alpha m_\beta}{|\mathbf{Q}_\alpha - \mathbf{Q}_\beta|} \quad (4.71)$$

$$H_{\text{int}} = -G \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \alpha}}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{m_i m_j}{|\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_j|} - G \sum_{\substack{j=\alpha+1 \\ j \neq \beta}}^N \frac{m_\alpha m_j}{|\mathbf{Q}_\alpha - \mathbf{Q}_j|} \quad (4.72)$$

Neste ponto podemos justificar a vantagem de usar o método DH sobre o MVS no modelo de Chambers. Como vimos em §4.5.1.3, na ausência de encontros H_{Kep} pode ser resolvido em forma exata (analiticamente). Porém, durante encontros próximos, H_{Kep} já não é integrável analiticamente por se tratar de um problema de três corpos: o corpo principal e os dois corpos envolvidos no encontro, α e β . No entanto, isto não é um problema na prática já que o mesmo pode ser integrado numericamente usando um integrador de N corpos convencional de maneira tão precisa quanto desejado. Por outro

lado, se usássemos as coordenadas de Jacobi do método MVS teríamos:

$$H_{\text{Kep}} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{|\mathbf{P}'_i|^2}{2m'_i} - \frac{Gm_i m_0}{r'_i} \right) - G \frac{m_\alpha m_\beta}{r_{\alpha\beta}} \quad (4.73)$$

onde

$$\mathbf{r}_{\alpha\beta} = \mathbf{r}'_\beta - \mathbf{r}'_\alpha + \sum_{j=\alpha}^{\beta-1} \frac{m_j \mathbf{r}'_j}{m_0 + \sum_{k=1}^j m_k}$$

e além de integrar numericamente os termos que envolvem os corpos α e β , também deveriam ser integrados numericamente aqueles que envolvem os corpos com índices $\alpha < j < \beta$.

Note-se, porém, que transferir termos entre H_{Kep} e H_{int} em cada encontro envolve mudar o Hamiltoniano substituto \tilde{H} e destruir, portanto, a natureza simplética do integrador (embora isto não seja tão crítico quanto mudar o tamanho do passo de integração). Para manter \tilde{H} constante, e fazer com que o integrador híbrido seja realmente simplético, devemos assegurar-nos que nenhum termo seja transferido de fato entre as diferentes partes do Hamiltoniano. Uma forma de fazer isto é dividindo cada termo de interação entre H_{Kep} e H_{int} de tal maneira que a parte correspondente a H_{int} permaneça sempre pequena, enquanto que a parte em H_{Kep} só seja avaliada durante os encontros:

$$H_{\text{Kep}} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{|\mathbf{P}_i|^2}{2m_i} - \frac{Gm_i m_0}{|\mathbf{Q}_i|} \right) - G \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{m_i m_j}{|\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_j|} [1 - K(|\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_j|)] \quad (4.74a)$$

$$H_{\text{int}} = -G \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{m_i m_j}{|\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_j|} K(|\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_j|) \quad (4.74b)$$

onde a *função de transição*, K , (vide fig. 4.4) deve tender a 1 quando a separação $|\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_j|$ entre os corpos i e j for grande, enquanto que deve tender a 0 quando $|\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_j|$ for pequena.

A solução de Chambers foi inspirada no método de separação do potencial de [Duncan et al. \[1998\]](#), (equação 4.59), com a diferença de que aqui os termos do potencial só precisam ser divididos em apenas duas partes ao invés de várias.

Na ausência de encontros, H_{Kep} e H_{int} podem ser integrados em forma exata como antes (equações 4.66 e 4.68). Vejamos o que acontece na ocorrência de um encontro entre dois corpos apenas, α e β . Neste caso

$$\begin{aligned} K_{\alpha j} &= 1, \quad \forall j \neq \beta \\ K_{\beta j} &= 1, \quad \forall j \neq \alpha \end{aligned} \quad (4.75)$$

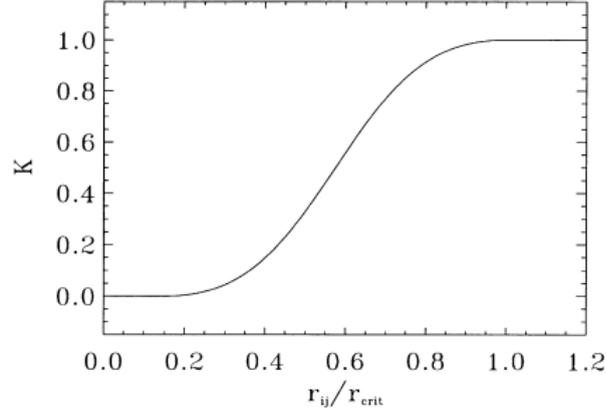


FIGURA 4.4: Uma forma adequada para a função de transição K em função da separação, $|\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_j|$, entre dois corpos [Chambers, 1999].

- A parte Kepleriana do Hamiltoniano conduz às seguintes equações de movimento para os corpos em consideração

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{Q}}_\alpha &= \frac{\mathbf{P}_\alpha}{m_\alpha} \\
 \dot{\mathbf{P}}_\alpha &= -Gm_0m_\alpha \frac{\mathbf{Q}_\alpha}{|\mathbf{Q}_\alpha|^3} - Gm_\alpha m_\beta \frac{\mathbf{Q}_\alpha - \mathbf{Q}_\beta}{|\mathbf{Q}_\alpha - \mathbf{Q}_\beta|^3} (1 - K_{\alpha\beta}) \\
 \dot{\mathbf{Q}}_\beta &= \frac{\mathbf{P}_\beta}{m_\beta} \\
 \dot{\mathbf{P}}_\beta &= -Gm_0m_\beta \frac{\mathbf{Q}_\beta}{|\mathbf{Q}_\beta|^3} + Gm_\alpha m_\beta \frac{\mathbf{Q}_\alpha - \mathbf{Q}_\beta}{|\mathbf{Q}_\alpha - \mathbf{Q}_\beta|^3} (1 - K_{\alpha\beta})
 \end{aligned} \tag{4.76}$$

Então, para cada par de encontros, as equações 4.76 são integradas numericamente em forma separada.

- Por outro lado, H_{int} origina as seguintes equações

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{Q}}_\alpha &= \mathbf{0} \\
 \dot{\mathbf{P}}_\alpha &= -Gm_\alpha \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \alpha, \beta}}^N m_j \frac{\mathbf{Q}_\alpha - \mathbf{Q}_j}{|\mathbf{Q}_\alpha - \mathbf{Q}_j|^3} - Gm_\alpha m_\beta \frac{\mathbf{Q}_\alpha - \mathbf{Q}_\beta}{|\mathbf{Q}_\alpha - \mathbf{Q}_\beta|^3} K_{\alpha\beta}
 \end{aligned} \tag{4.77}$$

resultando em

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}_\alpha &= \mathbf{Q}_\alpha(0) \\
 \mathbf{P}_\alpha &= \mathbf{P}_\alpha(0) - \frac{\tau}{2} Gm_\alpha \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq \alpha, \beta}}^N m_j \frac{\mathbf{Q}_\alpha(0) - \mathbf{Q}_j(0)}{|\mathbf{Q}_\alpha(0) - \mathbf{Q}_j(0)|^3} + m_\beta \frac{\mathbf{Q}_\alpha(0) - \mathbf{Q}_\beta(0)}{|\mathbf{Q}_\alpha(0) - \mathbf{Q}_\beta(0)|^3} K_{\alpha\beta} \right)
 \end{aligned} \tag{4.78}$$

Podemos descrever agora o esquema de integração para o integrador híbrido de segunda ordem como segue:

- i) As coordenadas permanecem fixas e cada corpo recebe uma aceleração proveniente dos outros corpos (mas não do corpo central), pesada por um fator K nas situações de encontro, modificando os momentos durante um intervalo de tempo $\tau/2$.
- ii) Os momentos permanecem fixos, e cada corpo muda linearmente a sua posição em uma quantidade $\tau \sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i / (2m_0)$.
- iii) Os corpos que não sofrem um encontro se movem em uma órbita Kepleriana em torno do corpo central durante um intervalo de tempo τ . Paralelamente, para os corpos que experimentam um encontro, os termos Keplerianos e os termos de interação pesados pelo fator $(1 - K)$, são integrados numericamente também durante um intervalo de tempo τ .
- iv) Repete o passo ii).
- v) Repete o passo i).

O integrador simplético híbrido que acabamos de descrever está incluído em um pacote de integração de N-corpos chamado MERCURY, disponível publicamente em: <http://www.arm.ac.uk/~jec/home.html>

Capítulo 5

Metodologia

Neste Capítulo, descrevemos a metodologia utilizada em nosso trabalho para determinar a estabilidade dinâmica de planetas Troianos hipotéticos. Na seção §5.1, descrevemos o pacote de subrotinas Swift devido a que a extensão das regiões estáveis em torno dos pontos de equilíbrio só podem ser calculadas usando métodos numéricos. Finalmente, na seção §5.2, explicamos os métodos utilizados para a análise da estabilidade de órbitas Troianas.

5.1 O Pacote de Subrotinas Swift

Swift é um pacote de subrotinas desenvolvido por *Hal Levison e Martin Duncan* em Fortran 77/90, que pode ser descarregado livremente desde: <https://www.boulder.swri.edu/~hal/swift.html>. O pacote Swift permite-nos integrar um conjunto de corpos que interagem gravitacionalmente com um conjunto de partículas de teste mediante alguma das seguintes técnicas de integração:

Integradores Simpléticos	Integrador Não Simplético
Método de Wisdom-Holman (WHM)	Método de Bulirsch-Stoer
Método de Variáveis Mistas Regularizadas (RMVS)	
Método T+U de quarta ordem (TU4)	
Método de Skeel	
Algoritmo Simplético para Corpos Massivos (SyMBA)	

TABELA 5.1: Integradores que constituem o Swift.

O método de Wisdom-Holman é basicamente o Método de Variáveis Mistas estudado na seção §4.5.1.1. Neste algoritmo, as partículas de teste são removidas da integração

quando têm qualquer encontro próximo com um corpo massivo. O método RMVS é uma extensão do anterior que manipula encontros próximos entre as partículas de teste e os corpos massivos, fazendo uma mudança de coordenadas astrocêntricas para planetocêntricas (regularização de coordenadas). O algoritmo TU4 é um integrador simplético de quarta ordem baseado em decompor o hamiltoniano em energia cinética mais energia potencial (cf. equação 4.51), e não consegue manipular encontros próximos entre os corpos. Os métodos Skeel e SyMBA estão baseados nas ideias apresentadas nas seções §4.5.1.2, §4.5.1.3 e §4.5.1.4, sendo que o primeiro manipula encontros entre partículas e corpos massivos enquanto que o segundo manipula encontros de corpos massivos entre si. O método de Bulirsch-Stoer manipula encontros próximos, tanto entre partículas e corpos massivos como corpos massivos entre si, no entanto é muito mais lento que os métodos RMVS, Skeel ou SyMBA.

5.1.1 Arquivos de Entrada e Saída

Swift foi desenvolvido de modo que todos os métodos de integração utilizem os mesmos arquivos de entrada e produzam o mesmo formato dos arquivos de saída, salvo pequenas diferenças.

Os arquivos de entrada padrão são os seguintes: *param.in*, *pl.in* e *tp.in*:

1. **pl.in:** Neste arquivo se especificam o número de corpos massivos incluindo a estrela, suas respectivas massas e suas respectivas posições e velocidades astrocêntricas; dependendo do integrador utilizado, estes dados serão convertidos internamente para o sistema de coordenadas adequado (baricêntrico, Jacobi ou democráticas astrocêntricas). As unidades dos parâmetros devem ser escolhidas de modo que a constante gravitacional seja $G = 1$, por exemplo, podemos considerar distâncias dadas em UA, o tempo em dias, de modo que uma massa solar seja aproximadamente 2.96×10^{-4} unidades de massa. Usuários do integrador RMVS devem adicionar ainda os respectivos raios de interação dos planetas, isto é, às distâncias mínimas às quais as partículas serão eliminadas no decorrer de um encontro próximo com um planeta. No caso de utilizar o integrador SyMBA, devem-se adicionar os raios físicos dos planetas como também os respectivos raios de Hill.
2. **tp.in:** Neste arquivo se especificam o número de partículas de teste (tp), as quais se consideram com massa nula, suas respectivas posições e velocidades astrocêntricas, e uma série de parâmetros de estado que indicam se uma partícula está ou não ativa e fornecem outras informações. As unidades escolhidas para este arquivo devem ser as mesmas que são usadas no pl.in.

3. **param.in:** Neste arquivo se especificam o tempo inicial, o tempo final para deter a integração, o passo do integrador, o intervalo de tempo entre as saídas da integração, além de uma série de parâmetros que especificam diversas operações que podem ser feitas durante a integração, como calcular a energia do sistema, incluir as perturbações pelo achatamento da estrela, verificar os critérios para descartar partículas de teste, e outros parâmetros que definem o formato de saída dos dados.

Uma vantagem dos integradores do pacote Swift é que todos eles gravam a intervalos regulares três arquivos no mesmo formato dos arquivos *pl.in*, *tp.in* e *param.in*, contendo as condições do sistema naquele instante de tempo, de modo que estes arquivos podem ser usados para continuar uma integração interrompida.

5.1.2 Elementos Orbitais a Posições e Velocidades Astrocêntricas

Para criar o arquivo *pl.in* as condições iniciais devem estar dadas em posições e velocidades astrocêntricas. Devido a que os dados fornecidos pela Enciclopédia de Planetas Extra-solares estão dados em elementos orbitais, é necessário utilizar um algoritmo que transforme elementos orbitais em posições e velocidades. O algoritmo utilizado é apresentado no apêndice A, e está baseado nas equações do capítulo 3 do livro de Fitzpatrick [1970] e nas equações de transformação que fornecem a orientação do plano da órbita em relação ao referencial $O\xi\eta\zeta$, como se mostra na figura 5.1, que no nosso caso é aquele em que o eixo ζ contém a linha de visada.

As equações de transformação do referencial $O\xi''\eta''\zeta''$ para $O\xi\eta\zeta$ são expressadas em notação matricial como:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = D^T \begin{pmatrix} \xi'' \\ \eta'' \\ \zeta'' \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

onde

$$D^T = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{21} & D_{31} \\ D_{12} & D_{22} & D_{32} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

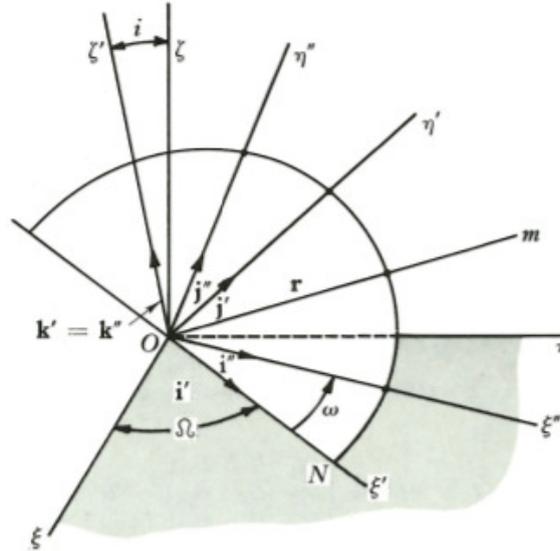


FIGURA 5.1: Orientação espacial do plano orbital. O plano orbital intercepta ao plano $\xi\eta$ na linha dos nodos, ON . Esta linha é definida sempre que o plano orbital e o plano $\xi\eta$ não sejam coincidentes. A orientação é definida através de uma transformação que envolve uma primeira rotação do referencial $O\xi\eta\zeta$, pelo ângulo Ω ($0^\circ \leq \Omega \leq 360^\circ$), em sentido anti-horário ao redor do eixo ζ positivo. Uma rotação consecutiva pelo ângulo i ($0^\circ < i < 180^\circ$), em sentido anti-horário ao redor do eixo ξ' positivo, leva à obtenção de um novo referencial $O\xi'\eta'\zeta'$. Finalmente, uma última rotação pelo ângulo ω ($0^\circ \leq \omega \leq 360^\circ$), em sentido anti-horário ao redor do eixo ζ' , leva ao referencial $O\xi''\eta''\zeta''$, em que o eixo ξ'' está alinhado com o pericentro da órbita. No nosso caso, o eixo ζ aponta na direção da linha de visada. Crédito: Fitzpatrick [1970].

cujos elementos são

$$\begin{aligned}
 D_{11} &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i \\
 D_{12} &= \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i \\
 D_{13} &= \sin \omega \sin i \\
 D_{21} &= -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i \\
 D_{22} &= -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i \\
 D_{23} &= \cos \omega \sin i \\
 D_{31} &= \sin \Omega \sin i \\
 D_{32} &= -\cos \Omega \sin i \\
 D_{33} &= \cos i
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

5.1.3 Condições Iniciais para os Planetas

As condições iniciais adotadas para os planetas que formam os sistemas reais, Kepler-9 e Kepler-56, consistem dos valores conhecidos, dados nas tabelas 2.1 e 2.2, e de alguns

valores que devemos assumir pois são desconhecidos ou que precisamos estimar. Estes últimos são apresentados nas tabelas a seguir:

	Kepler-9 b	Kepler-9 c	Kepler-9 d
Raio de Hill (UA)	$4.773215797 \times 10^{-3}$	$6.704145463 \times 10^{-3}$	$4.746501803 \times 10^{-4}$
Excentricidade			0.0
Inclinação ($^{\circ}$)			90.0
Anomalia média ($^{\circ}$)	170	265	0.0
Argumento do periélio ($^{\circ}$)			0.0
Longitude do nodo ($^{\circ}$)	0.0	0.0	0.0

TABELA 5.2: Parâmetros e elementos orbitais derivados ou assumidos para o sistema Kepler-9.

	Kepler-56 b	Kepler-56 c	Kepler-56 d
Raio (R_{Jup})			1.488805553
Raio de Hill (UA)	$2.636679538 \times 10^{-3}$	$8.519465581 \times 10^{-3}$	0.1111861725
Inclinação ($^{\circ}$)			90 e 59.02
Anomalia média ($^{\circ}$)	57.0	182.0	280.47
Argumento do periélio ($^{\circ}$)	0.0	0.0	0.0
Longitude do nodo ($^{\circ}$)	0.0	0.0	0.0

TABELA 5.3: Parâmetros e elementos orbitais derivados e assumidos para o sistema Kepler-56. Para a inclinação do planeta d consideramos dois possíveis valores, um correspondente a uma órbita quase co-planar com os planetas b,c e outro correspondente a uma órbita muito inclinada conforme discutido na seção §2.2.2. O raio do planeta d foi estimado considerando uma densidade igual à de Júpiter.

5.1.4 Grade de Condições Iniciais para os Planetas Troianos

Em nosso estudo, assumimos que um planeta Troiano fictício pode ser tratado como uma partícula de teste, ou seja, tem uma massa desprezível em relação às massas dos planetas apresentadas nas tabelas 2.1 e 2.2. Esta aproximação nos permite integrar um grande número de planetas Troianos (de massa nula) simultaneamente. Portanto, podemos criar uma grade de condições iniciais para um conjunto de planetas Troianos que, no nosso caso em particular, consiste em uma grade no espaço de parâmetros semieixo maior vs. excentricidade.

Para cada conjunto de 10 000 condições iniciais diferentes para os planetas Troianos, criamos uma grade de dimensão 100×100 . O semieixo maior desta grade varia no intervalo $\bar{a}_p \pm \Delta\bar{a}_p$, onde \bar{a}_p é o valor médio¹ do semieixo maior do planeta real com o qual o Troiano comparte o movimento co-orbital e $\Delta\bar{a}_p$ é uma pequena variação em torno a \bar{a}_p . As condições iniciais na grade estão equiespaçadas a intervalos $2\Delta\bar{a}_p/99$. Os valores da excentricidade na grade variam entre 0 e 0.5, com espaçamento regular

¹ Determinado a partir de uma integração numérica do sistema planetário por 20 M anos.

de 0.5/99. Os demais elementos orbitais para as condições iniciais da grade são fixos e satisfazem as equações:

$$\lambda_t - \lambda_p = 60^\circ, \quad \lambda = M + \omega + \Omega \quad (5.4a)$$

$$\varpi_t - \varpi_p = 60^\circ, \quad \varpi = \omega + \Omega \quad (5.4b)$$

$$\Omega_t - \Omega_p = 0^\circ \quad (5.4c)$$

onde o subscrito t faz referência ao planeta Troiano e o subscrito p ao respectivo planeta co-orbital real. Das equações 5.4, resulta que $M_t = M_p$ e $\omega_t = 60^\circ + \omega_p$.

5.2 Estudo Dinâmico

O estudo dinâmico baseia-se em aplicar um critério para determinar a estabilidade das órbitas dos planetas Troianos, sendo estáveis aquelas que permaneçam na vizinhança dos pontos de Lagrange durante todo o tempo de integração. Desta maneira, se encontramos uma grande região estável, pode-se concluir, a partir de um ponto de vista dinâmico, que a existência de planetas Troianos é possível. Se, pelo contrário, só umas poucas órbitas são estáveis, a probabilidade de existência de tais planetas adicionais é baixa. Assim, o nosso estudo dinâmico é realizado aplicando os seguintes indicadores de estabilidade:

- *Método de Excentricidade Máxima (MEM)*: A permanência do planeta Troiano dentro da região estável do sistema é definida por um limite superior em sua excentricidade. Por exemplo, se a órbita do Troiano torna-se parabólica ou hiperbólica ($e_{\max} \geq 1$), o sistema considera-se instável e o planeta Troiano é removido da integração pois teria sido ejetado do sistema, ou colidido com a estrela. Porém, estudos anteriores demonstraram que já para excentricidades superiores a ≈ 0.5 , o planeta Troiano escapa da ressonância 1:1 (Schwarz et al. [2007], Schwarz et al. [2009]).
- *Coefficiente de Difusão*: Fornece a evolução temporal do desvio σ_x de um determinado elemento orbital do planeta Troiano, em relação ao respectivo valor inicial $x(t_0)$, isto é:

$$\sigma_x(t_N) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N [x(t_j) - x(t_0)]^2}{N - 1}} \quad (5.5)$$

onde t_j são os diferentes instantes de tempo de saída dos resultados da simulação. O coeficiente de difusão é definido como:

$$d = \frac{\sigma_x(t_N)}{\sqrt{t_N}} \quad (5.6)$$

Na prática, entretanto, é possível utilizar como um indicador da estabilidade orbital diretamente o valor de $\sigma_x(T)$, onde T é o tempo final da partícula, isto é, o tempo final da simulação se a partícula sobrevive durante toda a simulação, ou o instante de tempo em que a partícula foi eventualmente eliminada da simulação (vide capítulo 6).

Capítulo 6

Resultados e Discussões

Neste Capítulo apresentamos os resultados das integrações que determinam a probabilidade de existência de planetas Troianos nos sistemas Kepler-9 e Kepler-56. As simulações foram realizadas usando o cluster da Coordenação de Astronomia e Astrofísica (COAA) do Observatório Nacional.

Para determinar a região de estabilidade dos planetas Troianos em ambos os sistemas, em primeiro lugar determinamos se os sistemas de planetas (sem Troianos hipotéticos) são estáveis a longo prazo. Se os sistemas resultam estáveis, a partir dos dados obtidos dessas simulações, construímos as grades de condições iniciais para diferentes conjuntos de corpos Troianos, tal como foi indicado no capítulo anterior (seção 5.1.4). A fim de realizar uma análise detalhada da estabilidade dinâmica dos Troianos, consideramos vários casos para ambos os sistemas, que detalhamos nas tabelas 6.1, 6.2 e 6.3. Os resultados obtidos em cada caso são exibidos mediante mapas de cor que quantificam:

1. O tempo final de cada Troiano na simulação, isto é, o tempo final da integração se a partícula sobrevive durante toda a simulação ou o tempo até ser descartada por alguma das seguintes razões:
 - Devido a uma colisão com um planeta, condição que depende do integrador utilizado. No caso de SyMBA, por exemplo, isto ocorre quando a distância mútua é $d \sim 3r_{\text{Hill}}$. No caso de RMVS, isto ocorre quando a distância mútua é igual ao raio do planeta.
 - Devido a uma colisão com a estrela, isto é $d = r_{\text{min}}$ ou $d = q_{\text{min}}$.
 - Devido a que foi ejectada do sistema, isto é $d = r_{\text{max}}$.

onde r_{min} e r_{max} são as distâncias astrocêntricas em que uma tp é eliminada da simulação porque se considera que está demasiado próxima ou distante do

corpo central, respectivamente, e q_{\min} é a distância pericêntrica em que uma tp é eliminada porque se considera que está muito próxima ao corpo central.

2. A excentricidade máxima absoluta (e_{\max}) atingida pela tp durante a integração,
3. O desvio no semieixo maior (σ_a), em relação ao semieixo maior inicial (a_{ini}),
4. O desvio na excentricidade (σ_e), em relação à excentricidade inicial (e_{ini}).

6.1 Kepler-9

A integração do sistema Kepler-9 foi realizada usando o integrador simplético SyMBA, incluído no pacote Swift, com um tempo total de integração de 20 Ma, que é equivalente a 3.8×10^8 revoluções do planeta Kepler-9 b, e um passo igual 1/20 do período orbital do planeta mais interno, isto é, $\tau = 0.08$ dias. Como se mostra na figura 6.1, o planeta menor e menos massivo, Kepler-9 d, tem uma variação mais acentuada da sua excentricidade e inclinação, devido principalmente à presença do planeta mais massivo, Kepler-9 b. As órbitas dos planetas Kepler-9 b e Kepler-9 c variam, permanecendo aproximadamente coplanares devido ao forte acoplamento entre elas e devido ao fato que estes dois corpos são os que praticamente definem o plano de Laplace do sistema. Embora existam diferenças significativas, o sistema Kepler-9 é estável porque não há cruzamento entre as órbitas de Kepler-9 d e Kepler-9 b.

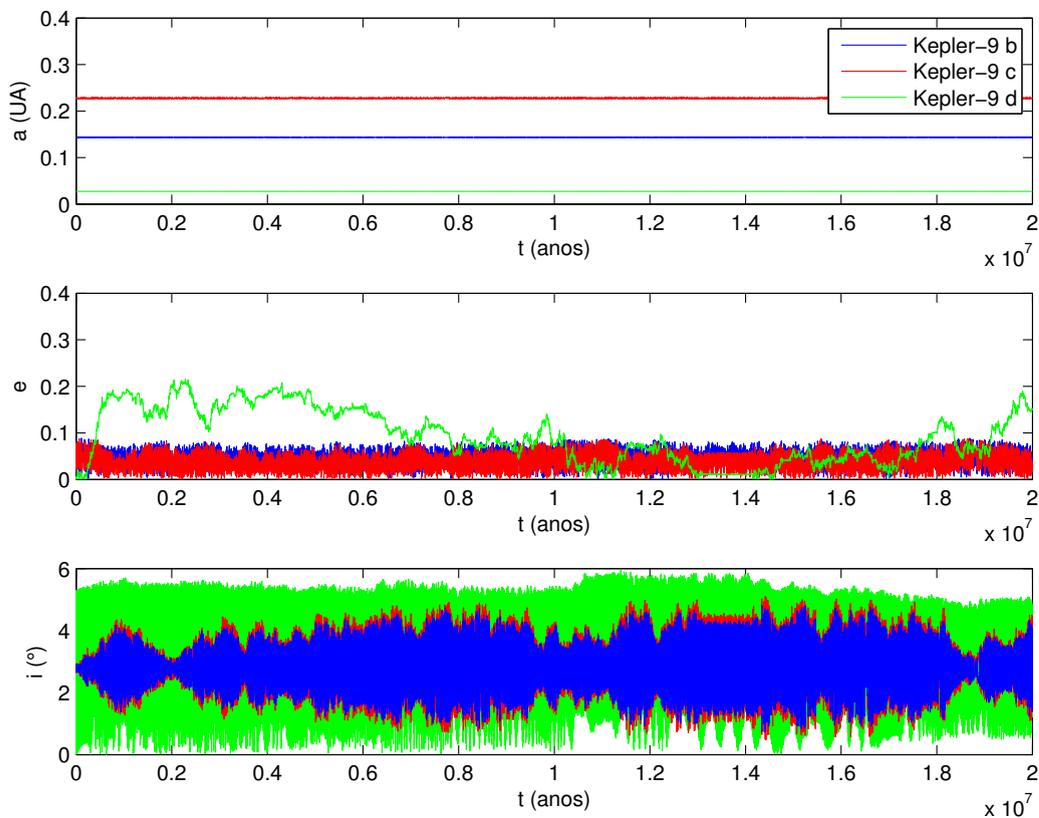


FIGURA 6.1: Evolução temporal do semieixo maior, excentricidade e inclinação dos planetas que formam o sistema Kepler-9.

Para uma análise detalhada da estabilidade de planetas Troianos no sistema Kepler-9, consideramos diferentes configurações tendo em conta todas as combinações possíveis em termos de número de planetas que formam o sistema real. Estas configurações são explanadas na tabela 6.1 onde utilizamos uma nomenclatura na qual, por exemplo, Kepler9dbc_b indica que a configuração é composta pelos planetas: Kepler-9 d, Kepler-9 b e Kepler-9 c, e um conjunto de 10 000 Troianos, considerados como partículas de teste, em configuração co-orbital com Kepler-9 b. A mesma nomenclatura é aplicada nas outras configurações, bem como nas tabelas 6.2 e 6.3.

Todas as simulações correspondentes às configurações da tabela 6.1 foram realizadas utilizando o integrador RMVS, durante 10 milhões de dias (27 378.5 anos), com um passo igual a 0.08 dias e um intervalo de tempo entre saídas de 10^5 dias. Cada simulação demorou aproximadamente 4 horas.

Casos	Configuração	\bar{a} (UA)	$\Delta\bar{a}_p$ (UA)
Caso 1 (Troianos na órbita interna)	Kepler9d_d Kepler9db_d Kepler9dc_d Kepler9dbc_d ^a	0.027299511466854	0.00046
Caso 2 (Troianos na órbita intermediária)	Kepler9b_b Kepler9db_b Kepler9bc_b Kepler9dbc_b ^a	0.143346666422058	0.003847
Caso 3 (Troianos na órbita externa)	Kepler9c_c Kepler9bc_c Kepler9dc_c Kepler9dbc_c ^a	0.227698902263775	0.007601

TABELA 6.1: Configurações consideradas para o estudo da estabilidade dinâmica de corpos Troianos no sistema Kepler-9.

^a Sistema real completo, considerando Troianos fictícios em apenas um planeta.

6.1.1 Caso 1

Kepler9d_d

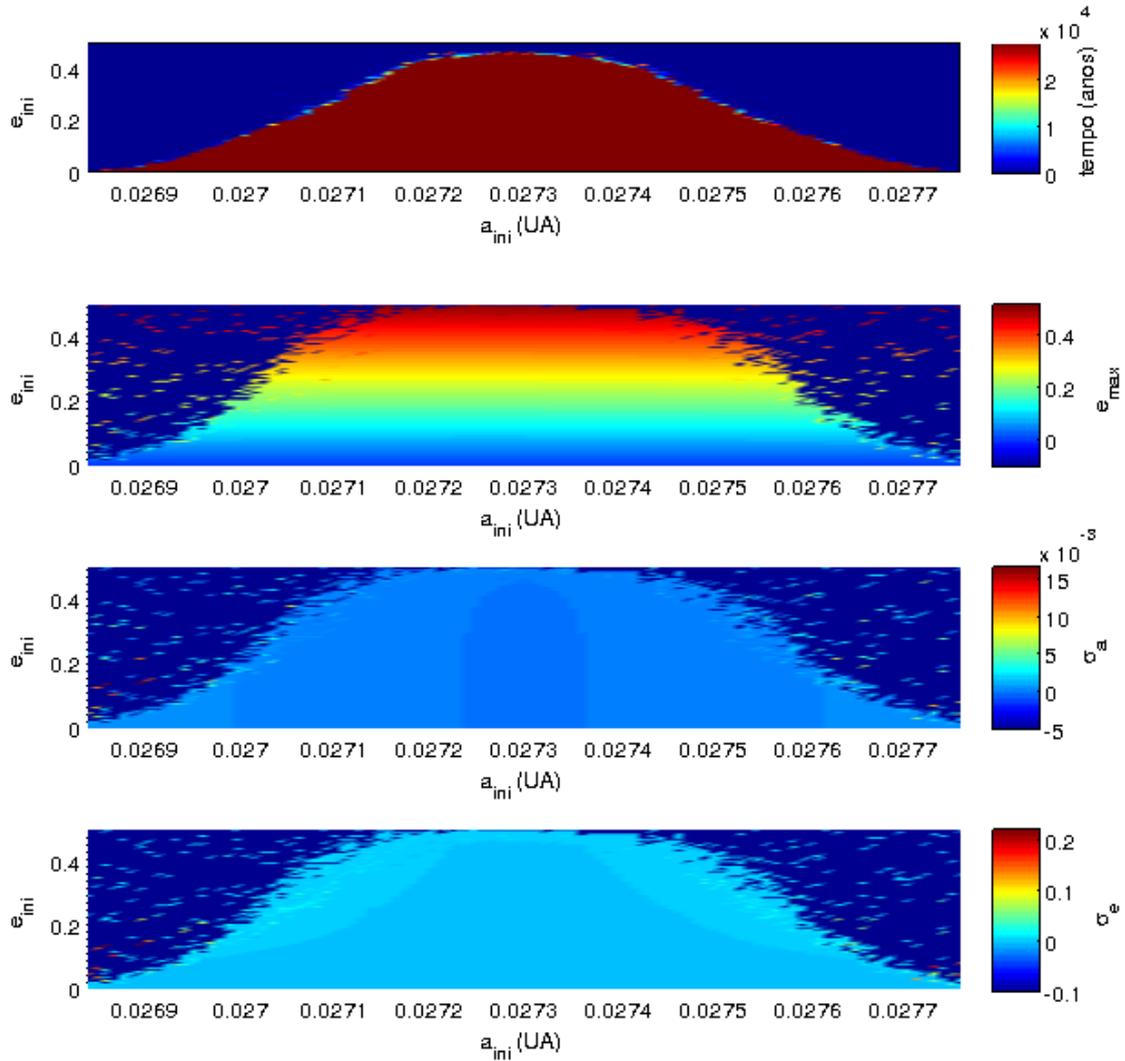


FIGURA 6.2: Mapas de cor para o tempo final, e_{\max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-9 d, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, considerando apenas o planeta Kepler-9 d (problema restrito de três corpos).

Começamos analisando a estabilidade de corpos co-orbitais com o planeta Kepler-9 d, isto é o mais interno do sistema. Inicialmente, estudamos o caso restrito de três corpos considerando Kepler-9 d apenas, e posteriormente adicionamos as perturbações dos outros planetas do sistema.

Analisando a figura 6.2 notamos que existe um grande número de partículas de teste que sobrevivem até o final do tempo de integração. Os valores de excentricidade máxima atingidos pelos Troianos estáveis correspondem geralmente às suas excentricidades iniciais, sendo as órbitas mais estáveis aquelas que começam com $e_{\text{ini}} \approx 0$. As variações

nos semieixos maiores dos Troianos estáveis é pequena, especialmente para aqueles cujo semieixo maior inicial corresponde ao semieixo maior médio do planeta Kepler-9 d (ou seja, próximos ao ponto Lagrangiano L_4). As variações nas excentricidades são também pequenas.

Kepler9db_d

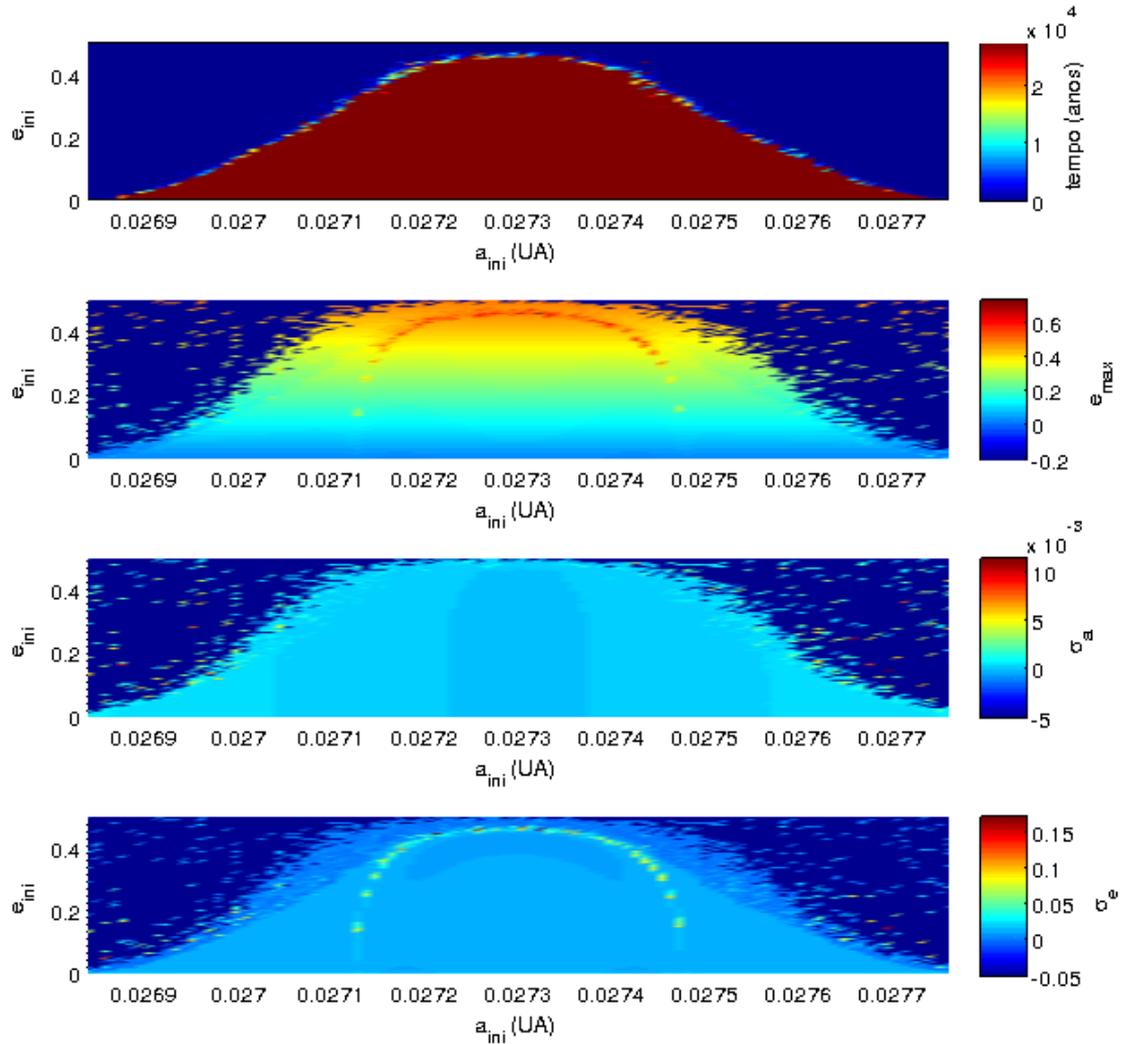


FIGURA 6.3: Mapas de cor para o tempo final, e_{\max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-9 d, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, considerando também a perturbação do planeta Kepler-9 b.

Analisando a figura 6.3 notamos que a região de movimento estável dos Troianos de Kepler-9 d é preservada mesmo após adicionar as perturbações de Kepler-9 b apenas. As excentricidades máximas atingidas pelos Troianos estáveis continuam sendo semelhantes às suas excentricidades iniciais, exceto em uma faixa estreita e simétrica em torno do valor médio do semieixo maior de Kepler-9 d, onde as excentricidades máximas são consideravelmente mais altas, implicando que o movimento nessa faixa é instável. Devido

a que este padrão não foi apreciado na figura anterior e não existe uma comensurabilidade de períodos entre Kepler-9 d e Kepler-9 b, este efeito deve estar vinculado à presença de uma ressonância secular do Troiano provavelmente com o próprio planeta Kepler-9 d. As variações nos semieixos maiores são pequenas, especialmente perto do valor médio de a_{ini} . As variações nas excentricidades são também pequenas, exceto ao longo da região da ressonância secular.

Kepler9dc_d

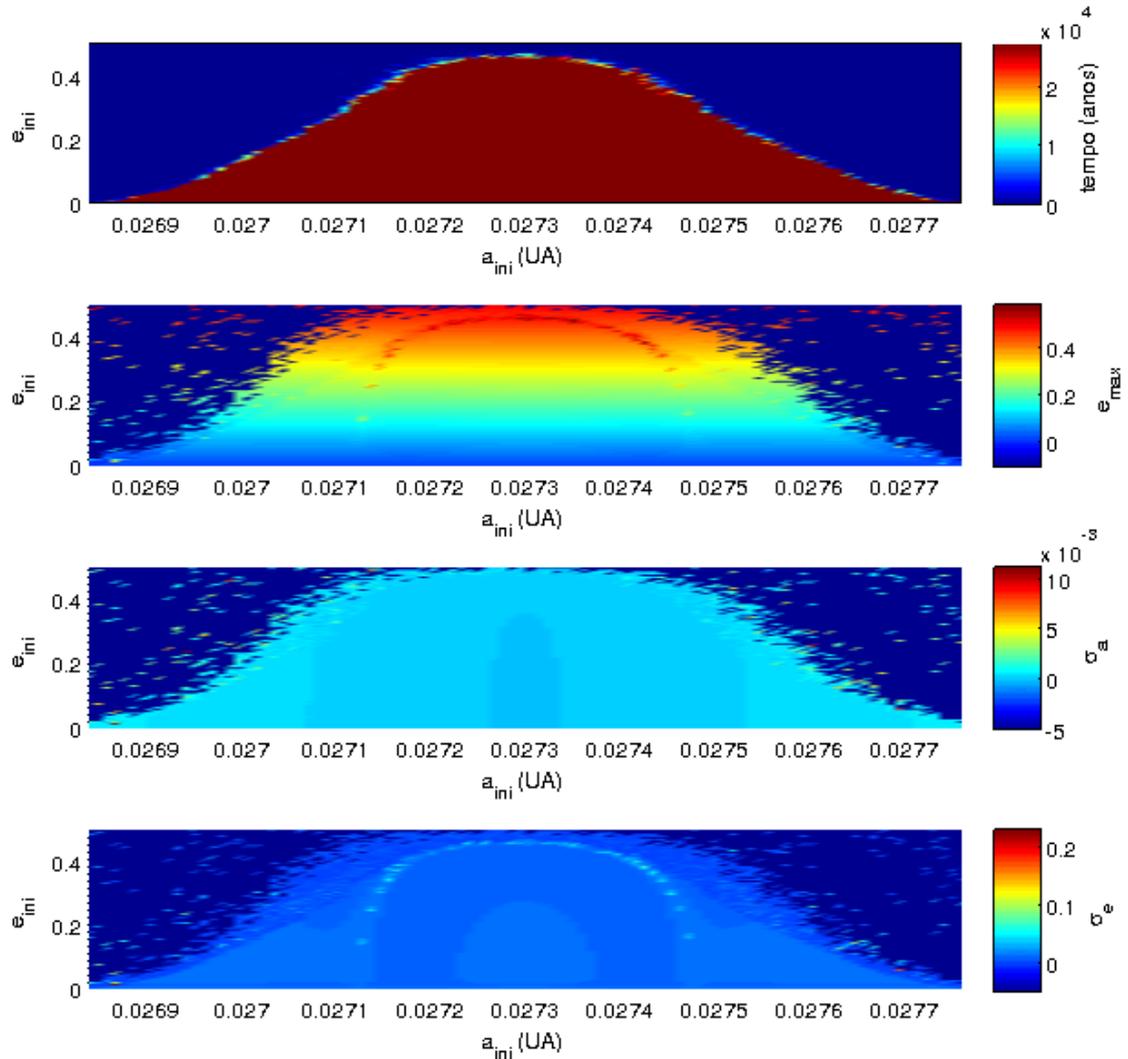


FIGURA 6.4: Mapas de cor para o tempo final, e_{max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-9 d, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, adicionando agora a perturbação do planeta Kepler-9 c.

Analisando a figura 6.4 notamos que o comportamento é muito semelhante ao da figura 6.3. A região de estabilidade é preservada apesar de adicionar a perturbação de Kepler-9 c apenas, porém há uma correlação mais acentuada entre a excentricidade máxima e a inicial. A região de instabilidade em torno da ressonância secular continua existindo,

confirmando assim que esta é uma ressonância entre os corpos co-orbitais (Troiano e Kepler-9 d).

Kepler9dbc_d

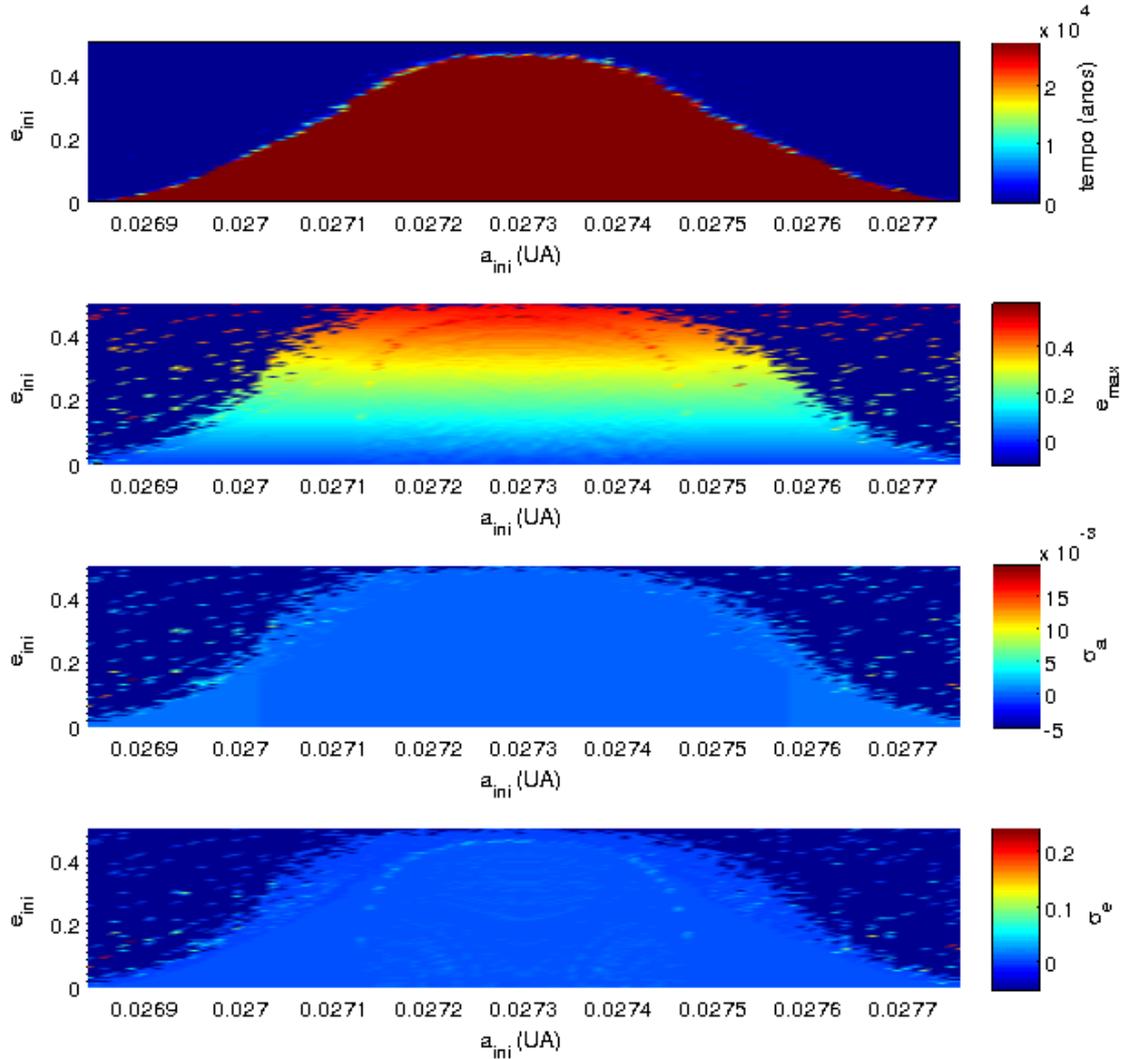


FIGURA 6.5: Mapas de cor para o tempo final, e_{\max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-9 d, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, considerando o efeito dos três planetas.

Como se mostra-se na figura 6.5, a região de movimento estável para os Troianos de Kepler-9 d continua preservada mesmo quando consideramos o sistema real composto pelos três planetas. A variações nos semieixos maiores e nas excentricidades são muito pequenas, e comportamento da ressonância secular é mantido. Para $e_{\text{ini}} = 0$, a extensão da região estável é de aproximadamente 9.2×10^{-4} UA.

6.1.2 Caso 2

Kepler9b_b

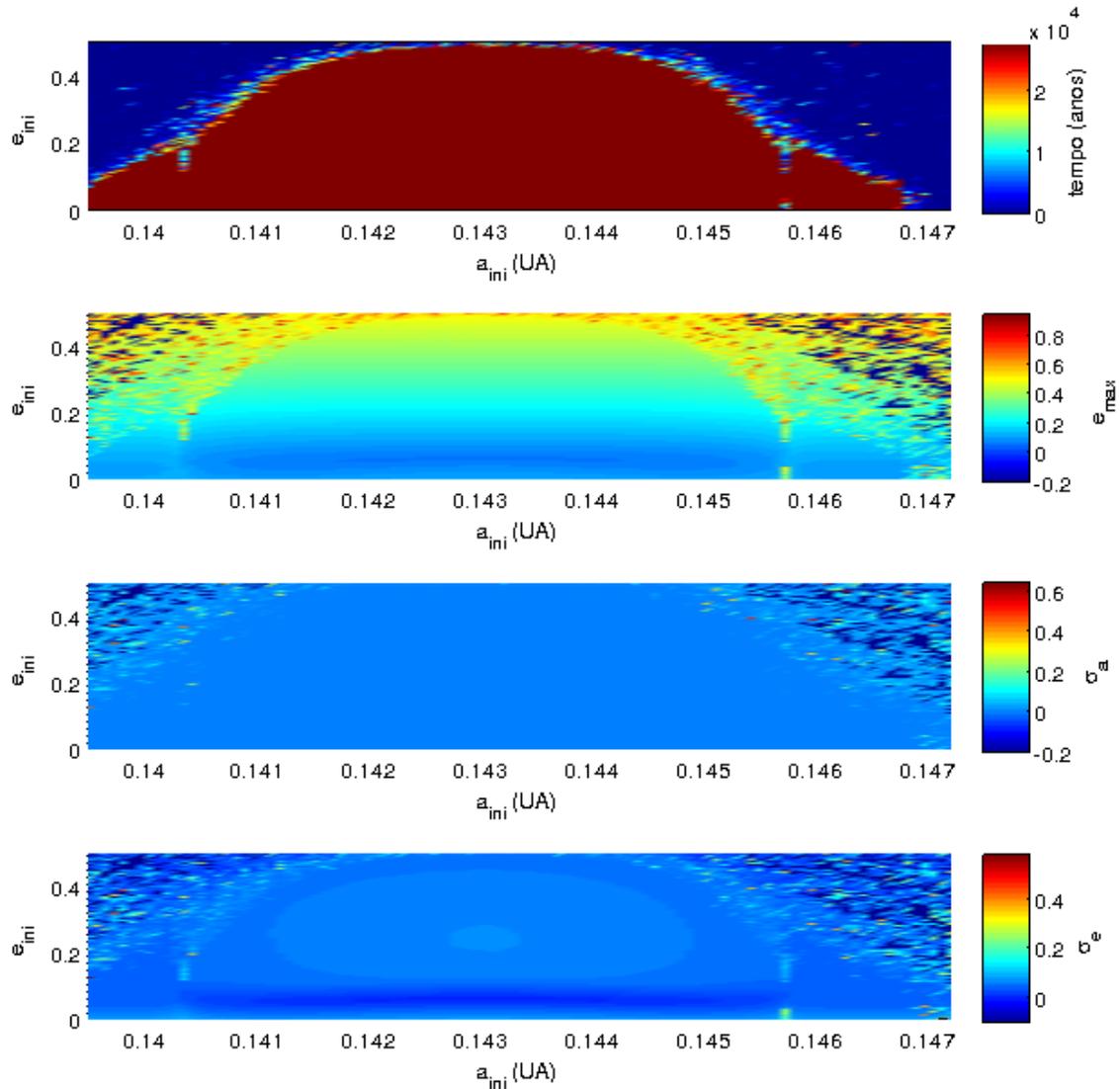


FIGURA 6.6: Mapas de cor para o tempo final, e_{\max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-9 b, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, considerando apenas Kepler-9 b (problema de três corpos restrito).

A seguir, analisamos o que acontece com os Troianos do planeta intermediário, isto é Kepler-9 b. Analisando a figura 6.6 notamos que existe uma grande região de movimento estável para os Troianos. É também apreciável a instabilidade das órbitas ao longo de duas faixas estreitas que se misturam com a borda da região estável. Estas faixas correspondem a uma ressonância secular na qual as frequências envolvidas são iguais a zero, já que neste caso a órbita de Kepler-9 b é fixa. A excentricidade máxima atingida pelos Troianos estáveis são próximas às suas excentricidades iniciais, e as regiões de movimento mais estável correspondem a excentricidades iniciais semelhantes às do planeta

Kepler-9 b (em cujo caso também se obtêm as menores variações nas excentricidades). As variações nos semieixos maiores dentro da região estável são pequenas.

Kepler9db_b

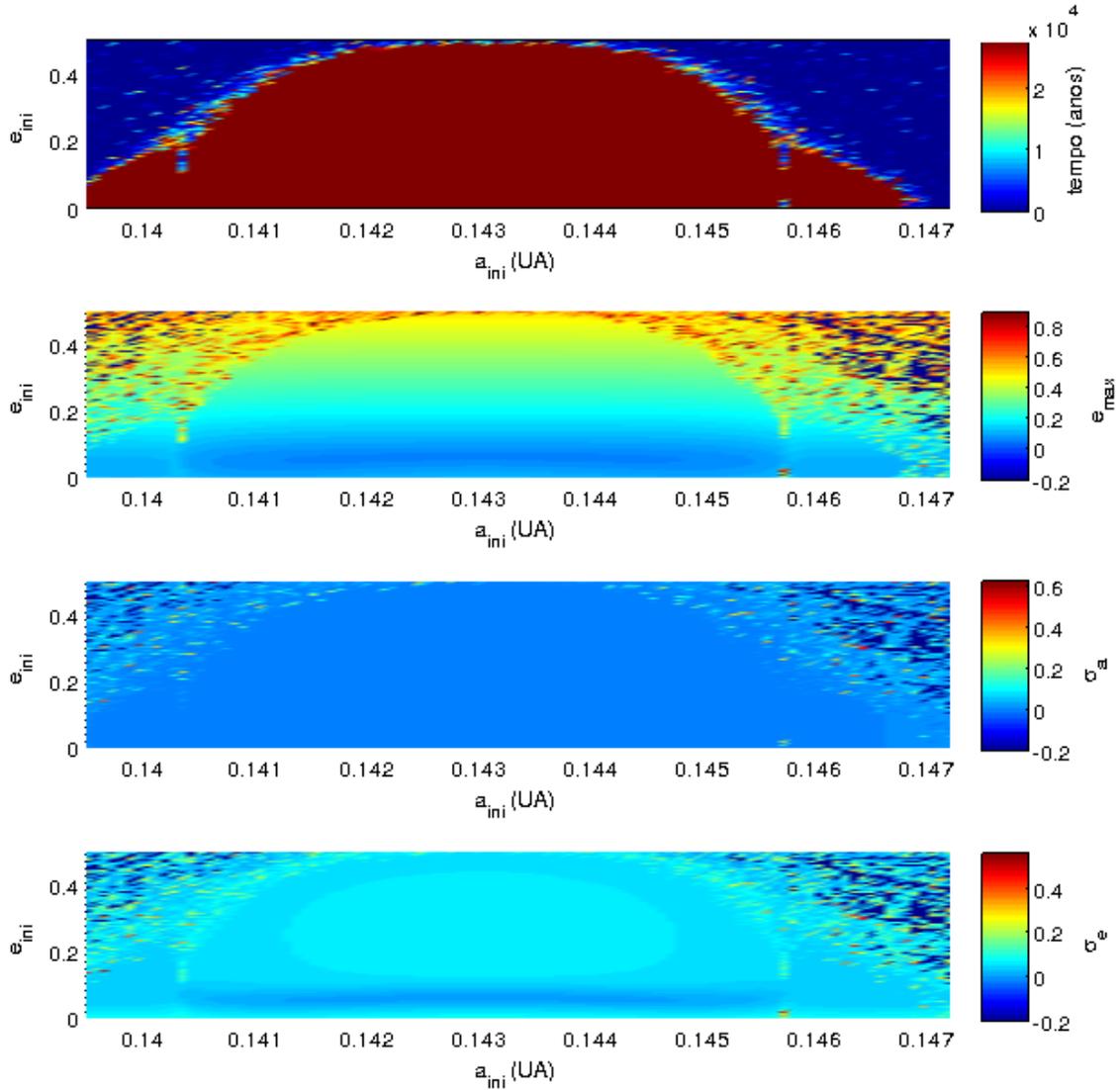


FIGURA 6.7: Mapas de cor para o tempo final, e_{max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-9 b, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, considerando também a perturbação do planeta Kepler-9 d.

Analisando a figura 6.7 notamos que a região de movimento estável em torno a L_4 é muito semelhante ao caso da figura 6.6, indicando que a influência do planeta menos massivo, Kepler-9 d, sobre os Troianos de Kepler-9 b, não é significativa pelo menos durante o tempo de integração.

Kepler9bc_b

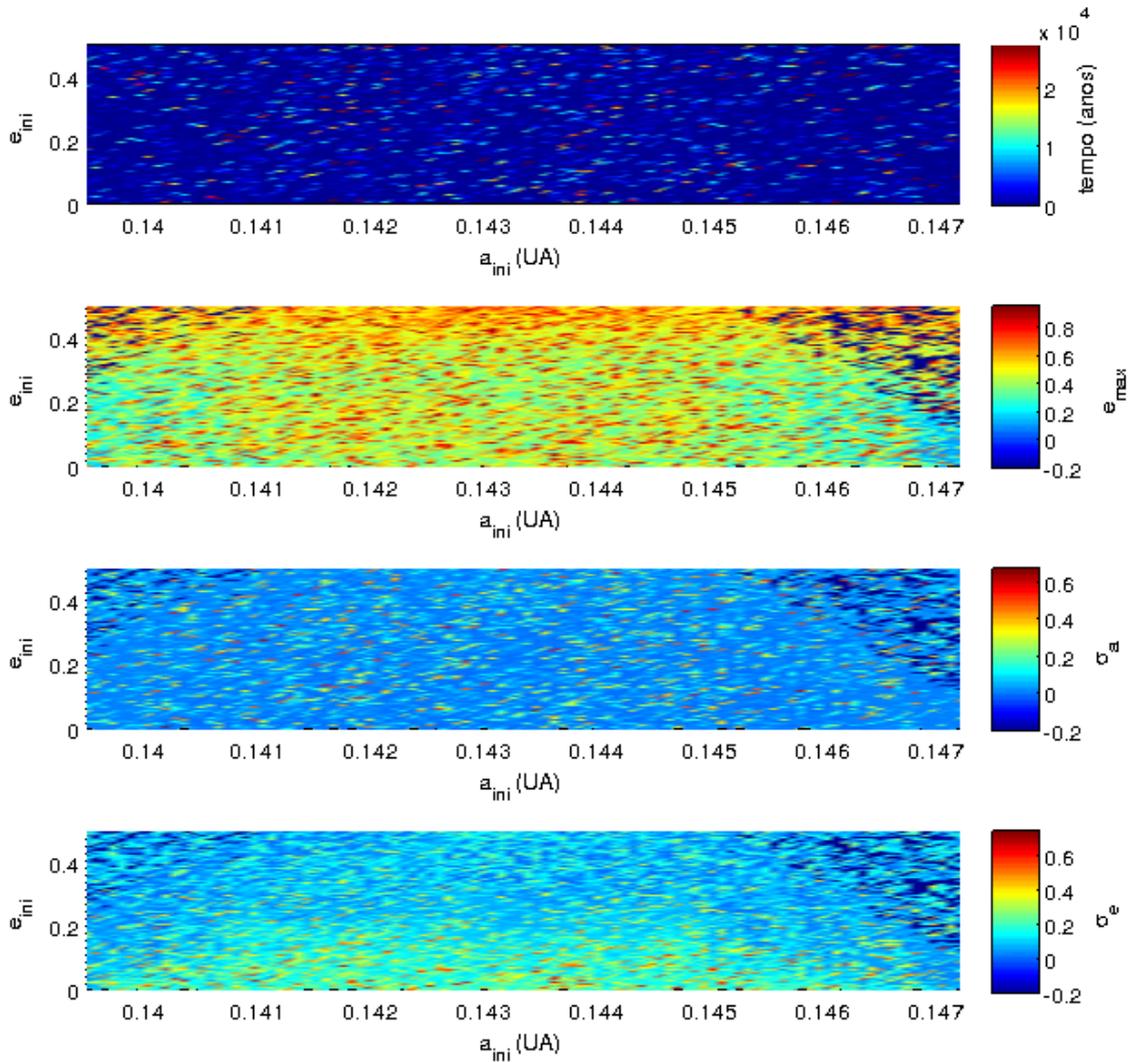


FIGURA 6.8: Mapas de cor para o tempo final, e_{max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-9 b, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, adicionando agora a perturbação do planeta Kepler-9 c apenas.

Analisando a figura 6.8 notamos agora que a ressonância de movimento médio 2:1 entre os planetas Kepler-9 b e Kepler-9 c, desestabiliza totalmente as órbitas dos Troianos em um intervalo de tempo relativamente curto, produzindo variações importantes nas excentricidades dos Troianos.

Kepler9dbc_b

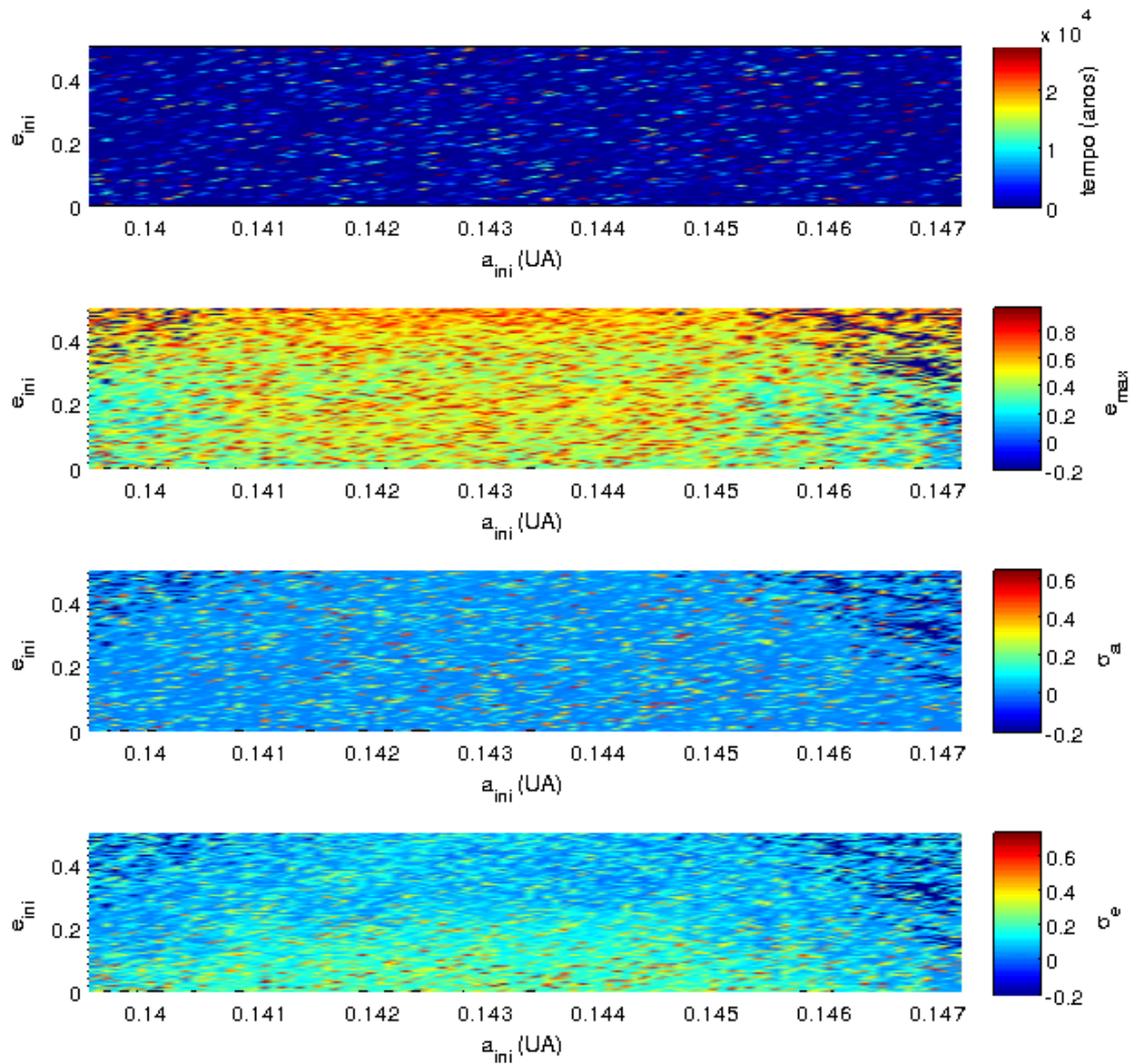


FIGURA 6.9: Mapas de cor para o tempo final, e_{\max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-9 b, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, considerando o efeito dos três planetas.

Como se mostra na figura 6.9, não existe nenhuma região de movimento estável de corpos co-orbitais de Kepler-9 b quando consideramos o sistema planetário completo, de forma semelhante ao encontrado na figura 6.8.

6.1.3 Caso 3

Kepler9c_c

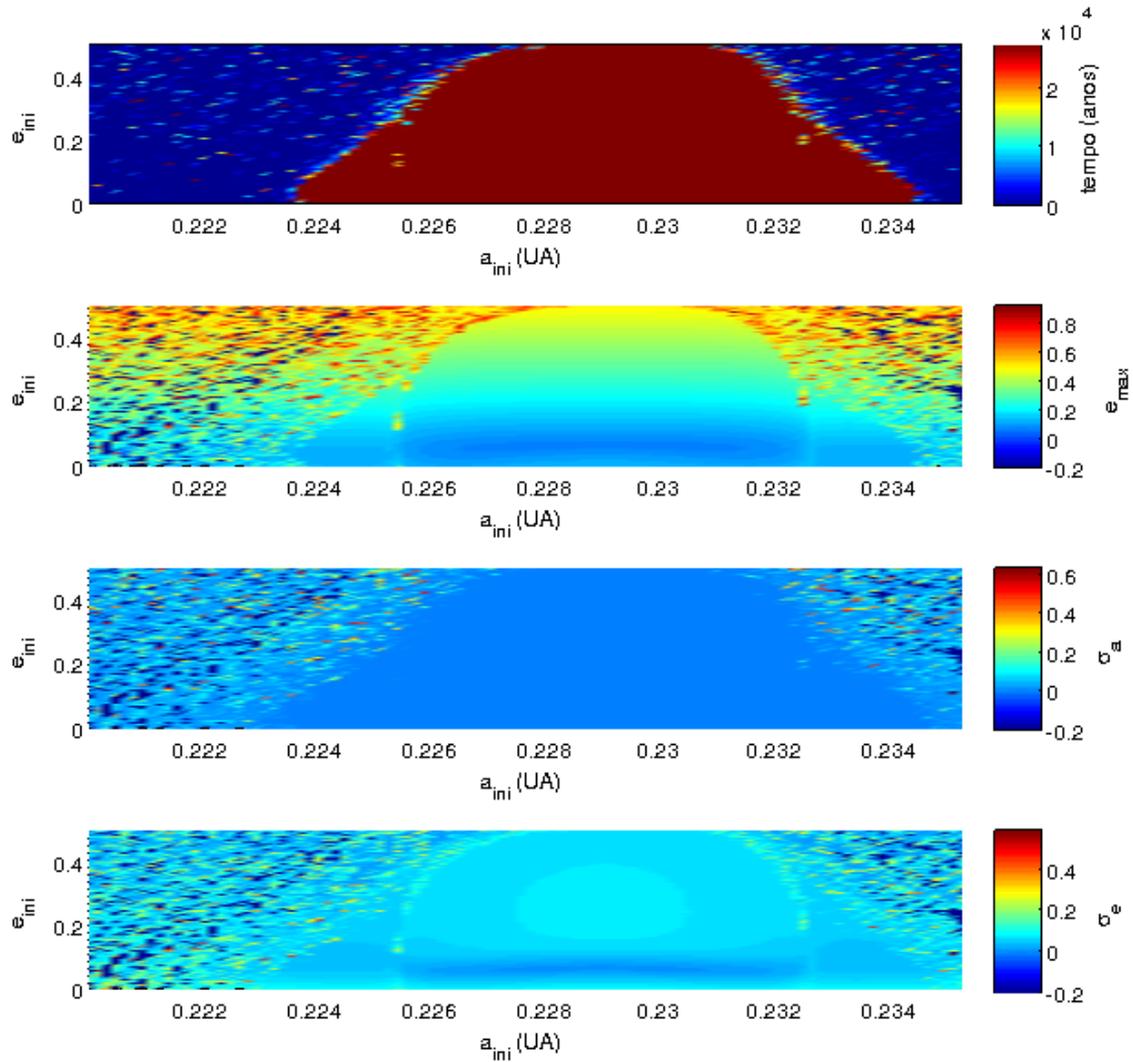


FIGURA 6.10: Mapas de cor para o tempo final, e_{\max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-9 c, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, considerando apenas Kepler-9 c (problema de três corpos restrito).

Finalmente, vamos a analisar a estabilidade dos Troianos do planeta mais externo, Kepler-9 c. Analisando a figura 6.10 notamos que existe uma região de movimento estável para os Troianos, de forma muito semelhante ao que acontecia com Kepler-9 b.

Kepler9bc_c

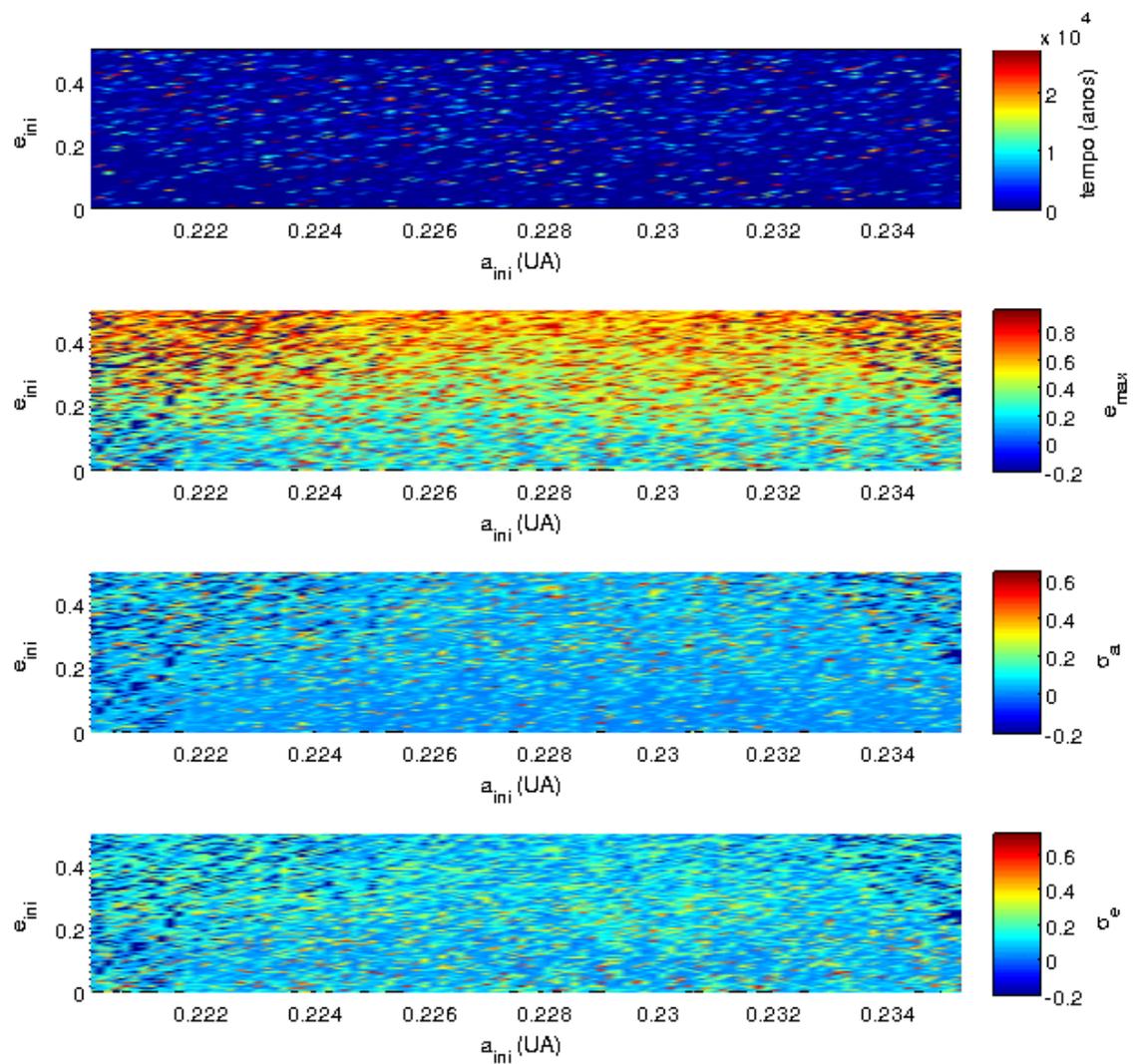


FIGURA 6.11: Mapas de cor para o tempo final, e_{\max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-9 c, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, considerando também a perturbação do planeta Kepler-9 b.

Já na figura 6.11 notamos que a ressonância de movimentos médios 2:1 entre Kepler-9 b e Kepler-9 c desestabiliza as órbitas dos Troianos em um intervalo curto de tempo.

Kepler9dc_c

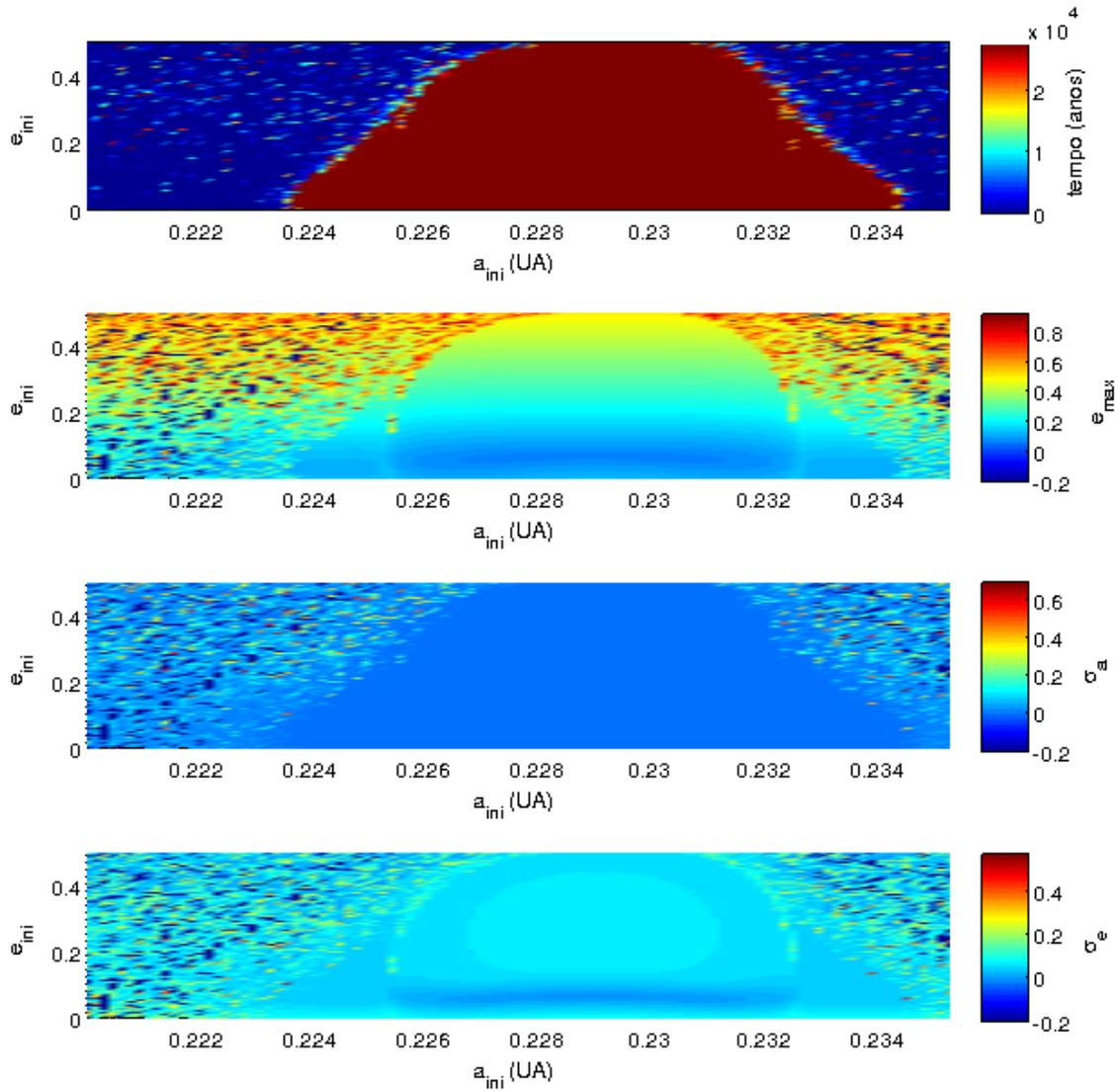


FIGURA 6.12: Mapas de cor para o tempo final, e_{max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-9 c, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, adicionando agora a perturbação do planeta Kepler-9 d.

Por outro lado, a figura 6.12 é semelhante à figura 6.10, e podemos então dizer que o efeito da super-Terra Kepler-9 d sobre este conjunto de Troianos é desprezível durante o tempo de integração.

Kepler9dbc_c

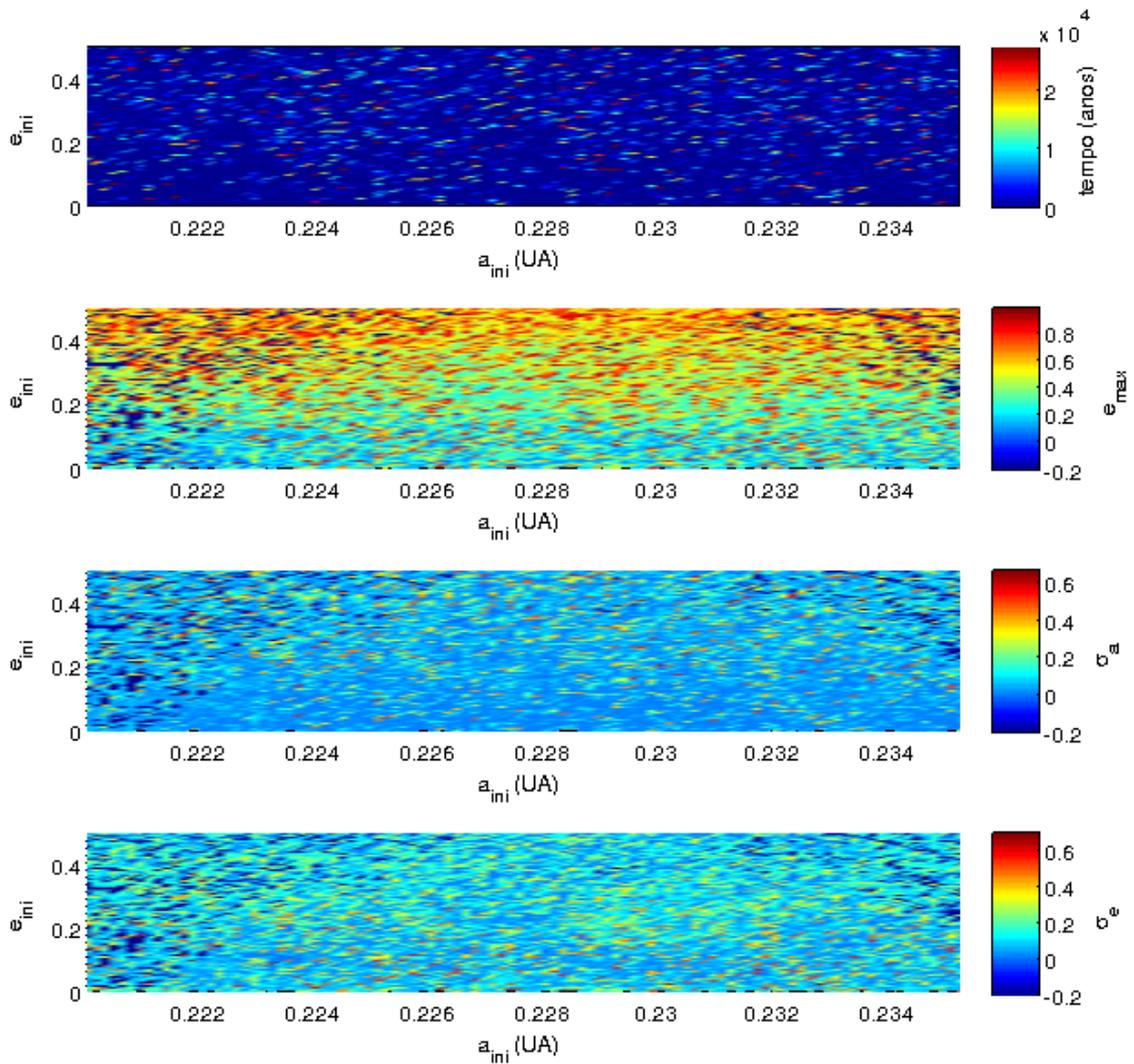


FIGURA 6.13: Mapas de cor para o tempo final, e_{\max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-9 c, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, considerando o efeito dos três planetas.

Finalmente, como mostra a figura 6.13, não existe nenhuma região de movimento estável para os Troianos de Kepler-9 c quando consideramos o sistema real composto pelos três planetas. Mais uma vez, isto é devido ao efeito da ressonância 2:1 entre Kepler-9 b e c.

6.2 Kepler-56 - Modelo 1

A análise do sistema planetário extra-solar Kepler-56 foi semelhante à realizada para o sistema Kepler-9, só que neste caso foram considerados dois modelos diferentes do sistema. O modelo 1 para Kepler-56, que analisamos a seguir, considera uma inclinação inicial de 90° para Kepler-56 d (ver tabela 5.3, capítulo 4). A simulação do sistema Kepler-56 foi realizada utilizando o integrador SyMBA durante 20 Ma, equivalente a 3.4×10^8 revoluções do planeta Kepler-56 c, e um passo igual a 1/20 do período orbital do planeta mais interno, isto é, 0.5 dias. Como se mostra na figura 6.14, este modelo do sistema Kepler-56 se mantém muito estável durante o tempo de integração tanto nos semieixos maiores, quanto nas excentricidades e inclinações.

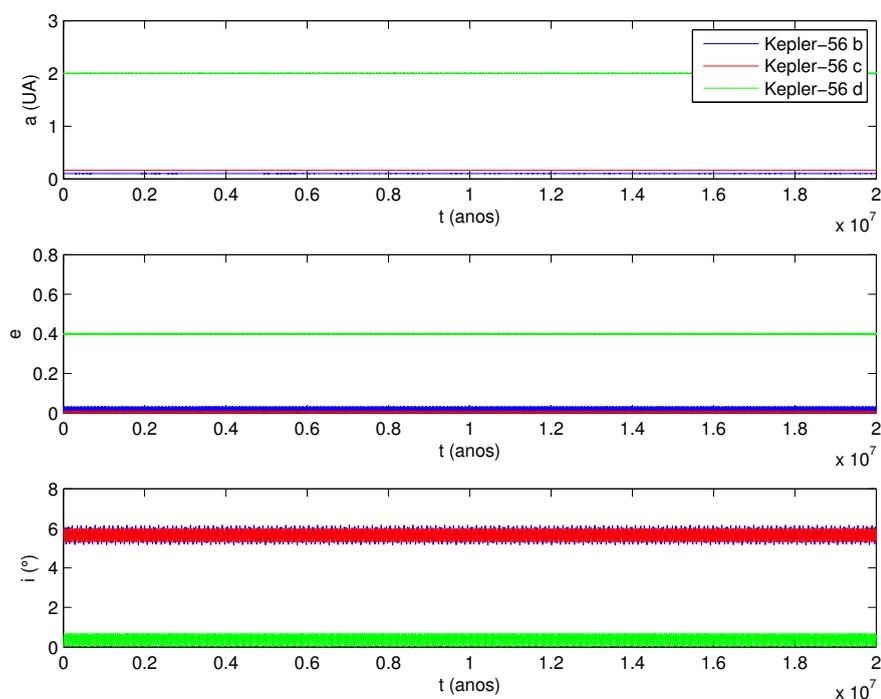


FIGURA 6.14: Evolução temporal do semieixo maior, excentricidade e inclinação dos planetas que formam o sistema Kepler-56 (modelo 1).

Como no caso de Kepler-9, dividimos o estudo de estabilidade dinâmica dos Troianos em várias configurações, considerando diferentes planetas de cada vez, que se mostram na tabela 6.2. Para estas integrações usamos o método RMVS, com um tempo de integração total de 100 milhões de dias (273 785 anos), um passo de 0.5 dias e um intervalo de tempo entre saídas de 10^4 dias. Cada simulação demorou aproximadamente 5 horas.

Casos	Configuração	\bar{a} (UA)	$\Delta\bar{a}_p$ (UA)
Caso 1 (Troianos na órbita interna)	Kepler56b_b Kepler56bc_b Kepler56bd_b Kepler56bcd_b	0.102749703496350	0.002550000
Caso 2 (Troianos na órbita intermediária)	Kepler56c_c Kepler56bc_c Kepler56cd_c Kepler56bcd_c	0.165166683815518	0.006333000
Caso 3 (Troianos na órbita externa)	Kepler56d_d Kepler56bd_d Kepler56cd_d Kepler56bcd_d	2.001283162166183	0.105143785

TABELA 6.2: Configurações consideradas para o estudo da estabilidade dinâmica de corpos Troianos no sistema Kepler-56 (modelo 1).

Kepler56b_b

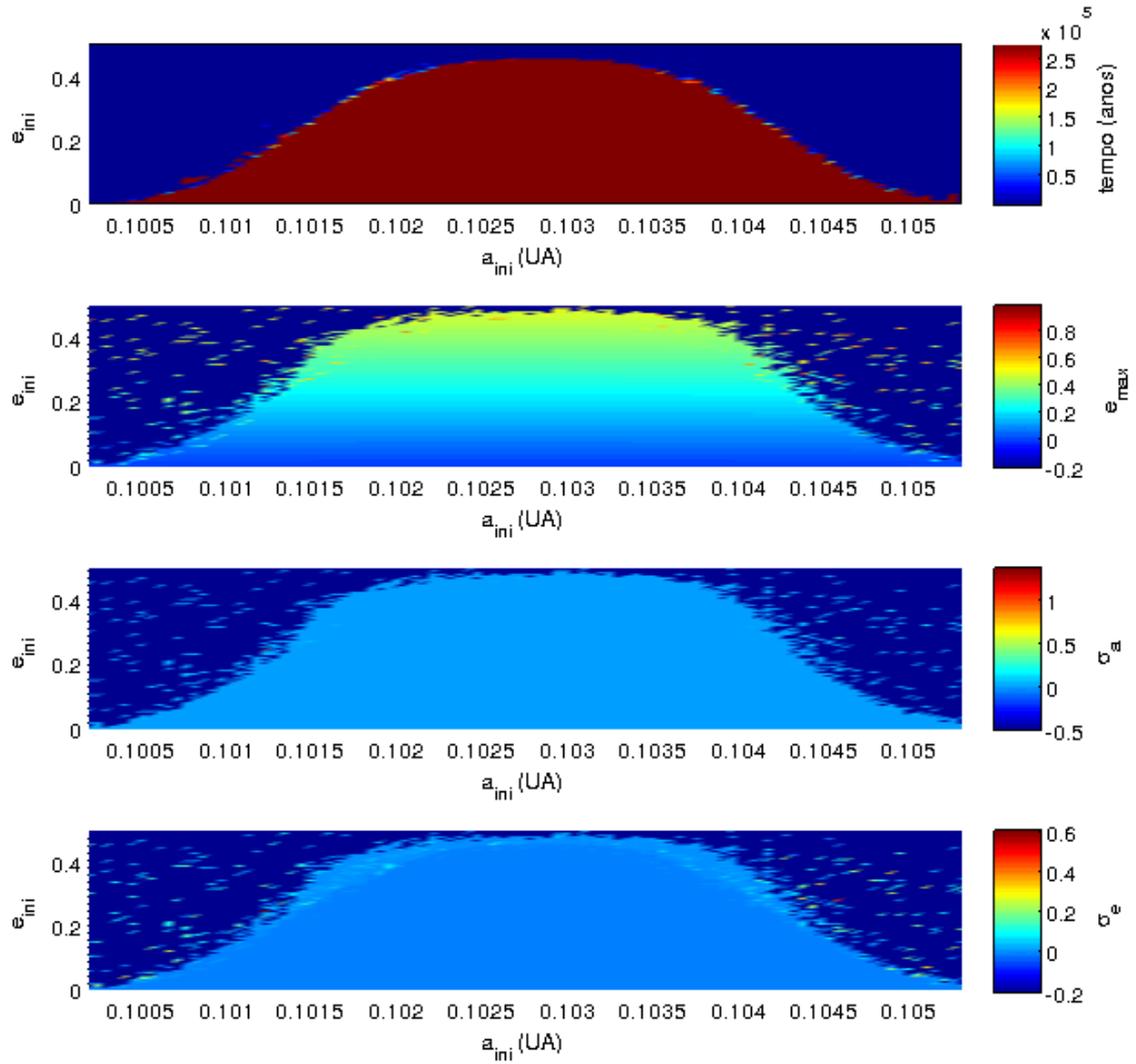


FIGURA 6.15: Mapas de cor para o tempo final, e_{max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-56 b, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, considerando apenas o planeta Kepler-56 b (problema restrito de três corpos).

Analisando a figura 6.15 notamos que existe uma grande região de estabilidade para os Troianos, apresentando pequenas variações dos semieixos maiores e excentricidades. As maiores excentricidades atingidas pelos Troianos estáveis durante a simulação são semelhantes às suas excentricidades iniciais.

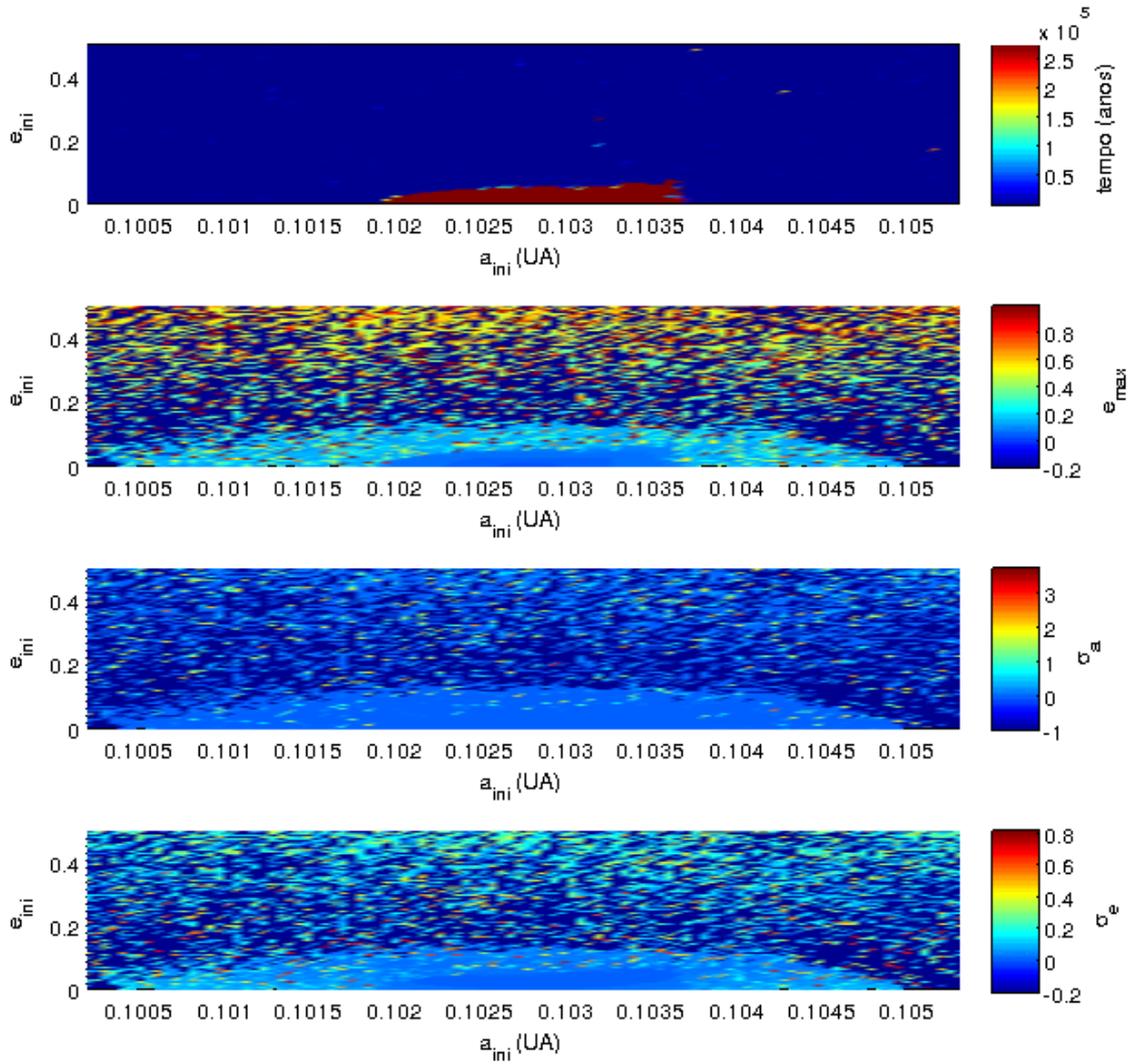
Kepler56bc_b


FIGURA 6.16: Mapas de cor para o tempo final, e_{max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-56 b, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, considerando também a perturbação do planeta Kepler-56 c.

Analisando a figura 6.16, notamos que a região de estabilidade diminui drasticamente quando se inclui o planeta Kepler-56 c, pois neste caso os Troianos experimentam uma quase ressonância 2:1 com este planeta. Esta ressonância tende a depletar a região em torno de L_4 causando altos valores de excentricidade máxima e grandes variações nos semieixos maiores dos Troianos.

Kepler56bd_b

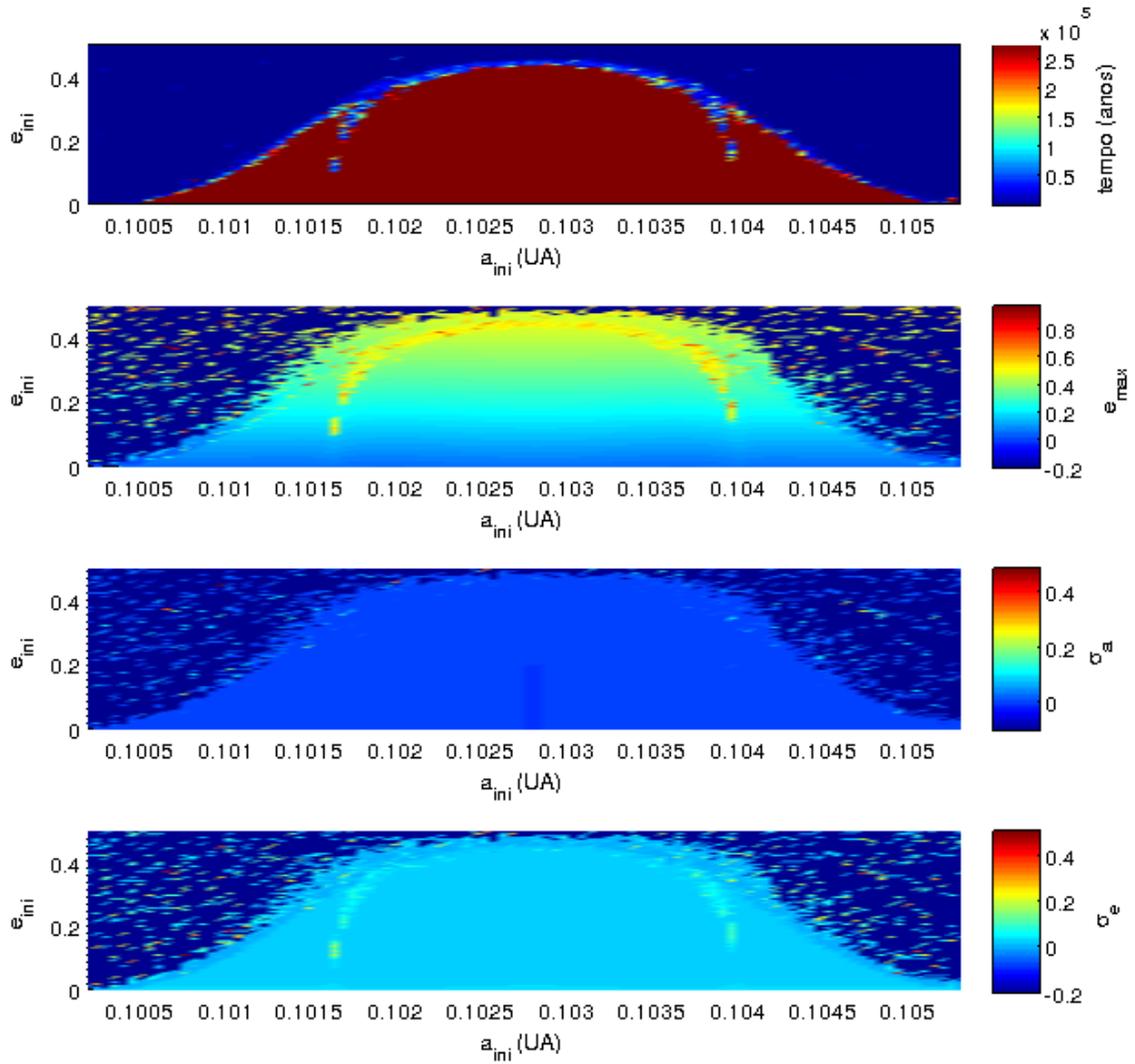


FIGURA 6.17: Mapas de cor para o tempo final, e_{max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-56 b, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, adicionando agora a perturbação do planeta Kepler-56 d.

Analisando a figura 6.17 notamos que a região de estabilidade é preservada exceto em uma faixa de instabilidade possivelmente vinculada a uma ressonância secular. No resto da região estável, as órbitas mantêm aproximadamente as suas excentricidades iniciais até o final da simulação, com pequenas variações no semieixo maior.

Kepler56bcd_b

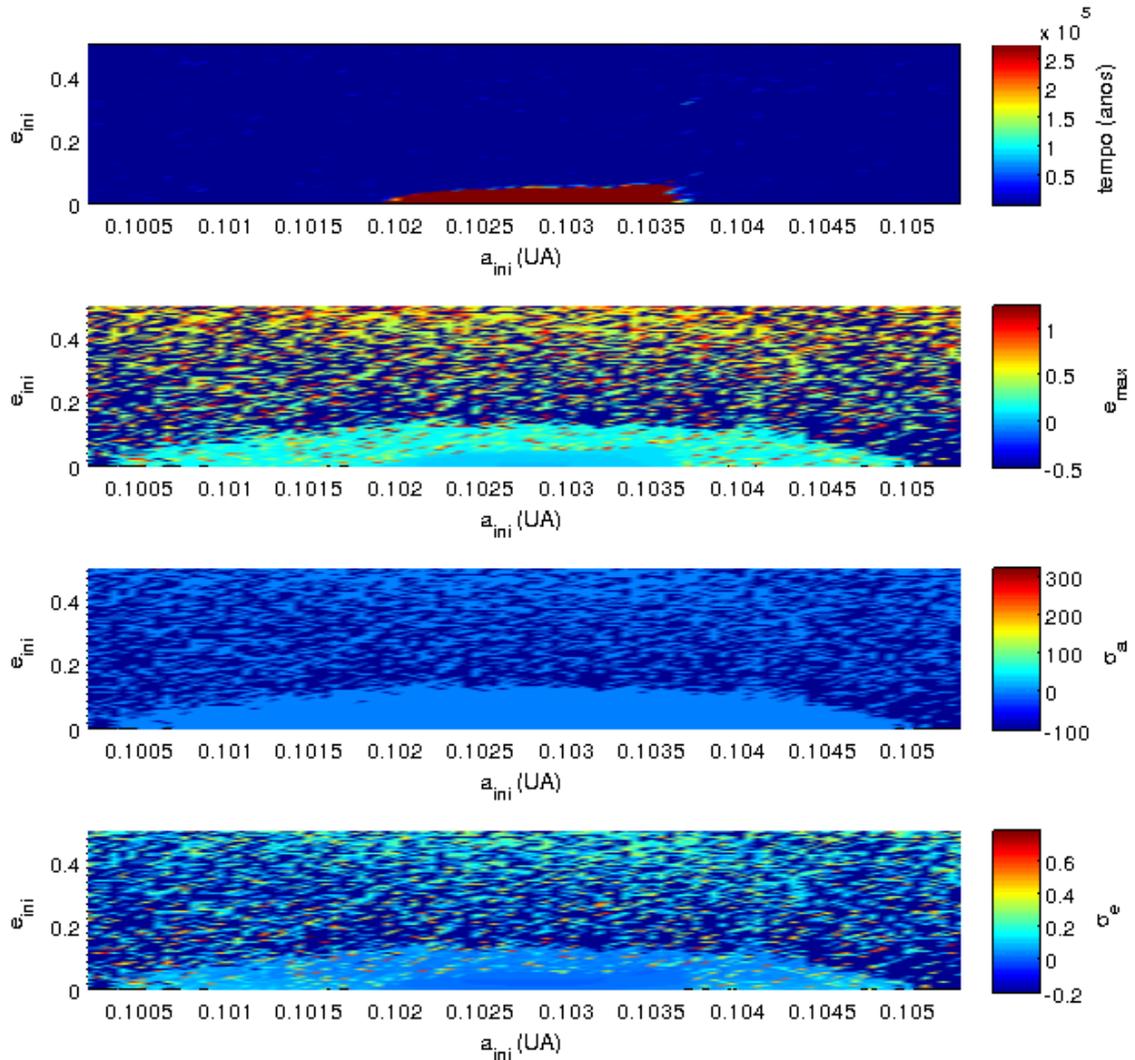


FIGURA 6.18: Mapas de cor para o tempo final, e_{\max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-56 b, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, considerando o efeito dos três planetas.

Finalmente, analisando a figura 6.18, notamos que o planeta Kepler-56 b só pode ter uma região de movimento co-orbita estável muito pequena devido à existência da quase ressonância 2:1 com o planeta Kepler-56 c.

De maneira análoga, considerando o sistema completo, se obtém uma região de estabilidade um pouco maior em comparação à da figura 6.18, para os Troianos do planeta Kepler-56 c. A presença do planeta mais massivo, Kepler-56 d, influencia as excentricidades dos Troianos dos planetas mais internos, no entanto, devido à sua grande distância não afeta significativamente o tamanho das regiões estáveis. As regiões co-orbitais estáveis dos planetas mais internos são significativamente reduzidas devido principalmente à quase ressonância de movimentos médios 2:1 entre estes planetas.

Por outro lado, a região de estabilidade co-orbital do planeta Kepler-56 d, o mais massivo e o mais distante, considerando-se o sistema planetário completo, resulta ser também muito pequena. Neste caso as órbitas dos Troianos mais estáveis ocorrem quando a excentricidade inicial do Troiano é igual à excentricidade de Kepler-56 d.

6.3 Kepler-56 - Modelo 2

O segundo modelo considerado para o sistema Kepler-56, assume uma inclinação inicial de $59,02^\circ$ para Kepler-56 d (ver tabela 5.3, Capítulo 4). A integração deste modelo 2 foi realizada utilizando o integrador SyMBA durante 20 Ma e com um passo de 0.5 dias. Como se mostra na figura 6.19, tanto os semieixos maiores quanto as excentricidades dos planetas permanecem quase constantes durante o tempo de integração, enquanto que a inclinação dos planetas quase coplanares, Kepler-56 b e Kepler-56 c, varia amplamente em torno à inclinação do planeta mais distante, Kepler-56 d, cuja inclinação por sua vez se mantém praticamente constante. As órbitas dos planetas Kepler-56 b e Kepler-56 c permanecem coplanares devido ao forte acoplamento entre as mesmas, e o sistema como um todo resulta ser estável.

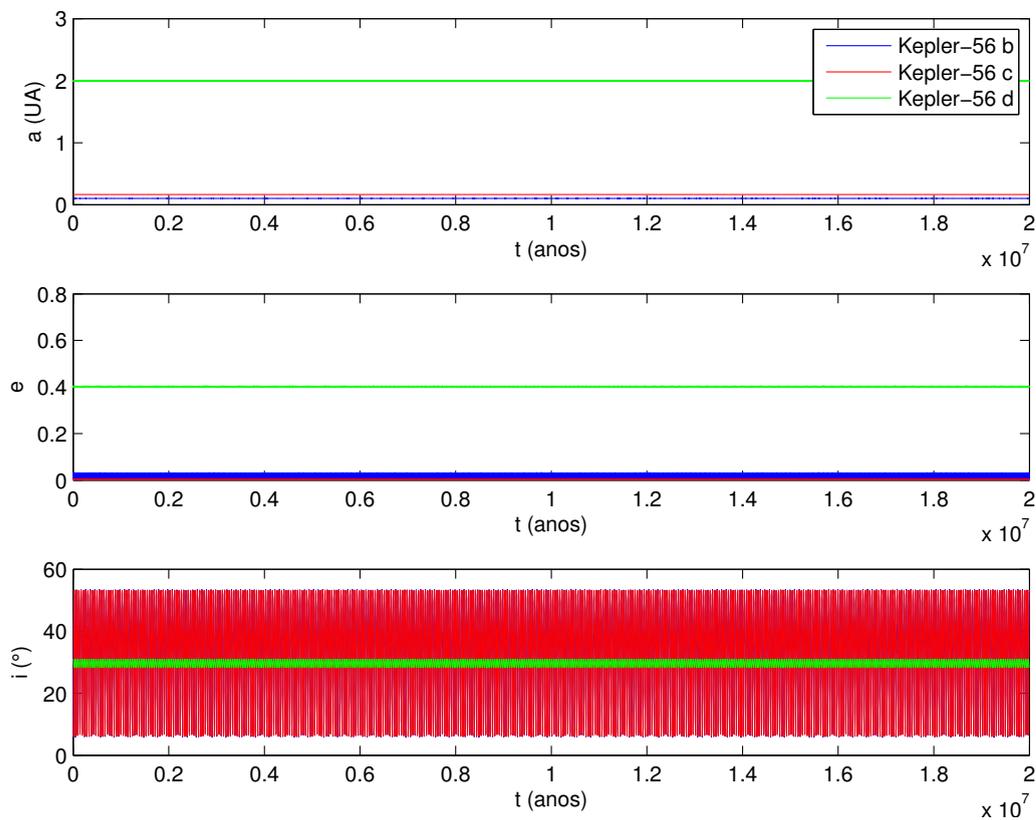


FIGURA 6.19: Evolução temporal do semieixo maior, excentricidade e inclinação dos planetas que formam o sistema Kepler-56 (modelo 2).

As condições iniciais das diferentes configurações estudadas neste modelo se apresentam na tabela 6.3.

Casos	Configuração	\bar{a} (UA)	$\Delta\bar{a}_p$ (UA)
Caso 1 (Troianos na órbita interna)	Kepler56b_b Kepler56bc_b Kepler56bd_b Kepler56bcd_b	0.102753534009399	0.002550000
Caso 2 (Troianos na órbita intermediária)	Kepler56c_c Kepler56bc_c Kepler56cd_c Kepler56bcd_c	0.165162977011099	0.006333000
Caso 3 (Troianos na órbita externa)	Kepler56d_d Kepler56bd_d Kepler56cd_d Kepler56bcd_d	1.995730057619242	0.101599695

TABELA 6.3: Configurações consideradas para o estudo da estabilidade dinâmica de corpos Troianos no sistema Kepler-56 (modelo 2).

Kepler56c_c

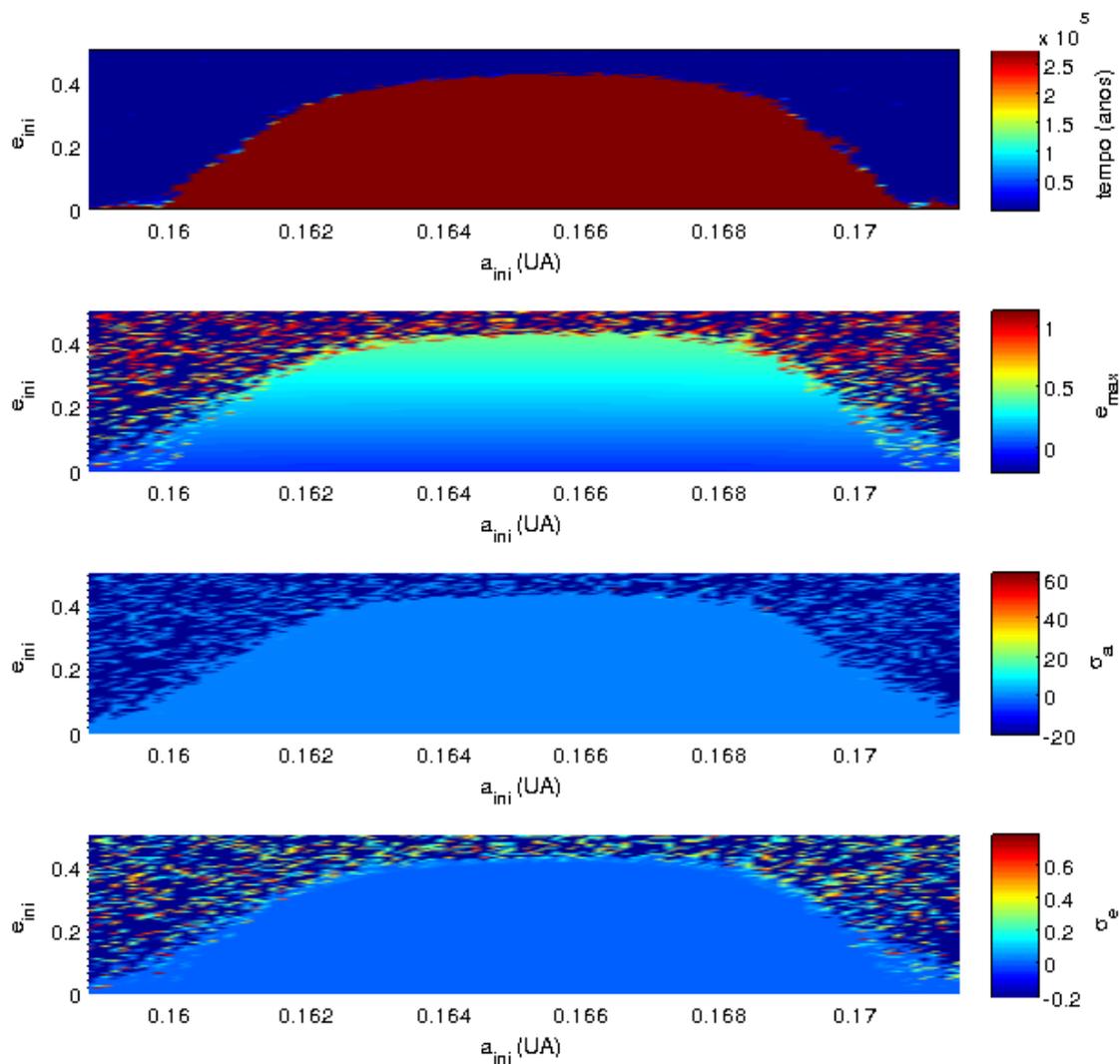


FIGURA 6.20: Mapas de cor para o tempo final, e_{\max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-56 c, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, considerando apenas o planeta Kepler-56 c (problema restrito de três corpos).

Analisando a figura 6.20 notamos que existe uma grande região de estabilidade para os Troianos, onde as excentricidades máximas atingidas são semelhantes às excentricidades iniciais de suas órbitas. Nesta região estável, tanto as variações nos semieixos maiores quanto nas excentricidades são pequenas.

Kepler56bc_c

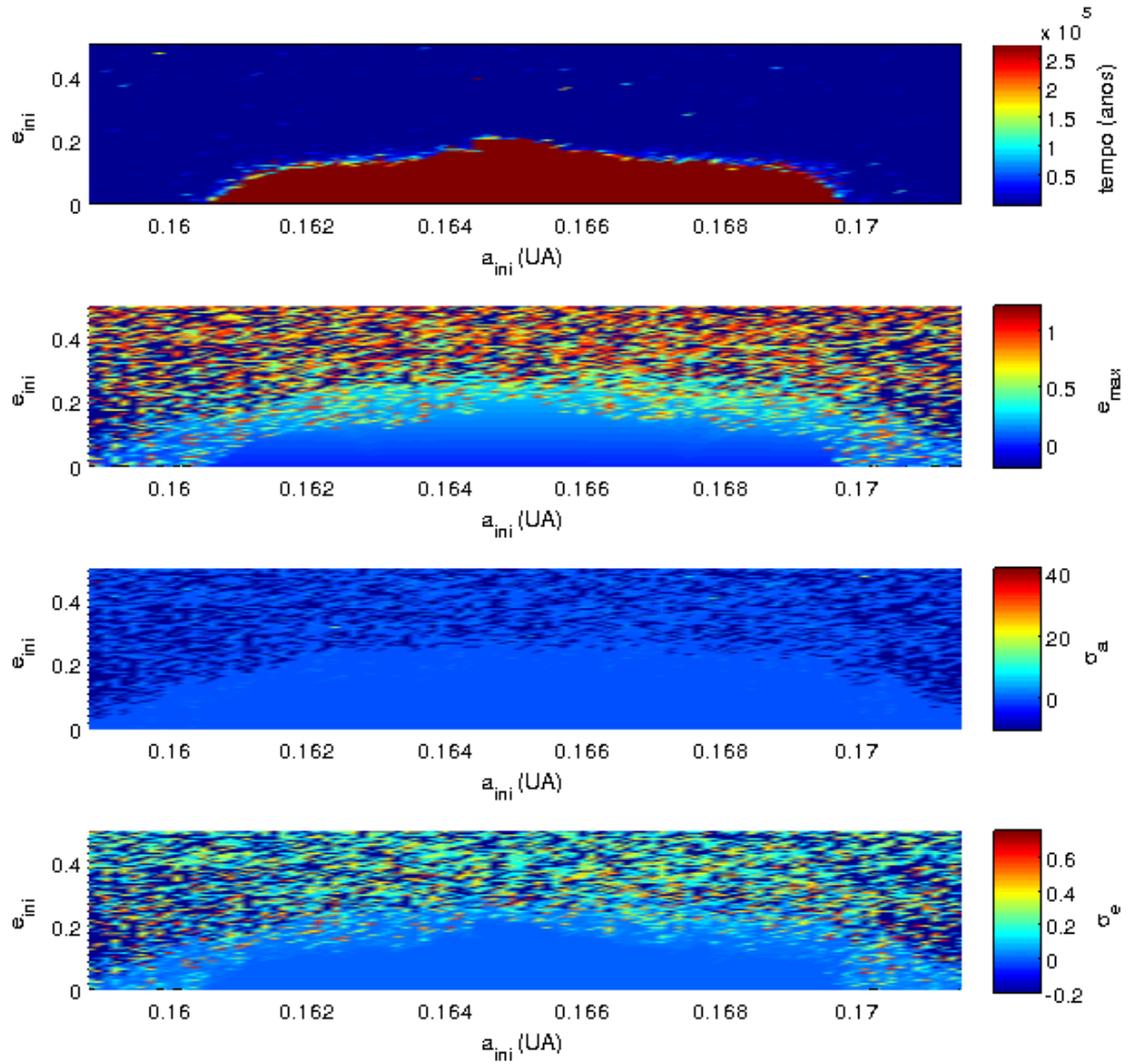


FIGURA 6.21: Mapas de cor para o tempo final, e_{max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-56 c, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, considerando também a perturbação do planeta Kepler-56 b.

Analisando a figura 6.21, notamos que agora a região de estabilidade diminuiu devido à quase comensurabilidade de períodos orbitais entre os planetas Kepler-56 b e Kepler-56 c, o que também causou um aumento considerável nas excentricidades dos Troianos.

Kepler56cd_c

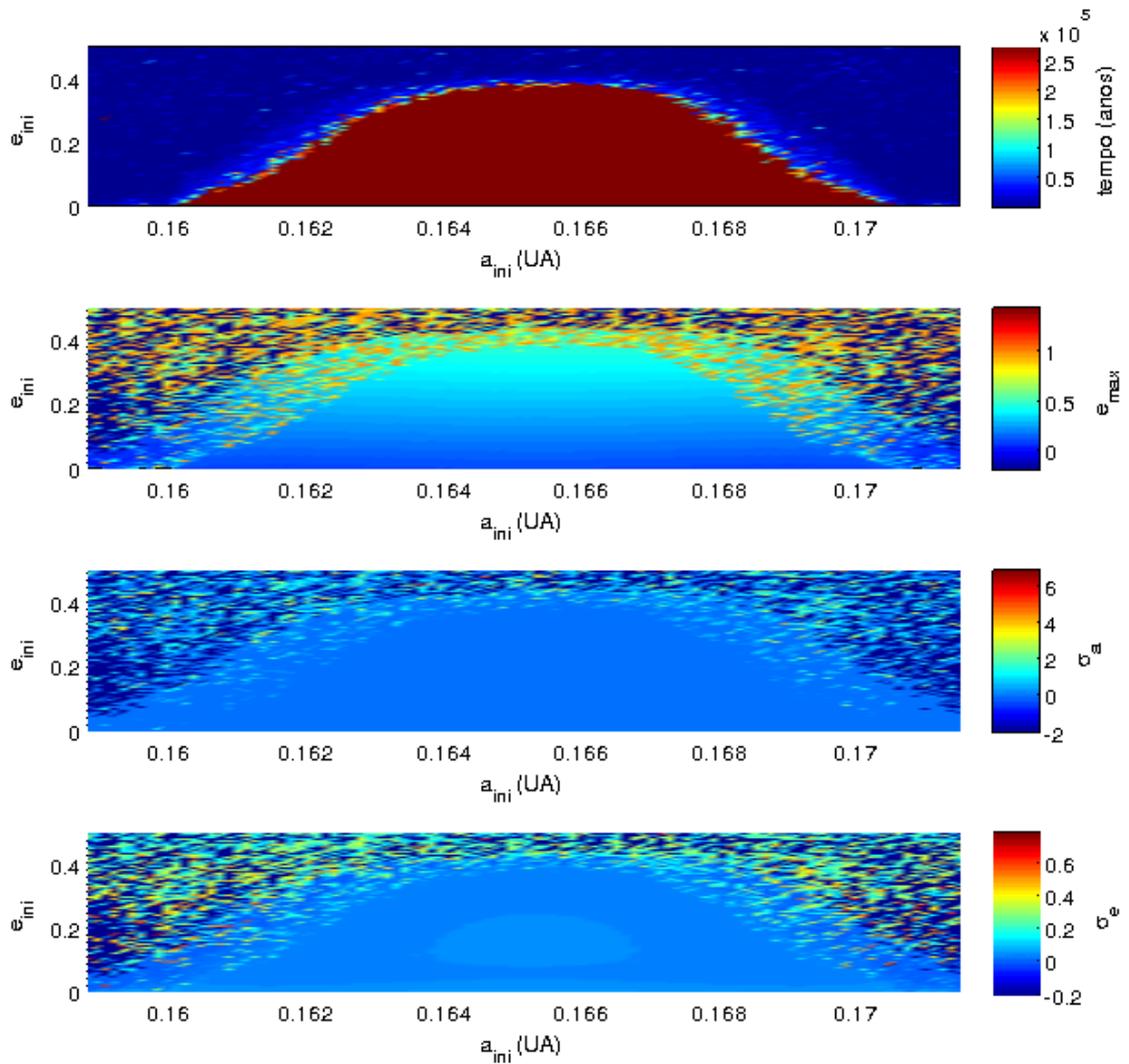


FIGURA 6.22: Mapas de cor para o tempo final, e_{max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-56 c, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, adicionando agora a perturbação do planeta Kepler-56 d.

Analisando a figura 6.22, notamos que ao considerar a perturbação do planeta mais massivo do sistema, Kepler-56 d, a região de estabilidade dos Troianos de Kepler-56 c é bastante extensa, porém notoriamente menor que no caso da figura 6.20.

Kepler56bcd_c

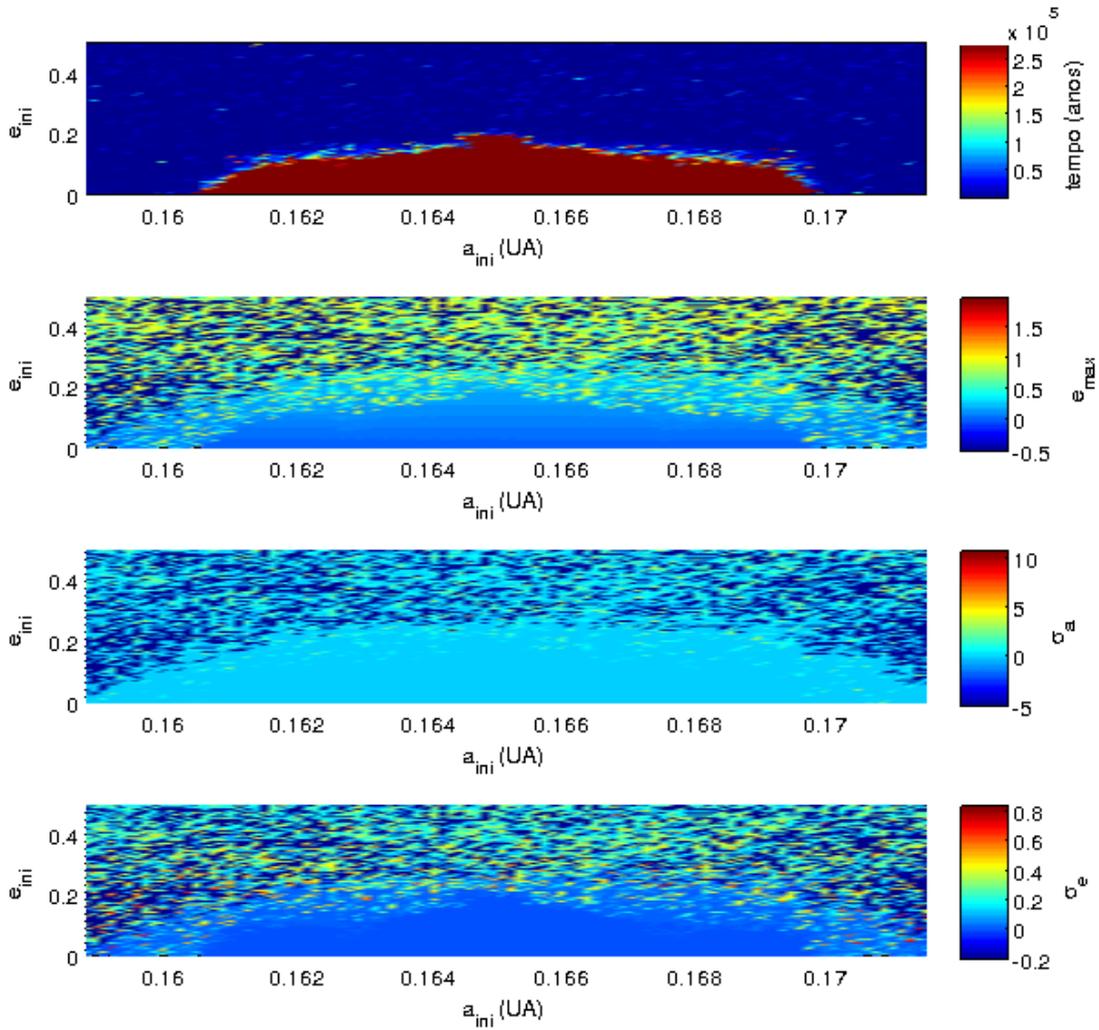


FIGURA 6.23: Mapas de cor para o tempo final, e_{\max} , σ_a e σ_e dos Troianos de Kepler-56 c, em função da excentricidade inicial e semieixo maior inicial, considerando o efeito dos três planetas.

Finalmente, analisando a figura 6.23, notamos que a região de estabilidade para os Troianos de Kepler-56 c, possui um tamanho moderado mas é sensivelmente reduzida devido à ressonância 2:1 entre Kepler-56 b e c. Não foram observados padrões que pudessem ser identificados com a presença de ressonâncias seculares.

Em termos gerais, os gráficos das regiões estáveis em todas as configurações estudadas são semelhantes entre os dois modelos do sistema Kepler-56.

Capítulo 7

Conclusões

Mediante simulações numéricas utilizando integradores simpléticos, com tempos totais de integração de 10 milhões de dias para o sistema Kepler-9 e de 100 milhões de dias para o sistema Kepler-56, determinamos a probabilidade de existência de corpos Troianos nos planetas dos sistemas extra-solares Kepler-9 e Kepler-56, a partir de estudos dinâmicos. No nosso estudo, estes Troianos são tratados como partículas de teste, sem massa, localizadas nos pontos de equilíbrio de Lagrange L_4 de cada planeta.

Se consideramos que o caso restrito de três corpos corresponde a uma probabilidade de existência do 100% para um planeta Troiano, concluímos que:

- Em relação ao sistema Kepler-9, a probabilidade da existência de um corpo Troiano seria aproximadamente do 100% apenas no caso da órbita do planeta Kepler-9 d.
- Em relação ao sistema Kepler-56, a existência de um corpo Troiano é quase improvável na órbita do planeta Kepler-56 b, a probabilidade é de aproximadamente 40% na órbita do planeta Kepler-56 c e de aproximadamente 100% na órbita do planeta Kepler-56 d,

Nossos resultados mostram que o tamanho das regiões de estabilidade dos Troianos nos dois sistemas são fundamentalmente determinadas pela existência da ressonância de movimentos médios 2:1 entre dois dos três planetas que formam cada sistema. Assim, se o Troiano de um dos planetas se encontra em ressonância 2:1 com qualquer um dos outros planetas que compõem o sistema, a região de estabilidade é menor, chegando em alguns casos a não existir. Caso contrário, a região de estabilidade é extensa e a existência de um possível corpo Troiano é sempre viável.

Nossas simulações também mostraram o seguinte:

- Como encontrado por outros autores, um corpo Troiano escapará da configuração co-orbital se sua excentricidade inicial for ≥ 0.5 .
- A região de movimento mais estável se obtém quando a excentricidade inicial do Troiano é próxima à excentricidade do planeta co-orbital.
- Os Troianos que cruzam os limites da zona de estabilidade pouco tempo após de ter iniciado a simulação são aqueles que têm excentricidades iniciais altas e semieixos maiores iniciais mais distantes do valor do semieixo maior médio do planeta co-orbital (\bar{a}_p).
- As perturbações dos planetas que formam os dois sistemas estudados comprometem a estabilidade dinâmica dos Troianos. Claramente este efeito seria mais acentuado se existissem nestes sistemas planetas adicionais ainda não detectados.
- A presença de ressonâncias seculares leva a uma maior instabilidade orbital em determinadas zonas dentro da região de movimento co-orbital mais estável.
- Em relação ao sistema Kepler-56, as simulações mostram que as diferentes inclinações iniciais consideradas para Kepler-56 d (90° e 59.02°) não modificam as regiões de estabilidade dos Troianos de qualquer um dos três planetas.

Nosso estudo mostra que a existência de corpos Troianos é possível mesmo em sistemas planetários com múltiplos planetas em órbitas compactas. Para ampliar este estudo, entretanto, precisaríamos aumentar o tempo de integração total até 1 Ma (tempo semelhante ao utilizado em outros artigos, por exemplo, [Dvorak et al. \[2008\]](#)) para corroborar se as regiões de estabilidade continuam preservadas a mais longo prazo, especialmente no caso do sistema Kepler-56. Além disso, seria necessário verificar como muda (e se de fato muda) a estabilidade dos Troianos ao considerar corpos massivos ao invés de partículas de teste. No caso do sistema Kepler-9 se poderia realizar uma melhor análise das partículas de teste em ressonância secular, mostrando a evolução de algumas delas em um gráfico de longitude do pericentro versus tempo. Seria também interessante estudar sistemas de dois ou três planetas que não estão em RMM e sistemas de dois ou três planetas que estão em RMM diferente à 2:1.

Apêndice A

Código: Elementos Orbitais a Posições e Velocidades Astrocêntricas

O seguinte código transforma elementos orbitais a posições e velocidades astrocêntricas, e foi desenvolvido em C++ usando como referência as equações do capítulo 3 do livro de [Fitzpatrick \[1970\]](#) e as equações de transformação do plano orbital em relação a um sistema de referência fixo.

```
#include <iostream>
#include <math.h>
using namespace std;
/* Função que calcula o seno de um ângulo */
double s(double angle)
{
    double x;
    const double pi=3.141592653589793;
    int nper;
    // Reduzimos o ângulo a faixa de 0 a 2pi
    nper= angle/(2*pi);
    x=angle-nper*(2*pi);
    if (x<0.0)
        x=x+2.0*pi;
    return sin(x);
}
/* Função que calcula o coseno de um ângulo */
double c(double x)
{
    double sx,cx;
    const double pi=3.141592653589793;
    sx=s(x);
```

```

    cx=sqrt(1.0-pow(sx,2.0));
    if ((x>pi/2.0) & (x<3.0*pi/2.0))
        cx=-cx;
    return cx;
}
/* Função que calcula a anomalia excêntrica, E, de uma elipse (M=anomalia média) */
double EqKepler1(double e,double M)
{
    int iflag,nper,niter,NMAX;
    const double pi=3.141592653589793;
    double sM,cM,x,esx,ecx,f,fp,fpp,fppp,dx,E,esxM,ecxM;
    if (e<0.18)
    // Para uma rapidez e precisão suficiente
    {
        sM=s(M);
        cM=c(M);
        x=M+e*sM*(1.0+e*(cM+e*(1.0-1.5*pow(sM,2.0))));
        esx=e*s(x);
        ecx=e*c(x);
        f=x-esx-M;
        fp=1.0-ecx;
        fpp=esx;
        fppp=ecx;
        dx=-f/fp;
        dx=-f/(fp+dx*fpp/2.0);
        dx=-f/(fp+dx*fpp/2.0+pow(dx,2.0)*fppp/6.0);
        E=x+dx;
    }
    else
    {
        if (e<=0.8)
        {
            sM=s(M);
            cM=c(M);
            x=M+e*sM*(1.0+e*(cM+e*(1.0-1.5*pow(sM,2.0))));
            esx=e*s(x);
            ecx=e*c(x);
            f=x-esx-M;
            fp=1.0-ecx;
            fpp=esx;
            fppp=ecx;
            dx=-f/fp;
            dx=-f/(fp+dx*fpp/2.0);
            dx=-f/(fp+dx*fpp/2.0+pow(dx,2.0)*fppp/6.0);
            E=x+dx;
            // Fazer outra iteração
            x=E;
            esx=e*s(x);

```

```

    ecx=e*c(x);
    f=x-esx-M;
    fp=1.0-ecx;
    fpp=esx;
    fppp=ecx;
    dx=-f/fp;
    dx=-f/(fp+dx*fpp/2.0);
    dx=-f/(fp+dx*fpp/2.0+pow(dx,2.0)*fppp/6.0);
    E=x+dx;
}
else
// e>0.8 Este pode não convergir suficientemente rápido
{
    // Modificamos M de modo que E e M estejam na faixa de 0 a 2pi. Se M está
    // entre pi e 2pi resolvemos para 2pi-M e usamos simetria para retornar a
    // resposta certa
    iflag=0;
    nper=M/(2*pi);
    M=M-nper*(2*pi);
    if (M<0.0)
        M=M+2.0*pi;
    if (M>pi)
    {
        M=2.0*pi-M;
        iflag=1;
    }
    x=pow(6.0*M,1.0/3.0)-M;
    NMAX=3;
    for(niter=1;niter<=NMAX;niter++)
    {
        esxM=e*s(x+M);
        ecxM=e*c(x+M);
        f=x-esxM;
        fp=1.0-ecxM;
        dx=-f/fp;
        dx=-f/(fp+0.5*dx*esxM);
        dx=-f/(fp+0.5*dx*(esxM+0.3333333333333333*ecxM*dx));
        x=x+dx;
    }
    E=M+x;
    if (iflag==1)
    {
        E=2.0*pi-E;
        M=2.0*pi-M;
    }
}
}
return E;

```

```

}
int main()
{
    double a,e,i,w,W,M,gM; //Entradas
    double cw,sw,cW,sW,ci,si,D11,D12,D13,D21,D22,D23; //Internos
    double E,cE,sE,Z,F,shF,chF,sqe,sqgMa,xfac1,xfac2,ri,vfac1,vfac2; //Internos
    double x,y,z,vx,vy,vz; //Saídas
    const double pi=3.141592653589793;
    //***** Dados de Entrada *****
    /*
    a: semieixo maior em UA
    e: excentricidade
    i: inclinação
    w: argumento do periélio
    W: longitude do nó ascendente
    M: anomalia média
    gM: g vezes a massa central. g=1 e 1 massa solar=pow(0.01720209895,2)
    Todos os ângulos deverão estar em radianos para a execução do código
    */
    a=2.0;
    e=0.4;
    i=0.0*pi/180.0;
    w=0.0*pi/180.0;
    W=0.0*pi/180.0;
    M=210.0*pi/180.0;
    gM=1.32*pow(0.01720209895,2);
    //*****
    // Calculando senos e cosenos de "w", "W" e "i" por funções
    sw=s(w);
    cw=c(w);
    sW=s(W);
    cW=c(W);
    si=s(i);
    ci=c(i);
    // Gerando matrizes de rotação
    D11=cw*cW-sw*sW*ci;
    D12=cw*sW+sw*cW*ci;
    D13=sw*si;
    D21=-sw*cW-cw*sW*ci;
    D22=-sw*sW+cw*cW*ci;
    D23=cw*si;
    // Caso Elipse
    E=EqKepler1(e,M);
    sE=s(E);
    cE=c(E);
    sqe=sqrt(1.0-pow(e,2));
    sqgMa=sqrt(gM*a);
    xfac1=a*(cE-e);

```

```
    xfac2=a*sque*sE;
    ri=pow(a*(1.0-e*cE),-1);
    vfac1=-ri*sqgMa*sE;
    vfac2=ri*sqgMa*sque*cE;
// Conversão
x=D11*xfac1+D21*xfac2;
y=D12*xfac1+D22*xfac2;
z=D13*xfac1+D23*xfac2;
vx=D11*vfac1+D21*vfac2;
vy=D12*vfac1+D22*vfac2;
vz=D13*vfac1+D23*vfac2;
cout<<"x= "<<x<<endl;
cout<<"y= "<<y<<endl;
cout<<"z= "<<z<<endl;
cout<<"vx= "<<vx<<endl;
cout<<"vy= "<<vy<<endl;
cout<<"vz= "<<vz<<endl;
return 0;
}
```

Referências Bibliográficas

- M. Mayor and D. Queloz. A Jupiter-mass Companion to a Solar-type Star. *Nature*, 378:355–359, November 1995. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1995Natur.378..355M>.
- A. Howard and et al. The Occurrence And Mass Distribution Of Close-in Super-earths, Neptunes, And Jupiters. *Science*, 330:653–655, October 2010. URL <http://arxiv.org/abs/1011.0143>.
- J. Eberle, M. Cuntz, B. Quarles, and Z. E. Musielak. Case Studies of Habitable Trojan Planets in the System of HD 23079. *International Journal of Astrobiology*, 10:325–334, October 2011. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2011IJAsB..10..325E>.
- R. Dvorak, E. Pilat-Lohinger, R. Schwarz, and F. Freistetter. Extrasolar Trojan Planets Close to Habitable Zones. *A&A*, 426:L37–L40, November 2004. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2004A%26A...426L..37D>.
- B. Funk, R. Schwarz, Á. Süli, and B. Érdi. On the Stability of Possible Trojan Planets in the Habitable Zone: An Application to the Systems HD 147513 and HD 210277. *MNRAS*, 423:3074–3082, July 2012. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2012MNRAS.423.3074F>.
- R. Schwarz, E. Pilat-Lohinger, R. Dvorak, B. Érdi, and Z. Sándor. Trojans in Habitable Zones. *Astrobiology*, 5:579–586, October 2005. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2005AsBio...5..579S>.
- R. Schwarz, R. Dvorak, Á. Süli, and B. Érdi. Survey of the Stability Region of Hypothetical Habitable Trojan Planets. *A&A*, 474:1023–1029, November 2007. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2007A%26A...474.1023S>.
- R. Dvorak, R. Schwarz, and C. Lhotka. On the Dynamics of Trojan Planets in Extrasolar Planetary Systems. *IAU Symposium*, 249:461–468, May 2008. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2008IAUS..249..461D>.
- G. Laughlin and J. E. Chambers. Extrasolar Trojans: The Viability and Detectability of Planets in the 1:1 Resonance. *AJ*, 124:592–600, July 2002. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2002AJ...124..592L>.
- J. J. Lissauer and et al. Architecture and Dynamics of Kepler’s Candidate Multiple Transiting Planet Systems. *ApJS*, 197:8, November 2011. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2011ApJS..197...8L>.
- A. Wolszczan and D. A. Frail. A Planetary System Around the Millisecond Pulsar PSR1257 + 12. *Nature*, 355:145–147, January 1992. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1992Natur.355..145W>.
- H. Deeg, J. A. Belmonte, and A. Aparicio. Extrasolar Planets: XVI Canary Islands Winter School of Astrophysics. In *Extrasolar Planets*, 2008.

- P. J. Armitage. Lecture Notes on the Formation and Early Evolution of Planetary Systems. *ArXiv Astrophysics e-prints*, August 2014. URL <http://arxiv.org/pdf/astro-ph/0701485.pdf>.
- I. de Pater and J. J. Lissauer. Planetary Sciences. *Cambridge University Press*, 2010.
- G. W. Marcy, R. P. Butler, E. Williams, L. Bildsten, J. R. Graham, A. M. Ghez, and J. G. Jernigan. The Planet around 51 Pegasi. *ApJ*, 481:926–935, May 1997. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1997ApJ...481..926M>.
- H. A. Knutson, D. Charbonneau, R. W. Noyes, T. M. Brown, and R. L. Gilliland. Using Stellar Limb-Darkening to Refine the Properties of HD 209458b. *ApJ*, 655:564–575, January 2007. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2007ApJ...655..564K>.
- J. P. Beaulieu and et al. Discovery of a Cool Planet of 5.5 Earth Masses through Gravitational Microlensing. *Nature*, 439:437–440, January 2006. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2006Natur.439..437B>.
- S. H. Pravdo and S. B. Shaklan. An ultracool Star’s Candidate Planet. *ApJ*, 700:623–632, July 2009. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2009ApJ...700..623P>.
- S. B. Howell and et al. The K2 Mission: Characterization and Early Results. *PASP*, 126:398–408, April 2014. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2014PASP...126..398H>.
- M. J. Holman and et al. Kepler-9: A System of Multiple Planets Transiting a Sun-Like Star, Confirmed by Timing Variations. *Science*, 330:51–, October 2010. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2010Sci...330...51H>.
- D. Huber and et al. Stellar Spin-Orbit Misalignment in a Multiplanet System. *Science*, 342:331–334, October 2013. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2013Sci...342..331H>.
- M. Valtonen and H. Karttunen. The Three-Body Problem. *Cambridge University Press*, 2005.
- C. A. Giuppone, C. Beaugé, T. A. Michtchenko, and S. Ferraz-Mello. Dynamics of two planets in co-orbital motion. *MNRAS*, 407:390–398, September 2010. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2010MNRAS.407..390G>.
- F. Namouni. Secular Interactions of Coorbiting Objects. *icarus*, 137:293–314, February 1999. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1999Icar...137..293N>.
- F. Namouni, A. A. Christou, and C. D. Murray. Coorbital Dynamics at Large Eccentricity and Inclination. *Physical Review Letters*, 83:2506–2509, September 1999. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1999PhRvL...83.2506N>.
- S. Mikkola, R. Brasser, P. Wiegert, and K. Innanen. Asteroid 2002 VE68, a Quasi-satellite of Venus. *MNRAS*, 351:L63–L65, July 2004. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2004MNRAS.351L..63M>.
- H. Yoshida. Recent Progress in the Theory and Application of Symplectic Integrators. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 56:27–43, March 1993. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1993CeMDA...56...27Y>.
- M. J. Duncan, H. F. Levison, and M. H. Lee. A Multiple Time Step Symplectic Algorithm for Integrating Close Encounters. *AJ*, 116:2067–2077, October 1998. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1998AJ....116.2067D>.

- M. Suzuki. General theory of fractal path integrals with applications to many-body theories and statistical physics. *Journal of Mathematical Physics*, 32:400–407, February 1991. URL <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/jmp/32/2/10.1063/1.529425>.
- H. Yoshida. Construction of Higher Order Symplectic Integrators. *Physics Letters A*, 150:262–268, November 1990. URL <http://sixtrack.web.cern.ch/SixTrack/doc/yoshida00.pdf>.
- J. E. Chambers. A Hybrid Symplectic Integrator that Permits Close Encounters between Massive Bodies. *MNRAS*, 304:793–799, April 1999. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1999MNRAS.304..793C>.
- J. Wisdom and M. Holman. Symplectic maps for the n-body problem. *AJ*, 102:1528–1538, October 1991. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1991AJ...102.1528W>.
- M. H. Lee, M. J. Duncan, and H. F. Levison. Variable Time Step Integrators for Long-Term Orbital Integrations. *Computational Astrophysics; 12th Kingston Meeting on Theoretical Astrophysics*, 123:32–39, 1997. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1997ASPC..123...32L>.
- V. Szebehely. Theory of Orbits. The Restricted Problem of Three Bodies. *New York: Academic Press*, 1967.
- P. M. Fitzpatrick. Principles of Celestial Mechanics. *Physics and Chemistry of Minerals*, 1970.
- R. Schwarz, Á. Süli, R. Dvorak, and E. Pilat-Lohinger. Stability of Trojan Planets in Multi-planetary Systems. Stability of Trojan Planets in Different Dynamical Systems. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 104:69–84, June 2009. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2009CeMDA.104...69S>.