

Análise estatística das reversões do campo geomagnético e suas consequências

Cleiton da Silva Barbosa

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Geofísica do Observatório Nacional - ON, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Geofísica.

Orientador: Andrés Reinaldo Rodriguez Papa

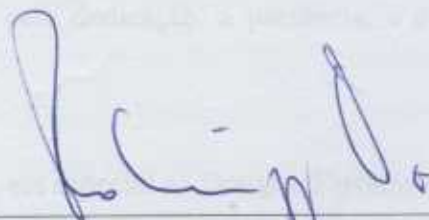
Rio de Janeiro
Fevereiro de 2012

"ANALISE ESTATÍSTICA DAS REVERSÕES DO CAMPO GEOMAGNÉTICO E
SUAS CONSEQUÊNCIAS"

CLEITON DA SILVA BARBOSA

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-
GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA DO OBSERVATÓRIO NACIONAL COMO PARTE
DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM GEOFÍSICA.

Aprovada por:



Dr. Andrés Reinaldo Rodríguez Papa – ON/MCTI
(orientador)



Dr. Gelvam André Hartmann – IAG/USP



Dra. Kátia Jasbinschek dos Reis Pinheiro – ON/MCTI

RIO DE JANEIRO – BRASIL

28 DE FEVEREIRO DE 2013

Dedicatória

“Entrega o teu caminho ao Senhor; confia nele, e ele o fará.”

Salmos 37

A Deus por ter me dado força nessa jornada.

Agradecimentos

Este momento talvez seja o mais delicado. Visto que foram muitos os que contribuíram e são poucas as palavras que cabem nesta página. Começarei agradecendo então, primeiramente...

A Deus, por todo o que tem realizado na minha vida.

Aos meus pais, por ter me dado uma base familiar sólida.

À minha esposa, pelo companherismo e compreensão.

Ao orientador-amigo Andres Papa, pela dedicação, a paciência, e o apoio ao longo desta jornada acadêmica.

A todos os amigos da pós graduação, em especial ao Douglas Ferreira e Marco Aurélio, pelas valorosas discussões e pela amizade.

Aos amigos da graduação, em especial ao Victor Thadeu e Vanderlei, pela amizade e apoio.

Ao professor Nelson Braga (UFRJ), pelo imenso apoio e incentivo durante minha iniciação científica na graduação.

Aos pesquisadores e funcionários do Observatório Nacional.

Ao *CNPq*, pelo suporte financeiro.

A todos, muito obrigado!

RESUMO

Análise estatística das reversões do campo geomagnético e suas consequências.

Cleiton da Silva Barbosa

Orientador: Andres Reinaldo Rodriguez Papa

A análise dos dados paleomagnéticos mostram que o campo magnético da Terra inverteu sua polaridade de maneira desordenada e repentina nos últimos 160 milhões de anos. Trabalhos recentes sobre análise de dados, modelagem teórica e dinamos experimentais têm ampliado o conhecimento sobre o campo geomagnético. No entanto, questões fundamentais relacionadas com transições de polaridade permanecem sem respostas como por exemplo, o mecanismo físico que dá origem às reversões e a distribuição estatística dos intervalos de mesma polaridade magnética. Este trabalho foca na distribuição estatística dos intervalos de tempo de mesma polaridade. Outros trabalhos indicam que uma distribuição que ajusta os dados geomagnéticos era a distribuição de Poisson com uma taxa de processo constante ou variável. Estudos recentes descartaram esta possibilidade. Para o caso de grandes intervalos de tempo, outros estudos indicam leis de potência como uma possível distribuição. Recentemente a distribuição Tsallis foi apontada como uma possível alternativa às propostas anteriores. Neste trabalho realizaram-se testes estatísticos para comprovar e encontrar os melhores parâmetros da distribuição de Tsallis que se ajustam aos dados. Como consequência desse estudo, analisamos o grau de correlação dos intervalos de tempo de mesma polaridade para mostrar que há efeito de memória no mecanismo que gera as reversões.

Rio de Janeiro

Fevereiro de 2012

ABSTRACT

Statistical analysis of the geomagnetic field reversals and its consequences.

Cleiton da Silva Barbosa

Advisor: Andres Reinaldo Rodriguez Papa

The data analysis shows that the paleomagnetic Earth's magnetic field reversed its polarity, several times, suddenly and disorderly in the last 160 million years. Recent work on data analysis, theoretical modeling and experimental dynamos have expanded the knowledge on the geomagnetic field. However, some fundamental questions related to polarity transitions remain open: the physical mechanism that gives rise to reversals and the statistical distribution of inter-reversals times. In this paper we focus on the statistical distribution of the intervals between reversals. Several contributions indicated that a distribution that fits the geomagnetic data distribution was due to Poisson process with a rate constant or variable. Recent studies have ruled out this possibility. In the case of large time intervals, studies indicate power laws as possible distributions. Recently Tsallis distribution was pointed as a possible alternative to the previous proposals. This work performed statistical tests to prove and find the best parameters of Tsallis distribution that fits the data. As a result of this study, we analyzed the correlation of the time intervals of the same polarity to show the presence of memory effect on the mechanism that generates reversals.

Rio de Janeiro

February de 2013

Índice

Lista de figuras	ix
1 Introdução	1
1.1 Aspectos gerais sobre o campo geomagnético	1
1.1.1 Origem	1
1.2 Variações espaço-temporal do campo geomagnético	1
1.3 Reversões do campo geomagnético	3
1.3.1 Escalas cronológicas do campo geomagnético	5
2 Distribuições estatísticas	7
2.1 Distribuição de Poisson	7
2.2 Lei de potência	8
2.2.1 Função de distribuição acumulada	8
2.3 Distribuição de Tsallis	9
2.3.1 Mecânica estatística extensiva	9
2.3.2 Mecânica estatística não-extensiva	10
2.3.3 Distribuição de Tsallis	11
2.3.4 Distribuição de Tsallis e a lei de potência	13
2.3.5 Distribuição de Tsallis acumulada	14
2.3.6 A função q-logaritmo	15
2.3.7 Relação entre os parâmetros da distribuição de Tsallis	16
3 Análise estatística das reversões	17
3.1 Motivação do uso de métodos estatísticos para estudar reversões	17
3.2 Testes estatísticos	18
3.2.1 O Teste Kolmogorov–Smirnov	19

3.2.2	O teste de Anderson-Darling	21
3.2.3	O teste do χ^2	22
3.3	Ajustando os dados a uma Distribuição de Poisson	23
3.4	Ajustando os dados a uma Lei de Potência	24
3.5	Ajustando os dados a uma distribuição de Tsallis	25
3.5.1	Estimativa do melhor parâmetro q	33
3.5.2	Consequências sobre o entendimento das reversões	34
3.6	Correlação dos dados	35
3.6.1	O método DFA	35
3.6.2	Resultados	37
3.7	Conclusão e Perspectivas futuras	38
	Referências bibliográficas	40

Lista de figuras

1.1	Posição geográfica da anomalia do Atlântico Sul. Atualmente o centro da anomalia está localizado no Paraguai [1]	2
1.2	Deriva para Oeste da anomalia da Atlântico Sul em 1600 e 2005 [1].	3
1.3	Padrão zebrado de magnetização na dorsal oceânica [2].	4
1.4	Escala de polaridade geomagnética CK95 mostrando os períodos da Terra com polaridade normal (faixas escuras) e reversas (faixas brancas) para os últimos 160 Ma	6
2.1	Distribuição de probabilidade $y(x)$ para vários valores de $1 < q < 3$ ($B=1$): $q=1,1$ (azul), $q=1,5$ (rosa), $q=1,7$ (verde), $q=2,0$ (marrom) e $q=2,5$ (vermelho) [3].	12
2.2	Comportamento da distribuição de Tsallis ($q = 1,5$) de acordo com o parâmetro B : $B=1,0$ (azul), $B =3,0$ (rosa), $B =5,0$ (verde), $B =10,0$ (marrom) e $B =30,0$ (laranja) [3].	13
2.3	Gráfico da distribuição de probabilidade da variável x , vemos que a q -exponencial se conecta a uma lei de potência para grandes valores de x	14
3.1	Frequência acumulada dos intervalos de tempo entre reversões consecutivas em um gráfico Log-Log.	18
3.2	Representação gráfica da função de distribuição empírica. Note que essa distribuição é descontínua	20
3.3	Frequência acumulada dos intervalos de tempo entre reversões consecutivas em um gráfico Log-Log.	24
3.4	Ajustando uma tendência linear em um gráfico Log-Log da distribuição de frequência acumulada dos intervalos de tempo entre reversões consecutivas.	25
3.5	Ajustando uma reta em um gráfico Log-Log para grandes valores de Δt	25

3.6	O pontos pretos são o q-log da frequência acumulada dos dados reais. A linha vermelha é o ajuste linear entre o q-log e Δt	27
3.7	O pontos pretos são a frequência acumulada dos dados reais. A linha vermelha é a distribuição de Tsallis usando $q=1,3$ e $B=2,94$	28
3.8	Vemos um razoável ajuste entre a distribuição de Tsallis (vermelho) e a distribuição empírica (pretos)	29
3.9	Diferença entre as imagens da distribuição de Tsallis e a função empírica .	29
3.10	q-log da frequência acumulada dos dados. Nesse caso usamos $q=1,4$	30
3.11	O pontos pretos são a frequência acumulada dos dados reais. A linha vermelha é o distribuição de Tsallis usando $q=1,4$ e $B=3,85$	31
3.12	Diferença entre as imagens da distribuição de Tsallis e a função empírica para $q=1,4$	32
3.13	Diferença entre as imagens da distribuição de Tsallis com $q=1,2$ e a função empírica	33
3.14	Diferença entre as imagens da distribuição de Tsallis com a função empírica em função do parâmetro q , a linha tracejada é o valor limite do teste . . .	34
3.15	Gráfico da flutuação em função do tamanho da janela usada para calcular a flutuação, a série foi usada na ordem cronológica e mostrou $h=0,92$. . .	37
3.16	Gráfico da flutuação em função do tamanho da janela usada para calcular a flutuação, neste caso a série foi embaralhada e mostrou $h=0,7$	38

Capítulo 1

Introdução

1.1 Aspectos gerais sobre o campo geomagnético

1.1.1 Origem

O estudo de ondas sísmicas que se propagam pelo interior da Terra indicam que seu núcleo externo é formado basicamente por uma liga metálica de ferro e níquel predominantemente no estado líquido [4]. Este fluido está em movimento devido à convecção e rotação da Terra, gerando assim o campo geomagnético.

O campo geomagnético é composto por 95% de origem interna (núcleo externo, rochas com propriedades magnéticas na crosta e campo induzido) e 5% de origem externa (Sol, correntes na ionosfera). A componente interna do campo é predominantemente dipolar, isto é, seu campo é similar ao campo de um ímã. Os polos magnéticos se encontram sob a superfície terrestre mas não coincidem com os polos geográficos, há um ângulo de $11,5^\circ$ entre o eixo do dipolo magnético e o eixo de rotação da Terra.

1.2 Variações espaço-temporal do campo geomagnético

O campo geomagnético é fraco no sentido de que um pequeno ímã produz um campo centena de vezes mais forte do que o da Terra. A intensidade média do campo geomagnético

é da ordem de 50.000 nT variando desde 70.000 nT nos polos e enfraquecendo até cerca de 40.000 nT no Equador. O que chama mais a atenção na variação espacial do campo é a Anomalia Magnética do Atlântico Sul (figura 1.1) que é uma região da América do Sul que possui um campo com cerca da metade do valor que seria esperado para aquelas latitudes.

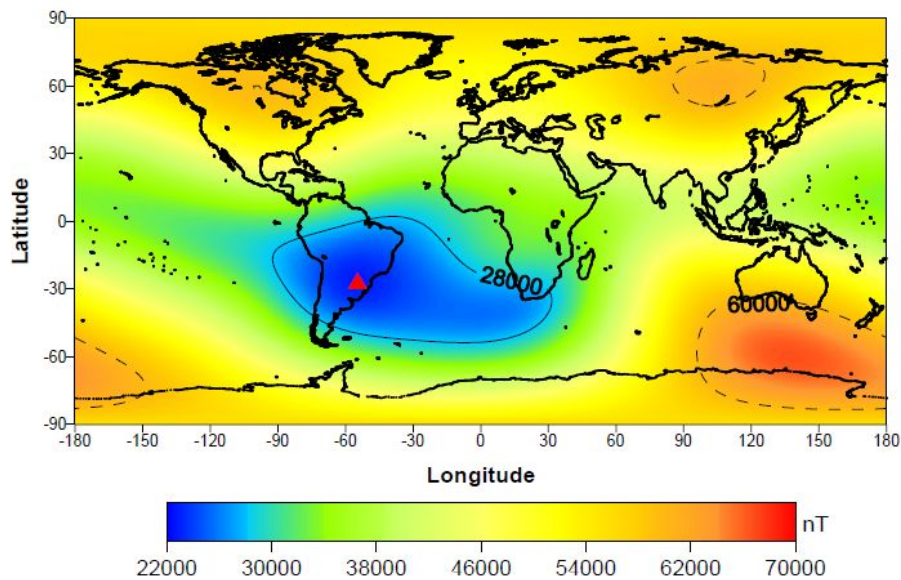


Figura 1.1. Posição geográfica da anomalia do Atlântico Sul. Atualmente o centro da anomalia está localizado no Paraguai [1]

Outro fenômeno interessante do campo geomagnético é a deriva para Oeste [5] que é a movimentação para o Oeste do campo geomagnético, um claro exemplo desse movimento é mostrado na figura 1.2 onde vemos que em 1600 o centro da anomalia do Atlântico Sul se encontrava na África com o passar do tempo a anomalia caminhou para Oeste e hoje se encontra na América do Sul.

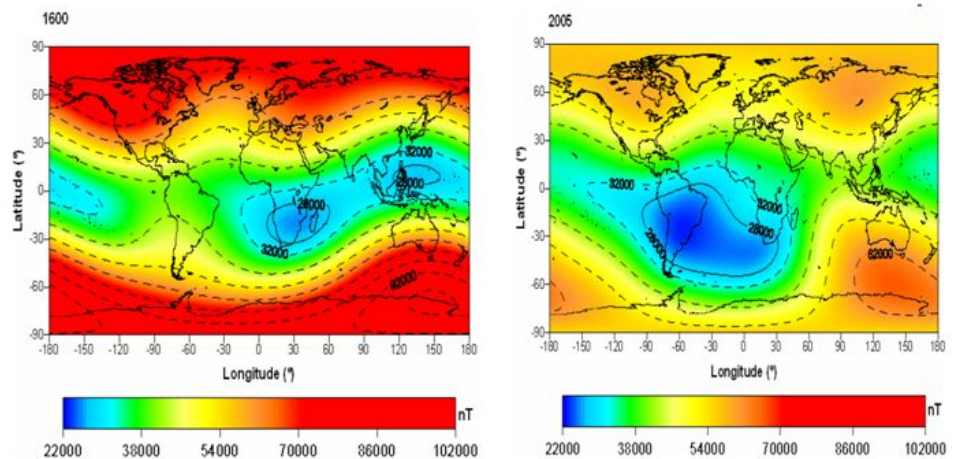


Figura 1.2. Deriva para Oeste da anomalia da Atlântico Sul em 1600 e 2005 [1].

1.3 Reversões do campo geomagnético

Há inúmeras fontes de informação sobre o campo magnético da Terra, fontes com precisão bastante variável, e que dão informações do campo em diferentes épocas. Essas fontes vêm de rochas ígneas e rochas sedimentares que registram o campo geomagnético presente durante a sua formação. Em rochas ígneas o campo é registrado durante a sua formação devido às altas temperaturas que fazem com que a agitação térmica impeça que haja uma magnetização fixa (magnetização remanente), e em seguida o material esfria. Quando a temperatura se torna menor que a temperatura de Curie do material ele se torna ferromagnético então a sua magnetização fica paralela ao campo existente durante o resfriamento. Em rochas sedimentares as partículas que as formam tendem a estar alinhadas estatisticamente com o campo durante a sua deposição, fazendo com que o campo macroscópico da rocha esteja alinhado com o campo magnético presente na sua formação. Em ambos os casos pode-se medir o vetor magnetização da rocha e datá-la, e assim obter informação sobre os campos magnéticos antigos, que podem chegar a bilhões de anos [6]. Este método de análise do magnetismo das rochas é denominado Paleomagnetismo.

Foi através do Paleomagnetismo que [7] descobriu as reversões do campo geomagnético. Ele descobriu que as rochas em um fluxo de lava na antiga Pontfarin na comuna de Cézens (parte do departamento Cantal) foram magnetizadas em um sentido

quase oposto ao do campo magnético atual. A partir daí, ele deduziu que o Pólo Norte magnético do tempo em que a rocha foi formada estava perto do Pólo Sul geográfico atual, que só poderia ter acontecido se o campo magnético da Terra reverteu em algum momento no passado. Nessa ideia, Merrill [2] definiu a reversão do campo geomagnético como sendo uma mudança de 180° observada globalmente no campo dipolar tomado na média em alguns milhares de anos.

Um dos registros mais importantes das reversões geomagnéticas é o padrão da magnetização medida no assoalho oceânico. O assoalho oceânico está constantemente sendo criado em regiões chamadas dorsais oceânicas, onde material novo é constantemente depositado formando assoalho jovem e empurrando o assoalho mais antigo para as laterais. Desta forma, o assoalho oceânico fica progressivamente mais antigo à medida que nos distanciamos das dorsais. Medições da magnetização remanente das rochas do assoalho oceânico revelam um padrão zebrado com bandas de polaridade normal e reversa idênticas às observadas em rochas continentais, a magnetização é alternada em regiões cuja polaridade é igual à do campo magnético atual e regiões onde a polaridade é oposta. A figura 1.3 mostra um esquema do padrão zebrado.

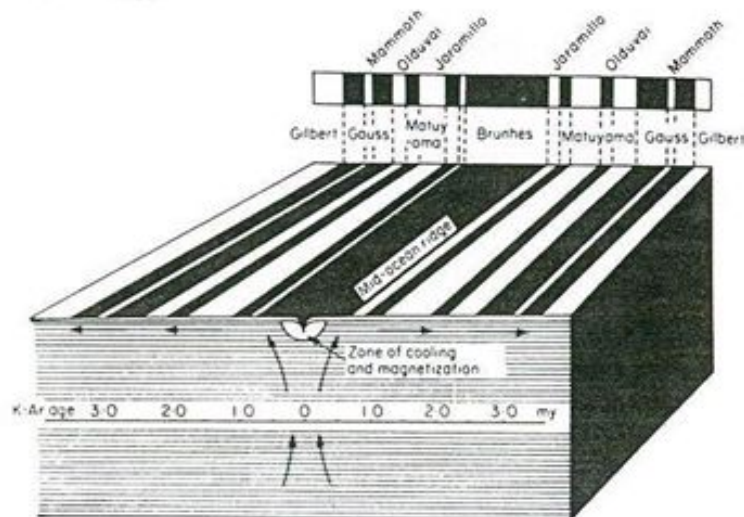


Figura 1.3. Padrão zebrado de magnetização na dorsal oceânica [2].

1.3.1 Escalas cronológicas do campo geomagnético

A primeira escala de polaridade geomagnética foi compilada por COX et al [8] que sugeriu uma periodicidade de em torno de 1 Ma nas reversões geomagnéticas. Entretanto, pouco tempo depois novos dados de McDougall e Tarling [9] apontaram que não havia uma periodicidade simples; os intervalos de polaridade, às vezes, eram longos (~ 1 Ma) ou muito curtos ($\sim 0,1$ Ma). COX et al [8], propuseram que dentro de intervalos mais longos da ordem de 1 Ma haviam intervalos de curta duração, de aproximadamente 0,1 Ma. As escalas de polaridade foram se desenvolvendo na medida em que registros de novas reversões eram observados, um histórico desta evolução pode ser vista em Opdyke e Channel [10].

Existem inúmeras escalas de polaridade geomagnética que abrangem determinados intervalos de tempo geológico. Estas apresentam semelhanças e discrepâncias devido aos vários métodos utilizados por inúmeros pesquisadores. Os maiores erros estão relacionados a estimativas para a idade das rochas como também à existência de determinados intervalos de polaridade que podem estar em uma escala e não em outras Merrill [2]. No entanto, a cronologia geomagnética está continuamente em construção a partir de novos registros de reversões.

A escala cronológica mais aceita e usada pela comunidade científica foi proposta por CAND e KENT [11] a partir de análises de sedimentos marinhos de todos os oceanos, nessa escala há registros de polaridade para os últimos 80 Ma. Em 1995 CAND e KENT (CK95) [12] publicaram uma versão revisada desta escala que apresenta escala de polaridade para os 160 Ma. A figura 1.4 apresenta esta escala de polaridade.

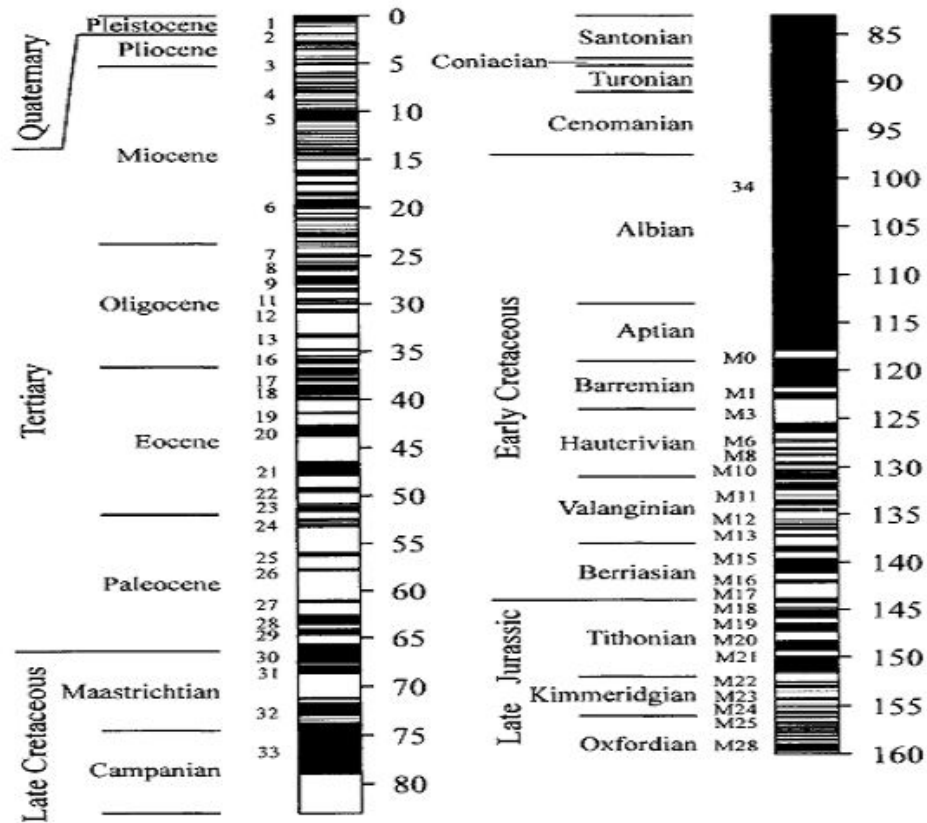


Figura 1.4. Escala de polaridade geomagnética CK95 mostrando os períodos da Terra com polaridade normal (faixas escuras) e reversas (faixas brancas) para os últimos 160 Ma

Os intervalos de polaridade geomagnética são classificados como [38] chron (unidade padrão) que tem duração no intervalo 10^6 a 10^7 anos, superchron $10^7 - 10^8$ anos, megachron $10^8 - 10^9$ anos, subchron $10^5 - 10^6$ anos, microchron 10^5 anos.

A base de dados de CK95 possui 276 reversões. O menor intervalo de tempo de mesma polaridade é de 0,01 milhões de anos e o maior é o superchron normal do cretáceo que durou por aproximadamente 41 milhões de anos, a média é de 0,47 milhões de anos.

Capítulo 2

Distribuições estatísticas

A Física Estatística tem sido aplicada no estudo de uma grande variedade de sistemas físicos. Em geral o estudo estatístico de um sistemas ajuda a entender características globais do sistema.

2.1 Distribuição de Poisson

Uma das distribuições de frequência com mais aplicações em diversas áreas da ciência é a distribuição de Poisson [13]. Quando uma variável discreta x segue uma distribuição de Poisson, temos que sua distribuição de frequência é dada por:

$$P(x) = \lambda \exp(-\lambda x) \tag{2.1}$$

Onde, λ é a taxa de ocorrência. Dentre as aplicações da distribuição de Poisson podemos citar reversões do campo geomagnético [14] e terremotos [15].

Uma das propriedades interessantes dos sistemas que seguem a distribuição de Poisson é que neles não há efeito de memória, ou seja a ocorrências dos eventos são independentes, de modo que uma ocorrência não diminui nem aumenta a chance de outro evento.

2.2 Lei de potência

Uma distribuição de frequência do tipo $p(x) = x^{-d}$ onde d é uma constante e $p(x)$ é a frequência com que a variável x ocorre é dita como distribuição de frequência em lei de potência, pois $f(x)$ depende de uma potência da variável x . A lei de potência tem muitas aplicações em sistemas físicos [16], [17] além de carregar informações importantes sobre o sistema em que ela se aplica [17]. Podemos escrever a lei de potência de maneira mais geral da seguinte maneira:

$$p(x) = C \cdot x^{-d} \quad (2.2)$$

C → constante de normalização

x → variável que será estudada estatisticamente

$p(x)$ → probabilidade de ocorrência da variável x

d → expoente da lei de potência.

Uma característica interessante da lei de potência é que no gráfico Log-Log de $p(x)$ versus x se apresenta como uma reta:

$$\log(p(x)) = \log(C) + (-d) \log(x) \quad (2.3)$$

Essa é uma maneira simples de identificar sistemas que obedecem a leis de potência. Se a distribuição de frequência de alguma quantidade aparecer como uma reta na escala logarítmica, saberemos que essa quantidade segue uma lei de potência.

2.2.1 Função de distribuição acumulada

Na teoria de probabilidades e estatística, a função de distribuição acumulada (FDA), ou simplesmente função de distribuição, descreve a probabilidade de que uma variável aleatória X com uma distribuição de probabilidade dada será encontrada em um valor maior ou igual a x .

$$P(\geq x) = \int_x^{\infty} p(y) dy \quad (2.4)$$

Com $p(y)$ sendo,

$$p(y) = C \cdot y^{-d}$$

$$P(\geq x) = \frac{Cx^{-(\alpha-1)}}{\alpha-1} \quad (2.5)$$

Vemos que a distribuição acumulada também é uma lei de potência com expoente $\alpha - 1$

2.3 Distribuição de Tsallis

2.3.1 Mecânica estatística extensiva

Na mecânica estatística extensiva, a entropia de Boltzmann-Gibbs é dada pela seguinte equação:

$$S = -k \sum_{i=1}^{i=w} p_i \ln p_i \quad (2.6)$$

Onde p_i é o conjunto de probabilidades associado aos W estados acessíveis ao sistema, k é a constante de Boltzmann. A estatística de Boltzmann-Gibbs tem a propriedade da extensividade no sentido de que se tivermos dois sistemas estatisticamente independentes A e B :

$$S(A, B) = S(A) + S(B) \quad (2.7)$$

A entropia de um sistema obtida a partir da entropia de dois subsistemas estatisticamente independentes é a soma da entropia de cada um deles. A distribuição de probabilidade que emerge maximizando a entropia é dada pela seguinte equação:

$$p_i = C \exp(-\beta \epsilon_i) \quad (2.8)$$

Onde, ϵ_i é o valor da energia no i -ésimo estado e $\beta = \frac{1}{kT}$ sendo T a temperatura do sistema e C uma constante de normalização.

2.3.2 Mecânica estatística não-extensiva

Sistemas complexos cujo estado fundamental seja altamente degenerado ou que possuem memória microscópica de longo alcance e apresentam tempo de relaxação ao equilíbrio muito longo apresentam incompatibilidade com a mecânica estatística extensiva de Boltzmann-Gibbs(BG) [18]. Com isso Tsallis propôs uma generalização da entropia de BG visando estudar sistemas dessa natureza. A entropia proposta por Tsallis é dada pela seguinte equação [19].

$$S_q = k \frac{1 - \sum_{i=1}^{i=w} p_i^q}{q - 1} \quad (2.9)$$

A interpretação do parâmetro q será discutida adiante. A princípio podemos dizer que no limite $q \rightarrow 1$ a entropia de Tsallis torna-se a entropia de Boltzmann-Gibbs.

A entropia de Tsallis tem muitas propriedades em comum com a entropia de Boltzmann-Gibbs [18] entretanto, a propriedade da aditividade é violada.

$$S_q(A, B) = S_q(A) + S_q(B) + \frac{1-q}{k} S_q(A) S_q(B) \quad (2.10)$$

Vemos que a entropia perde a propriedade aditiva. A estatística é dita não extensiva e o parâmetro q pode ser entendido como uma medida da não extensividade da estatística. Dependendo do valor de q nós temos:

- $q < 1 \rightarrow$ superextensividade, já que $S_q(A, B) > S_q(A) + S_q(B)$
- $q > 1 \rightarrow$ subextensividade, $S_q(A, B) < S_q(A) + S_q(B)$
- $q=1 \rightarrow$ recuperamos a extensividade

2.3.3 Distribuição de Tsallis

Maximizando a entropia não extensiva emerge a distribuição de probabilidade conhecida como a distribuição de Tsallis. Essa distribuição é dada por uma função conhecida como q -exponencial que é uma generalização da exponencial usual. A distribuição é dada pela seguinte equação:

$$p(x) = C \exp_q(-Bx) = C[1 - (1 - q)Bx]^{\frac{1}{1-q}} \quad (2.11)$$

Na qual B é um parâmetro de escala e C é uma constante de normalização.

Algumas propriedades de $p(x)$ são:

- O caso $q \rightarrow 1$ recupera a distribuição gaussiana.
- Se $q > 1$, $p(x)$ zera quando $x \rightarrow \pm\infty$ além disso $p(x)$ será normalizável apenas quando $q < 3$ isto é, C só será finito para $1 < q < 3$

- Se $q < 1$ tem um corte para $x = \frac{1}{B(1-q)}$ abaixo do qual a distribuição é definida para ser identicamente nula[2]. Este corte deve existir pois se $1 + (1 - q)Bx < 0$ obteríamos uma probabilidade não real.

Geralmente os casos de maior interesse serão quando $1 < q < 3$.

Na figura 2.1 encontra-se o gráfico da distribuição de Tsallis para alguns valores de q mantendo B fixo.

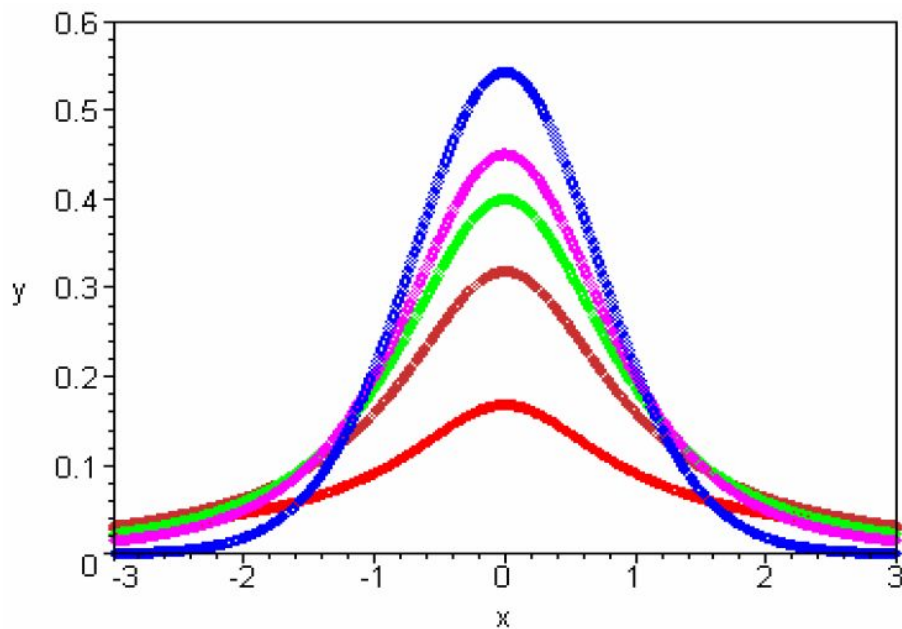


Figura 2.1. Distribuição de probabilidade $y(x)$ para vários valores de $1 < q < 3$ ($B=1$): $q=1,1$ (azul), $q=1,5$ (rosa), $q=1,7$ (verde), $q=2,0$ (marrom) e $q=2,5$ (vermelho) [3].

O parâmetro q pode ser entendido como uma medida do quanto a distribuição se afasta de uma exponencial no sentido de que para $q > 1$ a distribuição caia mais lentamente que uma exponencial. A medida que q aumenta, mais plana a distribuição torna-se até o limite $q \rightarrow 3$ onde a distribuição torna-se plana, isto é, não normalizável.

Já o parâmetro B está relacionado com a largura da distribuição. Como podemos ver pela figura 2.2, mantendo q fixo, quanto maior o valor B mais estreita será a distribuição e mais rápido ela decairá.

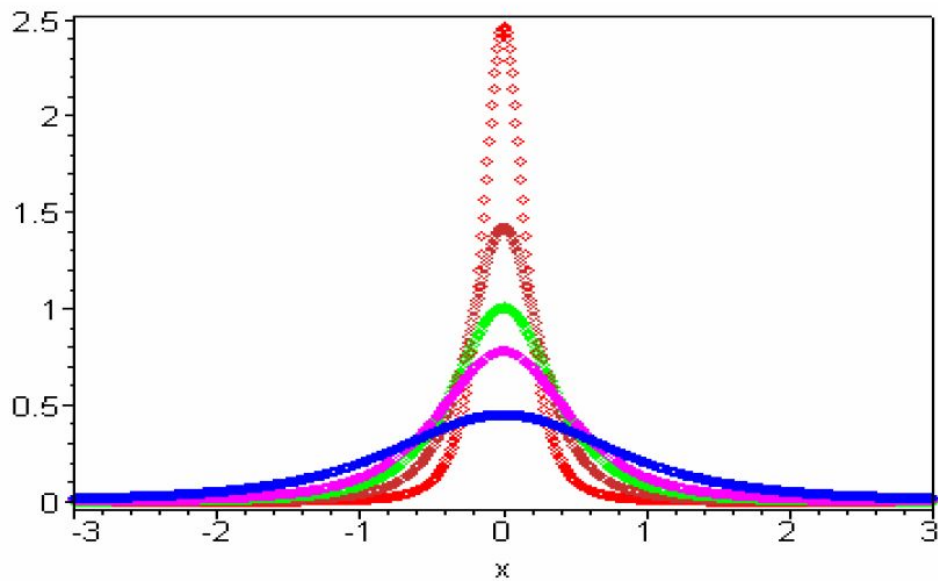


Figura 2.2. Comportamento da distribuição de Tsallis ($q = 1,5$) de acordo com o parâmetro B : $B=1,0$ (azul), $B = 3,0$ (rosa), $B = 5,0$ (verde), $B = 10,0$ (marrom) e $B = 30,0$ (laranja) [3].

2.3.4 Distribuição de Tsallis e a lei de potência

Um dos aspectos interessantes da q -exponencial para $q > 1$ é o comportamento em lei de potência para valores de $x \gg ((1 - q)B)^{-1}$. Nesse caso, pela equação 2.11 temos:

$$p(x) = C[B(q - 1)]^{\frac{1}{1-q}} x^{\frac{1}{1-q}} \quad (2.12)$$

$$p(x) \sim x^{\frac{1}{1-q}} \quad (2.13)$$

Esse comportamento é observado na figura 2.3 onde é mostrada a q -exponencial em um gráfico log-log. Vemos que para grandes valores de x temos uma reta entre $p(x)$ versus x .

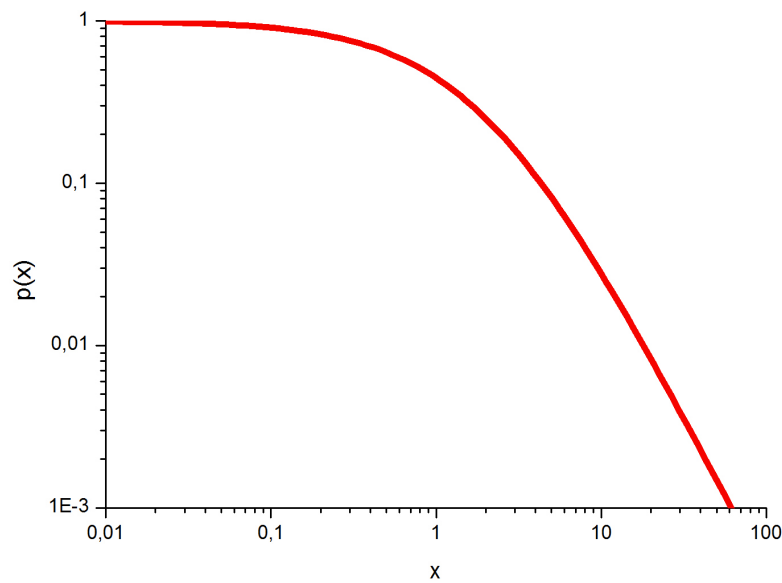


Figura 2.3. Gráfico da distribuição de probabilidade da variável x , vemos que a q -exponencial se conecta a uma lei de potência para grandes valores de x

2.3.5 Distribuição de Tsallis acumulada

Outro aspecto interessante da distribuição de Tsallis é o fato da sua distribuição acumulada também ser uma q -exponencial. A distribuição acumulada é definida como:

$$P(\geq x) = \int_x^{\infty} p(y) dy \quad (2.14)$$

Com $p(y)$ sendo,

$$p(y) = \exp_q(-By) = C[1 - (1 - q)By]^{\frac{1}{1-q}}$$

Usando a definição de $p(y)$, a integral é computada facilmente utilizando uma mudança de variável da forma $u=1-(1-q)By$.

$$P(\geq x) = C_1[\exp_q(-Bx)]^{2-q} = C_1[1 - (1-q)Bx]^{\frac{2-q}{1-q}} \quad (2.15)$$

Com $C_1 = \frac{C}{B(2-q)}$

Realizando as seguintes mudanças de variáveis:

$$\frac{2-q}{1-q} = \frac{1}{1-q'} \quad (2.16)$$

$$B' = (2-q)B \quad (2.17)$$

Chegamos a:

$$P(x) = \exp_{q'}(-B'x) \quad (2.18)$$

Obtemos uma q-exponencial. Em geral, a distribuição a ser usada para caracterizar a frequência de alguma variável é a distribuição acumulada de Tsallis.

2.3.6 A função q-logaritmo

Vimos que a q-exponencial é uma generalização da função exponencial. Da mesma maneira temos a generalização da função logarítmica dada por:

$$\ln_q x \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} \quad (2.19)$$

De modo que no limite em que $q \rightarrow 1$ recuperamos o logaritmo usual. Usando as definições da q -exponencial e do q -logarítmico podemos demonstrar que elas são funções inversas:

$$e_q^{\ln_q x} = x \quad (2.20)$$

$$\ln_q e_q^x = x \quad (2.21)$$

2.3.7 Relação entre os parâmetros da distribuição de Tsallis

Vimos que a distribuição de frequência acumulada de Tsallis é dada por:

$$p(x) = \exp_q(-Bx) \quad (2.22)$$

Se aplicarmos o q -logarítmico em ambos os lados da equação temos:

$$\ln_q p(x) = \ln_q(\exp_q(-Bx)) \quad (2.23)$$

$$\ln_q p(x) = -Bx \quad (2.24)$$

Uma vez estimado o parâmetro q , podemos calcular $\ln_q p(x) = \frac{x^{1-q}-1}{1-q}$ e pela equação 2.24 temos uma relação linear entre $\ln_q p(x)$ e x com coeficiente angular dado por $-B$.

Capítulo 3

Análise estatística das reversões

Nesse capítulo será feita a análise estatística dos intervalos de tempo entre reversões consecutivas. Discutiremos qual das distribuições estatísticas apresentadas no capítulo 2 melhor se ajusta à distribuição de frequência dos comprimentos de tempo de mesma polaridade. Realizaremos testes estatísticos para comprovar nossas hipóteses.

3.1 Motivação do uso de métodos estatísticos para estudar reversões

O campo geomagnético é extremamente complexo, tanto em sua morfologia como em suas variações temporais. Sabemos que o campo é gerado no metal líquido do núcleo externo e que o campo possui características intrigantes como reversões de polaridade com grandes variações nas frequências em que ocorrem. O entendimento físico deste fenômeno ainda não é satisfatório. Para tentar entender o mecanismo que gera as reversões os métodos de Física Estatística são muito úteis, já que podem apontar à natureza dos fenômenos envolvidos.

Medidas do campo geomagnético revelam que o campo tem trocado de polaridade de forma repentina e ocasional nos últimos 160 milhões de anos [20]. O tempo médio para haver uma reversão é da ordem de 10^3 anos, pequeno se comparado com o tempo em que a polaridade permanece a mesma, que alcança valores entre 10^4 anos até 10^7 anos [20]. Dessa forma podemos considerar as reversões como eventos praticamente instantâneos. No nosso trabalho usaremos a cronologia geomagnética obtida por Cande e Kent que

apresenta 276 reversões. Essa não é a única escala existente mas é a mais aceita na literatura.

Nos últimos anos tem sido feito muitos esforços para encontrar a melhor distribuição estatística que o intervalo de tempo entre reversões consecutivas obedece. Podemos definir esse intervalo de tempo como:

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i \quad (3.1)$$

Usando CK95 a frequência acumulada de Δt é mostrada no gráfico abaixo:

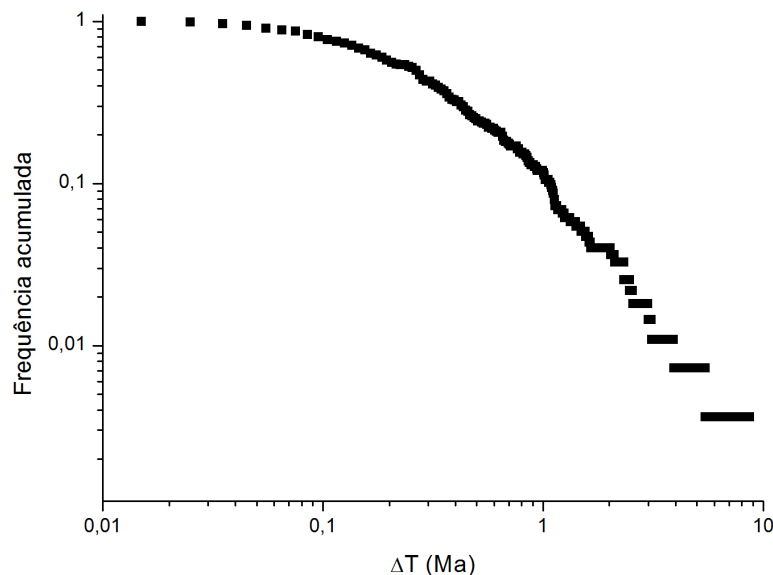


Figura 3.1. Frequência acumulada dos intervalos de tempo entre reversões consecutivas em um gráfico Log-Log.

Recentemente foi proposta uma nova abordagem no estudo estatístico dos comprimentos de mesma polaridade. Usaremos aqui de testes estatísticos para aprofundar o conhecimento dessa nova abordagem e discutiremos os resultados.

3.2 Testes estatísticos

Nas seções adiante iremos tentar encontrar qual distribuição estatística se ajusta melhor aos intervalos de tempo de mesma polaridade (Δt). Para isso faremos um teste de hipótese, no sentido que iremos fazer uma hipótese de que Δt segue alguma distribuição

específica $F_n(\Delta T)$, onde o índice n se refere ao número de dados amostrais. Chamaremos essa hipótese de H_0 . Muitos testes estatísticos podem ser usados para aceitar ou rejeitar a hipótese H_0 . Os mais usados são o teste de Anderson-Darling [21] do χ^2 [21] e o mais simples e mais eficiente é o teste baseado na estatística de Kolmogorov–Smirnov, o teste KS [21].

3.2.1 O Teste Kolmogorov–Smirnov

Em estatística o teste de Kolmogorov–Smirnov é um teste não paramétrico que pode ser usado para comparar dados amostrais com alguma distribuição de probabilidade proposta e completamente especificada. A ideia do teste é comparar $F_n(\Delta t)$ com uma função de distribuição empírica $G_n(\Delta t)$. Essa função é simplesmente a frequência acumulada dos dados. Podemos definir $G_n(\Delta t)$ como:

$$G_n(\Delta T) = \frac{\sum_{j=1}^n 1_{t \geq t_j}}{n} \quad (3.2)$$

Vamos ver em um exemplo de como construir a função empírica. Para isso considere os dados amostrais x constituídos por 5,7,8,8,10,11. Nesse caso temos 6 dados então $G_6(x)$ torna-se igual a:

$$\begin{aligned} &1 \text{ se } x \geq 5 \\ &\frac{5}{6} \text{ se } x \geq 7 \\ &\frac{3}{6} \text{ se } x \geq 8 \\ &\frac{2}{6} \text{ se } x \geq 10 \\ &\frac{1}{6} \text{ se } x \geq 11 \end{aligned}$$

O gráfico dessa distribuição é mostrado na figura 3.2:

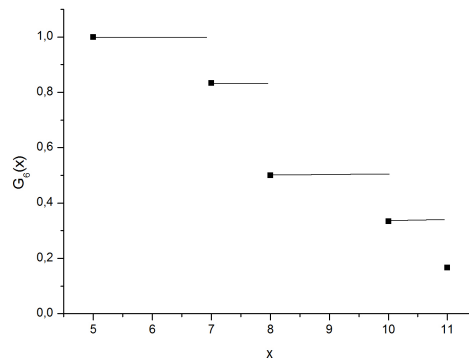


Figura 3.2. Representação gráfica da função de distribuição empírica. Note que essa distribuição é descontínua

O teste se baseia na análise do ajustamento entre a função empírica $G_n(\Delta T)$ e a função que estamos admitindo segundo a hipótese H_0 . Para isso vamos definir uma grandeza de extrema importância:

$$d_n = \sup | G_n(\Delta T) - F_n(\Delta T) | \quad (3.3)$$

A quantidade d_n representa a distância vertical máxima entre as imagens de $G_n(\Delta T)$ e $F_n(\Delta T)$. Se a hipótese H_0 for verdadeira, $F_n(\Delta T)$ tende a $G_n(\Delta T)$ e a diferença entre as imagens d_n tende a zero. Nessa idéia precisamos de um valor limite no qual para um certo nível de confiança denominado por α , para o caso em que d_n for maior que esse valor limite a hipótese pode ser rejeitada. Se for menor ou igual a hipótese pode ser aceita. Então aceitamos a hipótese de $F_n(\Delta T)$ ser uma possível distribuição que se ajusta aos dados quando com uma probabilidade de $1-\alpha$ [22]:

$$d_n \leq \chi_n \quad (3.4)$$

$$\chi_n = \sqrt{\frac{\ln(\frac{2}{\alpha})}{2n}} \quad (3.5)$$

Caso $d_n \geq \chi_n$ podemos rejeitar a hipótese H_0 . Uma outra vantagem do teste KS é que seu valor crítico não depende da distribuição a ser testada. No nosso trabalho usaremos um nível de confiança de 5 por cento. Ou seja, aceitaremos ou rejeitaremos a hipótese H_0 com 95 por cento de confiabilidade. A série possui 276 reversões, então o valor de χ_{276} será:

$$\chi_{276} = \sqrt{\frac{\ln\left(\frac{2}{0,05}\right)}{2 \cdot 276}} \quad (3.6)$$

$$\chi_{276} = 0,08174 \quad (3.7)$$

3.2.2 O teste de Anderson-Darling

O teste de Anderson-Darling é usado para testar se uma certa distribuição estatística se ajusta a um certo conjunto de dados. O teste é definido assim:

É feita a hipótese H_0 de que os dados seguem alguma distribuição completamente especificada $F(\Delta t)$. Então é calculada a seguinte quantidade estatística:

$$A^2 = -n - S \quad (3.8)$$

Onde n é o número de dados e S é dado por:

$$S = \sum_{i=1}^n \frac{2i-1}{n} [\ln F(\Delta t_i) + \ln(1 - F(\Delta t_{n+1-i}))] \quad (3.9)$$

Com $F(\Delta t)$ sendo a função de distribuição acumulada proposta.

Para um certo nível de confiança α , a hipótese é aceita para o caso em que $A^2 < \beta$. Onde β é o valor crítico do teste.

A grande desvantagem do teste é que diferentemente do teste KS, o valor crítico do teste depende da distribuição especificada, ou seja, para cada distribuição temos um valor crítico diferente. Isso torna o teste mais preciso. Entretanto, impossibilita o uso para distribuições como a de Tsallis por exemplo. Já que não existe na literatura uma tabela de valores críticos para essa distribuição. Na literatura encontramos valores críticos para as distribuições normal, log-normal, exponencial, Weibull [23]. Por esse motivo descartaremos o uso do teste de Anderson-Darling no nosso trabalho.

3.2.3 O teste do χ^2

Um maneira alternativa de testar se os dados pertencem a alguma distribuição estatística específica é através do teste do χ^2 . A ideia do teste é dividir os dados em um número k de classes. Então é calculado o χ^2 que é definido como:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad (3.10)$$

Onde O_i é a frequência observada para a classe i e E_i é a frequência esperada para a classe i . A frequência esperada é calculada por:

$$E_i = n(F(\Delta t_S) - F(\Delta t_I)) \quad (3.11)$$

Onde, Δt_S e Δt_I são respectivamente os limites superior e inferior da classe i .

Sendo verdadeira a hipótese H_0 , o Qui-quadrado tem distribuição assintótica com $k-c$, onde c é o número de parâmetros estimados da distribuição proposta.

Para um certo nível de confiança α , a hipótese de que os dados são provenientes de uma população com distribuição especificada é rejeitada se:

$$\chi^2 \geq \chi_{1-\alpha, k-c}^2 \quad (3.12)$$

Onde, $\chi_{1-\alpha, k-c}^2$ é o valor crítico da estatística.

A vantagem deste teste é que podemos testar a hipótese para qualquer distribuição estatística. Diferentemente do teste de Anderson-Darling, o valor crítico não depende da distribuição testada. Uma outra vantagem é que o teste pode ser aplicado para distribuições discretas como a de Poisson, os testes KS e AD só se aplicam a distribuições contínuas.

Entretanto, a grande desvantagem é a necessidade de se dividir os dados em classes, com isso o valor do χ^2 depende de como os dados são divididos. Por esse motivo também descartaremos o uso deste teste no nosso trabalho.

3.3 Ajustando os dados a uma Distribuição de Poisson

Como mostrado em [24] os intervalos de tempo de mesma polaridade não são aleatórios, e sim parte de alguma distribuição estatística. Como mostra a figura 3.3, esses intervalos de tempo parecem estar exponencialmente distribuídos.

Então foi proposto por Catherine Constable [25] que esses intervalos de tempo seguem a uma estatística de Poisson, dada por:

$$p(\Delta t) = \lambda \exp(-\lambda \Delta t) \quad (3.13)$$

Onde, λ é a taxa de ocorrência das reversões.

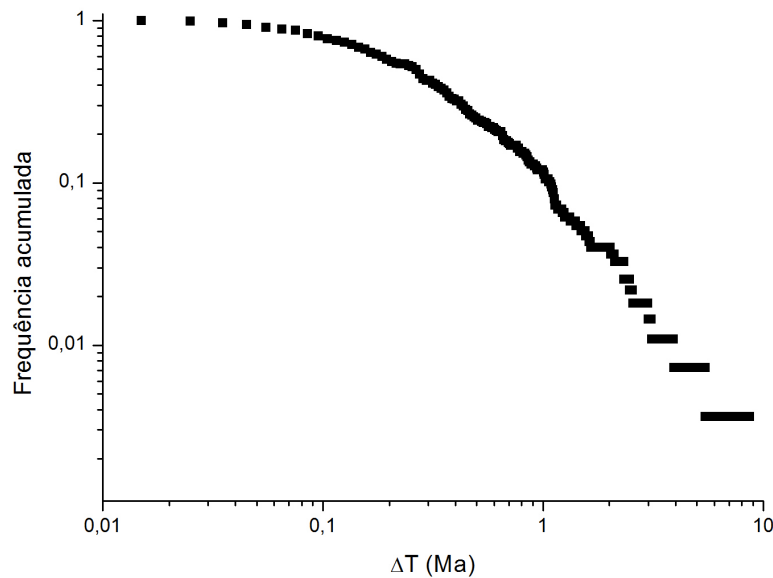


Figura 3.3. Frequência acumulada dos intervalos de tempo entre reversões consecutivas em um gráfico Log-Log.

Se as reversões seguirem a uma distribuição de Poisson, isso indicaria que não há efeitos de memória no mecanismo que gera as reversões. Isto é, as reversões são eventos independentes.

Um teste de hipótese foi aplicado para esse caso e mostrou que a distribuição de Poisson não se ajusta de forma satisfatória aos dados [26].

3.4 Ajustando os dados a uma Lei de Potência

Em seu trabalho Jonkers [27] propôs que a distribuição dos intervalos de mesma polaridade se aproxima de uma lei de potência.

Na figura 3.4 é mostrado o gráfico log-log entre os intervalos de mesma polaridade e a frequência acumulada desses intervalos. Se esses intervalos seguissem uma lei de potência, teríamos uma reta no gráfico. Vemos claramente que não é o caso.

Vemos pela figura 3.4 que a lei de potência não se ajusta a todo o espectro de dados.

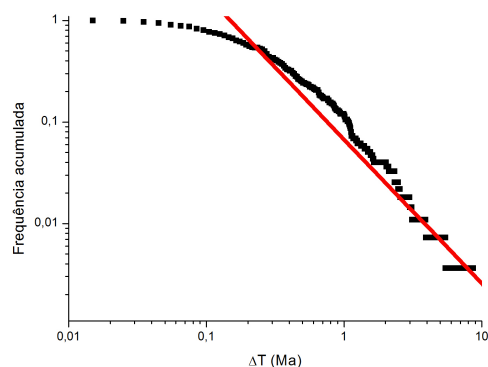


Figura 3.4. Ajustando uma tendência linear em um gráfico Log-Log da distribuição de frequência acumulada dos intervalos de tempo entre reversões consecutivas.

Entretanto, como mostra a figura 3.5 se desprezarmos intervalos de mesma polaridade curtos, teremos uma reta entre Δt e a frequência acumulada.

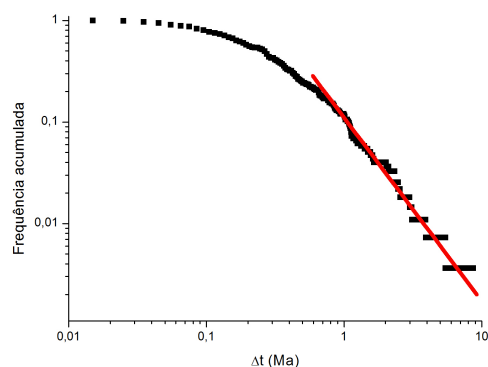


Figura 3.5. Ajustando uma reta em um gráfico Log-Log para grandes valores de Δt .

Longos intervalos de uma mesma polaridade são chamados chrons e têm duração entre 1 milhão e 10 milhões de anos. Vemos no gráfico 3.5 que esses intervalos de tempo estão distribuídos na forma de lei de potência. A possibilidade de que a distribuição de chrons obedeça uma lei de potência tem sido interpretada em diversas contribuições como indicativo de um fenômeno crítico [28] atuando no processo de reversões [27], [29]

3.5 Ajustando os dados a uma distribuição de Tsallis

Até agora vimos que distribuições estatística como lei de potência e Poisson foram proposta para modelar os intervalos de tempo de mesma polaridade. Entretanto não

obtiveram sucesso.

Recentemente, Filippou Vallianatos [30] aplicou a mecânica estatística não-extensiva para estudar as reversões, ele se baseou em Carbone [26] que mostrou em seu artigo que há efeito de memória e interação de longo alcance nas reversões de polaridade. Com isso, Vallianatos propôs que os intervalos de tempo de mesma polaridade seguem uma distribuição de Tsallis. Vallianatos usou a escala de Cande e Kent não revisada que cobre um período de 80 milhões de anos estimando os parâmetros da distribuição $q=1,5$ e $B = 4, 21Ma^{-1}$.

Em adição ao trabalho de Vallianatos, vamos aplicar a distribuição de Tsallis para a escala de Cande e Kent revisada (1995) que cobre um período de 160 milhões de anos. Inicialmente vamos calcular os parâmetros da distribuição, mostrar através do teste de Kolmogorov–Smirnov que a distribuição com os parâmetros calculados se ajusta aos dados e para concluir calcularemos o grau de correlação entre as reversões de polaridade.

Nosso ponto de partida para calcular os parâmetros da distribuição será usar os resultados obtidos por Vallianatos. Como ele estimou $q=1,5$ imaginaremos que o valor de q para os nossos dados estará em torno disso. Sabemos que q está entre 1 e 3, Então, usaremos q entre 1,2 a 1,7. Consideraremos os valores de $q=1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7$. Usando a equação 2.24, para cada valor de q calcularemos um valor de B e com isso teremos uma família de distribuições de Tsallis. Para cada distribuição da família aplicaremos o teste KS (seção 3.3.1) para aceitar ou rejeitar a hipótese de que essa distribuição especificada se ajusta aos dados. Dessa maneira esperamos encontrar quais os valores de q e B que melhor se ajustam aos intervalos de tempo entre reversões consecutivas. Os melhores valores de q e B serão aqueles que minimizarem d_{276} que é a diferença entre a função acumulada empírica dos dados e a distribuição de Tsallis proposta.

- $q=1,3$

Vamos calcular o q -log para $q=1,3$. lembrando que:

$$\ln_q F(\Delta t) = \frac{\Delta t^{1-q} - 1}{1 - q} = -B\Delta t \quad (3.14)$$

$$\ln_{1,3} F(\Delta t) = \frac{\Delta t^{1-1,3} - 1}{1 - 1,3} \quad (3.15)$$

O gráfico entre $\ln_{1,3} F(\Delta t)$ por Δt é mostrado na figura 3.6:

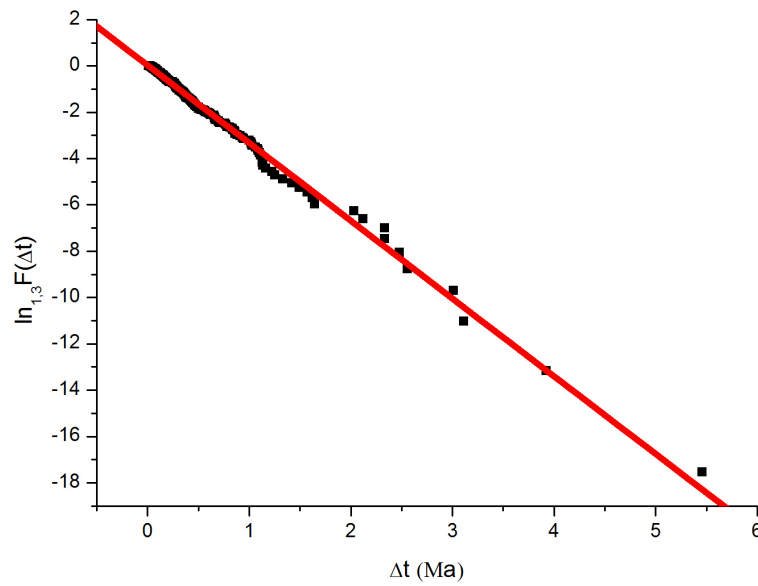


Figura 3.6. Os pontos pretos são o q-log da frequência acumulada dos dados reais. A linha vermelha é o ajuste linear entre o q-log e Δt .

O coeficiente angular da reta é -2,94. Logo temos $B=2,94$.

Logo a distribuição de Tsallis para $q=1,3$ é:

$$F(\Delta t) = \exp_{1,3}(-2,94\Delta t) \quad (3.16)$$

Na figura 3.7 ajustamos aos dados reais a distribuição de Tsallis com os parâmetros calculados.

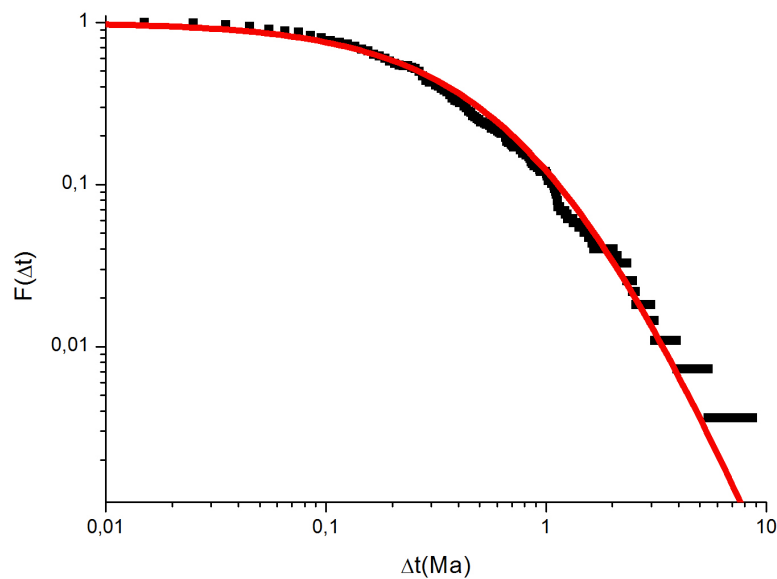


Figura 3.7. Os pontos pretos são a frequência acumulada dos dados reais. A linha vermelha é a distribuição de Tsallis usando $q=1,3$ e $B=2,94$

Vamos aplicar o teste de Kolmogorov–Smirnov a essa distribuição especificada.

- Aplicando o teste KS a distribuição de Tsallis

A ideia do teste é encontrar a máxima distância vertical entre a distribuição empírica $G_n(\Delta t)$ e a distribuição na qual estamos fazendo a hipótese de ajuste aos dados $F_n(\Delta t)$. Utilizando os dados de CK95, em função de Δt o gráfico dessas duas funções é mostrado na figura 3.8:

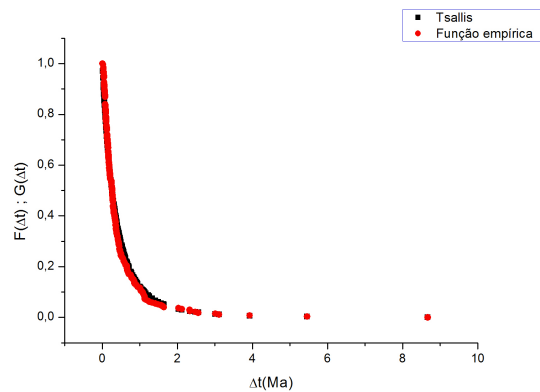


Figura 3.8. Vemos um razoável ajuste entre a distribuição de Tsallis (vermelho) e a distribuição empírica (pretos)

A distância vertical máxima entre essas funções não pode ser maior que $\chi_{276} = 0,08174$. Então para cada Δt calcularemos a diferença entre a distribuição de Tsallis e a distribuição empírica acumulada. Isto é, calcularemos $d_{276} = \sup | G_n(\Delta T) - F_n(\Delta T) |$. O gráfico de d_{276} em função de Δt é mostrado na figura 3.9:

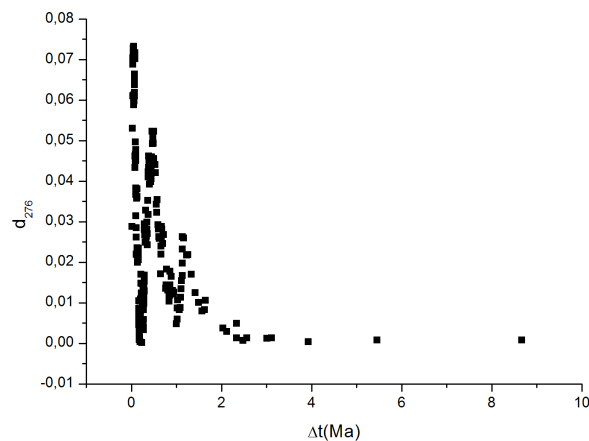


Figura 3.9. Diferença entre as imagens da distribuição de Tsallis e a função empírica

Do gráfico 3.9 vemos que o valor máximo da diferença é $d_{276} = 0,07325$.

Então, $d_{276} < \chi_{276} \implies$ Hipótese aceita.

Logo, com um nível de confiança de 5 por cento podemos aceitar a hipótese de que os intervalos de tempo entre reversões consecutivas seguem uma distribuição de Tsallis com $q=1,3$ e $B=2,94$.

- $q=1,4$

Para $q=1,4$ temos:

$$\ln_{1,4} F(\Delta t) = \frac{\Delta t^{1-1,4} - 1}{1 - 1,4} \quad (3.17)$$

O gráfico entre $\ln_{1,4} F(\Delta t)$ por Δt é mostrado na figura 3.10 :

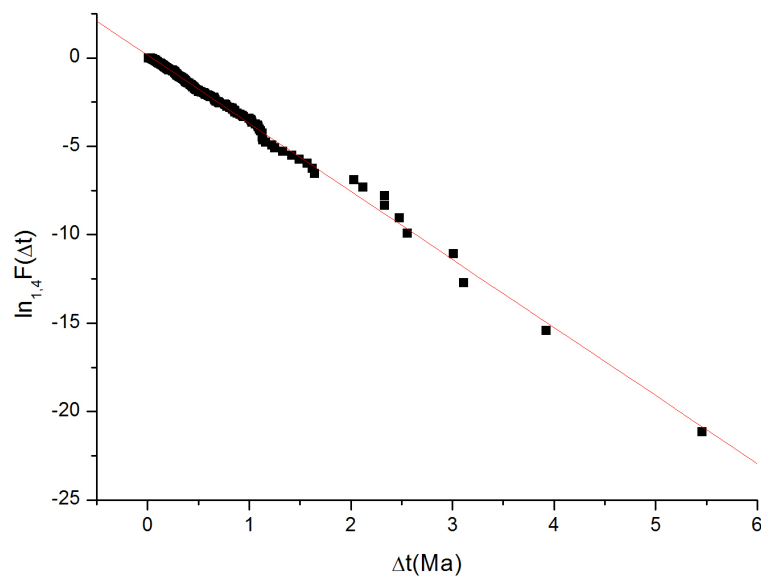


Figura 3.10. q-log da frequência acumulada dos dados. Nesse caso usamos $q=1,4$

O coeficiente angular da reta nos fornece um valor de $B=3,85$.

Logo a distribuição de Tsallis para $q=1,4$ é:

$$F(\Delta t) = \exp_{1,4}(-3,85\Delta t) \quad (3.18)$$

O ajuste dessa distribuição aos dados observados é mostrado na figura 3.11.

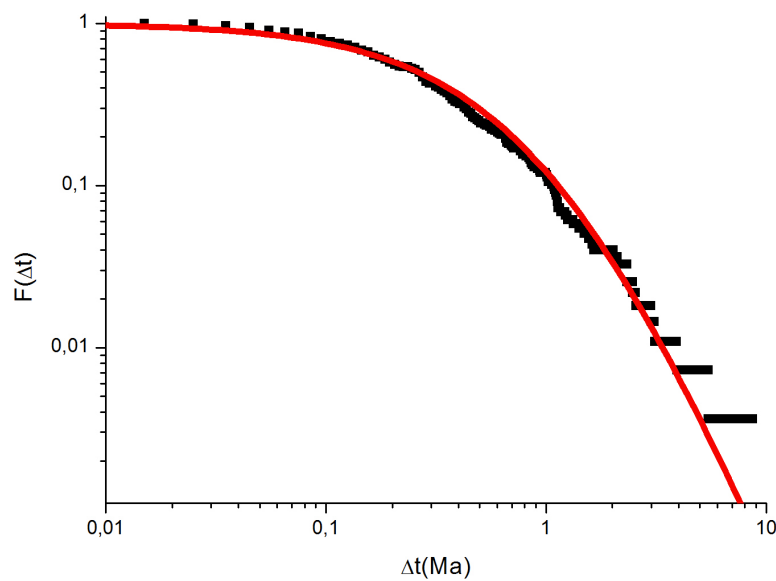


Figura 3.11. Os pontos pretos são a frequência acumulada dos dados reais. A linha vermelha é a distribuição de Tsallis usando $q=1,4$ e $B=3,85$

Utilizando a metodologia descrita na seção acima, testamos a hipótese de que $F(\Delta t) = \exp_{1,4}(-3,85\Delta t)$ é uma possível distribuição que se ajusta aos dados.

- Teste KS para $q=1,4$

O gráfico entre as diferenças entre a distribuição empírica e a distribuição proposta é mostrada na figura 3.12.

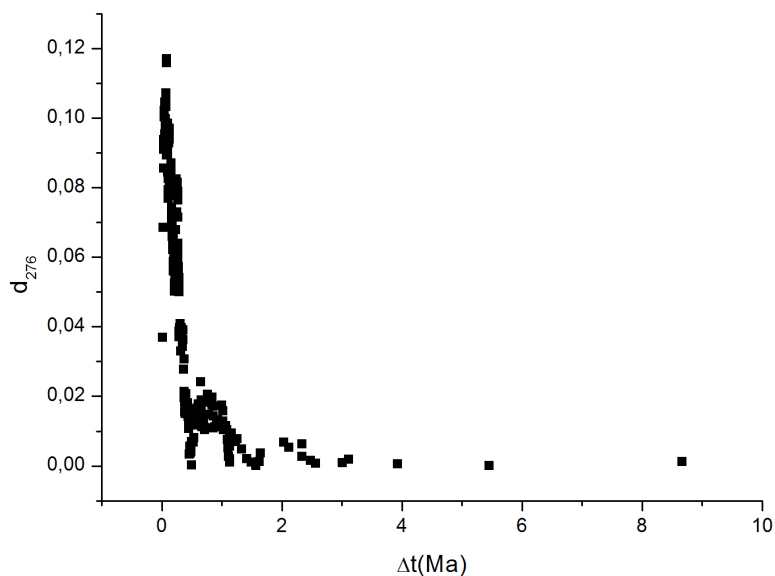


Figura 3.12. Diferença entre as imagens da distribuição de Tsallis e a função empírica para $q=1,4$

O valor máximo da diferença é $d_{276} = 0,11$. Que é maior que o valor crítico $\chi_{276} = 0,08174$. Logo com 95 por cento de confiança podemos rejeitar $F(\Delta t) = \exp_{1,4}(-3,85\Delta t)$ como uma possível função que se ajusta aos dados.

- $q=1,2$

Realizando o mesmo processo para os outros parâmetros, encontramos que para $q= 1,2$ temos $B=2,29$. Como mostrado na figura 3.13 com esses parâmetros encontramos $d_{276} = 0,115$ e com isso o teste KS rejeita a distribuição de Tsallis especificada.

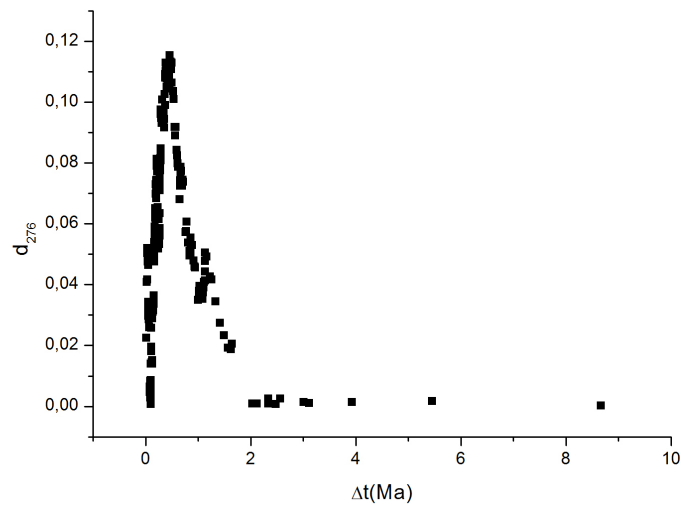


Figura 3.13. Diferença entre as imagens da distribuição de Tsallis com $q=1,2$ e a função empírica

- Outros valores de q

O mesmo processo foi repetido para outros valores de q . Para todos esses casos o teste KS foi aplicado e a hipótese foi rejeitada.

3.5.1 Estimativa do melhor parâmetro q

Com esses resultados podemos concluir que o melhor parâmetro q que se ajusta aos dados está em torno de 1,3. Isso é mostrado no gráfico 3.14, onde temos um gráfico entre d_{276} para alguns valores de q .

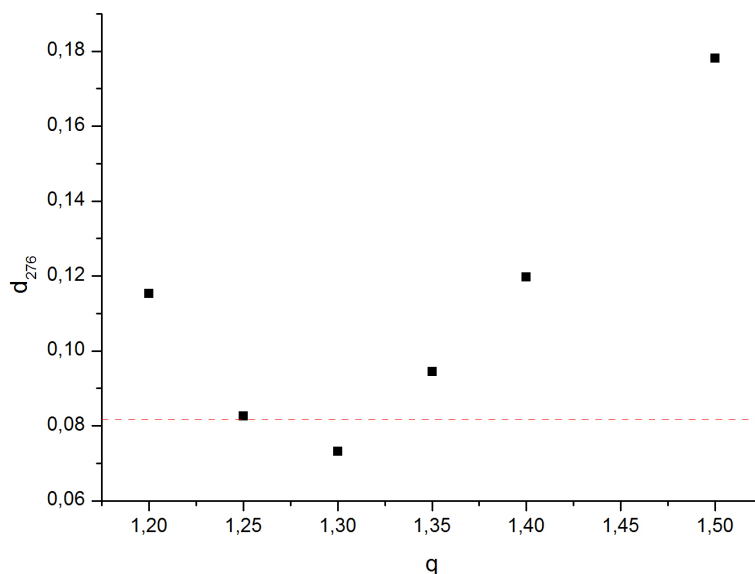


Figura 3.14. Diferença entre as imagens da distribuição de Tsallis com a função empírica em função do parâmetro q , a linha tracejada é o valor limite do teste

Em torno de $q=1,3$, observa-se um mínimo local da diferença entre a distribuição proposta e a distribuição empírica.

3.5.2 Consequências sobre o entendimento das reversões

O possível fato dos intervalos de mesma polaridade seguirem a uma distribuição de Tsallis nos traz novos conhecimentos sobre o entendimento das reversões. Como já discutido no Capítulo 2, sistemas que seguem a distribuição de Tsallis são sistemas em que vale a mecânica estatística não extensiva. Além disso, são sistemas em que há efeito de memória e interação de longo alcance. Isto quer dizer uma reversão ocorrida há 10 milhões de anos pode estar relacionada com uma reversão que ocorra no futuro. Se de fato os intervalos de tempo de mesma polaridade, seguem a estatística de Tsallis podemos ter correlação entre as reversões. Nessa ideia vamos verificar se os dados estão correlacionados e calcular o seu grau de correlação

3.6 Correlação dos dados

Vamos usar o método de detrended fluctuation analysis (DFA) para mostrar que há correlação de longo alcance entre os intervalos de tempo de mesma polaridade e dessa forma mostrar que de fato a estatística que rege os processos das reversões é a estatística de Tsallis. Este método, capaz de quantificar as correlações de longo alcance em séries temporais não estacionárias, foi introduzido por Peng et al. [31] para análise de sequências gênicas de DNA e vem sendo amplamente aplicado em diversas áreas.

3.6.1 O método DFA

O algoritmo DFA é um método de análise de escala usada para estimar as correlações de longo alcance temporal na forma de lei de potência. O método se inicia ao considerarmos a série que representa o intervalo de tempo de mesma polaridade representado por $X(i)$, com $i=1\dots N$, Onde N é o número de elementos da série. A série deve ser integrada. Assim ela se torna:

$$Y(i) = \sum_{k=1}^i (X(k) - \langle X \rangle) \quad (3.19)$$

Em que $\langle X \rangle$ é a média dos valores de $X(i)$. A série integrada é então dividida em janelas de tamanho n . Indexando cada janela pelo índice j , é feito um ajuste polinomial de ordem m aos dados, representando a tendência dos dados. No nosso caso aplicaremos um ajuste linear. Depois, subtrairemos a série integrada de sua tendência local.

$$W_n(i) = Y(i) - Y_j(i) \quad (3.20)$$

Onde, $Y_j(i)$ é o ajuste linear da janela j .

A medida da flutuação da série para o tamanho n dos intervalos usados é mensurada por:

$$F_{dfa} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [Y(i) - Y_j(i)]^2} \quad (3.21)$$

F_{dfa} estará relacionado com o tamanho da janela, em geral ele aumenta quando aumentamos o tamanho da janela, dessa forma temos a seguinte relação entre F_{dfa} e o tamanho da janela:

$$F_{dfa} \sim n^h \quad (3.22)$$

Onde h é o expoente hurst. Esse expoente é calculado através do coeficiente angular no gráfico log-log entre F_{dfa} e n . O expoente hurst tem fundamental importância sobre o grau de correlação da série. Dependendo do seu valor teremos:

- Série não correlacionada: $h = 0.5$
- Série anti correlacionada: $0 < h < 0.5$

Indica uma série que comuta entre os valores máximos e mínimos em pares adjacentes, o que significa que um valor na série alto (baixo) tem grande probabilidade de ser seguido por um valor baixo (alto).

- Correlação temporal de longo alcance na forma de lei de potência: $0.5 < h < 1$

Indica uma série com autocorrelação positiva, ou seja, tanto que um alto (baixo) valor na série tem maior probabilidade de ser seguido por outro valor alto (baixo).

Para ter uma maior certeza do grau da correlação ou anti correlação da série vamos embaralhar a série e calcular novamente o expoente hurst. Desse modo esperamos que o

grau de correlação da série diminua.

3.6.2 Resultados

Para análise dos dados, foi utilizado o algoritmo DFA de código aberto em Matlab. O código encontra-se disponível na página <http://ideas.repec.org/c/wuu/hocode/m11002.html>.

O tamanho da janela variou entre $20 < n < 140$. O gráfico da função de flutuação é mostrado na figura 3.15.

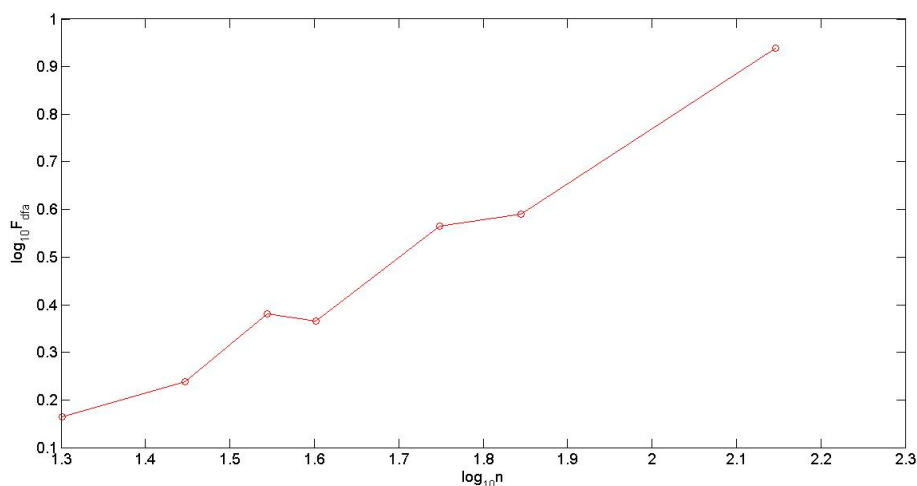


Figura 3.15. Gráfico da flutuação em função do tamanho da janela usada para calcular a flutuação, a série foi usada na ordem cronológica e mostrou $h=0,92$

O expoente hurst encontrado foi 0.9244 isso mostra que há uma forte correlação entre os intervalos de tempo de mesma polaridade. Isso vem a reforçar a hipótese de que estes intervalos de tempo seguem um distribuição de Tsallis.

Na figura 3.16 encontra-se o gráfico da série embaralhada:

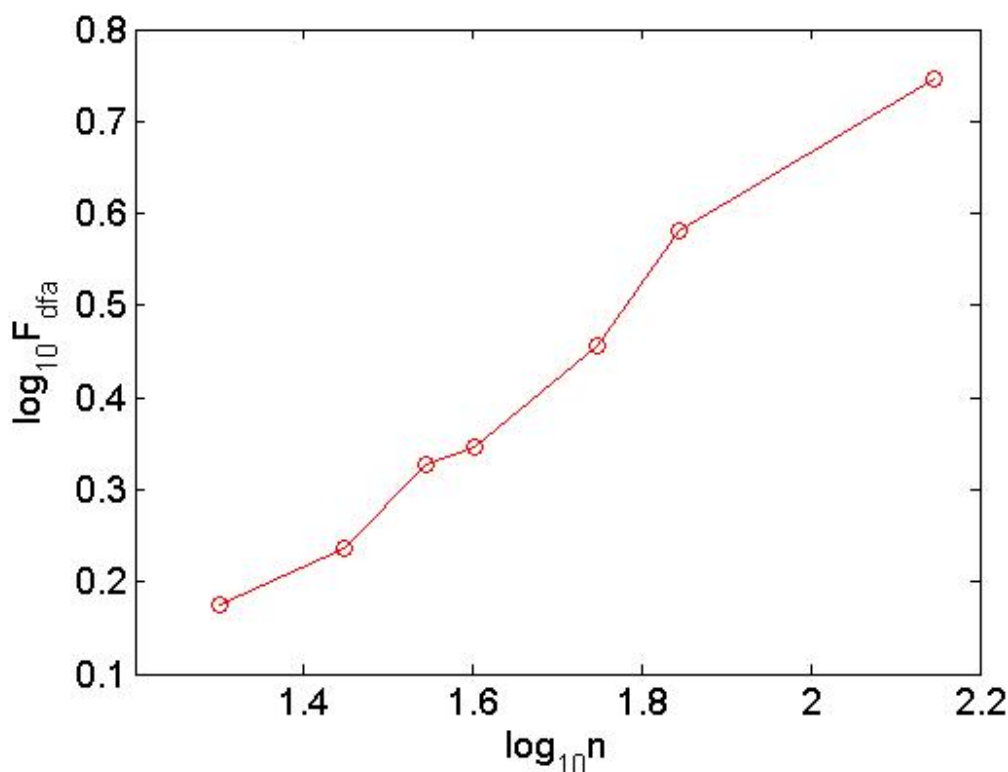


Figura 3.16. Gráfico da flutuação em função do tamanho da janela usada para calcular a flutuação, neste caso a série foi embaralhada e mostrou $h=0,7$

Nesse caso encontramos $h=0,7$. Mostrando que ao embaralharmos a série o grau de correlação entre esses intervalos diminui, como deveria acontecer.

3.7 Conclusão e Perspectivas futuras

Um estudo estatístico foi realizado sobre a distribuição dos intervalos de tempo de mesma polaridade. Mostramos que há na literatura estudos que propõem que esses intervalos de tempo seguem uma distribuição de Poisson. Testes estatísticos aplicados a essa distribuição rejeitam a hipótese de ajustamento. Outra distribuição proposta foi a lei de potência, entretanto, como mostrado nesse trabalho, ela só se ajusta para grandes valores de intervalo de tempo. Recentemente foi proposta a distribuição de Tsallis como uma possível estatística. Este trabalho mostrou através de um teste de hipótese que esta distribuição se ajusta aos dados e calculou seus parâmetros. Como resultado encontramos que a melhor distribuição de Tsallis que se ajusta aos dados é do tipo:

$$F(\Delta t) = \exp_{1,3}(-2,94\Delta t) \quad (3.23)$$

Com isso, calculamos o grau de correlação dos comprimentos de tempo de mesma polaridade. O expoente hurst da série foi 0,92 indicando uma forte correlação entre os tempos de polaridade normal e reversa.

- Perspectiva futura

Os modelos atuais que simulam as reversões produzem como resultado distribuição de lei de potências para os comprimentos de intervalos de polaridade [32] [33]. Nosso objetivo futuro será criar um modelo computacional para simular as reversões que produzam como resultado a distribuição de Tsallis para os comprimentos de intervalos de polaridade.

Referências bibliográficas

- [1] G.A. Hartmann. A Anomalia Magnética do Atlântico Sul: Causas e Efeitos. Master's thesis, USP/IAG, 2005.
 - [2] R.T. Merrill and P.L. Mcfadden. Paleomagnetism and the nature of the geodynamo. *Science.*, 248:345–350, 1990.
 - [3] A.A.G. Cortines. Dinâmica intradiária do mercado de ações brasileiro. Master's thesis, Puc-Rio, 2005.
 - [4] W. Teixeira, F. Taioli, T. Fairchild, and M.C.M Toledo. *Decifrando a Terra*. Companhia Editora Nacional, 2 edition, 2008.
 - [5] R.A. Langel. The main field, in geomagnetism. *Academic Press, London.*, 1:249–512, 2003.
 - [6] R.F. Butler. *Paleomagnetism: Magnetic Domains to Geologic Terranes*. 2 edition, 1992.
 - [7] B. Brunhes. Recherches sur le direction d aimantation des roches volcaniques. *J. Phys.*, 5:707–724, 1906.
 - [8] A. Cox, R.R Doeel, and G.B. Dalrymple. Geomagnetic polarity epochs and pleistocene geochronometry. *Nature.*, 198:1049 – 1051, 1963.
 - [9] I. McDougall and D.H. Tarling. Dating of polarity zones in the hawaiian islands. *Nature.*, 200:54 – 56, 1963.
 - [10] N.D. Opdyke and J.E.T. Channel. *Magnetic Stratigraphy*. 1996.
 - [11] S. Cande and D.V. Kent. A new geomagnetic polarity time scale for the late cretaceous and cenozoic. *J. Geophys.*, 97:13917 – 13951, 1992.
-

-
- [12] S. Cande and D.V. Kent. A new geomagnetic polarity time scale for the late cretaceous and cenozoic. *J. Geophys.*, 100:6093, 1995.
- [13] S. Ross. *A first course in probability*. Wiley, 8 edition, 2009.
- [14] P.L McFadden and R.T Merrill. Asymmetry in the reversal rate before and after the cretaceous normal polarity superchron. *Earth. Planet.*, 149:43–47, 1996.
- [15] Cinna Lomnitz. *Fundamentals of Earthquake*. Prentice Hall, 1 edition, 1994.
- [16] B. Gutenberg and R.F. Richter. Frequency of earthquakes in california. *Bull. Seismol. Soc.*, 34:185, 1944.
- [17] D. Sornette. *Critical Phenomena in Natural Sciences: Chaos, Fractals, Self organization and Disorder: Concepts and Tools*. Springer, Berlim, 2000.
- [18] C. Tsallis. *Introduction to Non-extensive Statistical Mechanics: Approaching a Complex World*. Springer, Berlim, 2009.
- [19] C. Tsallis. Possible generalization of boltzmann-gibbs statistics. *J. Stat. Phys.*, 52:479, 1988.
- [20] R.T. Merrill and M.W. McElhinny. *The magnetic field of the Earth*. Academic Press, New York, 1996.
- [21] G.W. Corder and D.I. Foreman. *Nonparametric Statistics for Non-Statisticians: A Step-by-Step Approach*. Wiley, 2009.
- [22] P. Massart. The tight constant in the dvoretzky-kiefer-wolfowitz inequality. *Ann. Prob.*, 18:1269–1283, 1990.
- [23] M.A. Stephens. Edf statistics for goodness of fit and some comparisons. *Journal of the American Statistical Association*, 69:730–737, 1990.
- [24] J.D. Phillips, R.J. Blakely, and A. Cox. Independence of geomagnetic polarity intervals. *Geophys. J. Int.*, 43:747–754., 1975.
- [25] C. Constable. On rates of occurrence of geomagnetic reversals. *Phys. Earth Planet. Int.*, 118:181 – 193., 1999.
-

-
- [26] V. Carbone, L. Sorriso-Valvo, A. Vecchio, F. Lepreti, P. Veltri, P. Harabaglia, and I. Guerra. The clustering of polarity reversals of the geomagnetic field. *Phys. Rev. Lett.*, 96:12, Apr 2006.
- [27] A.R.T. Jonkers. Long-range dependence in cenozoic reversal record. *Phys. Rev. A*, 135:253–266, 2003.
- [28] P. Bak. *How Nature Works: The Science of Self-Organized Criticality*. Springer, Berlin., 1996.
- [29] P.S. Naidu. Paleomagnetism and the nature of the geodynamo. *Journal of Geophysical Research.*, 80:803–806, 1976.
- [30] F. Vallianatos. A non-extensive statistical physics approach to the polarity reversals of the geomagnetic field. *Phys. A.*, 390:1773–1778, Jan 2011.
- [31] C.-K. Peng, S.V. Buldyrev, S. Havlin, M. Simons, H.E. Stanley, and A.L. Goldberger. Mosaic organization of dna nucleotides. *Physical Review E, United States.*, 49:1685–1989., 1994.
- [32] V.H.A. Dias, J.O.O. Franco, and A.R.R. Papa. Simulation of geomagnetic reversals through magnetic critical models. *Braz. J. Phys.*, 38:1., 2008.
- [33] A.R.R. Papa, M.A.E. Santo, C.S. Barbosa, and D. Oliva. A bi-stable soc model for Earth’s magnetic field reversals. *Physics Letters A*, 377:443–447., 2013.
-